CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

E. PICARD
G. DARBOUX
ERNEST VESSIOT

Liste des travaux de Jules Drach

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 2 (1981), p. 18-57
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1981__2__18_0>

LISTE DES TRAVAUX DE JULES DRACH

1. POINCARE H., *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, rédigées par E. Borel et J. Drach, Paris(Carré), 1892.
2. *Sur une application de la théorie des groupes de Lie* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 116(1893), 1041-1044).
3. BOREL E. et DRACH J., *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure*, d'après des conférences faites à l'Ecole Normale Supérieure par J. Tannery, Paris(Nony), 1895[1].
4. *Sur l'application aux équations différentielles de méthodes analogues à celles de Galois* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 120(1895), 73-76)[2].
5. *Sur les systèmes complètement orthogonaux dans l'espace à n dimensions et sur la réduction des systèmes différentiels les plus généraux* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 125(1897), 598-601).
6. *Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles* (Bulletin Sic. math., 1e partie, (2), 21(1897), 140-152).
7. *Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes* (Annales sci. Ecole Normale Sup., (3), 15(1898), 243-384)[3] = Paris(Gauthier-Villars), 1898.
8. *Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Compte rendu du 2e Congrès international des mathématiciens, Paris(Gauthier-Villars), 1902, p.281-289.
9. *Sur certaines déformations remarquables* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 136(1903), 996-998).
10. *Sur une forme nouvelle, linéaire, de l'équation dont dépend la détermination des surfaces qui ont un élément linéaire donné* (Bulletin Sci. math., 1e partie, (2), 28(1904), 117-127)[4].
11. *Sur les lignes géodésiques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 147(1908), 1267-1269).
12. *Sur les systèmes complètement orthogonaux de l'espace euclidien à n dimensions* (Bulletin Soc. math. France, 36(1908), 85-126).
13. *Recherches sur certaines déformations remarquables à réseau conjugué persistant* (Annales Fac. Sci. Univ. Toulouse, (2), 10(1908), 125-164).
14. *Sur le problème logique de l'intégration des équations différentielles* (Annales Fac. Sci. Univ. Toulouse, (2), 10(1908), 393-472).
15. *Sur un problème concernant les lignes géodésiques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 148(1909), 150-152)[5].
16. *Sur les congruences de normales et les transformations de contact* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 148(1909), 1082-1085).

17. *Notice sur les travaux scientifiques* , Toulouse(Privat), 1909 ; II^{e} partie (1909-1922), Toulouse(Privat), 1922 ; III^{e} partie (1922-1929), Paris(Presses Universitaires de France), 1929.
18. *Sur le* problème logique *de l'intégration des équations différentielles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 151(1910), 192-195).
19. *Détermination des lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 152(1911), 1144-1147)[6].
20. *Détermination des lignes asymptotiques des surfaces générales du troisième degré* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 152(1911), 1458-1461).
21. MEYER W.F. et DRACH J., *Théorie des formes et des invariants*, Encyclopédie des Sciences mathématiques, t.I, vol. II, p.386-578, Paris(Gauthier-Villars), 1911-1912[7].
22. *Sur les équations différentielles de la géométrie* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 154(1912), 415-418)[8].
23. *Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 157(1913), 1516-1519).
24. *Sur l'*intégration logique *des équations différentielles ordinaires*, Proceedings 5th International Congress of Mathematicians, vol. I, p.438-497, Cambridge(The Univ. Press), 1913.
25. *Sur les équations différentielles de la géométrie*, Proceedings 5th International Congress of Mathematicians, vol. II, p.145-159, Cambridge(The Univ. Press), 1913.
26. *Sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 158(1914), 926-929).
27. *Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé* (Bulletin Sci. math., (2), 39(1915), 1^{e} partie, 149-166)[9].
28. *Sur les groupes* complexes *de rationalité et sur l'intégration par quadratures* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 167(1918), 743-746)[10].
29. *Intégration d'une équation aux dérivées partielles de la dynamique des fluides* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 167(1918), 943-945).
30. *Détermination des cas de réduction de l'équation différentielle* $\frac{d^2y}{dx^2} = [\ \varphi(x)+h\ ]\ y$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 168(1919), 47-50).
31. *Sur les solutions algébriques des équations différentielles du premier ordre* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 168(1919), 212-215).
32. *Sur l'intégration par quadrature de l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2} = [\ \varphi(x) + h\ ]\ y$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 168(1919), 337-340 , erratum p. 532).
33. *Sur l'intégration, par quadratures, de l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x,y)$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 168(1919), 497-501).

34. *Détermination des intégrales premières de l'équation différentielle des lignes géodésiques, rationnelles, par rapport à la dérivée première de la fonction inconnue* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 169(1919), 1155-1158).

35. *Sur le mouvement de l'axe d'un solide homogène pesant de révolution qui a un point fixe sur cet axe* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 170(1920), 1156-1159).

36. *L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadrature* (Annales sci. Ecole Normale Sup., (3), 37(1920), 1-94)[11].

37. *Sur quelques applications de l'intégration logique des équations différentielles*, Comptes rendus Congrès international des mathématiciens, p.356-380, Toulouse(Privat), 1921[12].

38. *Sur la détermination des équations différentielles du second ordre intégrables par quadratures* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 174(1922), 797-799).

39. *Sur des classes remarquables de congruences W* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 176(1923), 1591-1594).

40. *Sur le mouvement d'un solide pesant qui a un point fixe (Détermination du groupe de rationalité de l'équation différentielle du problème)* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 179(1924), 735-737).

41. *Sur l'habillage et sur la déformation des surfaces* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 179(1924), 1023-1026).

42. *Sur deux classes remarquables de congruences W* (Bulletin Soc. math. France, 52(1924), 434-467 ; 53(1925), 1-23)[13].

43. *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces*, C.R. du Congrès des Soc. Savantes, p.40-78, 1925[14].

44. *Sur l'intégration des équations* $r + f(s,t) = 0$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 182(1926), 1593-1595)[15].

45. *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre et sur l'usage explicite des variables caractéristiques d'Ampère* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 183(1926), 109-111).

46. *Détermination des éléments linéaires de Liouville pour lesquels l'équation des lignes géodésiques admet au moins deux intégrales rationnelles en la dérivée première* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 185(1927), 1568-1570)[16].

47. POINCARE H., *Oeuvres*, t.I, publié avec la collaboration de J. Drach, Paris(Gauthier-Villars), 1928, p.375-379 : J. Drach, *Notes et errata*[17].

48. *Sur l'*intégration logique *des équations différentielles : Applications aux équations de la géométrie et de la mécanique*, Proceedings of the International Mathematical Congress, vol. I, p.473-510, Toronto(The Univ. Press), 1928[18].

49. *Sur la transformation des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'usage explicite des variables caractéristiques d'Ampère* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 188(1929), 138-140).

50. *Sur la transformation et l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, par l'usage explicite des caractéristiques d'Ampère*, Atti del Congresso internazionale dei Matematici, t. III, p.11-25, Bologne(Zanichelli), 1930.

51. *Sur les valeurs moyennes partielles et leur application aux problèmes de physique mathématique* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 192(1931), 1327-1331).

52. *Détermination des éléments linéaires pour lesquels il existe un réseau triangulaire de géodésiques. Généralisation* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 193(1931), 897-902).

53. *Remarques au sujet de la Note de M. T. Levi-Civita* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 193(1931), 1374-1375)[19].

54. *Sur l'intégration par quadratures d'une classe d'équations différentielles*, $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x,y)$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 195(1932), 1337-1342).

55. *Nouvelles recherches d' "intégration logique"*, Verhandlungen d. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich 1932, II. Band, p.74-75, Zürich(Füssli).

56. *Sur l'intégration par quadratures de l'équation des lignes géodésiques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 196(1933), 310-315).

57. *Sur les congruences de droites et leurs surfaces focales* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 196(1933), 1057-1060).

58. *Sur une classe de congruences de droites* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 196(1933), 1253-1256).

59. POINCARE H., *Oeuvres*, t.III, publié avec la collaboration de J. Drach, Paris(Gauthier-Villars), 1934, p.583-594 : J. Drach : *Notes et errata*[20].

60. *Sur les intégrales quadratiques des équations de la dynamique et sur les systèmes conjugués de l'espace euclidien à n dimensions* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 198(1934), 294-299).

61. *Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables réductibles à un système linéaire de Laplace* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 198(1934), 513-517).

62. *Sur l'*intégration logique *des équations de la dynamique, à deux variables : Forces centrales* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 199(1934), 749-752).

63. *Sur l' "intégration logique" des équations de la dynamique*, Comptes rendus du 2e Congrès des mathématiciens des pays slaves 1934, p.141-143, Praha(Jed.Česhoslov. Mat. a Fys.), 1935.

64. *Sur l'*intégration logique *des équations de la dynamique à deux variables : Forces constructives. Intégrales cubiques. Mouvements dans le plan* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 200(1935), 22-26, erratum p.868).

65. *Sur l'*intégration logique *et sur la transformation des équations de la dynamique à deux variables : Forces conservatives. Intégrales cubiques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 200(1935), 599-602, errata p.868).

66. *Sur l'intégration logique des équations différentielles linéaires* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 204(1937), 1449-1453).

67. *Sur l'intégration logique des équations différentielles linéaires ; réduction du groupe* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 204(1937), 1600-1604).

68. *Sur la réduction de l'équation générale de Riccati* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 205(1937), 700-704, errata t.207(1938), p.384).

69. *Sur l' "intégration logique" des équations de la dynamique*, Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, t.II, p.41-43, Oslo(Brøggers), 1937.

70. *Sur le mouvement plan des fluides élastiques*, Proc. V. Internat. Congr. Appl. Mech., 1938, Cambridge Mass., p.466-468[21].

71. *Sur l'équation différentielle du troisième ordre des fonctions* Θ *elliptiques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 206(1938), 1421-1424).

72. *Sur l'application de la méthode de Darboux aux équations à caractéristiques explicites* x, y (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 208(1939), 1181-1185).

73. *Application de la méthode de Darboux aux équations* $s = f(x,y,z,p,q)$ *: Invariants rationnels* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 208(1939), 1371-1375).

74. *Sur un problème relatif aux formes différentielles linéaires* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 210(1940), 125-128).

75. *Sur quelques points de théorie des nombres et sur la théorie générale des courbes algébriques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 221(1945), 729-732).

76. *Sur la théorie générale des courbes algébriques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 222(1946), 117-120).

77. *Sur les lignes de flux qui sont lignes de tourbillon* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 223(1946), 441-444).

78. *Sur la théorie des corps plastiques et l'équation d'Airy-Tresca* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 223(1946), 461-464)[22].

79. *Sur les lignes* d'osculation quadrique *des surfaces* (Lignes de Darboux) (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 224(1947), 309-312).

80. *Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre dont les caractéristiques sont les lignes asymptotiques des surfaces intégrales* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 225(1947), 1221-1224).

81. *Sur les équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre dont les caractéristiques sont les lignes asymptotiques des surfaces intégrales* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 226(1948), 287-288).

82. *Détermination des lignes d'osculation quadrique* (Lignes de Darboux) *sur les surfaces cubiques. Lignes asymptotiques de la surface de Bioche* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 226(1948), 1561-1564).

83. *Sur la transcendance du nombre* π (Bulletin Sci. math., (2), 75(1951), 135-145)[23].

ECRITS MENTIONNANT LES TRAVAUX DE JULES DRACH

d'ADHEMAR R. 1934, *La balistique extérieure*, Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 65, Paris(Gauthier-Villars).

p.10 : "Le travail de M. Drach est, au point de vue analytique, extrêmement remarquable [36][24]."

APPEL P., PICARD E., JORDAN C., PAINLEVE P. et POINCARE H. 1902, *Grand prix des sciences mathématiques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.135, 1154-1161).

p.1154 : "L'Académie avait proposé la question suivante : *Perfectionner en un point important l'application de la théorie des groupes continus à la théorie des équations aux dérivées partielles*."

p.1158 : "L'extension des idées de Galois à la théorie des équations aux dérivées partielles a vivement préoccupé les géomètres dans ces vingt dernières années. Pour les équations linéaires ordinaires, cette extension résulte, comme on sait, des travaux de M. Picard et de M. Vessiot. En ce qui concerne les équations différentielles ordinaires quelconques ou, ce qui revient au même, les équations linéaires aux dérivées partielles, des idées très importantes ont été émises, il y a quelques années, par M. Drach, qui a montré dans quelle voie devait s'orienter la théorie ; toutefois, à cause de certaines lacunes dans les énoncés et les démonstrations, il était nécessaire de reprendre la question. Les deux derniers Mémoires [[n° 4 et n° 5]][25] dont il nous reste à parler ont consacré de nombreuses pages à cet important problème.

Le Mémoire n° 4 [[de J. Drach]] a dû être écarté par la Commission comme inachevé, bien qu'il fût loin d'être dépourvu d'imagination et de vues nouvelles. Mais le temps a fait évidemment défaut à l'auteur pour terminer son travail, et la plupart des démonstrations se réfèrent à une suite du Mémoire qui ne figure pas dans le manuscrit.

L'objet du Mémoire inscrit sous le n° 5 [[voir Vessiot 1904]] est la nature des intégrations auxquelles conduit l'application de la théorie des groupes aux systèmes différentiels quelconques."

p.1160 : Grâce au mémoire n° 5, "il est possible de discuter et de préciser la théorie esquissée par M. Drach".

p.1161 : Le mémoire n° 5 "comble entièrement les lacunes qui subsistaient dans l'importante question ouverte par M. Drach pour les équations linéaires aux dérivées partielles", et "la Commission est unanime à lui accorder le grand prix des Sciences mathématiques".

BAIRE R., BOREL E., HADAMARD J. et LEBESGUE H. 1905, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (Bulletin Société math. France, t.33, 261-273)[26].

BELL E.T. 1940, *The Development of Mathematics*, New York(McGraw-Hill). Le mémoire [48] est cité p.410.

BOREL E. 1898, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris(Gauthier-Villars).

p.48 : "Le procédé que nous avons employé revient en réalité à ceci : nous avons reconnu qu'une définition de la mesure ne pouvait être utile que si elle avait certaines propriétés fondamentales : nous avons posé *a priori* ces propriétés et ce sont elles qui nous ont servi à définir la classe d'ensembles que nous regardons comme mesurables. Cette manière de procéder présente de grandes analogies avec les méthodes introduites par M. J. Drach, en algèbre et dans la théorie des équations différentielles(*voir*, par exemple, l'Ouvrage cité (p.23) [[[3]]] et *Comptes Rendus*, janvier 1895 [[[4]]]). Dans tous les cas, elle procède de la même idée fondamentale : définir les éléments nouveaux que l'on introduit, à l'aide de leurs propriétés *essentielles*, c'est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui doivent suivre."

BUHL A. 1940, *Nouveaux éléments d'analyse*, tome III, *Equations différentielles*, Paris (Gauthier-Villars).

p.V : La rédaction de ce troisième tome "n'a pas été sans étonner l'auteur lui-même.

J'avais fait un plan allant, des équations élémentairement intégrables, jusqu'à la limite inférieure des travaux de Paul Painlevé. Puis j'ai remarqué que tant et tant de choses se groupaient naturellement autour de l'équation de Riccati que le Livre s'est achevé, grâce aux travaux récents de MM. Elie Cartan et Jules Drach, sans quitter ce prodigieux centre de rayonnement."

Dans le chapitre II, *Equation de Riccati* (p.45), § 9, *Invariance des équations réduites* (p.54-56), Buhl reprend des exemples indiqués par Drach dans [68].

Quant au chapitre VI, *Algèbre de l'équation de Riccati* (p.151-171), il est (p.151) "la reproduction développée de la Note *Sur la réduction de l'équation générale de Riccati*, publiée par M. Jules Drach" ([68]). J. Drach "s'est astreint à commencer son analyse sans avoir recours à la Géométrie. Aussi, cette analyse est-elle d'une très grande originalité et aboutit-elle à l'équation de Riccati-Drach" (traitée dans le § 3 : *Equation de Riccati-Drach* (p.156-157)). De plus, "la méthode de M. Drach, qui consiste à étudier des équations différentielles, en de certains *domaines de rationalité*, est une méthode générale qui s'est révélée féconde pour de nombreuses équations différentielles".

Buhl écrit encore (p.151-152) : "La correspondance élémentaire que nous savons exister, entre l'équation différentielle *linéaire* du second ordre et l'équation de Riccati, porte à reprendre, sur l'équation de Riccati, l'exposition du

Chapitre précédent. C'est précisément ce que fait" Drach dans [68]. "La Note de M. Drach étant très condensée, nous la développons considérablement, mais sans altérer en rien des notations de l'éminent géomètre."

Buhl note encore (p.166) que "la Théorie algébrique de l'équation de Riccati, donnée récemment par M. Drach, outre nombre de points extrêmement remarquables", produit "de véritables changements d'univers, causés par une simple modification paramétrique."

BUHL A. 1943, *Nouveaux éléments d'analyse*, tome IV, *Equations aux dérivées partielles*, Paris (Gauthier-Villars).

Buhl écrit dans sa *Préface* (p.V) : "Ce Tome ne contient évidemment pas une exposition tant soit peu générale des nombreux et difficiles problèmes de la Théorie des Equations aux dérivées partielles. Il s'agit d'un nombre très limité de Leçons sur la *génération* de ces équations et leurs *transformations*, surtout sur leurs *transformations en elles-mêmes* ; à cet égard, la transformation de Lorentz, appliquée à l'équation de d'Alembert, reste un prestigieux modèle. Et, *comme ces transformations changent une solution en une autre*, on aboutit ainsi, très classiquement, aux *intégrales premières* de la Mécanique ondulatoire tout comme on pourrait aboutir aux généralités de l'*Intégration logique* de M. Jules Drach."

Le § 18, *L'intégration logique de M. Jules Drach* (p.115-117), du chapitre IV, traite (p.115-116) "de méthodes d'intégration pouvant avoir pour substratum la question suivante spécialement considérée dans ce Tome et même depuis le début de l'ouvrage : *Une équation* E, *de nature quelconque* (algébrique, différentielle, aux dérivées partielles, etc.), *ayant une solution* S_1, *construire, si possible, un opérateur* Ψ *changeant* S_1 *en une autre solution* S_2 *de* E.

Les travaux de M. Drach ont d'abord concerné les équations différentielles ordinaires avec recherche d'un opérateur Ψ , de structure rationnelle, s'il existe. Les équations atteintes ainsi sont des équations spéciales, mais à côté desquelles on été passé sans méthode permettant de voir la possibilité d'une intégration *rationnelle* ou plus généralement *logique*.

L'excellence de la méthode fut révélée par d'éclatants succès. Les équations des lignes de courbures de la surface des ondes, des lignes asymptotiques des surfaces cubiques, de la Balistique extérieure, furent, parmi beaucoup d'autres, successivement intégrées." Dans le tome III, on a traité, "d'après M. Drach, les cas d'intégration algébrique de l'équation de Riccati". Ici on indique, "très brièvement, comment on pourrait aller dans d'autres directions".

On cite principalement (p.117) les mémoires [24], [25], [37] et [50]. Page 122 sont citées les notes [19] et [20].

CARTAN E. 1914, *La théorie des groupes* (La Revue du Mois, t.17, 438-468).

J. Drach est cité p. 463 et p. 466.

CARTAN E. 1938, *La théorie de Galois et ses généralisations* (Comm. Math. Helv., t.11, 9-25) = *Oeuvres complètes*, partie III, vol. 1, p. 123-139, Paris(Gauthier-Villars), 1955.

J. Drach est cité p.125 : [7] et [14], ainsi que p. 129-139 : " III° Une classe de systèmes de Drach-Vessiot".

CARTAN E. 1947, *L'oeuvre scientifique de M. Ernest Vessiot* (Bulletin Soc. math. France, t.75, 1-8).

E. Cartan écrit dans le § 5, *Le problème de la réductibilité des systèmes les plus généraux d'équations différentielles* (p.4-5) :

"En 1898 M. Jules Drach abordait un problème tout à fait nouveau en se proposant d'étendre la théorie de Galois à un système absolument arbitraire d'équations différentielles ordinaires, non automorphe en général. Les vues de Drach étaient aussi originales que fécondes et d'une extrême importance, mais ses énoncés et ses démonstrations contenaient de graves lacunes et inexactitudes. M. Drach prenait comme inconnues du problème n intégrales premières indépendantes quelconques, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en supposant, ce qui est toujours possible, le système donné ramené à un système d'équations différentielles du premier ordre à n fonctions inconnues d'une variable indépendante. Les *solutions* ainsi comprises du problème se déduisent les unes des autres par les diverses transformations ponctuelles exécutées sur les intégrales premières $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on se donne un domaine de rationalité Δ déterminé, le passage d'une solution à une autre ne se faisant malheureusement pas en général par une transformation *rationnelle* (au sens que confère à ce terme la donnée du domaine de rationalité Δ), de sorte que l'existence du *groupe de rationalité* restait en suspens ; il était nécessaire de reprendre la question. C'est ce que M. Vessiot réussit à faire en construisant avec une rigueur parfaite une théorie remarquable qui lui a valu en 1902 le Grand Prix des Sciences mathématiques. La Commission chargée d'étudier les mémoires présentés au concours concluait son appréciation du mémoire de M. Vessiot en affirmant qu'il constituait un ensemble cohérent et très complet, comblant entièrement les lacunes qui subsistaient dans l'importante question soulevée par M. Jules Drach.

Il serait cependant tout à fait injuste de méconnaître l'importance de l'oeuvre de M. Drach, qui a fait des applications remarquables de sa théorie, ne serait-ce que la découverte des lignes de courbure de la surface des ondes, problème dont la solution avait jusqu'à lui échappé aux recherches des plus grands géomètres."

E. Cartan note encore (p.5) :

"Postérieurement à son mémoire de 1902, M. Vessiot apporta des idées nouvelles à sa théorie en introduisant à côté du *groupe de rationalité* ce qu'il appelle le groupe *spécifique*, ce qui rend presque intuitive la solution du problème posé par M. Drach. Il y a isomorphisme entre les deux groupes."

CHARBONNIER P. 1921, *Traité de balistique extérieure*, tome I, Paris(Doin).

Charbonnier expose dans le § 243 la *Théorie générale de M. Drach* (p.497-515), paragraphe rédigé par A. Denjoy (p.498), basé sur la note [26].

A. Denjoy écrit (p.514) : "Le lecteur a pu observer la puissance de la méthode de M. Drach, l'unité et l'ordre systématique introduits par elle dans un sujet où les chercheurs précédents, guidés par la seule ingéniosité, devaient leur succès à des artifices parfois très éloignés des raisons essentielles des faits."

CHARBONNIER P. 1928, *Essais sur l'histoire de la balistique*, Paris(Imprimerie Nationale).

Charbonnier écrit (p.319) que la méthode de Drach, exposée dans [36], est une "application extrêmement intéressante de la théorie des fonctions analytiques". Toutefois, "cette conquête, qui fait honneur aux mathématiciens, ne semble pas susceptible d'offrir aux balisticiens, jusqu'à nouvel ordre, de ressources nouvelles pour les applications. C'est que les calculs sont très compliqués et souvent presque uniquement symboliques."

CHATELET A. 1913, *Leçons sur la théorie des nombres (Modules. Entiers algébriques. Réduction continuelle.)*, Paris(Gauthier-Villars).

Châtelet cite (p.8 et p.11) le mémoire [21]. Il écrit (p.61) à propos du théorème de d'Alembert affirmant que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet au moins une racine : "Toute démonstration de ce théorème, qui est vrai pour des coefficients quelconques, repose en général sur l'idée de continuité, c'est-à-dire sur une définition du nombre irrationnel général, par exemple, au moyen d'une coupure. On pourrait chercher à montrer l'existence logique des nombres algébriques et de leur calcul à partir de la seule idée de nombre entier. C'est ce qu'a fait M. J. Drach." (Dans [3], qui est mentionné également p.73.)

CHATELET A. 1924, *Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers*, Paris (Gauthier-Villars).

Le mémoire [21] est cité p.223-224.

CHUDNOVSKY D.V., *Riemann Monodromy Problem, Isomonodromy Deformation Equations and Completely Integrable Systems* (à paraître).
Dans le § 7.2, on cite [30] et [32].

CHUDNOVSKY D.V. and G.V., *Drach equations* (manuscrit dactylographié).

FELIX L. 1971, *Jules Drach*, Dictionary of Scientific Biography, vol. IV, p.177, New York(Scribner).

FRECHET M. 1906, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 22, 1-74).

M. Fréchet écrit (p.4-5) : "Les résultats les plus connus et en fait les plus importants de la théorie des ensembles sont ceux que l'on déduit de la notion de limite d'une suite d'éléments. Or, on n'introduit jamais cette notion qu'après avoir abandonné l'étude des ensembles abstraits et en spécifiant bien nettement la nature des éléments que l'on considère. C'est le même fait qui se produisait lorsqu'on développait séparément les théories des groupes de mouvements, de substitutions, de transformations, etc., où chaque catégorie d'éléments donnait lieu à un mode de composition parfaitement défini, mais dont la définition variait d'une catégorie à l'autre. On ne put arriver à une théorie commune qu'en *s'abstenant* de donner une définition générale de ce mode de composition, mais en recherchant les conditions communes aux définitions particulières et en ne retenant que celles qui étaient indépendantes de la nature des éléments considérés (XXIV) [[de Séguier, *Eléments de la théorie des groupes abstraits*, Paris(Gauthier-Villars), 1904]]. C'est aussi d'après le même point de vue qu'on a été amené à simplifier l'étude des forces, des vitesses, des rotations, etc., en les faisant précéder d'une théorie des vecteurs. Cette idée se retrouve un peu modifiée dans l'usage qui tend à se répandre des définitions "descriptives" particulièrement préconisées par M. Drach (XXI) [[[7]]]."

GARNIER R. 1919, *Sur une classe de systèmes différentiels abéliens déduits de la théorie des équations linéaires* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t.43, 155-191).

R. Garnier écrit (p.157) : "On voit donc apparaître, une fois de plus, un lien étroit entre la théorie des équations linéaires et celle des fonctions abéliennes. (Depuis la rédaction de ce Mémoire, ce rapprochement s'est manifesté à nouveau, et d'une manière remarquable, dans les travaux de M. Jules Drach sur la réductibilité des équations linéaires.)" Et Garnier renvoie à la note [32], où Drach "introduit des systèmes différentiels hyperelliptiques".[27]

GERARD R. 1980, *Paul Painlevé (1863-1933). Homme - politicien - mathématicien* (Gazette des mathématiciens, Soc. math. France, n° 14, juillet, 73-87).

R. Gérard écrit p.85 : "Pour avoir une solution complète au problème de Picard, il ne restait donc plus qu'à vérifier que ces équations définissaient bien des transcendantes nouvelles, et ceci, bien entendu, dans un sens qu'il restait à préciser. C'est le problème de l'irréductibilité tel qu'il a été posé et étudié dans la thèse de Jules Drach en 1898."

HADAMARD J. 1934, *L'oeuvre scientifique de Paul Painlevé* (Revue de Métaphysique, t.41, 289-325) = *Oeuvres* de Paul Painlevé, t.I, p.37-73, Paris(C.N.R.S.), 1972.

J. Hadamard écrit (p.49) que "les profonds travaux de M. Drach" ont posé et résolu "la question de la réductibilité des équations différentielles sous sa forme la plus générale et la plus exhaustive".

Il précise encore (p.53-54) : "Les équations différentielles de Painlevé se sont également offertes à M. Drach dans ses recherches fondamentales, mentionnées plus haut, sur l' "intégration logique" des équations différentielles, généralisation puissante et inespérée de la théorie de Galois. Lorsqu'il se propose d'appliquer sa méthode générale aux équations de la forme $\frac{du}{dx} = \frac{P_3(u)}{P_1(u)}$ (P_3, P_1, polynômes de degrés respectifs 3 et 1 en u, à coefficients fonctions quelconques de x), équation que l'on peut réduire à la forme : $\frac{du}{dx} = \frac{u(u-1)(x-\eta)}{x(x-1)(u-\eta)}$ et où il reste à déterminer la fonction η de x, on constate que, si l'on veut que le groupe de rationalité (le groupe qui intervient dans le travail de R. Fuchs (groupe de monodromie) est de nature et de signification différentes ; cependant, les deux résultats sont en liaison l'un avec l'autre) de l'équation soit le groupe projectif, η doit précisément vérifier une équation de Painlevé. Un autre problème analogue conduit M. Drach aux systèmes qu'a étudiés M. Garnier." (Voir Garnier 1919).

HADAMARD J. 1937, *La Science mathématique*, Encyclopédie Française, t.I, 1'52-1 à 1'58-7.

J. Hadamard, considérant (1'56-4) les mouvements des projectiles, écrit que la résistance de l'air R est une fonction F de la vitesse v, et il ajoute que Drach, "par ses puissantes méthodes d'intégration logique",a pu "trouver toutes les formes de la fonction $F(v)$ pour lesquelles l'intégration formelle est possible". (Voir [36] et Charbonnier 1921 et 1928).

HAWKINS T. 1975, *Lebesgue's Theory of Integration*, The Bronx, New York(Chelsea).

T. Hawkins écrit (p.103) : "In 1895 Borel and Drach published a book based on Jules Tannery's lectures at the Ecole Normale on the theory of numbers and higer algebra [[[3]]]. Drach treated the higer algebra in a manner characteristically his own. [[...]] Drach's method amounted to taking an abstract or postulational approach to a particular field of mathematics. Drach applied this approach in his doctoral thesis [[[7] et [4]]] to the study of differential equations, the integral solutions being characterized and classified on the basis of essential properties which they must possess. Drach's approach was not without precedent, particularly outside of France, but, historically, his work was instrumental in initiating the axiomatic approach to the theory of measure and integration ; this approach, in turn, focused attention upon what properties or characteristics a viable definition of measure and the integral should possess."

HEILBRONN G. 1939, *Sur la construction des équations* $s + f(x,y,z,p,q,r) = 0$ *qui possèdent un invariant du second ordre* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.208, 1380-1382).

On utilise ici la théorie et la méthode de [50] et [72].

HEILBRONN G. 1953, *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach*, thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, le 19 mars, publiée dans Heilbronn 1955. On lit dans l'introduction :

"Tout en heurtant sa modestie, et en enfreignant son véto, il faut que je mentionne ici avec reconnaissance le nom de mon ami J. Kravtchenko : mes entretiens avec lui ont éclairé bien des points qui étaient restés obscurs dans la pensée si profonde de Drach.

Il faut néanmoins consacrer ce travail à celui à qui il doit d'exister : c'est le pieux hommage de son seul disciple à la mémoire d'un grand homme."

HEILBRONN G. 1955, *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach*, Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule CXXIX, Paris(Gauthier-Villars).

G. Heilbronn écrit dans son *Introduction* (p.1-2) :

"La méthode de Drach se situe comme le développement logique de la méthode d'Ampère, dans la direction même que celui-ci envisageait. La généralisation de la méthode d'Ampère, due à Darboux, malgré les succès obtenus par lui-même et ses successeurs, comporte une limitation intrinsèque. Elle masque la portée véritable de la méthode d'Ampère, dont la puissance a été révélée par les travaux de Drach.

La lecture des Mémoires originaux de Drach semble difficile ; c'est la seule raison pour laquelle son oeuvre n'a pas atteint la notoriété qu'elle mérite. C'est pourquoi nous avons entrepris un exposé de sa méthode et des principaux résultats auxquels il était parvenu. Cela contribuera nous l'espérons à rendre accessibles à un public mathématique très large des théories qui sont loin d'avoir épuisé leur fécondité, comme nous essayons de le prouver nous-même, dans le chapitre IV du présent Ouvrage.

Il convient de souligner que la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles, dont nous faisons ici l'exposé, ne représente qu'une faible partie des découvertes de Drach, dont l'oeuvre s'est poursuivie, dans un développement harmonieux, tout au long de sa vie. On trouve dans sa Thèse [[[7]]] les idées de base qu'il a su appliquer, par la méthode d' "intégration logique", avec le même succès, aux équations différentielles ordinaires et aux équations aux dérivées partielles. C'est le nombre considérable d'applications possibles de ces dernières qui nous a fait donner la priorité, contre tout ordre logique et chronologique, à la fin de son oeuvre [[[42], [50] et [72]]]. Nous réservons à un autre travail l'exposé des questions relatives aux équations différentielles ordinaires [[Heilbronn 1956]]."

HEILBRONN G. 1956, *Intégration des équations différentielles ordinaires par la méthode de Drach*, Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule CXXXIII, Paris(Gauthier-Villars).

Heilbronn écrit dans son *Introduction* (p.1) :

"Nous pensons donner ici une vue plus juste de la profondeur de la pensée de Drach, en montrant la puissance d'une méthode appliquée à des problèmes d'une grande variété, qui, tous, avaient arrêté les plus éminents analystes." ([7], chap. III, [24], [36], [68], [37] et [48]).

HEILBRONN G. 1957, *Intégration logique*, Encyclopédie Française, Cahiers d'Actualité et de Synthèse, La Mathématique, Compléments, p.15.

G. Heilbronn écrit :

"La théorie de l'intégration logique, magistralement exposée par E. Vessiot [[voir Vessiot 1937]], s'est développée ultérieurement dans une voie un peu différente. J. Drach a imaginé un procédé nouveau d'intégration des équations différentielles, en utilisant les *caractéristiques* d'Ampère de ces équations. Cette méthode s'applique aussi bien aux équations différentielles ordinaires qu'aux équations aux dérivées partielles, quel que soit leur ordre ou le nombre de variables. [[...]].

Dans un autre sens, Joseph Fels Ritt (*Differential Algebra*, 1950) [[voir Ritt 1966]] a développé une théorie qui ne semble pas avoir la fécondité de celle de Drach, mais qui mérite elle aussi le nom d'intégration logique."

JANET M. 1957, *Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles*, Encyclopédie Française, Cahiers d'Actualité et de Synthèse, La Mathématique, Compléments, p.16-18.

Voir p. 18 : "*Emploi des variables d'Ampère*".

JULIA G. 1949, *Notice nécrologique sur M. Jules Drach* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.228, 877-878).

LEBESGUE H. 1904, *Leçons sur l'intégration*, Paris(Gauthier-Villars).

Lebesgue cite [7] page 100.

LEBESGUE H. 1907, *Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo* (Bulletin Soc. math. France, t.36, 1-11) = *Oeuvres scientifiques*, vol.III, p.227-237, Genève(L'Enseignement math.), 1972.

Lebesgue écrit (p.10 = p.236) : "L'empirisme de Kronecker n'est pas celui de M. Jules Drach."

LEBESGUE H. 1922, *Notice sur les travaux scientifiques*, Toulouse(Privat) = *Oeuvres scientifiques*, vol.I, p.97-175, Genève(L'Enseignement math.), 1972.

Lebesgue écrit (p.31 = p.117) :

"On dit souvent que les définitions sont libres.Certes, pourtant aucun mathématicien ne consentirait à appeler intégrale un nombre ne jouissant pas de certaines propriétés particulièrement importantes et simples de l'intégrale des fonctions continues : énoncer ces propriétés c'est, si elles sont en nombre suffisant pour déterminer l'intégrale, donner une définition *descriptive* de l'intégrale.Il reste ensuite à l'utiliser pour obtenir un procédé de calcul, une définition *constructive* de l'intégrale. J'ai employé cette méthode non seulement pour l'intégrale, mais pour la mesure des ensembles et dans bien d'autres circonstances ; elle m'a été suggérée par la lecture de la thèse de M. Drach [[[7]]] et de l'Introduction à la théorie des nombres et à l'algèbre supérieure qu'il a publiée en collaboration avec M. Borel, d'après des leçons de J. Tannery [[[3]]]. Je tiens à dire ici toute l'influence que les idées de M. Drach ont eue sur les miennes.Postérieurement aux recherches de M. Drach, M. Hilbert a utilisé les définitions descriptives dans ses études sur les fondements de la géométrie."

LEBESGUE H. 1937, *Nielsen (Niels), Géomètres français du XVIII^e siècle* (Bulletin Sci. math., (2), t.61, 65-73) = *Oeuvres scientifiques*, vol.V, p.407-415, Genève(L'Enseignement math.), 1973.

J. Drach est cité p.72 = p.414.

LEBESGUE H. 1972, *Introduction inédite à la "Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue" de 1922*, Oeuvres scientifiques, vol.I, p.89-93, Genève(L'Enseignement math.).

H. Lebesgue écrit (p.93) :

"M. J. Drach, puis Hilbert, nous ont appris à considérer un être mathématique comme défini par ses propriétés essentielles assujetties à la seule condition de ne pas être contradictoires, aussi bien que par sa construction ; celle-ci peut être recherchée comme conséquence des propriétés attribuées à cet être. Or pour qu'une généralisation de l'intégrale soit utile pour le but spécial que j'avais en vue, il fallait que cette intégrale jouisse de certaines propriétés : je pris ces propriétés comme définition et j'essayai d'en déduire la construction de l'intégrale. [...]. La méthode de M. J. Drach m'a cependant été des plus utiles."

LEVY P. 1967, *Les Mathématiques*, Institut de France, Académie des Sciences, Troisième centenaire, 1666-1966, t.I, p.143-212, Paris(Gauthier-Villars).

P. Lévy écrit (p.188) :

"E. Picard a étendu la théorie de Galois aux équations différentielles linéaires. Ses travaux ont suscité ceux de J. Drach et de E. Vessiot. Drach a étendu la notion de groupe de rationalité aux équations différentielles ; il a introduit la notion d'intégration logique, et de ses théories, d'allure fort abstraite, il a fait une application saisissante à l'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel, problème qui, avant lui, avait arrêté tous les chercheurs."

MAROTTE F. 1898, *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes* (Annales Fac. Sci. Toulouse, t.12, H.1 - H.92).

Drach est cité p. H.3 : [2] et [4].

NORDON J. 1951 a, *Quelques cas d'intégrabilité par quadrature d'une équation différentielle du premier ordre* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.232, 140-141).

Il s'agit de l'équation $y'^2 + y^2 = f(x)$, qui (p.140) peut "être ramenée à l'équation de la balistique extérieure étudiée par J. Drach" ([36]), en appliquant directement des "méthodes de Drach".

NORDON J. 1951 b, *Sur une équation différentielle du type d'Abel intégrable par quadrature* (Revue de Mathématiques spéciales, t.61, 513-516).

Nordon fait(p.515-516) un "exposé sommaire de résultats de Jules Drach" contenus dans [14].

PAINLEVE P. 1897, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Paris (Hermann) = *Oeuvres*, t.I, p.205-798, Paris(C.N.R.S.), 1972.

P. Painlevé écrit (p.690) :

"Le problème de la réduction des équations différentielles a fait l'objet, dans ces dernières années, de travaux considérables. Les travaux de MM. Sophus Lie, Koenigsberger, Picard, Vessiot, etc. sont trop connus pour qu'il soit nécessaire de les rappeler. Plus récemment, M. Drach a publié des indications très générales sur ce sujet."

PAINLEVE P. 1900, *Mémoire sur les équations différentielles* (Bulletin Soc. math. France, t.28, 201-261) = *Oeuvres*, t.III, Paris(C.N.R.S.), 1975.

P. Painlevé écrit (p.246) :

"Parmi toutes les définitions qu'on a proposées de la réductibilité de l'intégrale *générale* d'une équation différentielle, la plus large et la plus rationnelle à la fois me semble être celle de M. Drach." ([7]).

PAINLEVE P. 1902 a, *Sur l'irréductibilité des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.135, 411-415) = *Oeuvres*, t.III, p.84-88, Paris(C.N.R.S.), 1975.

PAINLEVE P. 1902 b, *Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation* $y'' = 6 y^2 + x$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.135, 641-647) = *Oeuvres*, t.III, p.89-95, Paris(C.N.R.S.), 1975.

P. Painlevé écrit (p.90) :

"La démonstration repose essentiellement sur le théorème de M. Drach, sans lequel le problème serait inabordable."

PAINLEVE P. 1902 c, *Sur l'irréductibilité de l'équation :* $y'' = 6 y^2 + x$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.135, 1020-1025) = *Oeuvres*, t.III, p.104-109, Paris(C.N.R.S.), 1975.

P. Painlevé écrit (p.107-108) :

"J'ai montré, dans ma Communication du 27 Octobre [[Painlevé 1902 b]], que l'équation (1) [[$y'' = 6 y^2 + x$]] est irréductible au sens de M. Drach, par suite absolument irréductible. M. Liouville [[R. Liouville, *Sur les transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 135(1902), 731-732) = *Oeuvres* de P. Painlevé, t.III, p.96-97, Paris(C.N.R.S.), 1975]] que l'irréductibilité ainsi entendue soit vraiment *absolue*."

Painlevé ajoute (p.109) :

"*Une équation irréductible, au sens de M. Drach, n'est attaquable par aucun procédé d'intégration formelle.*

Je n'ignore pas ce qu'une telle affirmation semble avoir de hardi et de paradoxal. C'est une vérité pourtant, et c'est là ce qui fait justement la puissance et la généralité du théorème de M. Drach. Si M. Liouville croit posséder un exemple d'équation différentielle (algébrique) qui soit réductible et qui échappe au théorème de M. Drach, il serait intéressant qu'il le fît connaître.

Il est possible que mon opinion soit encore "un peu isolée", comme dit M. Liouville. Mais ce sera bientôt l'opinion unanime quand le théorème de M. Drach, ayant reçu un exposé didactique et définitif, sera devenu familier aux géomètres."

PAINLEVE P. 1903, *Sur la réductibilité des équations différentielles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.136, 189-193) = *Oeuvres*, t.III, p.110-114, Paris(C.N.R.S.), 1975.

P. Painlevé écrit (p.110) :

"Dans une Communication du 8 Décembre dernier [[Painlevé 1902 c]], j'ai dit qu'aucun mode de réductibilité des équations différentielles n'échappait au théorème de M. Drach. M. R. Liouville pense, au contraire, démontrer dans les derniers *Comptes rendus* que le mode de réductibilité qu'il a introduit échappe à ce théorème.

La question générale ainsi posée ayant une véritable importance, je crois utile de la trancher sans ambiguïté possible."

PAINLEVE P. 1906, *Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.143, 1111-1117) = *Oeuvres*, t.III, p.115-121, Paris(C.N.R.S.), 1975.

PICARD E. 1901, *Exposition Universelle internationale de 1900 à Paris, Rapport du jury international, Introduction générale, deuxième partie, Sciences*, Paris(Imprimerie Nationale).

E. Picard écrit (p.9) :

"Nous avons parlé tout à l'heure de l'oeuvre de Sophus Lie sur la théorie des groupes de transformations, qui restera certainement un des plus beaux monuments de l'analyse mathématique du XIX[e] siècle. L'illustre géomètre en avait montré l'importance dans l'étude des équations différentielles, et ses élèves ont continué ce genre de recherches. A un tout autre point de vue, M. Picard, MM. Vessiot et Drach ont tiré partie de la théorie des groupes de transformations pour étendre à l'analyse les notions si fécondes introduites en algèbre par Galois, de telle sorte que de remarquables analogies entre la théorie des équations différentielles et la théorie des équations algébriques ont été mises en évidence."

PICARD E. 1908, *Traité d'analyse*, 2ème éd., t.III, chap. XVII, Paris(Gauthier-Villars) = *Analogies entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques*, Paris(Gauthier-Villars), 1936.

J. Drach est cité p.40.

POMMARET J.F. 1978, *Systems of Partial Differential Equations*, New York(Gordon and Breach).

POMMARET J.F., *Differential Galois Theory* (à paraître).

RITT J.F. 1932, *Differential Equations from the Algebraic Standpoint*, New York(American Mathematical Society).

[7] est cité p.VII-VIII.

RITT J.F. 1966, *Differential Algebra*, New York(Dover).

Ritt ecrit dans sa *Preface* (p.IV-V) :

"Actualy, I became acquainted with the basis theorem principle in the writings

of Jules Drach [[[7], p.292-296]] on logical integration, writings which date back to 1898. How a basis theorem is employed by him will now be described.

There are two distinct methods for characterizing an irreducible algebraic equation. On the one hand, an equation $f(x) = 0$ is irreducible if $f(x)$ cannot be factored. On the other, there is irreducibility if every equation which is satisfied by a single solution of $f(x) = 0$ is satisfied by all such solutions. The first formulation of irreducibility leads to the notion of irreducible algebraic manifold and to that of irreducible differential manifold. The second leads to the concept of irreducible system of algebraic differential equations which was employed by Koenigsberger and by Drach. A system of such equations, ordinary or partial, is irreducible if every differential equation which admits a single solution of the system admits all solutions. Drach undertakes to show that, given a system of partial differential equations, the repeated adjunction of new equations will eventually produce an irreducible system. For this he invokes a theorem of Tresse (*Acta Mathematica*, vol.18(1894), p.4), which states that, in every infinite system of partial differential equations, there is a finite subsystem for which the infinite system can be derived by differentiations and eliminations. A study of Tresse's paper will quickly convince one that he claims for his work a generality which it does not have. The statement of his theorem, and his argument, have a definite meaning only for linear systems."

SERGESCU P. 1933, *Les Sciences mathématiques*, dans *Les Sciences*, Paris(Denoël et Steele).

J. Drach est cité p.30, 53, 81-82, 89 et 100.

VESSIOT E. 1899, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.128, 544-546).

Note inspirée par la lecture de [7].

VESSIOT E. 1904, *Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations* (Annales sci. Ecole Normale Sup., (3), t.21, 9-85).

Vessiot écrit (p.9) :

"L'objet principal de cette étude est l'extension de la célèbre théorie de Galois, pour les équations algébriques, aux équations linéaires aux dérivées partielles. [[...]]

Cette extension a été indiquée par M. Drach dans sa Thèse [[[7]]] ; mais, à cause de certaines lacunes dans les énoncés et les démonstrations, il nous a paru utile de reprendre la question, afin d'arriver à des résultats bien précis."

Le dernier chapitre de ce mémoire, ajoute Vessiot (p.12), est "consacré à la discussion de la théorie esquissée par M. Drach" (chapitre IV : "*Sur la théorie de M. Drach*",p.67-85).

VESSIOT E. 1910, *Méthodes d'intégration élémentaires. Etude des équations différentielles ordinaires au point de vue formel*, Encyclopédie des Sciences mathématiques, t.II, vol.III, p.58-170, Paris(Gauthier-Villars).

Les travaux de J. Drach sont cités p.63 ([7]), 64, 138-139, 155 et 158.

Le § 43 (p.165-166) est intitulé : *Théorie rationnelle d'intégration des systèmes de Lie. Intégration logique de Drach.*

Le § 44 (p.166-170) traite de la *Théorie de Drach pour les systèmes quelconques d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.*

VESSIOT E. 1912, *Sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets* (Annales sci. Ecole Normale Sup., (3), t.29, 209-278).

J. Drach est cité p.212-213, 249-250 et 252.

VESSIOT E. 1915, *Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre, à une fonction inconnue* (Annales sci. Ecole Normale Sup., (3), t.32, 137-160).

Drach est cité p.137 ([7]), p.138 ([24]) et p.141 ([7]).

VESSIOT E. 1932, *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris(Eyrolles).

Vessiot écrit (p.15) :

"La théorie des groupes de transformations, créée il y a une cinquantaine d'années par le grand géomètre norvégien Sophus Lie, a joué dans mes recherches le rôle principal. Elle m'a permis d'établir, d'abord pour les équations différentielles linéaires, en partant d'un résultat fondamental de M. Emile Picard, puis pour des classes plus générales de systèmes différentiels, et, enfin, en reprenant et discutant les idées fécondes que M. Drach avait émises dans sa thèse, pour les systèmes quelconques d'équations différentielles ordinaires, des théories d'intégration analogues à celles que l'on doit, pour les équations algébriques, au génie de Galois. Chacune de ces théories est, en effet, dominée par un groupe de transformations, appelé groupe de rationalité."

E. Vessiot analyse ensuite d'une façon extrêmement pénétrante les travaux de J. Drach : p.28-29 ([2],[4],[5] et [7]), p.77-85 ([7]).

VESSIOT E. 1937, *Intégration logique*, Encyclopédie Française, t.I, 1'76-15 à 1'78-4.

J. Drach est cité p. 1'78-2 et 1'78-4.

VESSIOT E. 1947, *Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles du 1er ordre, à une inconnue, qui ne la contiennent pas et sont linéaires et homogènes par rapport à ses dérivées* (Bulletin Soc. math. France, t.75, 9-26).

J. Drach est cité p.20-21.

VILLAT H. 1951, *Notice sur la vie et l'oeuvre de Jules Drach (1871-1949)*, Notes et Discours, t.III, Paris(Gauthier-Villars), 1949-1957, Institut de France, Académie des Sciences[28].

PICARD E.[29] et DARBOUX G. : RAPPORT SUR LA THESE[30] DE M. JULES DRACH

(Archives Nationales, Paris, AJ 16 5536)

M. Drach, qui nous présente aujourd'hui comme thèse un essai sur une théorie générale de l'intégration, n'est pas un débutant[31]. Il s'est déjà fait connaître par un exposé original des théories modernes de l'algèbre dans l'ordre des idées de Galois[32], et on lui doit plusieurs autres mémoires qui montrent un esprit pénétrant. Le travail, que nous avons à examiner, est relatif à l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles. On sait que cette extension a déjà été faite pour les équations linéaires ordinaires, et qu'un certain groupe algébrique de transformations linéaires joue dans cette théorie le même rôle que le groupe de Galois pour les équations algébriques. On entrevoyait facilement une généralisation pour les équations différentielles ordinaires admettant un système fondamental d'intégrales, mais on avait là seulement des cas extrêmement particuliers, et la véritable généralisation ne pouvait être obtenue qu'en envisageant des équations aux dérivées partielles.

Bornons nous d'abord à un système d'équations différentielles algébriques ordinaires du premier ordre ; le problème d'étendre à un tel système les idées de Galois restait entier. Il a été complètement élucidé par M. Drach, au moins dans ses traits généraux. L'auteur considère l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre équivalente au système proposé, et il montre que l'élément jouant le rôle fondamental dans l'intégration logique de cette équation est un groupe *infini* relatif à un système de solutions distinctes de l'équation aux dérivées partielles ; ce groupe infini est lui-même défini par un système d'équations aux dérivées partielles. Cette notion capitale étant acquise, M. Drach en développe les conséquences

- 2 -

en faisant une théorie générale de la réduction. Il est très digne de remarques que M. Drach démontre directement tous ses théorèmes, sans rien emprunter aux travaux de M. Lie sur la théorie des groupes infinis, et se trouve ainsi établir d'une manière très simple les résultats essentiels de cette théorie, sans recourir à la considération des substitutions infinitésimales.

Les résultats obtenus par M. Drach sont, au point de vue philosophique et logique, d'une importance considérable ; ils témoignent d'un esprit profond et original qui a beaucoup réfléchi sur les principes de la science, et ils ouvrent une voie toute nouvelle pour la classification des transcendantes.

Nous n'avons parlé que des équations linéaires du premier ordre. Dans un autre chapitre, M. Drach pose dans toute sa généralité la question de l'intégration logique des systèmes algébriques quelconques d'équations aux dérivées partielles ; ici les résultats sont moins précis, car on ne sait si certaines opérations d'adjonction ne pourront pas se poursuivre indéfiniment.

Citons, parmi les applications particulières, le cas d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre et du premier degré. Au point de vue où s'est placé l'auteur, ces équations se partagent en *six* types distincts. Il fait ainsi complètement, presque d'un trait de plume, une discussion commencée par M. Koenigsberger, mais que la longueur de calculs, ne se rattachant à aucune idée générale, n'avait pas permis au savant géomètre de terminer.

Je crois inutile d'entrer dans plus de détails sur le travail de M. Drach, dont l'étendue est considérable quoique l'auteur reste presque toujours dans les

- 3 -

généralités. Ce n'est pas seulement une thèse excellente ; c'est un travail rempli d'aperçus originaux, qui marquera dans la science, et sera sans doute l'origine de bien des recherches.

Emile Picard

Paris, 15 mai 1898.

J'ai peu de chose à ajouter au rapport si élogieux et si détaillé de mon collègue. M. Drach est un géomètre de grand talent qui, guidé par des idées profondes, a su produire un travail original de la plus haute valeur. La forme tout à fait personnelle qu'il sait donner à son exposition explique peut-être pourquoi il n'a pas été reçu agrégé. Mais c'est un excellent professeur et l'originalité même de ses vues lui constitue un titre de plus pour les fonctions de l'Enseignement Supérieur. La Faculté le recommande d'une manière toute particulière à l'attention et à la bienveillance de M. le Ministre, d'autant plus que M. Drach, en dehors même de sa thèse, a déjà produit un assez grand nombre de travaux qui ont été accueillis de la manière la plus favorable.

G. Darboux

CORRESPONDANCE D'ERNEST VESSIOT[33]

LETTRE DE E. VESSIOT A J. DRACH

La Bauche, par les Echelles (Savoie)
le 3 octobre 1898

Monsieur et cher Camarade,

Excusez-moi de ne vous avoir pas remercié déjà de l'envoi de votre thèse [[[7]]]. Je voulais la lire avec soin, et, dans cette lecture, il m'est venu des doutes très sérieux sur le troisième chapitre. J'ai alors invité Cartan[34] à l'examiner de son côté, et il a été de mon avis. J'en ai alors dit quelques mots à M. Tannery[35], pensant qu'il était tout indiqué pour attirer votre attention sur ces points obscurs. Il a pensé qu'il valait mieux que je vous écrive directement, ce que je fais, en souhaitant vivement que vous puissiez me montrer que j'ai seulement mal interprété des démonstrations un peu rapides.

(I). *page 78* [[page 318]], *à partir de la 5^e ligne, jusqu'à la fin du § 3 du chapitre.*

Cet alinéa me paraît manquer de netteté. Voici, à mon sens, tout ce que l'on peut dire si l'on n'introduit pas, sur le système (S) [[p.27 = p.267]], d'hypothèse autre que celle qu'il est *complètement intégrable* [[p.54 = p.294]] *et irréductible* [[p.29 = p.269]] :

A chaque système fondamental [[p.76 = p.316]] particulier $z_1, z_2, \ldots, z_n$ correspondent des relations

$$(4)\quad Z_i = F_i(z_1, \ldots, z_n) ,$$

et rien n'autorise à penser que les fonctions F_i qui y figurent soient les mêmes quel que soit le système fondamental.

Les conditions (Σ) [[p.57 = p.297]] que doivent remplir les fonctions F_i resteront compliquées de dérivées des z_k par rapport aux variables $x, x_1, \ldots, x_n$, et de ces variables elles-mêmes, et on ne pourra les transformer en identités définissant ces fonctions F_i d'une manière précise que si l'on connaît effectivement les expressions de $z_1, \ldots, z_n$ en fonction des variables indépendantes.

Est-ce ainsi que vous l'entendez ? Il me paraît que non, d'après ce que vous dites par exemple page 87 [[= page 327]] (ligne 11 et les suivantes). Vous y admettez que les équations

$$(4)\quad Z_i = F_i(z_1, \ldots, z_n)$$

où les F_i correspondent à un système fondamental particulier *laissent toutes invariables les équations* (S).

La démonstration qui suit (fin de la page 87, pages 88 et 89 [[= pages 328-329]]) repose toute entière sur cette hypothèse. Cette démonstration elle-même me semble avoir besoin de compléments, mais c'est un point sur lequel je ne veux pas insister aujourd'hui.

En résumé, j'ai cru comprendre que vous admettez, *sans que rien le prouve*, que le système (S) jouit de cette propriété que son intégrale générale est liée à une solution particulière par des formules (4), où les F_i sont définis par un système (Σ) *indépendant du système fondamental particulier* $z_1,\dots,z_n$. En d'autres termes, vous admettez que ce système (S) a bien effectivement des *systèmes fondamentaux* d'intégrales.

Voici un exemple bien simple, que je dois à Cartan, et qui prouve que cela n'est pas, *au moins si l'on n'assujettit pas le système* (S) *à des conditions autres que celles que vous lui imposez.*

On prend pour $n = 1$, l'équation :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

où on suppose A_1 identiquement nul. On a alors un système irréductible

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ R(x_1, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}) = 0 , \end{cases}$$

R étant une fonction rationnelle quelconque. Et il n'a pas la propriété en question.

(II). Il résulte de là que *votre règle pour définir le groupe de rationalité* [[p.87 = p.327]] *de l'équation ne conduit pas au but. Et l'existence même de ce groupe de rationalité* (avec la double propriété fondamentale) *reste douteuse.*

Pour l'exemple précédent il y a cependant un groupe de rationalité évident,

$$Z = z .$$

(III). *pages 78 et 79* [[= pages 318 et 319]] (*tout le* § *4*).

La démonstration ne me paraît rien prouver du tout, parce que les relations

$$z_i = \Phi_i(z'_1,\dots,z'_n)$$

ne sont pas rationnelles. De sorte que le système (S) transformé ne sera pas rationnel - au moins, rien ne le prouve - par rapport aux z'_i , et l'irréductibilité de (S') ne peut plus rien prouver.

L'exemple de tout à l'heure montre encore que le théorème n'est pas exact (toujours si on n'introduit pas d'autre hypothèse que l'irréductibilité). Il suffit de prendre

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 ,$$

avec $A_1 \equiv 0$ puis

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ R(x_1, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}) = 0 \end{cases}$$

et

$$(S') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z'}{\partial x} = 0 \\ z' = x_1 \end{cases} .$$

(IV). Il y a là une *différence essentielle*, et que vous n'avez pas indiquée, avec ce qui se passe pour les équations linéaires ordinaires. C'est que, pour celles-ci, les formules qui expriment l'intégrale générale en fonction d'un système fondamental particulier sont *rationnelles*, tandis qu'ici cela n'est plus.

En sorte que je ne vois pas du tout comment peut s'étendre ici la méthode fondée sur la considération de la *réduction* (ou *décomposition*) de la résolvante générale. Vos indications sur ce sujet sont trop rapides pour qu'on puisse en rien conclure de certain.

A moins, et c'est probablement la vraie solution, mais cela ôterait bien de leur intérêt aux résultats, *de considérer comme rationnelles, quand on étudie des systèmes à* <u>*n+1*</u> *variables, toute fonction de* <u>*n*</u> *variables au moins.*

(V). Peut-être pourrait-on chercher dans une autre voie, en précisant davantage la forme des systèmes (S). Dans l'exemple de Cartan, le système résulte de deux systèmes consécutifs et rationnels :

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ z = x_1 \end{cases}$$

et

$$(b) \quad \begin{cases} R(z, Z, \dfrac{\partial Z}{\partial z}) = 0 \\ [\ \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = 0\ ] \end{cases}$$

par l'élimination de la variable intermédiaire z. Il y a là une espèce d'*imprimitivité*, dont la notion n'est pas facile à généraliser, et qu'on pourrait ne pas admettre pour les systèmes (S) à considérer.

Mais cela suffit-il ?

Et dans tous les cas, toutes les démonstrations me paraissent à créer à peu près de toutes pièces.

Je termine ici, mon cher Camarade, cette critique de votre travail. J'espère que vous ne m'en voudrez pas et que vous pourrez bientôt me montrer que mes objections ne sont pas fondées.

En attendant, je vous prie de vouloir bien croire, plus que jamais, à mes meilleurs sentiments.

E. Vessiot

LETTRES DE J. DRACH A E. VESSIOT

Paris, le 11 octobre 1898

Monsieur et cher Camarade,

J'ai reçu hier seulement votre lettre datée du 3 Octobre, c'est ce qui vous explique le retard que j'ai apporté à vous répondre dans le cas où vous l'auriez effectivement mise à la poste le jour où vous l'avez écrite. Je vous remercie d'abord d'avoir bien voulu me consulter ; vous êtes de ceux à l'opinion desquels j'attache du prix et je vais faire tout mon possible pour mériter votre approbation pleine et entière *au moins sur les points en litige.*

Je commencerai par le § 3 (page 78, ligne 5) : J'ai indiqué (ligne 17) à la fin de l'alinéa qu'on pouvait obtenir immédiatement les équations Σ quand on connaît les relations qui constituent le système irréductible S. [La méthode est évidente : On décrit les relations S où l'on a remplacé $z_1,\dots,z_n$ par $F_1(z_1,\dots,z_n)$, ... , $F_n(z_1,\dots,z_n)$ et tenant compte des équations S *et différentiant les deux systèmes* on éliminera du premier toutes les dérivées $\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$ et toutes les variables $x, x_1,\dots,x_n$. Le résultat, qui est *le système* Σ, *est donc indépendant de la solution particulière* $z_1,\dots,z_n$ *que je n'ai pas eue à préciser.*]

Il m'a paru qu'en disant cela, j'écartais l'interprétation que vous avez donnée à la phrase qui précède, *puisque je ne suppose pas du tout que l'on connaisse un système particulier de solutions du système* S. Le système Σ ainsi obtenu définit bien les transformations ponctuelles des variables $z_1,\dots,z_n$ qui appliquées à *une solution particulière quelconque* de S donnent encore une solution de S. Ce système Σ est d'ailleurs unique quand le système S est donné.

Vous voyez que je ne me suis nullement occupé de la nature de l'intégrale générale de S et que je n'ai fait sur ce système aucune hypothèse spéciale.

L'exemple que Cartan vous a fourni n'infirme en rien mon raisonnement : Le système irréductible

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ R(x_1, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}) = 0 \end{cases}$$

où R est rationnel, donnera *en général*

$$Z = z$$

par la méthode indiquée (car l'équation $R(x_1, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}) = 0$ n'admet pas *en général* de transformation infinitésimale de la forme $\xi_1 = 0$, $\zeta = \mathfrak{f}(z)$). Je puis donc conclure de là que le système Σ définit la transformation identique. Le groupe de rationalité de l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ est donc aussi formé par la transformation identique (car on a, pour toute transformation T, $TIT^{-1} = I$) et *cette équation admettra une solution rationnelle* par exemple $z = x_1$. J'observe en passant que ce n'est pas sur le système particulier S que l'on peut conclure, mais sur l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

L'examen du cas où l'on formerait un système irréductible tel que

$$(S_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = z \end{cases}$$

pour lequel le système Σ est manifestement : $z\frac{\partial Z}{\partial z} = Z$ et le groupe correspondant formé des transformations

$$Z = cz ,$$

amène aux mêmes conclusions. Il suffit d'observer que l'expression $\frac{x_1}{z}\frac{\partial z}{\partial x_1}$ est un invariant différentiel pour les transformations qui précèdent et de faire le changement de fonction

$$Z_1 = \frac{x_1}{z}\frac{\partial z}{\partial x_1}$$

(où x_1 est regardé comme une fonction de la solution *déterminée* z de l'équation $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 1$) pour transformer le système (S_1) en

$$(S_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_1}{\partial x} = 0 \\ Z_1 = x_1 \end{cases}$$

pour lequel le système correspondant à Σ est formé de la transformation identique.

Des circonstances analogues se présentent toutes les fois que le groupe de l'équation à étudier est imprimitif [[p.59 = p.299]]. Supposons qu'on ait à étudier l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

où $A_1 = \dots = A_n = 0$. Soit d'autre part

$$(S) \qquad F_i(z_1,\dots,z_n,\frac{\partial z_1}{\partial x_1},\dots,x_1,\dots,x_n) = 0 \;, \qquad \frac{\partial z_k}{\partial x} = 0$$

$(i=1,2,\dots,p)$ $(k=1,\dots,n)$ un système *irréductible* quelconque, définissant $z_1,\dots,z_n$ comme fonctions de $x_1,\dots,x_n$ (le système ne peut renfermer x d'après sa définition même) ; supposons que le système S admette toutes les transformations

$$Z_i = \Psi_i(z_1,\dots,z_n,c_1,\dots,c_h)$$

lesquelles forment nécesairement un groupe *fini* (car le nombre des variables est égal à celui des fonctions). On peut évidemment tirer des équations S, puisque $x_1,\dots,x_n$ sont des fonctions indépendantes, des relations de la forme

$$x_i = \Phi_i(z_1,\dots,z_n,\frac{\partial z_1}{\partial x_1},\dots,x_1,\dots,x_n)$$

où les Φ_i sont des invariants indépendants du groupe considéré. Envisageons maintenant un système bien déterminé $z_1,\dots,z_n$ de solutions des équations S. On peut regarder $x_1,\dots,x_n$ comme des fonctions de $z_1,\dots,z_n$ et l'on transforme ainsi les Φ_i en fonctions de $z_1,\dots,z_n$ seuls. Il suffira de poser

$$Z_i = \varphi_i(z_1,\dots,z_n)$$

en désignant par φ_i les fonctions ainsi obtenues pour transformer (S) en un système

$$(S') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_i}{\partial x} \\ Z_k = x_k \end{cases}$$

pour lequel le groupe de rationalité est formé de la seule transformation identique.

Ces remarques me paraissent suffire pour établir que le groupe de rationalité d'une équation linéaire est toujours bien déterminé, à une transformation près du groupe ponctuel général en $z_1,\dots,z_n$. Cette transformation peut comme tout à l'heure être définie par des transcendantes non uniformes dont les diverses branches se permutent entre elles par les transformations d'un groupe, ou ce qui est la même chose des fonctions uniformes qui admettent toutes les transformations du même groupe.

D'ailleurs on n'a même pas à faire les observations qui précèdent quand on recherche le groupe de rationalité *d'une façon régulière*, en formant les résolvantes relatives aux invariants différentiels de groupes de moins en moins étendus et recherchant si elles admettent des solutions rationnelles. Il n'est pas douteux que toutes les fois que ces résolvantes admettent des solutions rationnelles *arbitraires* ou *dépendant des constantes arbitraires* on peut encore réduire le groupe par un choix particulier des arbitraires. Il ne suffira donc pas, pour obtenir le groupe *sous sa forme canonique,* de donner à ces constantes des déterminations telles que le système S correspondant soit irréductible, mais on devra continuer les recherches parmi les sous-groupes de celui que l'on considère et *l'on n'est certain d'avoir le groupe de rationalité qu'après une épreuve négative.*

Je pense que ces quelques mots lèveront vos objections I et II et je passe à la troisième relative au § 4, pages 78 et 79. Il ne me semble pas que vous ayiez remarqué que je pars de deux systèmes irréductibles S et S' (nécessairement formés d'équations rationnelles) pour remonter aux relations

$$z_i = \Phi_i(z_1', \ldots, z_n')$$

dans lesquelles les Φ_i sont ou *rationnelles* ou *transcendantes, mais non pas des transcendantes quelconques,* comme je l'ai rappelé dans la conclusion en italique (page 80 [[= page 320]], ligne 2).

Un exemple simple de transformations transcendantes faisant passer d'un système S rationnel à un autre S' également rationnel est le suivant :

$$\left.\begin{array}{ll} (S) & \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = 1 \\ (S') & \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = 1 \end{array}\right\} Z = \log z + k$$

qui donne la transformation du groupe $z' = cz$ en $Z' = Z + const.$ Un autre exemple est donné par le système même que vous considérez

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ R(x_1, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}) = 0 \end{array}\right. \qquad (S') \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ Z = x_1 \end{array}\right.$$

où Z est défini comme fonction de z par la seule relation

$$R(Z, \frac{\partial z}{\partial Z}, z) = 0$$

qui est d'ailleurs équivalente à

$$Z = x_1 + R(x_1, \frac{\partial z}{\partial x_1}, z) = x_1$$

où x_1 est la fonction inverse d'une solution *déterminée* et quelconque de

$$R(x_1, \frac{\partial z}{\partial x_1}, z) = 0 .$$

Si ces indications vous paraissent suffisantes, elles entraînent avec elles (du moins à mon avis, que j'espère vous voir partager) la caducité des observations qui forment les paragraphes IV et V de votre lettre. En définitive il me semble que toute votre discussion tient à un simple malentendu dans la compréhension du § 3 où j'aurais pu mettre en italiques la phrase qui précède la conclusion du paragraphe.

Je suis d'ailleurs loin de prétendre que tout est parfait dans mon travail (j'ai moi-même indiqué plusieurs points qui me paraissent mériter d'être approfondis, ce à quoi j'espère m'appliquer prochainement si les conditions matérielles dans lesquelles je me trouverai me le permettent), mais je crois néanmoins que les choses essentielles y sont établies avec le degré de rigueur habituel aux écrits du même ordre : travail de débutant et rien de plus.

C'est dans l'espoir de vous voir partager cette conviction que je termine.

Veuillez agréer, Monsieur et cher Camarade, l'expression de mes respectueux sentiments.

Jules Drach
7, rue Toullier [[75005]]

Paris, le 15 octobre 1898

Monsieur et cher Camarade,

Sur le conseil de M. Painlevé avec lequel j'ai parlé hier de vos critiques et des réponses que j'y avais faites, je vous écris à nouveau pour appeler votre attention sur un point de ma lettre. M. Painlevé pense que j'éviterai tout malentendu en disant simplement : *Le système* Σ *définit les transformations ponctuelles des éléments* $z_1, \ldots, z_n$ *qui n'altèrent pas le système* S.

En réfléchissant depuis sur ce sujet je vois qu'on peut tout expliquer d'un seul mot : *Les systèmes irréductibles tels que* S, *que je considère, sont parmi tous ceux que l'on peut former ceux qui sont d'ordre minimum.* Cette idée qui a toujours été dans mon esprit et que je n'ai peut-être pas mise assez en évidence bien que je m'en sois servi plusieurs fois, en faisant remarquer par exemple que tous les systèmes S ou Σ sont du même ordre, m'a empêché de saisir complètement votre première objection. Il est clair en effet que pour ces systèmes S la solution générale de Σ a le même degré de généralité que la solution générale de S, en d'autres termes le système S possède des systèmes fondamentaux d'intégrales. Quelle que soit la manière dont vous la formiez, c'est-à-dire en différentiant jusqu'à un ordre quelconque, le système Σ demeure le même.

J'écarte en effet ainsi tous les systèmes S_i qui dérivent des systèmes d'ordre minimum S par des transformations transcendantes, dépendant nécessairement de constantes arbitraires, *qui élèvent l'ordre de différentiation de* S. En particulier dans l'exemple que Cartan donne

$$(S_i) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ R(x_1, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, z) = 0 \end{cases}$$

ce système S_i qui n'est pas d'ordre zéro est transformé du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ Z = x_1 \end{cases}$$

qui est d'ordre zéro (*l'ordre est celui des équations nouvelles que l'on ajoute*) par la transformation transcendante définie par l'équation :

$$R(Z, \frac{\partial z}{\partial Z}, z) = 0 .$$

Ces difficultés tiennent en définitive au rôle singulier de la transformation identique qui demeure inaltérée par une transformation quelconque, même dépendant de paramètres.

Inutile d'ajouter qu'*elles ne se présentent pas dans la recherche régulière du groupe de rationalité* où l'on trouve nécessairement d'abord les systèmes S d'ordre minimum, ce n'est que lorsqu'on se donne au hasard un système S qu'il y a lieu de s'en occuper.

J'ai d'ailleurs l'intention de développer prochainement un certain nombre des points que je n'ai fait qu'indiquer dans ma thèse et *je ne manquerai pas d'appeler l'attention sur celui-là*. Je pense que maintenant nous serons entièrement d'accord et je vous prie, Monsieur et cher Camarade, d'agréer l'expression de mes sentiments respectueux.

Jules Drach

P.S. Je rappellerai encore *comme je l'ai indiquée dans ma lettre* que de la connaissance d'un système irréductible S_i (d'ordre non minimum) on déduit immédiatement le groupe Σ, dont le type ne change pas, par conséquent aussi l'existence d'un autre système irréductible S d'ordre minimum et la nature de la transformation qui ramène S_i à S.

LETTRE DE E. VESSIOT A J. DRACH[36]

La Bauche, par Les Echelles(Savoie),
le 16 octobre 1898

Monsieur et cher Camarade,

Votre lettre est très intéressante, et m'a montré qu'il y a pas mal de locutions que nous n'entendions pas de la même manière. Je crois qu'aujourd'hui nous pourrons préciser davantage, car je vous avoue que je conserve encore bien des doutes.

La question qu'il nous faut d'abord élucider est la suivante. Quel est le sens exact des résultats énoncés dans votre thèse ? Et les démonstrations qui y sont données sont-elles satisfaisantes ? Car, dans un sujet aussi important, il importe de savoir à quel point on en est, et ce qui est acquis.

Je vais donc, si vous le permettez, serrer le texte d'un peu plus près. Et je vous serai très reconnaissant de vouloir bien me signaler de nouveau mes erreurs d'interprétation.

1°) [[Vessiot a ajouté à sa lettre : "Objet des I et II du Ch. III. Etablir l'existence du groupe de rationalité. Montrer que le procédé employé donne un seul type de groupes."]] Sur le point de départ § 3, page 78, il n'y a plus d'ambiguïté, je crois.

Vous partez d'un système (S) assujetti aux seules conditions d'être formé d'équations rationnelles, complètement intégrable et irréductible, et vous en déduisez le système (Σ), qui définit les transformations qui laissent le système (S) invariable. Elles forment un groupe Γ .

2°) Je passe au § 4. La question est bien posée au bas de la page 78. La réponse ne me paraît pas aussi claire.

Reprenant l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$

avec $A_1 \equiv 0$, j'essaie de suivre le texte en prenant

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = R(x_1)\ z \end{cases}$$

(R rationnel quelconque) et je trouve

$$(\Sigma) \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{z}\,Z\ .$$

Je prends ensuite

$$(S') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z'}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z'}{\partial x_1} = z' \end{cases}$$

et je trouve

$$(\Sigma') \quad \frac{dZ'}{dz'} = \frac{1}{z'}\, Z' \; .$$

Posant ensuite

$$z = \Phi(z')$$

je cherche les conditions auxquelles doit satisfaire Φ pour que, si z' vérifie le système (S'), $z = \Phi(z')$ vérifie le système (S) ; c'est-il bien cela ?

En suivant vos indications, j'ai successivement :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Phi'(z')\,\frac{\partial z'}{\partial x_1} = z'\,\Phi'(z')$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = z'^2\,\Phi''(z') + z'\,\Phi'(z')$$

et j'arrive à la condition

$$(\alpha) \quad z'^2\,\Phi'' + z'\,\Phi' = R(x_1)\,\Phi \; ,$$

et il me paraît que la condition (A) [[p.79 = p.319]] s'obtiendra en éliminant x_1 entre cette équation (α) et celle qu'on obtient en la différentiant, c'est-à-dire

$$(\beta) \quad z'^3\,\Phi''' + 3\,z'^2\,\Phi'' + z'\,\Phi' = R'(x_1)\,\Phi + R(x_1)\,z'\,\Phi' \; .$$

Vous dites que les relations (A) expriment qu'en posant

$$z = \Phi(z') \qquad Z = \Phi(Z')$$

dans les équations (Σ) on tombera sur les équations (Σ). Or, si je cherche les transformations jouissant de cette dernière propriété, je trouve la condition

$$\frac{\Phi'(Z)}{\Phi(Z)} = \frac{\Phi'(z')}{\Phi(z')} \; ,$$

donc = constante, c'est-à-dire

$$\Phi = a\, e^{bz'}$$

ou

$$\Phi = mz' \; .$$

Ce qui n'a aucun rapport avec la condition (A) précédente.

Voulez-vous m'indiquer, sur cet exemple même, où j'ai déraillé ?

3°) Je passe au § 8 [[p.86 = p.326]] . Un passage de votre lettre me fait concevoir un doute sur le sens du résultat. A la lecture, il ne paraît cependant pas douteux : Vous partez d'un système (S) quelconque (hypothèses énoncées au 1°) de cette lettre), et vous concluez que *ce même système* peut se mettre sous la forme canonique

$$\Omega_i = \alpha_i(x, x_1, \ldots, x_n)$$

où les Ω_i sont des invariants différentiels de Γ *formant un système complet,* et les α_i des fonctions rationnelles des variables. Est-ce bien cela ?

Or je cherche encore à suivre le texte sur un exemple

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = R(x_1)\, z \end{cases}$$

que j'écris, d'après vous,

$$(S)\quad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - R(x_1) = 0 .$$

J'ai ensuite

$$(T)\quad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - R(x_1) = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} - R(x_1)$$

c'est-à-dire

$$(\Theta)\quad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} ,$$

où n'intervient que le seul invariant différentiel

$$\Omega = \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} .$$

Et si je prends

$$U = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x_1} ,$$

il m'est impossible de comprendre les dernières lignes de la page 88.

Le système (S) ne peut pas ici se mettre sous une forme autre que

$$\Omega = \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = R(x_1)$$

et Ω ne constitue pas un système complet d'invariants du groupe (Γ)

$$Z = mz .$$

Que dois-je encore conclure ?

4°) Pour ce qui est du § 10 [[p.91 = p.331]] , je suis bien obligé, pour pouvoir faire la même étude, d'attendre vos réponses aux observations précédentes. Cependant, du moment que les systèmes

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\[2mm] z = x_1 \end{cases}$$

$$(S')\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial z'}{\partial x} = 0\\[2ex]\dfrac{\partial z'}{\partial x_1} = z'\end{array}\right.$$

traités comme vous l'indiquez dans les pages que nous venons d'étudier, donnent les deux groupes

$$(\Gamma) \quad Z = z \quad \text{et} \quad (\Gamma') \quad Z' = mz' ,$$

il me paraît difficile d'admettre que la conclusion [[p.92 = p.332]] :

"Nous voyons <u>donc</u> que, à toute équation etc... correspond <u>un</u> type de groupes Γ " résulte des développements précédents.

16 octobre 1898

Monsieur et cher Camarade,

Je reçois votre nouvelle lettre au moment où j'allais remettre la mienne au facteur. Réflexion faite, je vous l'envoie quand même, car je crois qu'elle vous montrera que vos démonstrations et explications sont beaucoup trop rapides. Et si j'ose vous donner un conseil, en toute franchise, ce serait de reprendre la question *entièrement* dans le nouveau travail que vous m'annoncez.

Vous êtes décidé à introduire une nouvelle hypothèse, bien naturelle, relative aux systèmes (S). Ce seront ceux qui sont d'*ordre minimum* parmi ceux que vous aviez admis dans votre thèse. Ne croyez-vous pas que ce terme même "*ordre minimum*" , quand il s'agit de systèmes d'équations aux dérivées partielles, demande absolument à être précisé ?

Vous avez l'*intuition* que de cette propriété résulte que la solution générale de (Σ) doit présenter le même degré de généralité que celle de (S). Je pense que cela ne peut pas s'admettre sans une démonstration précise. Car il s'agit en définitive de donner le procédé qui permettra, lorsque (Σ) n'aura pas le même degré de généralité que (S), de déduire de ce dernier un système de même nature et d'ordre moindre. Cela se voit facilement sur l'exemple particulier en question, mais je n'en aperçois pas encore la raison générale et *démonstration*.

Ce point étant mis hors de doute, il restera à prouver rigoureusement que deux systèmes (S) d'ordre minimum fourniront des groupes appartenant au même type. Cela paraît vraisemblable, comme étant l'hypothèse la plus simple à faire, et aussi parce qu'il paraît naturel qu'un système donné définisse une seule espèce de transcendantes. Mais il faudrait le mettre hors de doute par une démonstration inattaquable. Ce que je vous ai écrit plus haut sur votre § 4 vous montrera, je crois, qu'il faut être très méfiant pour des démonstrations de cette nature.

Enfin, je suis persuadé que vous viendrez à bout de ces difficultés, mais je ne crois pas que l'on puisse, comme vous le dites, régler ces questions d'un seul mot.

LETTRE DE P. PAINLEVE A E. VESSIOT

Paris, le 17 octobre 1898

Cher Ami,

Je viens de lire la thèse de Drach, et je suis absolument d'accord avec toi sur l'inexactitude des deux théorèmes fondamentaux et de leur démonstration. L'erreur est même tellement grosse que j'ai peine à concevoir qu'elle ait échappé à l'auteur et au jury. C'est fort triste pour ce pauvre Drach. Je l'ai averti de mon opinion, en lui disant que, pour que la suite de sa thèse subsistât, il faudrait qu'il fût en état de substituer le théorème suivant à son théorème :

"Parmi *tous* les systèmes réduits irréductibles S, il en est un S_1, d'ordre différentiel *minimum*, tel que son intégrale générale se déduise d'une solution particulière par les transformations d'un sous-groupe du groupe ponctuel général de l'espace $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Ce système S_1 est défini à la transformation ponctuelle près la plus générale de l'espace $(z_1, \ldots, z_n)$."

Ce théorème est-il exact ? Je n'en suis rien moins que sûr, surtout dès que le nombre des variables indépendantes dépasse 2. En tout cas, il n'y a pas dans la thèse de Drach la moindre indication d'une démonstration possible d'un tel théorème. Cette démonstration constitue en définitive toute la difficulté de la théorie, et je suis persuadé que cette difficulté est très grande (en admettant que le dit théorème soit exact).

J'ai dit à Picard que j'avais reçu une lettre de toi sur la question : après quelques minutes d'explications, il a sursauté en s'étonnant d'avoir laissé passer la chose. Je crois, en effet, qu'il ne peut subsister l'ombre d'un doute pour quiconque réfléchit cinq minutes à la chose.

Je suis, comme toi, bien en retard avec l'*Encyclopédie*[37]. J'achève mon article en ce moment, en me mordant les pouces d'avoir accepté. Je conçois que tu n'aies guère eu le coeur pour mathématiques après ces deux terribles secousses que vous avez éprouvées. J'ai passé moi-même de tristes vacances, très tourmenté de la santé d'une de mes soeurs qui commence seulement à aller mieux. Je n'ai quitté Paris que quelques jours en septembre, et j'ai regretté vainement l'air pur de la Savoie.

J'espère, mon cher Ami, que cette année apportera quelque adoucissement à vos grands chagrins de l'année dernière, et je te prie de me rappeler au bon souvenir de Madame Vessiot et de tous les tiens.

A toi bien cordialement.

Paul Painlevé

NOTES DE LA REDACTION

1 J. Tannery écrit dans la *Préface* (p.II) : "Drach [[...]] a déjà acquis de nombreuses connaissances, dans des domaines variés ; il est de ceux qui se préoccupent avant tout du fond des choses, qui restent mécontants et inquiets tant qu'ils n'ont pas atteint le roc. Cette tendance philosophique de l'esprit est un danger quand elle travaille à vide, qu'elle n'est pas accompagnée de la connaissance des faits." Il ajoute (p.III) que c'est Drach qui s'est chargé de l'algèbre, et qu'il "avait assumé la plus lourde tâche, c'est lui qui a fait oeuvre personnelle".

2 J. Drach écrit (p.76) : "Terminons en observant que ce que nous appelons *intégration logique* est probablement ce que Galois entendait, dans sa lettre à A. Chevallier, par *théorie de l'ambiguïté en analyse.*"

3 Il s'agit de la thèse de J. Drach. Dans le compte rendu de *Jahrbuch Fort. Math.*, 29 (1898), on signale *die weitschichtige Abhandlung* (p.350) et que *eine Darlegung des Anwendbarkeit die eingeführten Begriffsbildungen ... were sehr wünschenswert* (p.351).

La thèse a eu lieu en juin 1898 et le jury était composé de G. Darboux, président, E. Picard et H. Poincaré, examinateurs.

4 Il s'agit du développement de la Note [9].

5 Voir J. Hadamard, *Sur les lignes géodésiques, à propos de récente Note de M. Drach* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 148(1909), 272-274).

6 J. Drach écrit (p.1145) qu'il s'agit dans cette Note de l'équation différentielle de la surface des ondes de Fresnel "qui a donné lieu à de nombreuses recherches".

7 Nous n'avons pas consulté les pages 521 à 578.

8 Dans le compte rendu de *Jahrbuch Fort. Math.*, 43(1912), on note (p.682) : *Nähere Ausführungen wären erwünscht.*

9 Il s'agit du développement de la Note [26].

10 Dans le compte rendu de *Jahrbuch Fort. Math.*, 46(1916-1918), on écrit (p.679) : *Ihr [[Untersuchungen]] Gegenstand sind die Vereinfachung und Reduktionen, die sich für Integration der partiellen und gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen im Falle besonderer Rationalitätsgruppe ergeben.*

11 J. Drach fait un *Examen historique* (p.58-94) et note (p.58) : "Il s'agit de montrer comment se situent, dans la théorie générale qui vient d'être exposée, les résultats particuliers dus à l'ingéniosité des géomètres qui se sont occupés [[d'Alembert et Siacci]] , *au point de vue théorique,* de l'équation de la balistique extérieure."

12 J. Drach écrit (p.357) : "J'ai étudié les cas de réduction possible d'une équation du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2} = [\varphi(x) + h]\ y$, où $\varphi(x)$ est à déterminer et h un paramètre variable ; dans les cas où l'intégration de l'équation se ramène aux quadratures, on peut déterminer effectivement la fonction $\varphi(x)$." (Notes [30] et [32]).

13 J. Drach note (p.22) : "Depuis que ces lignes sont écrites, nous avons pu rattacher cette question à un problème plus général." (Note [44]).

14 Nous n'avons pas consulté ce mémoire.

15 Voir : R.G.D. Richardson, *J. Drach, Integration by linear systems of equations of the type* $r + f(s,t) = 0$ (Bull. Amer. Math. Soc., 33(1927), 412), où il écrit : *This papers gives some unexpected results on the general integration by linear systems of equations :* $r + f(s,t) = 0$.

16 Voir : R.G.D. Richardson, *J. Drach, Determination of Liouville's elements of length with algebraic integrals for the equation of geodesics* (Bull. Amer. Math. Soc., 33 (1927), 12).

17 P. Appell écrit dans la *Préface* : "La section de Géométrie [[de l'Académie des Sciences de Paris]] espère pouvoir, avec le concours de M. Jules Drach [[...]], qui a bien voulu se charger de revoir les manuscrits et les épreuves, faire paraître les tomes successifs."

18 Il s'agit de l'exposé le plus complet de la théorie de l'intégration logique. J. Drach écrit dans ce mémoire (p.482) : "J'ai montré, par des exemples, ce qu'il faudrait envisager comme *opération explicite* pour traiter des cas étendus." (Il renvoie à l'exposé [37]). Il ajoute encore (p.483) : "Un autre exemple - lié à la *déformation infiniment petite des surfaces minima* - est celui des cas de réduction aux quadratures de l'équation linéaire $\frac{d^2y}{dx^2} = [\varphi(x) + h]\ y$." Il considère également (p.507) l'exemple de l'équation : $\rho' + \rho^2 = \varphi(x) + h$, et renvoie à la Note [30].

19 Il s'agit de la Note de T. Levi-Civita : *Sur les surfaces admettant un réseau triangulaire de lignes parallèles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 193(1931), 1371-1373).

20 J. Drach écrit (p.588) : "Les fonctions méromorphes (ou entières) définies ainsi ont été nommées *fonctions de Painlevé*. La raison profonde de leur *nouveauté* doit être cherchée dans la théorie du *groupe de rationalité* (au sens de M. Drach) de l'équation aux dérivées partielles correspondante." Il renvoie (p.589) au mémoire [27].

21 Nous n'avons pas consulté ce mémoire.

22 On écrit dans le compte rendu de *Math. Reviews*, 8(1947), p.115 : *The author does not seem to be awere of the much more complete results of H. Geiringer* (Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques, Mémoir. Sci. Math. n° 86, Paris, 1937).

23 Il s'agit (p.135-136) d' "une leçon faite, en 1892, par Jules Drach, à l'Ecole Normale Supérieure, comme exercice de préparation à l'agrégation".

24 Les chiffres entre crochets renvoient à la *Liste des travaux de Jules Drach.*

25 A l'intérieur des citations, nos notes sont placées entre les doubles crochets [[ ]].

26 H. Lebesgue parle, p.265, du point de vue "voisin de celui de Kronecker et de M. Drach".

27 D. et G. Chudnovsky nous ont écrit le 30 janvier 1980 qu'ils ont prouvé "en 1977 que les systèmes de Drach et de Garnier sont en effet équivalents", et que "les systèmes de Garnier et de Drach ont réapparu indépendamment vers les années 1970". Cette lettre contient également une importante bibliographie sur les équations stationnaires de Korteweg-de Vries et leurs applications.

28 J. Drach avait posé, dans une lettre du 19 mars 1929 (dossier J. Drach, Archives de l'Académie des Sciences de Paris), sa candidature dans la section de *Mécanique* de l'Académie des Sciences de Paris, H. Villat étant déjà candidat. Il écrit à ce propos, à "son cher Collègue et Président" : "Si vous n'êtes pas partisan d'une étroite spécialisation et admettez la présence d'un *théoricien* dans la Section de Mécanique, qui en a compté quelques-uns (dont Monge et Cauchy par exemple), je vous serais reconnaissant de l'aide que vous voudrez bien apporter à cette thèse."

J. Drach fut élu le 10 juin 1929 membre de l'Académie des Sciences de Paris.

29 J. Drach écrivait, le 12 novembre 1941 de Cavalaire sur Mer (Var), à A. Lacroix, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris : "Veuillez agréer ici [[...]] l'expression de la peine profonde que nous resentons pour la disparition de notre vénéré et illustre Maître, Emile Picard. Il a été pendant plus de cinquante ans le Maître incomparable, aimé et admiré, de tous les mathématiciens français. Son influence a été capitale sur la destinée de la plupart d'entre nous. [[...]]

A nos débuts, il nous a été donné d'entendre l'enseignement de Maîtres d'exception Ch. Hermite, E. Picard, H. Poincaré, G. Darboux, P. Appell pour ne citer que ceux-là, qui depuis ont honoré grandement l'Académie : nous n'avons pleinement apprécié à ce moment quel précieux privilège c'était ; je saisis cette occasion pour manifester, en mon nom et pour mes camarades d'alors, toute ma reconnaissance."

30 La soutenance a eu lieu le 24 juin 1898.

31 Voir les n^{os} [1] à [6] de la *Liste des travaux de Jules Drach* ; le n° [7] est la thèse de Drach.

32 Il s'agit de [3].

33 Ces lettres nous ont été communiquées par J.F. Pommaret.

34 Elie Cartan.

35 La thèse de Drach est dédié "A Messieurs Emile Picard et Jules Tannery hommage de respectueuse reconnaissance".

36 Nous ne savons pas si cette lettre, qui ne porte pas la signature de Vessiot, a été envoyée à Drach, et nous ne connaissons pas, si elle existe, la réponse de Drach.

37 *Encyclopédie des Sciences mathématiques* publiée par Gauthier-Villars.