CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

MICHEL HERVÉ

L'œuvre de Gaston Julia

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 2 (1981), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1981__2__1_0>

L'OEUVRE DE GASTON JULIA[1]

par Michel HERVÉ*

Une brève biographie s'impose. Né à Sidi-bel-Abbès en Février 1893, élève du lycée d'Oran jusqu'au baccalauréat obtenu en 1910, Julia fut reçu premier à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Normale Supérieure en 1911, donc après un an seulement de Mathématiques spéciales, au lycée Janson de Sailly. Mobilisé en Août 1914, envoyé au front dans les premiers jours de 1915, il reçut le 25 janvier, dans le premier combat auquel il participait, une cruelle blessure en plein visage, dont il devait souffrir toute sa vie.

Il fut révélé au monde mathématique par sa thèse en 1917, par le grand prix des Sciences mathématiques en 1918[2] ; le rapprochement des dates montre que ces deux mémoires, entièrement indépendants l'un de l'autre, furent en grande partie composés pendant les traitements exigés par sa blessure, et menés avec les moyens médicaux de l'époque : quelle force de caractère ! Julia fut maître de conférences à la Sorbonne dès 1920, membre de l'Institut en 1934. Sa vieillesse fut endeuillée par la mort de Mme Julia, fille d'Ernest Chausson ; quand il ne fut plus en état de vivre seul, il se retira aux Invalides, où il mourut en Mars 1978.

Comme il l'a écrit lui-même dans sa notice académique[3], il trouvait le délassement dans la multiplicité de son labeur. Le professeur, outre ses cours à la Sorbonne et à l'X, anima pendant six ans un Séminaire à l'E.N.S. suivant la formule nouvelle à l'époque, et demeurée assez rare, du thème annuel[4] ; quelques précisions suffiront à montrer à quel point ce séminaire a contribué, d'une part, à faire connaître les jeunes qui allaient illustrer les mathématiques françaises, d'autre part à en développer de nouvelles branches, à cette époque totalement ignorées par les enseignements magistraux.

1^e^ année (1933-1934) : Théorie des algèbres et des groupes ; parmi les conférenciers : E. Cartan, Chevalley, Dieudonné, Dubreil, de Possel, Weil. 2^e^ année (1934-1935) : Espace de Hilbert ; parmi les conférenciers non encore cités : H. Cartan, Delsarte, Leray, von Neumann. 3^e^ année : Topologie ; cette fois, donnons plutôt le sommaire : Espaces topologiques, topologie combinatoire, groupes d'homologie, dualité, degré topologique, points fixes, recouvrements et groupe fondamental. 4^e^ année (1936-1937) : Travaux d'E. Cartan. 5^e^ année (1937-1938) : Fonctions algébriques, avec des exposés de Pisot sur le théorème de Riemann-Roch et sur la fonction ζ d'un corps de fonctions algébriques de caractéristique p, de Dubreil sur le théorème de Nöther. 6^e^ année (1938-1939) : Calcul des variations ; parmi les conférenciers : Dugué, Fortet, Kuntzmann,

* Conférence donnée le 22 novembre 1978 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

Leray, d'Orgeval, Pisot, Roger.

N'oublions pas les ouvrages d'enseignement : Eléments de géométrie infinitésimale, cours de cinématique, exercices d'analyse (4 volumes), de mécanique, introduction mathématique aux théories quantiques (en fait, théorie de l'espace de Hilbert)[5]. Ces recueils d'exercices ne sont pas des compilations : Julia composa lui-même la plupart des énoncés lorsqu'il était répétiteur à l'X, avant d'y être professeur. L'appel fréquent à l'intuition géométrique est un trait commun à ces ouvrages d'enseignement et à l'oeuvre de savant.

Celle-ci compte plus de 150 publications, qui se prêtent à une grossière classification chronologique : Théorie des nombres en 1916-1917 ; fonctions analytiques de 1918 à 1932 ; espace hilbertien de 1938 à 1949. A ce classement n'échappent que quelques travaux sur certaines équations de Fredholm (1921), la quasi-analyticité (1925), et de courtes notes sur des problèmes rencontrés par Julia dans son enseignement.

Théorie des nombres. C'est essentiellement la thèse, publiée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences et intitulée "Etude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes, ou à indéterminées conjuguées"[6].

Pour réduire une forme binaire de degré $n = \mu + 2\nu$ à indéterminées réelles x,y et à coefficients réels :

$f(x,y) = m(x-a_1y)\dots(x-a_\mu y)(x-b_1y)(x-\bar{b}_1y)\dots(x-b_\nu y)(x-\bar{b}_\nu y)$, $a_i \in \underline{R}$, $\operatorname{Im} b_j \geqslant 0$,

Hermite[7] lui appliquait une substitution modulaire $S(t,u)$ transformant la forme quadratique

$$q_{t,u}(x,y) = \sum_{i=1}^{\mu} t_i^2(x-a_iy)^2 + 2\sum_{j=1}^{\nu} u_j^2(x-b_jy)(x-\bar{b}_jy)$$

en

$$q_{t,u}\circ S_{t,u}(X,Y) = AX^2 + 2\,BXY + CY^2$$

avec $0 < A \leqslant C$, $2|B| \leqslant A$. Soit alors $\zeta(t,u)$ la racine appartenant au demi-plan de Poincaré de l'équation $q_{t,u}(\zeta,1) = 0$: quand t et u varient, $\zeta(t,u)$ décrit, dans le demi-plan, l'enveloppe Poincaré-convexe de $\{a_i,b_j\}$.

Julia remarque que la substitution modulaire $S(t,u)$ employée par Hermite est celle qui envoie $\zeta(t,u)$ dans le domaine fondamental $\{w \in \underline{C} : \operatorname{Im} w > 0 , |\operatorname{Re} w| \leqslant \frac{1}{2} , |w| \geqslant 1 \}$ du groupe modulaire, et tire de cette interprétation géométrique de nombreuses conséquences. La même idée s'applique à une forme binaire de degré n à indéterminées complexes x,y et coefficients complexes,

$$f(x,y) = m(x-c_1y)\dots(x-c_ny) :$$

la forme quadratique $q_{t,u}$ est remplacée par la forme hermitienne

$h_t(x,y) = \sum_{j=1}^{n} t_j^2\ |x-c_j y|^2$, $\zeta(t,u)$ par le point $\zeta(t) \in \underline{R}^3$, de côte $\geqslant 0$, tel que la sphère-point $\zeta(t)$ coupe le plan rapporté à la variable complexe w suivant le cercle imaginaire $h_t(w,1) = 0$, et le groupe modulaire remplacé par celui de Picard, qui prolonge au demi-espace le groupe des substitutions modulaires à coefficients entiers complexes.

<u>L'itération des fonctions rationnelles</u> fait l'objet du mémoire de Julia au <u>Journal de Mathématiques</u> de 1918[8], qui lui valut le grand prix des Sciences mathématiques, à l'issue d'un concours ouvert par l'Académie sur le thème "Examen du domaine entier des valeurs que peuvent prendre les variables" : l'état de la question à l'époque explique bien le choix de ce thème[9].

Soit f méromorphe sur un voisinage de α dans $\underline{\bar{C}} = \underline{C} \cup \{\infty\}$: α est point fixe de f si $f(\alpha) = \alpha$; le multiplicateur de f en α est alors $s = f'(\alpha)$ si $\alpha \neq \infty$, $s = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{f(z)}$ si $\alpha = \infty$; le point fixe α est attractif si $|s| < 1$, indifférent si $|s| = 1$, répulsif si $|s| > 1$. Dans le 1^er^ cas, il existe un ouvert $\delta \ni \alpha$ tel que $f(\delta) \subset \delta$, de sorte que la suite des itérées f_n est définie sur δ ; si $\alpha \neq \infty$, $0 < |s| < 1$, la suite $(f_n - \alpha)/s^n$ a pour limite une solution y de l'équation de Schröder $y o f = s y$ vérifiant $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 1$; si $\alpha \neq \infty$, $s = 0$, il faut considérer le 1^er^ terme non nul $\sigma^{k-1}(z-\alpha)^k$ du développement taylorien de $f(z)-\alpha$ autour de α et la détermination de $\frac{1}{\sigma}[\sigma(f_n-\alpha)]^{1/k^n}$ dont le développement commence par $z-\alpha$, car celle-ci a pour limite une solution y de l'équation de Böttcher $y o f = \sigma^{k-1} y^k$ vérifiant encore $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 1$. Dans le 2^e^ cas, supposons $s = 1$, $\alpha = \infty$, $f(z) = z + a + \frac{b}{z} + \dots$, $a \neq 0$: l'ouvert δ tel que $f(\delta) \subset \delta$ admet seulement α comme point-frontière, la suite $f_n - na - \frac{b}{a}\log n$ a pour limite une solution de l'équation d'Abel $y o f = y + a$. Le caractère local de ces résultats n'a pas besoin d'être souligné ; seul Fatou, en 1906[10], avait poussé assez loin l'étude de l'exemple $f(z) = z^k/(z^k+2)$ (k entier $\geqslant 2$) pour montrer que la suite des itérées converge vers 0 sur le complémentaire d'un ensemble parfait totalement discontinu : toute étude générale manquait.

L'idée maîtresse du travail de Julia est d'associer à toute fonction rationnelle f un ensemble J invariant par f : $f(z) \in J$ équivaut à $z \in J$, caractérisé par l'une ou l'autre des propriétés suivantes, équivalentes en dehors du seul cas où f est une homographie à un seul point fixe :

(i) J est l'adhérence de l'ensemble des points fixes répulsifs des itérées de f ;

(ii) $w \in J$ si et seulement si Card $[\underline{\bar{C}} \setminus \bigcup_{n \in \underline{N}^\star} f_n(W)] \leqslant 2$ quel que soit W voisinage de w ;

(iii) $\complement J$ est le plus grand ouvert où la famille (f_n) est "normale", c'est-à-dire relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme des applications de $\underline{\bar{C}}$ dans $\underline{\bar{C}}$.

J est vide si et seulement si f est une homographie à deux points fixes indifférents (forme canonique : $z \mapsto e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \underline{R}$), réduit à un point si et seulement si f est une homographie à un point fixe attractif, un répulsif (forme canonique : $z \mapsto sz$, $|s| \neq 1$). Le cas des homographies étant écarté : J est parfait non vide, peut être $\underline{\bar{C}}$ lui-même comme dans l'exemple de Lattès (1918)[11] $f(z) = (z^2+1)^2/4z(z^2-1)$, ou totalement discontinu comme dans l'exemple ci-dessus de Fatou, ou homéomorphe à une circonférence comme dans un autre exemple de Fatou $f(z) = \frac{1}{2}(z+z^2)$ approfondi par Julia ; $\complement J$ peut donc être connexe, ou avoir exactement deux composantes connexes, mais peut aussi en avoir une infinité comme dans l'exemple $f(z) = \frac{1}{2}(3z-z^3)$ de Julia. Quant aux valeurs exceptionnelles figurant dans (ii), elles n'existent que dans des cas très particuliers : f transmuée par une homographie, soit d'un polynôme de degré $\geqslant 2$ autre qu'un monôme, soit d'un monôme de degré $\geqslant 2$ ou $\leqslant -2$.

C'est encore sur <u>l'ensemble de Julia</u> J que reposent deux importants mémoires de 1922 et 1923 aux <u>Annales de l'E.N.S.</u> Dans le premier, sur la permutabilité de deux fonctions rationnelles f_1, f_2[12], une condition nécessaire pour que $f_1 o f_2 = f_2 o f_1$ est que J_1 et J_2 coïncident avec un ensemble qui doit être, soit $\underline{\bar{C}}$ lui-même, soit un arc de circonférence ou segment de droite (la démonstration de ce dernier point s'appuie sur un travail de Fatou (1920)[13] poursuivant l'étude de l'ensemble J). Dans le second mémoire, sur une classe d'équations fonctionnelles[14], il s'agit des équations de la forme $y o f_1 = f_2 o y$ (où les données f_1, f_2 sont rationnelles, l'inconnue y méromorphe), incluant les équations de Schröder, Böttcher, Abel citées plus haut : une solution méromorphe sur un ouvert rencontrant J_1 ne peut avoir d'autre point singulier que les valeurs exceptionnelles figurant dans la propriété (ii) pour f_1, autrement dit, ou bien elle est rationnelle et $y(J_1) = J_2$, ou bien elle a un ou deux points singuliers et $y(J_1) \subset J_2$; or $y(J_1) \subset J_2$ est impossible si f_2 est une homographie sans que f_1 en soit une, donc dans ce cas une solution ne peut être méromorphe que sur un ouvert disjoint de J_1. On avait reconnu auparavant que les solutions des équations de Schröder et Abel avaient un ensemble parfait de singularités, tandis que l'équation de Poincaré, obtenue en permutant f_1 et f_2 dans celle de Schröder, a des solutions méromorphes sur $\underline{C}$[15] : c'est donc Julia qui donna l'explication de ce fait.

On peut encore énoncer la propriété (iii) ci-dessus en disant que J est <u>l'ensemble de non normalité</u> de la famille (f_n) : c'est une idée propre à Julia de faire jouer à cet ensemble un rôle majeur, et il en a tiré d'autres applications encore plus remarquées. Dans trois mémoires aux <u>Annales de l'E.N.S.</u> (1919, 1920, 1921) intitulés "Quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes"[16], il l'appliquait à la famille des fonctions $f_t : z \mapsto f(tz)$, où f est méromorphe sur $\underline{C}$ et t complexe décrit un ensemble T non borné : l'ensemble J de non normalité, qui contient toujours 0, a cette propriété que tout point de J est, pour toute valeur w sauf 2 au plus, limite d'une suite z_n/t_n avec $f(z_n) = w$, $t_n \in T$, z_n et $t_n \to \infty$; la connaissance de l'ensemble J , associé maintenant au couple (f,T) , approfondit le théorème de Picard[17] en précisant la disposition des zéros de $f-w$.

Le 2^e mémoire porte donc sur l'ensemble J dans le cas $T = \{ s^n : n \in \underline{N} \}$, $|s| > 1$: alors $sJ = J$; si f a au moins une valeur asymptotique, en particulier si f est entière, J est $\neq \{ 0 \}$, donc contient un ensemble dénombrable, et l'exemple $f(z) = \prod_{n \in \underline{N}} (1 - z/s^n)$, où $J = \{s^k : k \in \underline{Z}\}$, montre que J peut être dénombrable si f n'a qu'une valeur asymptotique. Mais, si f en a au moins deux, J rencontre tout lacet d'indice non nul en 0 ; s'il existe deux valeurs distinctes que f ne prend qu'un nombre fini de fois, J est parfait ; pour la fonction σ de Weierstrass, $J = \underline{\bar{C}}$.

Reste à savoir s'il y a des couples (f,T) pour lesquels $J = \{0\}$, et c'est Ostrowski (<u>Math. Zeit.</u>,1926)[18] qui répondit à cette question. D'une part $J = \{0\}$ pour un couple (f,T) entraîne $J = \{0\}$ pour les couples $(f,\{s^n\})$, $|s| > 1$, ce qui permet de se limiter au cas particulier ci-dessus considéré par Julia ; d'autre part $J = \{0\}$ entraîne f quotient de deux fonctions entières d'ordre 0 dont les zéros sont liés par des relations assez compliquées : bornons-nous à dire que

$$f(z) = \prod_{n \in \underline{N}} \frac{1-z/s^n}{1+z/s^n}$$

est la fonction la plus simple pour laquelle $J = \{0\}$.

Cette incursion dans les travaux d'Ostrowski montre la qualité des recherches suscitées par l'oeuvre de Julia, et cela aussi est à mettre au crédit d'un mathématicien. Le retentissement fut encore plus grand lorsque Julia appliqua ses idées aux <u>fonctions de plusieurs variables complexes</u> (<u>Acta math.</u>,1926)[19] ; dans ce cas, il montra que l'ensemble J de non normalité d'une famille a les mêmes propriétés que celui des points singuliers d'une fonction, à savoir : le théorème de continuité de Hartogs, la surharmonicité de $y \mapsto \log R(y)$ lorsque l'inégalité $|x| < R(y)$ définit un domaine de normalité dans $\underline{C}^2$, la condition de Levi lorsque la frontière de ce domaine est de classe $\mathscr{C}^2$. Ces résultats faisaient conjecturer que les domaines de normalité des familles coïncident avec les domaines d'existence des fonctions : cette conjecture s'appela problème de Julia jusqu'aux réponses affirmatives de Cartan-Thullen (*Math. Ann.*,1932)[20] pour les fonctions holomorphes, de Behnke-Stein (*Math. Ann.*,1938)[21] pour les fonctions méromorphes.

L'espace de Hilbert. Cette partie de l'oeuvre de Julia mériterait à elle seule une conférence, que Jacques Dixmier[22] ferait bien mieux que moi ; je me borne donc à dire qu'il l'aborda, non pas en algébriste comme beaucoup de ses prédécesseurs dans la théorie, mais en analyste et en géomètre.

Le géomètre inspire constamment les premiers articles, par exemple : "Sur la résolubilité des systèmes d'équations linéaires dans un espace hilbertien" (*Journal de Math.*,1938). Le spécialiste de l'analyse complexe annonce clairement la couleur dans "La théorie des fonctions et la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien" (*Journal de Math.*,1943) : pour lui, les opérateurs bornés jouent le rôle des fonctions entières, les opérateurs non bornés celui des séries entières à rayon de convergence fini et non nul ; le théorème de Banach sur les suites simplement convergentes de formes linéaires se compare au lemme d'Osgood sur les suites simplement convergentes de fonctions analytiques, etc... L'exemple suivant illustre le succès de cette approche d'analyste : si l'opérateur A est fermé non borné, l'application $D(A) \ni x \mapsto y = Ax \in R(A)$ peut être uniformisée par $x = Bz$, $y = Cz$, où B et C sont des opérateurs bornés.

NOTES DE LA REDACTION

1 Les Oeuvres de Gaston Julia ont été publiées en six volumes par M. Hervé (I(1968), II(1968), III(1969), IV(1969) en collaboration avec J. Dixmier, V(1970), VI(1970), Paris(Gauthier-Villars)). On y trouve les précieux *Commentaires sur les travaux rassemblés dans les volumes I et II* (vol.I,p.89-104), *Commentaires sur les travaux d'analyse réunis dans les volumes III et IV* (vol.III,p.1-14) et *Aperçu des travaux dans le volume V* (vol.V,p.1-3) de M. Hervé et *Commentaires sur les travaux de G. Julia relatifs à l'espace hilbertien* (vol.IV,p.211-218) de J. Dixmier.

2 *Etude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes ou à indéterminées conjugées* (Mémoires Acad.Sci.,(2), 55(1917), 1-293) = Oeuvres, vol.V, p.51-342 ; *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* (Journal de Math., (8), 1(1918), 47-245) = Oeuvres, vol.I,p.121-319.

3 P.87 de sa *Notice sur les travaux scientifiques*, Oeuvres, vol.I, p.1-87.

4 Voir à ce sujet l'*Allocution* de C. Chevalley, p.325-330 du vol.VI des Oeuvres de Julia, ainsi que le *Commentaire* d'André Weil, p.534 du vol.I de ses Oeuvres

scientifiques, New York(Springer), 1980.

On peut trouver à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré les volumes de ce *Séminaire de Mathématiques.*

5 *Eléments de géométrie infinitésimale,* Paris(Gauthier-Villars), 1927 ; *Cours de cinématique,* Paris(Gauthier-Villars), 1928 (G. Julia écrit dans sa préface, datée de juillet 1927, que ce cours a été rédigé "par un des meilleurs élèves de l'Ecole Normale Supérieure, M. J. Dieudonné") ; *Exercices d'analyse,* Paris(Gauthier-Villars), I(1928), II(1933), III(1933), IV(1935) ; H.Beghin et G. Julia, *Exercices de mécanique,* Paris (Gauthier-Villars), 1931 ; *Introduction mathématique aux théories quantiques,* Paris (Gauthier-Villars), 1938.

6 Voir la note 2.

7 G. Julia s'est inspiré, en particulier, dans ce travail du mémoire d'Hermite *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres* (Journal reine angew. Math., 41(1851), 191-216) = Oeuvres, t.I, p.164-192, Paris(Gauthier-Villars), 1905.

8 Voir la note 2.

9 Sur le *Grand prix des Sciences mathématiques* voir le rapport de Picard et Humbert dans les Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.167(1918), p.811-814. Le passage suivant de ce rapport nous semble intéressant (p.814) :

"Au fur et à mesure de sa recherche, M. Julia avait consigné ces résultats dans des plis cachetés, déposés à l'Académie ; postérieurement au dépôt du dernier pli, et en décembre 1917, un géomètre connu, M. Fatou, auquel la théorie de l'itération devait déjà d'intéressants progrès dans une voie nouvelle, énonçait aux Comptes Rendus [[P. Fatou, *Sur les substitutions rationnelles,* t.165(1917), p.992-995]] la plus grande partie des mêmes résultats, qu'il avait obtenus de son côté et par la même méthode, en utilisant, lui aussi, les propriétés des suites normales de M. Montel : ce n'est pas la première fois, dans l'histoire de la Science, qu'on aura vu deux savants de valeur arriver en même temps, par la même marche, à une même découverte."

10 P. Fatou, *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 143(1906), 546-548).

11 P.28 de la note de S. Lattès, *Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 166(1918), 26-28,88).

12 G. Julia, *Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles* (Annales scient. E.N.S., (3), 39(1922), 131-215) = Oeuvres, vol.I, p.335-419.

13 P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (Bull. Soc. math. France, 47(1919), 161-271 ; 48(1920), 33-95, 208-314).

14 G. Julia, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Ann. scient. E.N.S., (3), 40(1923), 97-150) = Oeuvres, vol.I, p.429-482.

15 Voir p.449-453 de ce mémoire de Julia.

16 G. Julia, *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (Ann. scient. E.N.S., (3), 36(1919), 93-125 ; 37(1920), 165-218 ; 38(1921), 165-181) = Oeuvres, vol.II, p.25-57, 63-133.

17 E. Picard, *Sur une propriété des fonctions entières* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 88(1879), 1024-1027) = Oeuvres, vol.I, p.19-22, Paris(C.N.R.S.), 1978.

18 A. Ostrowski, *Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes* (Math.Zeitschrift, 24(1926), 215-258).

Il nous semble intéressant de mentionner la lettre d'Ostrowski à P. Lévy sur l'histoire "des points et des lignes de Julia" (p.58-58 du t.1(1980) des *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*).

19 G. Julia, *Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables* (Acta math., 47(1926), 53-115) = Oeuvres, vol.II, p.311-373.

20 H. Cartan und P. Thullen, *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen* (Math. Annalen, 106(1932), 617-647) = Oeuvres de Henri Cartan, vol.I, p.376-406, Berlin(Springer), 1979.

21 H. Behnke und K. Stein, *Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität* (Math. Annalen, 116(1939), 204-216).

22 Voir la note 1. Les articles cités se trouvent dans le volume IV des Oeuvres de Julia.