ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations January 2000, Vol. 5, p. 87–137
URL: http://www.emath.fr/cocv/

CONTRÔLE ET STABILISATION D'ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES *

Kim Dang Phung[1]

Abstract. We consider the exact controllability and stabilization of Maxwell equation by using results on the propagation of singularities of the electromagnetic field. We will assume geometrical control condition and use techniques of the work of Bardos *et al.* on the wave equation. The problem of internal stabilization will be treated with more attention because the condition div$E = 0$ is not preserved by the system of Maxwell with Ohm's law.

Résumé. Nous étudions la contrôlabilité exacte et la stabilisation des équations de Maxwell par le biais de la propagation des singularités du champ électromagnétique dans un domaine borné. Les résultats présentés s'inspirent des travaux de Bardos *et al.* sur le contrôle géométrique. Notre intéret se portera plus particulièrement sur la stabilisation interne où l'on doit considérer le système de Maxwell avec loi d'Ohm avec une densité de charge non nulle.

AMS Subject Classification. 93B05, 93B07, 35B40, 35Q60.

Reçu le 4 février 1998. Révisé le 27 octobre 1998, le 18 février et le 13 septembre 1999.

Table des matières

Keywords and phrases: Contrôlabilité, stabilisation, équation de Maxwell.

* Ce travail a été financé par la DRET/DCN/CNRS, je les en remercie.

[1] Centre de Mathématiques et leurs Applications, CMLA, École Normale Supérieure de Cachan, ENS, Cachan, France; e-mail: phung@cmla.ens-cachan.fr

Introduction

Cet article est consacré à une utilisation systématique des notions de propagation de singularité pour le contrôle et la stabilisation des ondes électromagnétiques dans un domaine borné.

Comme il s'agit de problèmes linéaires, la difficulté essentielle réside, comme pour l'équation des ondes, dans l'obtention d'estimations d'observations (*cf.* [8,9,11]). Pour le cas du contrôle ou de la stabilisation des équations de Maxwell, il faut bien entendu se placer (comme Barucq et Hanouzet (*cf.* [1,3])) dans l'orthogonal de l'ensemble des données laissées invariantes par le groupe ; ensuite, on observe que des estimations microlocales L^2 conduisent à la fois à des résultats presque optimaux et à des preuves sensiblement plus simples que celles proposées par Nalin (dans le cadre du contrôle frontière (*cf.* [16])) et de Yamamoto (dans le cadre de la propagation des singularités (*cf.* [27])).

Il convient de remarquer que la stabilisation par le bord s'apparente à l'introduction de conditions aux limites absorbantes destinées à simuler numériquement une condition de radiation à l'infini. La difficulté essentielle dans le cas de la stabilisation interne provient de la non conservation de la condition $\mathrm{div}E = 0$, il faut donc considérer des équations de Maxwell avec une densité de charge non nulle. Si des estimations locales en temps sont évidentes à obtenir, il n'en est pas de même pour les estimations asymptotiques ($t \longrightarrow \infty$). Ainsi, on a obtenu dans ce cadre différents résultats.

La décroissance uniforme et exponentielle des solutions de système de Maxwell avec loi d'Ohm lorsque le champ électrique est amorti partout.

Il en est de même, sous l'hypothèse géométrique des travaux de Bardos *et al.* (*cf.* [5]), si l'amortissement σ vérifie les relations : $\sigma(x) \geq \alpha > 0 \;\; x \in \omega_+$, $\sigma(x) \equiv 0 \;\; x \in \omega_- = \Omega \backslash \omega_+$.

Le cas où l'amortissement s'annule de manière régulier (continue ou C^1) est sensiblement plus difficile comme tel avait déja été observé par Lebeau (*cf.* [10]) pour la stabilisation frontière de l'équation des ondes. Ici, nous obtenons pour un sous-espace de données initiales compatibles un théorème de décroissance polynomiale.

1. Propagation des singularités

Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^3$. Le domaine Ω est occupé par un champ électromagnétique (E, H) avec une permittivité ε et une perméabilité μ constantes strictement positives. Le système de Maxwell s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}H = 0,\; \mu\partial_t H + \mathrm{rot}E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R} \\ \mathrm{div}\,(\varepsilon E) = 0,\; \mathrm{div}\,(\mu H) = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R} \\ E\wedge n = 0,\; H.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ E\,(\cdot,0) = E_o,\; H\,(\cdot,0) = H_o \quad \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{1.M}$$

Ainsi, le champ électrique E est solution du système hyperbolique

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\mu\partial_t^2 E - \Delta E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R} \\ E\wedge n = 0,\; \mathrm{div}E = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ E\,(\cdot,0) = E_o,\; \partial_t E\,(\cdot,0) = \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}H_o \quad \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{1.E}$$

et, le champ magnétique H est solution du système hyperbolique

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\mu\partial_t^2 H - \Delta H = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R} \\ H.n = 0,\ \mathrm{rot}H\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ H(\cdot,0) = H_o,\ \partial_t H(\cdot,0) = -\mu^{-1}\mathrm{rot}E_o \quad \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{1.H}$$

Aussi, les champs E et H des systèmes (1.E) et (1.H) vérifiant $\mathrm{div}E_o = \mathrm{div}H_o = 0$ sont solutions du système de Maxwell (1.M).

On suppose l'ouvert Ω, à bord $\partial\Omega$, régulier (C^∞ sans contact d'ordre infini avec ses tangentes). On se propose de rappeler certains résultats concernant les singularités de U et V distributions prolongeables (*i.e.* $(U,V)\in\left(\mathcal{D}'\left(\overline{\Omega}\right)\right)^6$) solutions des deux problèmes hyperboliques suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t^2 U - c_o\Delta U = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R} \\ U\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ \mathrm{div}U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \end{array}\right. \quad \textit{et} \quad \left\{\begin{array}{c} \partial_t^2 V - c_o\Delta V = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R} \\ V.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ \mathrm{rot}V\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R} \end{array}\right.$$

où c_o est une constante strictement positive.

Notions de géométrie symplectique

Nous commençons par définir différents objets de géométrie différentielle à partir de coordonnées locales sachant que ces définitions sont intrinsèques [14].

On introduit $\mathcal{C}$ la variété caractéristique de l'opérateur hyperbolique $P = \partial_t^2 - c_o\Delta$:

$$\mathcal{C} = \left\{(x,t,\xi,\tau)\in T^*\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\right)\backslash 0\ , -\tau^2 + c_o|\xi|^2 = 0\right\}.$$

On pose $p(x,t,\xi,\tau) = -\tau^2 + c_o|\xi|^2$, le symbole principal de P, une fonction à valeur réelle définie sur l'espace cotangent $T^*(\Omega\times\mathbb{R})\backslash 0$.

Le champ de vecteur Hamiltonien associé à p, H_p, sur $T^*(\Omega\times\mathbb{R})\backslash 0$ est donné par :

$$H_p = \sum_{j=1}^{3} 2c_o\xi_j\partial_{x_j} - 2\tau\partial_t.$$

Les courbes intégrales du champ de vecteur Hamiltonien H_p contenues dans $p^{-1}(0) = \mathcal{C}$ sont appelées courbes bicaractéristiques.

On pose $I = [s_0; s_1]\subset\mathbb{R}$ et $\gamma(s) = (x(s), t(s), \xi(s), \tau(s))$ le flot de H_p, avec $s\in I$. Nous avons à résoudre le système de Hamilton-Jacobi suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{ds}x_j = 2c_o\xi_j(s) \\ \frac{d}{ds}t = -2\tau(s) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d}{ds}\xi_j = 0 \\ \frac{d}{ds}\tau = 0 \end{array}\right.$$

avec des conditions initiales $\gamma(s_0)\in T^*\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\right)\backslash 0$ et $p(\gamma(s)) = 0$ où $s\in I$.

Changement de coordonnées redressant localement le bord

L'étude des singularités de U près du bord se ramène au cas du demi-espace grâce à un changement de coordonnées locales [14].

En posant le domaine Ω sous la forme $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3)\setminus x_3 - g(x_1,x_2) > 0\}$, la normale au bord $\partial\Omega$ ne dépend que des variables (x_1,x_2) et s'écrit :

$$n = \begin{pmatrix} \nu m_1 \\ \nu m_2 \\ \nu \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \nu^2\left(1 + m_1^2 + m_2^2\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 = -\partial_{x_1}g \\ m_2 = -\partial_{x_2}g. \end{array}\right.$$

On considère alors le changement de coordonnées Ψ suivant :

$$\Psi : (s, y_1, y_2) \longmapsto (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, g(y_1, y_2)) + s(n_1, n_2, n_3) \tag{1.1}$$

où $(n_1, n_2, n_3) = n$ en les variables (y_1, y_2), le jacobien de Ψ s'écrit alors sous la forme :

$$Jac_\Psi = \begin{pmatrix} 1 + s\partial_{y_1} n_1 & s\partial_{y_2} n_1 & \nu m_1 \\ s\partial_{y_1} n_2 & 1 + s\partial_{y_2} n_2 & \nu m_2 \\ -m_1 + s\partial_{y_1} n_3 & -m_2 + s\partial_{y_2} n_3 & \nu \end{pmatrix}$$

sur le bord, *i.e.* quand $s = 0$, on a :

$$Jac_\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu m_1 \\ 0 & 1 & \nu m_2 \\ -m_1 & -m_2 & \nu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(Jac_\Psi) = \frac{1}{\nu} \neq 0, \quad Jac_\Psi^{-1} = \nu^2 \begin{pmatrix} 1 + m_2^2 & -m_1 m_2 & -m_1 \\ -m_1 m_2 & 1 + m_1^2 & -m_2 \\ \frac{m_1}{\nu} & \frac{m_2}{\nu} & \frac{1}{\nu} \end{pmatrix}.$$

Classification microlocale de Melrose et Sjöstrand des points du bord

L'opérateur P est localement de la forme :

$$P = \partial_t^2 - c_o \left(\partial_s^2 - H(s, y_1, y_2, \partial_{y_1}, \partial_{y_2}) \right)$$

où H admet un symbole principal h elliptique du second ordre.

Le symbole tangentiel de P est noté :

$$r(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau) = h(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2) - \frac{1}{c_o}\tau^2.$$

Il apparaît une classification des points de $p^{-1}(0) \cap T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R}) \backslash 0$ sous la forme suivante :

- les régions hyperboliques $\mathcal{H}$ sont caractérisées par $r(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau) < 0$.
- Les régions $\mathcal{G}$ dites glancing sont caractérisées par $r(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau) = 0$.

On distingue, de plus, les points de $\mathcal{G}$ suivant la convexité ou la concavité du bord. En considérant Σ_b l'image de $p^{-1}(0) \cap T^*\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right) \backslash 0$ par la projection de $T^*(\Omega \times \mathbb{R}) \backslash 0$ sur $T^*(\Omega \times \mathbb{R}) \backslash 0 \cup T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R}) \backslash 0$, on pose finalement :

$$\begin{array}{ll} \Sigma_b^0 & = \Sigma_b \cap T^*(\Omega \times \mathbb{R}) \backslash 0 \,, \quad \Sigma_b^1 = \mathcal{H} \\ \Sigma_b^{2,-} & = \mathcal{G} \cap \{\partial_s r(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau) < 0\} \,, \quad \Sigma_b^{2,+} = \mathcal{G} \cap \{\partial_s r(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau) > 0\} \\ \Sigma_b^{(3)} & = \mathcal{G} \cap \{\partial_s r(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau) = 0\} \end{array}$$

de sorte que : $\Sigma_b = \Sigma_b^0 \cup \Sigma_b^1 \cup \Sigma_b^{2,-} \cup \Sigma_b^{2,+} \cup \Sigma_b^{(3)}$

$$\begin{array}{ll} \Sigma_b & = \left\{ (x, t, \xi, \tau) \in T^*(\Omega \times \mathbb{R}) \backslash 0 \,; -\tau^2 + c_o |\xi|^2 = 0 \right\} \\ & \cup \left\{ (y_1, y_2, t, \zeta_1, \zeta_2, \tau) \in T^*\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\right) \backslash 0 \,; -\tau^2 + c_o h(0, y_1, y_2, \zeta_1, \zeta_2) \leq 0 \right\} \cdot \end{array}$$

Définition des rayons

On construit les courbes bicaractéristiques généralisées définies dans Σ_b de la manière suivante :

- dans Ω, elles se propagent selon le système hamiltonien libre définie par H_p.
- Si elles rencontrent le bord $\partial\Omega$ en un point de $\mathcal{H}$, elles se réfléchissent selon les lois de l'optique géométrique.

- Si elles rencontrent le bord en un point de $\Sigma_b^{2,-}$, elles sont prolongées par continuité dans Ω.
- Si elles rencontrent le bord en un point de $\Sigma_b^{2,+} \cup \Sigma_b^{(3)}$, elles sont prolongées par continuité en des bicaractéristiques de $T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R})\backslash 0$ définies par H_r jusqu'à ce qu'elles puissent sortir du bord.

L'hypothèse Ω n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes assure que par tout point de Σ_b, il ne passe qu'une unique bicaractéristique généralisée [2,14]. Les rayons sont définis comme étant la projection sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ des bicaractéristiques généralisées. On renvoie à [14] pour une définition plus complète d'un rayon.

Définition du front d'onde et des normes Sobolev microlocales

On définit le front d'onde de U, $WF(U)$, comme étant le cône fermé de $T^*(\Omega \times \mathbb{R})\backslash 0$ tel que :
Soit $\rho = (x_o, t_o, \xi_o, \tau_o) \in T^*(\Omega \times \mathbb{R})\backslash 0$,

$$\rho \in WF(U) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \Phi \in C_0^\infty, \Phi = 1 \text{ près de } (x_o, t_o) \\ \forall \Gamma \text{ voisinage conique de } (\xi_o, \tau_o) \\ \quad \widehat{\Phi U} \text{ n'est pas à décroissance rapide dans } \Gamma. \end{array}$$

Aussi, on dit que $U \in H_\rho^m$ ou $U \in H^m$ sur ρ, si l'une des trois conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :
- $U = U_1 + U_2$ où $U_1 \in H^m(\Omega \times \mathbb{R})$ et $\rho \notin WF(U_2)$
- Il existe $\Phi \in C_0^\infty, \Phi = 1$ près de (x_o, t_o) et Γ voisinage conique de (ξ_o, τ_o) tel que :

$$\int_\Gamma \left(1 + |\xi, \tau|^2\right)^m \left|\widehat{\Phi U}\right|^2 d\xi d\tau < \infty.$$

- Il existe $\Phi \in C_0^\infty, \Phi = 1$ près de (x_o, t_o) et $\Theta \in C_0^\infty, \Theta = 1$ près de $\Gamma \ni (\xi_o, \tau_o)$ tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(1 + |\xi, \tau|^2\right)^m \Theta \left|\widehat{\Phi U}\right|^2 d\xi d\tau < \infty.$$

On définit le front d'onde au bord de U, $WF_b(U)$, comme étant le cône fermé de $T^*(\Omega \times \mathbb{R})\backslash 0 \cup T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R})\backslash 0$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} .\ WF_b(U) \cap T^*(\Omega \times \mathbb{R})\backslash 0 = WF(U) \\ .\ \text{Pour } \rho \in T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R})\backslash 0\ ,\ \rho \notin WF_b(U) \text{ ssi il existe A opérateur} \\ \qquad \text{pseudo} - \text{différentiel, tangentiel, elliptique en } \rho \\ \qquad \text{tel que } AU \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right). \end{array} \right.$$

Aussi, supposons que U soit une solution prolongeable de $\partial_t^2 U - c_o \Delta U = 0 \quad$ dans $\Omega \times]T_0; T_1[$, alors on munit les espaces H_ρ^m où $m \in \mathbb{R}$, $\rho = (x, t, \xi, \tau) \in \overline{\Omega} \times]T_0; T_1[\times \mathbb{R}^4$ des semi-normes suivantes :

- si $x \in \Omega$, $\|U\|_{H_\rho^m}^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \left(1 + |\xi, \tau|^2\right)^m \Theta \left|\widehat{\Phi U}\right|^2 d\xi d\tau$ où Φ est localisé autour d'un voisinage de (x, t) et Θ localisé autour d'un voisinage conique de (ξ, τ).
- Si $x \in \partial\Omega$, $\|U\|_{H_\rho^m}^2 = \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |\zeta', \tau|^2\right)^m \Xi^2 \left|\widehat{\Phi W}'\right|^2 d\zeta' d\tau$ où on s'est ramené au demi-espace, $\Phi U(x, t) = \Phi U(\Psi(s, y'), t) = \Phi W(s, y', t)$, $\widehat{\ }'$ désigne la transformée de Fourier en les variables (y_1, y_2, t) tangentielles de $(s, y', t) = (s, y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^4$ et Ξ est une fonction localisée autour d'un voisinage conique de $(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = (\zeta', \tau)$.

On se propose de retrouver explicitement certains résultats de Yamamoto [27] par le changement de variable (1.1) : en posant $E\left(s,y_1,y_2,t\right)=U\left(\Psi\left(s,y_1,y_2\right),t\right)=U\left(x_1,x_2,x_3,t\right)$, on a :

$$U\wedge n=\nu\begin{pmatrix} E_2-m_2E_3\\ -E_1+m_1E_3\\ m_2E_1-m_1E_2\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\mathrm{div}U=\begin{pmatrix}\nu m_1\\ \nu m_2\\ \nu\end{pmatrix}\partial_sE+\nu^2\begin{pmatrix}1+m_2^2\\ -m_1m_2\\ -m_1\end{pmatrix}\partial_{y_1}E+\nu^2\begin{pmatrix}-m_1m_2\\ 1+m_1^2\\ -m_2\end{pmatrix}\partial_{y_2}E. \tag{1.3}$$

Ainsi, si $U\wedge n=0$ et $\mathrm{div}U=0$, alors E s'écrit : $\quad E=\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\\ 1\end{pmatrix}E_3$ et

$$\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\\ 1\end{pmatrix}\partial_sE+\nu\left[\begin{pmatrix}1+m_2^2\\ -m_1m_2\\ -m_1\end{pmatrix}\partial_{y_1}\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-m_1m_2\\ 1+m_1^2\\ -m_2\end{pmatrix}\partial_{y_2}\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\\ 1\end{pmatrix}\right]E_3=0=\frac{1}{\nu}\mathrm{div}U. \tag{1.4}$$

Finalement, si $U\wedge n=0$ et $\mathrm{div}U=0$, alors, à partir de (1.2) et (1.4),

$$\left\{\begin{array}{l} E\wedge n=0,\quad E.n=\frac{1}{\nu}E_3\\ \partial_sE.n+\ell\nu^2E.n=0\quad \text{où } \ell \text{ est une fonction } C^\infty \text{ à valeur réelle.}\end{array}\right. \tag{1.5}$$

Les conditions aux limites $U\wedge n=0$ et $\mathrm{div}U=0$ permettront de se ramener à la condition au bord de la démonstration du théorème de Melrose et Sjöstrand [14].

En posant $B\left(s,y_1,y_2,t\right)=V\left(\Psi\left(s,y_1,y_2\right),t\right)=V\left(x_1,x_2,x_3,t\right)$, on a :

$$V.n=\nu\left(m_1B_1+m_2B_2+B_3\right) \tag{1.6}$$

ainsi,

$$\partial_{y_j}\left(V.\frac{n}{\nu}\right)=\begin{pmatrix}m_1 & m_2 & 1\end{pmatrix}\partial_{y_j}B+\partial_{y_y}m_1B_1+\partial_{y_j}m_2B_2. \tag{1.7}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&0&-m_1\\0&1&-m_2\\0&0&1\end{pmatrix}\mathrm{rot}V\wedge n=&\begin{pmatrix}1&0&-m_1\\0&1&-m_2\\-m_1&-m_2&m_1^2+m_2^2\end{pmatrix}\partial_sB\\ &+\nu\begin{pmatrix}-m_1&-m_2&-1\\0&0&0\\m_1^2&m_1m_2&m_1\end{pmatrix}\partial_{y_1}B+\nu\begin{pmatrix}0&0&0\\-m_1&-m_2&-1\\m_1m_2&m_2^2&m_2\end{pmatrix}\partial_{y_2}B.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Cette dernière égalité (1.8) s'obtient en écrivant le rotationnelle sous la forme :

$$\mathrm{rot}V=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\partial_{x_1}V+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\partial_{x_2}V+\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\partial_{x_3}V.$$

Après avoir effectué le changement de variable, on multiplie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & -m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, si $V.n = 0$ et $\mathrm{rot}V \wedge n = 0$, alors, à partir de (1.6) et (1.8),

$$\left\{ \begin{array}{l} B_3 = -m_1 B_1 - m_2 B_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & -m_2 \end{pmatrix} \partial_s B = -\begin{pmatrix} \partial_1 m_1 & \partial_1 m_2 \\ \partial_2 m_1 & \partial_2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{1.9}$$

autrement dit

$$\left\{ \begin{array}{l} B.n = 0 \\ \partial_s B \wedge n + \mathcal{A}(B \wedge n) = 0 \quad \text{où } \mathcal{A} \text{ est une matrice } C^\infty \text{ à valeur réelle.} \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Les conditions aux limites $V.n = 0$ et $\mathrm{rot}V \wedge n = 0$ permettront de se ramener à la condition au bord de la démonstration du théorème de Melrose et Sjöstrand [14].

En posant $H(s, y_1, y_2, t) = V(\Psi(s, y_1, y_2), t) = V(x_1, x_2, x_3, t)$, on a :

si $\mathrm{div}V = 0$ et $\mathrm{rot}V \wedge n = 0$, alors, à partir de (1.3) et (1.8),

$$\frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & -m_2 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{pmatrix} \partial_s H = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1-m_2^2 & m_1 m_2 & m_1 \end{pmatrix} \partial_{y_1} H + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & 1 \\ m_1 m_2 & -1-m_1^2 & m_2 \end{pmatrix} \partial_{y_2} H.$$

On remarque que la matrice devant $\partial_s H = \partial_n V$ est inversible, d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & -m_2 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\nu^2 m_1^2 & -\nu m_1 m_2 & \nu^2 m_1 \\ -\nu m_1 m_2 & 1-\nu^2 m_2^2 & \nu^2 m_2 \\ -\nu^2 m_1 & -\nu^2 m_2 & \nu^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\partial_s H - \nu \begin{pmatrix} 0 & m_2 & 1 \\ -m_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_{y_1} H - \nu \begin{pmatrix} 0 & -m_1 & 0 \\ m_1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_{y_2} H = 0. \tag{1.11}$$

Les conditions aux limites $\mathrm{div}V = 0$ et $\mathrm{rot}V \wedge n = 0$ permettent de se ramener à la condition au bord $\partial_n V + \mathcal{L}V = 0$ où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel matriciel d'ordre 1.

Nous rappelons le résultat de propagation des singularités avec conditions aux limites de Melrose et Sjöstrand [14] :

Soit U une solution d'un problème hyperbolique $PU = f$ *dans* $\Omega \times \mathbb{R}$, avec la condition aux limites de Dirichlet ou de type Neumann. Si $f \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ et $\rho \in WF_b(U)$, alors il existe une courbe bicaractéristique généralisée passant par ρ et entièrement contenue dans $WF_b(U)$.

On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.1. Soit (U,V) solution de :

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_t^2 U - c_o\Delta U = 0 \quad \text{dans } \Omega\times I\\ U\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I\\ \text{div}U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{c}\partial_t^2 V - c_o\Delta V = 0 \quad \text{dans } \Omega\times I\\ V.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I\\ \text{rot}V\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I\end{array}\right.$$

où $I=[s_0;s_1]\subset\mathbb{R}$, $f\in\left(H^{-1}(\Omega\times I)\right)^3$. Si $\rho\in\Sigma_b$ et $U\in L^2_\rho$ (resp. $V\in L^2_\rho$), alors on a $U\in L^2_{\rho'}$ (resp. $V\in L^2_{\rho'}$) en tout point $\rho'\in\gamma(I)$ de la bicaractéristique généralisée passant par $\rho=\gamma(s_0)$.

De plus, on a les estimations suivantes : $\quad \exists c,d>0$

$$\|U\|_{L^2_{\rho'}}\leq c\,\|U\|_{L^2_\rho}+d\left(\|U\|_{H^{-1/2}(\Omega\times I)}+\|f\|_{H^{-1}(\Omega\times I)}\right) \tag{1.12}$$

$$\|V\|_{L^2_{\rho'}}\leq c\,\|V\|_{L^2_\rho}+d\left(\|V\|_{H^{-1/2}(\Omega\times I)}+\|f\|_{H^{-1}(\Omega\times I)}\right). \tag{1.13}$$

Démonstration : La preuve du théorème 1.1 découle des travaux de Melrose et Sjöstrand [14] et le fait que le système de Maxwell est un problème bien posé [16]. Les estimations (1.12) et (1.13) seront alors obtenues grâce au théorème du graphe fermé. Nous nous contenterons d'établir la preuve du théorème 1.1 pour la solution U sachant que pour la solution V la démonstration est analogue.

Commençons par la démonstration du théorème 1.1 avec $f\equiv 0$:

Dans Ω, *i.e.* $\rho\in\Sigma_b^0$, cela découle du théorème de propagation des singularités de Hörmander obtenu par une méthode d'énergie [22]. La réflexion et la propagation des singularités H^m du système hyperbolique avec conditions aux limites celles des conducteurs parfaits à travers un bord régulier convexe, *i.e.* quand $\rho\in\Sigma_b^1\cup\Sigma_b^{2,-}$, ont été traitées par Taylor [23, 24].

En suivant le programme développé par Melrose et Sjöstrand [14], nous obtenons une estimation du front d'onde au bord de chaque composante de U près d'un point glancing :

Localement près du bord, nous nous sommes ramenés à un problème dans un demi-espace $\{s>0\}$. En posant $E(s,y_1,y_2,t)=U(\Psi(s,y_1,y_2),t)=U(x_1,x_2,x_3,t)$, les conditions aux limites $U\wedge n=0$ et $\text{div}U=0$ sur le bord entrainent que :

$$\left\{\begin{array}{c}P(E_i)=\left(-\partial_s^2+R(s,y,D_{y,t})\right)(E_i)=0 \quad \text{dans } \{s>0\} \quad \text{où } i=\{1,2,3\}\\ E=\frac{n}{\nu}E_3 \quad \text{sur } \{s=0\}\\ \frac{n}{\nu}.\partial_s E+\ell E_3=0 \quad \text{sur } \{s=0\}\end{array}\right.$$

où ℓ est une fonction régulière à valeur réelle, et R est un opérateur différentiel du second ordre, à coefficient régulier, ayant un symbole principal réel pour tout s fixé.

On effectue le calcul suivant $\sum\limits_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}\left(QE_i\overline{PE_i}\right)dsdy$ où Q est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel à support compact et $Q'_s=0$ sur $\{s=0\}$, on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left([P,Q]+(R^*-R)\,Q\right)E_i\overline{E_i}=\int\left(Q\partial_s E.\overline{E}\right)_{s=0}-\int\left(QE.\overline{\partial_s E}\right)_{s=0}. \tag{1.14}$$

mais,

$$\begin{aligned}
\int \left(Q\partial_s E.\overline{E}\right)_{s=0} &= \int \left(Q\partial_s E.\left(\overline{\tfrac{n}{\nu}E_3}\right)\right)_{s=0} \\
&= \int \left(Q\left(-\ell\nu E_3\right)\left(\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right)\right)_{s=0} + \sum_{i=1}^{3}\int\left([n_i,Q]\left(\partial_s E_i\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right)_{s=0} \\
\int \left(QE.\overline{\partial_s E}\right)_{s=0} &= \int \left(Q\left(\tfrac{n}{\nu}E_3\right).\overline{\partial_s E}\right)_{s=0} \\
&= \int \left(Q\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\left(\overline{-\ell\nu E_3}\right)\right)_{s=0} + \sum_{i=1}^{3}\int\left([Q,n_i]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\partial_s E_i}\right)_{s=0}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

D'autre part, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int\left([n_i,Q]\left(\partial_s E_i\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3} + [n_i,Q]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\partial_s E_i}\right)_{s=0} &= \int_0^\infty\int\left(\partial_s^2\left([n_i,Q]\,E_i\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3} - [n_i,Q]\,E_i\overline{\partial_s^2\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)}\right) \\
&\quad + \int_0^\infty\int [n_i,Q]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\partial_s^2 E_i} - \partial_s^2\left([n_i,Q]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\right)\overline{E_i} \\
&\quad + \int\left([n_i,Q]\,E_i\overline{\partial_s\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)} + [n_i,Q]\,\partial_s\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{E_i}\right)_{s=0}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

En posant $\widetilde{R} = \frac{1}{\nu}R\nu$ et $\widetilde{P} = -\partial_s^2 + \widetilde{R}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\int\left([n_i,Q]\left(\partial_s E_i\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3} + [n_i,Q]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\partial_s E_i}\right)_{s=0} \\
= &\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left(-\left(-\partial_s^2+\widetilde{R}^*\right)\left([n_i,Q]\,E_i\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right) \\
&+\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left(-\partial_s^2+R^*\right)[n_i,Q]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{E_i} \\
&+\sum_{i=1}^{3}\int\left([n_i,Q]\left(n_i\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\right)\overline{\partial_s\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)} + [n_i,Q]\,\partial_s\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\left(n_i\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\right)}\right)_{s=0} \\
= &\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left(-\left([P,[n_i,Q]] + \left(\widetilde{R}^*-R\right)[n_i,Q]\right)E_i\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right) \\
&+\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left(\left[\widetilde{P},[n_i,Q]\right] + \left(R^*-\widetilde{R}\right)[n_i,Q]\right)\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{E_i} \\
&+\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left(-\partial_s^2+\widetilde{R}^*\right)\left(n_iQn_i\right)\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3} \\
&+\int_0^\infty\int -\left(-\partial_s^2+\widetilde{R}^*\right)Q\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

donc, avec (1.15, 1.16) et (1.17), l'égalité (1.14) devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left([P,Q]+\left(R^*-R\right)Q\right)E_i\overline{E_i} &= -\int\left(\left[Q,\ell\nu^2\right]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right)_{s=0} \\
&\quad+\int_0^\infty\int\left(-\left([P,[n,Q]]+\left(\widetilde{R}^*-R\right)[n,Q]\right)E\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right) \\
&\quad+\int_0^\infty\int\left(\left[\widetilde{P},[n,Q]\right]+\left(R^*-\widetilde{R}\right)[n,Q]\right)\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{E} \\
&\quad+\int_0^\infty\int\left(\left[\widetilde{P},[n,Q]\,n\right]+\left(\widetilde{R}^*-\widetilde{R}\right)[n,Q]\,n\right)\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

On notera que les symboles principaux de $i\left(\widetilde{R}^*-R\right)[n_j,Q]$, $i\left(R^*-\widetilde{R}\right)[n_j,Q]$, $i\left(\widetilde{R}^*-\widetilde{R}\right)[n_j,Q]\,n_j$, $\frac{1}{i}\left[\widetilde{R},[n_j,Q]\right]$ et $\frac{1}{i}\left[R,[n_j,Q]\right]$ sont homogènes d'ordre m, si Q admet un symbole principal homogène d'ordre m.

Suivant la méthode des inégalités d'énergie, il reste à construire Q vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered}
\frac{1}{i}\left([P,Q]+(R^*-R)\,Q\right)=A^*A+B\\
\left|\int_0^\infty\int B\,(E)\,.E\right|<\infty\\
\left|\int\left(\left[Q,\ell\nu^2\right]\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right)_{s=0}\right|<\infty\\
\left|\int_0^\infty\int\left(-\left([P,[n,Q]]+\left(\widetilde{R}^*-R\right)[n,Q]\right)E\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right)\right|<\infty\\
\left|\int_0^\infty\int\left(\left[\widetilde{P},[n,Q]\right]+\left(R^*-\widetilde{R}\right)[n,Q]\right)\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{E}\right|<\infty\\
\left|\int_0^\infty\int\left(\left[\widetilde{P},[n,Q]\,n\right]+\left(\widetilde{R}^*-\widetilde{R}\right)[n,Q]\,n\right)\left(\tfrac{1}{\nu}E_3\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}E_3}\right|<\infty.
\end{gathered}$$

où A est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel elliptique en ρ' et B un opérateur pseudo-différentiel.

L'assertion $\|A\,(E)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3)}<\infty$ donne la conclusion.

On notera $(x,y)=(x,(y_1,y_2,y_3))$ la variable $(s,(y_1,y_2,t))$ et (ξ,η) la variable duale de (x,y). Soit

$r\,(x,y,\eta)$	, le symbole principal de R, d'ordre 2
$k\,(x,y,\eta)$	, le symbole principal de $i\,(R^*-R)$, homogène d'ordre 1
$p\,(x,y,\xi,\eta)=\xi^2+r$	, le symbole principal de P, homogène d'ordre 2
$q\,(x,y,\eta)$	, le symbole principal de Q, tangentiel
$\sigma\,([P,Q])=iH_pq$	, le symbole principal de $[P,Q]$
$-\,(H_p+k)\,q$	, le symbole principal de $\frac{1}{i}\left([P,Q]+(R^*-R)\,Q\right)$.

On rappelle que

$$\begin{aligned}
H_r&=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial r}{\partial\eta_i}\frac{\partial}{\partial y_i}-\frac{\partial r}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial\eta_i}\right)&&=\nabla_\eta r.\nabla_y-\nabla_y r.\nabla_\eta\\
H_p&=2\xi\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+H_r.
\end{aligned}$$

Soient $\mathcal{G}$ la surface glancing définie par

$$\mathcal{G}=\left\{(y,\eta)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\backslash 0\setminus\ r_0\,(y,\eta)\equiv r\,(0,y,\eta)=0\right\}$$

et $(y_0,\eta_0)\in\mathcal{G}$. On pose $H_{r_0}=H_{r(0,y,\eta)}=H_r\,|_{x=0}$.

Soit U un voisinage conique de (y_0,η_0) On se donne $L\subset U$ une hypersurface conique de (y_0,η_0) et transversale à H_{r_0}.

On pose, avec τ,$\varepsilon>0$ petit,

$$L^+(\varepsilon,\tau)=\left\{e^{tH_{r_0}}(y,\eta)\in U\ \Bigg\backslash\ \begin{array}{c}(y,\eta)\in L\ ,\\ \left|\left(y,\frac{\eta}{|\eta|}\right)-\left(y_0,\frac{\eta_0}{|\eta_0|}\right)\right|\le\varepsilon^2\ ,\\ 0\le t\le\frac{\tau}{|\eta|}\end{array}\right\}$$

$$L^-(\varepsilon,\tau)=\left\{e^{tH_{r_0}}(y,\eta)\in U\ \Bigg\backslash\ \begin{array}{c}(y,\eta)\in L\ ,\\ \left|\left(y,\frac{\eta}{|\eta|}\right)-\left(y_0,\frac{\eta_0}{|\eta_0|}\right)\right|\le\varepsilon^2\ ,\\ -\frac{\tau}{|\eta|}\le t\le 0\end{array}\right\}$$

$$F^\pm(\varepsilon,\tau)=\left\{(x,y,\eta)\ \Bigg\backslash\ \begin{array}{c}0\le x\le\varepsilon^2\ ,\\ (y,\eta)\in L^\pm(\varepsilon,\tau)\end{array}\right\}.$$

On choisira τ_0,$\varepsilon_0 > 0$ petit, et $C_1 > 0$ grand, pour que

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0,\ 0 < \tau \le \tau_0, \\ (x,y,\eta) \in F^{\pm}(\varepsilon,\tau) \end{array}\right\} \implies |r(x,y,\eta)| \le \left(\tfrac{1}{2} C_1 |\eta| \varepsilon\right)^2. \tag{1.19}$$

On aura aussi besoin des ensembles fermés coniques suivants

$$V^{\pm}(\varepsilon,\tau) = \left\{(x,y,\xi,\eta) \Big\backslash (y,\eta) \in L^{\pm}(\varepsilon,\tau)\ , \left[\text{ou}\ \begin{array}{l} 0 \le x \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon^2 \le x \le \varepsilon^2,\ |\xi| \le C_1 \varepsilon |\eta| \end{array}\right]\right\}$$

$$W^{\pm}(\varepsilon,\tau) = \left\{(x,y,\xi,\eta) \Big\backslash (y,\eta) \in L^{\pm}(\varepsilon,\tau)\ , \left[\text{ou}\ \begin{array}{l} 0 \le x \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon^2 \le x \le \varepsilon^2,\ |\xi| \le 2C_1 \varepsilon |\eta| \end{array}\right]\right\}$$

$$V(\varepsilon) = V^{+}(\varepsilon,\tau_0) \cup V^{-}(\varepsilon,\tau_0)$$

$$W(\varepsilon) = W^{+}(\varepsilon,\tau_0) \cup W^{-}(\varepsilon,\tau_0).$$

Nous commençons par construire $q_\varepsilon(x,y,\eta) \in C_0^\infty([0,1[\times U)$:

Au voisinage de $[0,1[\times U$, on se place dans de nouvelles coordonnées $(x,s,t) \in [0,1[\times \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$, de sorte que $(y_0,\eta_0) = (0,0)$, $L = \{t = 0\}$ et $H_{r_0} = \frac{\partial}{\partial t}$. Aussi

$$\begin{array}{ll} H_r & = \frac{\partial}{\partial t} + O(x)\frac{\partial}{\partial s} + O(x)\frac{\partial}{\partial t} \\ H_p & = 2\xi\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + H_r. \end{array}$$

Soient χ,$\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ positives, définies de manière astucieuse et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nulle sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$, strictement décroissante et convexe sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ ([14], p. 601). On pose

$$q_\varepsilon(x,s,t) = \beta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\chi\left(\frac{t}{\delta\varepsilon} + \frac{s^2}{\varepsilon^4} + f\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)\right)$$

de sorte que

q_ε ne dépend pas de x pour $0 \le x < \frac{1}{2}\varepsilon^2$,

$\operatorname{supp} q_\varepsilon = \left\{(x,s,t) \setminus -\varepsilon^2 \le t,\ \frac{t}{\delta\varepsilon} + \frac{s^2}{\varepsilon^4} + f\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \le 1\right\} \subset \left\{x \le \varepsilon^2,\ |s| \le \varepsilon^2,\ -\varepsilon^2 \le t \le \delta\varepsilon\right\}$,

$q_\varepsilon \ge 0$, $q_{\varepsilon'} > 0$ dans $\operatorname{supp} q_\varepsilon$ si $0 < \varepsilon < \varepsilon' \le \varepsilon_0$, $q_\varepsilon\left(0, e^{tH_{r_0}}(y_0,\eta_0)\right) \ne 0$ pour $0 \le t < \delta\varepsilon$.

Il reste à calculer $(H_p + k)\, q = 2\xi\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \xi} + H_r q + kq$

$$\begin{array}{rl} -(H_p + k)\, q_\varepsilon & = -\beta(H_p + k)\chi - \chi H_p \beta \\ & = g_\varepsilon - \chi H_p \beta \\ & = g_\varepsilon - \chi\left(\frac{\partial}{\partial t} + O(x)\frac{\partial}{\partial t}\right)\beta \\ & = g_\varepsilon - \chi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + O(x)\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\beta' \\ & = g_\varepsilon + h_\varepsilon. \end{array} \tag{1.20}$$

Si $0 \le x \le \frac{1}{2}\varepsilon^2$,

$$\begin{array}{ll} -\left(H_p+k\right)\chi & =-\left(\frac{\partial}{\partial t}+O\left(x\right)\frac{\partial}{\partial s}+O\left(x\right)\frac{\partial}{\partial t}+k\right)\chi \\ & =-\left(\frac{\partial}{\partial t}+O\left(x\right)\frac{\partial}{\partial s}+O\left(x\right)\frac{\partial}{\partial t}+O\left(1\right)\right)\chi \\ & =-\left(\frac{1}{\delta\varepsilon}+O\left(\varepsilon^2\right)\frac{|s|}{\varepsilon^4}+O\left(\varepsilon^2\right)\frac{1}{\delta\varepsilon}\right)\chi'+O\left(1\right)\chi \\ & =-\left(\frac{1}{\delta\varepsilon}+O\left(1\right)\right)\chi'+O\left(1\right)\chi \\ & =-\left(\frac{1}{\delta\varepsilon}+O\left(1\right)\right)\chi' \quad \text{si } \chi=O\left(\chi'\right) \\ & =-O\left(\frac{1}{\delta\varepsilon}\right)\chi' \quad \text{si } 0<\varepsilon\leq\varepsilon_{0,} \text{ où } \varepsilon_0,\delta>0 \text{ petit.} \end{array} \tag{1.21}$$

Si $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \leq x \leq \varepsilon^2$ et $|\xi| \leq C_1\varepsilon\,|\eta|$,

$$\begin{array}{ll} -\left(H_p+k\right)\chi & =-\left(2\xi\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}+O\left(x\right)\frac{\partial}{\partial s}+O\left(x\right)\frac{\partial}{\partial t}+\kappa\right)\chi \\ & =-\left(\xi O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)+\frac{1}{\delta\varepsilon}+O\left(\varepsilon^2\right)\frac{|s|}{\varepsilon^4}+O\left(\varepsilon^2\right)\frac{1}{\delta\varepsilon}\right)\chi'+O\left(1\right)\chi \\ & =-\left(O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{\delta\varepsilon}+O\left(1\right)\right)\chi'+O\left(1\right)\chi \\ & =-\left(O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{\delta\varepsilon}+O\left(1\right)\right)\chi' \quad \text{si } \chi=O\left(\chi'\right) \\ & =-O\left(\frac{1}{\delta\varepsilon}\right)\chi' \quad \text{si } 0<\varepsilon\leq\varepsilon_{0,} \text{ où } \varepsilon_0,\delta>0 \text{ petit.} \end{array} \tag{1.22}$$

Les fonctions $g_\varepsilon\left(x,y,\xi,\eta\right), h_\varepsilon\left(x,y,\xi,\eta\right) \in C^\infty\left([0,1[\times[-1,1]^3\times\mathbb{R}_\xi\times\mathbb{R}^3\backslash 0\right)$ définies par (1.20), vérifient, à partir des calculs (1.21) et (1.22), les propriétés suivantes :

supp$g_\varepsilon\cup$supph_ε $\subset$suppq_ε, et $g_\varepsilon, h_\varepsilon$ ne dépendent pas de ξ pour $0\leq x\leq\frac{1}{2}\varepsilon^2$.

En choisissant χ décroissante, on a : dans $W\left(\varepsilon\right)$, $g_\varepsilon\geq 0$ et $g_\varepsilon>0$ si $q_\varepsilon\neq 0$.

En construisant convenablement β et χ, on a : $\partial^\alpha g_\varepsilon = O\left(g_\varepsilon^{1\backslash\rho}\right)$ uniformément dans $W\left(\varepsilon\right)$.

Un choix astucieux de β' assure que : supp$h_\varepsilon\subset[0,1[\times L^-\left(\varepsilon,\varepsilon^2\right)\times\mathbb{R}_\xi$.

Nous poursuivons par construire $q_\varepsilon^{m,\lambda}\left(x,y,\eta\right)\in C^\infty\left([0,1[\times[-1,1]^3\times\mathbb{R}^3\backslash 0\right)$:

Soit $m\in\mathbb{R}$, $1\leq\lambda\leq\infty$, on génére les symboles (homogènes de degré m si $\lambda=\infty$) $q_\varepsilon^{m,\lambda}\left(x,y,\eta\right)$, $g_\varepsilon^{m,\lambda}\left(x,y,\xi,\eta\right)$, $h_\varepsilon^{m,\lambda}\left(x,y,\xi,\eta\right)$ à partir de $q_\varepsilon\left(x,y,\eta\right)$, $g_\varepsilon\left(x,y,\xi,\eta\right)$, $h_\varepsilon\left(x,y,\xi,\eta\right)$ ([14], p. 603). Aussi les propriétés suivantes seront vérifiées :

$q_\varepsilon^{m,\infty}$ est homogène de degré m, et $q_\varepsilon^{m,\lambda}$ ne dépend pas de x pour $0\leq x<\frac{1}{2}\varepsilon^2$.

supp$q_\varepsilon^{m,\lambda}\subset F^+\left(\varepsilon,\delta\varepsilon\right)\cup F^-\left(\varepsilon,\varepsilon^2\right)$, $q_\varepsilon^{m,\lambda}\left(0,e^{tH_{r_0}}\left(y_0,\eta_0\right)\right)\neq 0$ pour $0\leq t<\delta\varepsilon$.

$q_\varepsilon^{m,\lambda}\geq 0$, et $q_{\varepsilon'}^{m,\lambda}>0$ dans suppq_ε si $0<\varepsilon<\varepsilon'\leq\varepsilon_0$, de plus.

$-\left(H_p+k\right)q_\varepsilon^{m,\lambda}=g_\varepsilon^{m+1,\lambda}+h_\varepsilon^{m+1,\lambda}$,

supp$g_\varepsilon^{m,\lambda}\cup$supp$h_\varepsilon^{m,\lambda}$ $\subset$supp$q_\varepsilon^{m,\lambda}$, et $g_\varepsilon^{m,\lambda}, h_\varepsilon^{m,\lambda}$ ne dépendent pas de ξ pour $0\leq x\leq\frac{1}{2}\varepsilon^2$.

supp$h_\varepsilon^{m,\lambda}\subset[0,1[\times L^-\left(\varepsilon,\varepsilon^2\right)\times\mathbb{R}_\xi$.

Dans $W\left(\varepsilon\right)$, $g_\varepsilon^{m,\lambda}\geq 0$ et $g_\varepsilon^{m,\lambda}>0$ si $q_\varepsilon\neq 0$.

$\partial^\alpha g_\varepsilon^{m,\lambda}=O\left(\left(g_\varepsilon^{m,\lambda}\right)^{1\backslash\rho}\right)$ uniformément dans $W\left(\varepsilon\right)$ où $\rho>1$.

On pose $a_\varepsilon^{m,\lambda}=\sqrt{g_\varepsilon^{2m,\lambda}}\,|_{W(\varepsilon)}\in C^\infty\left(W\left(\varepsilon\right)\right)$ (car $\partial^\alpha g_\varepsilon^{m,\lambda}=O\left(\left(g_\varepsilon^{m,\lambda}\right)^{1\backslash\rho}\right)$ uniformément dans $W\left(\varepsilon\right)$ où $\rho>1$ et $g_\varepsilon^{s,\lambda}\geq 0$). Ainsi, $a_\varepsilon^{m,\lambda}$ ne dépend pas de ξ pour $0\leq x\leq\frac{1}{2}\varepsilon^2$, et $a_\varepsilon^{m,\infty}\geq 0$ est homogène de degré m.

Soient $\sigma_2\left(x,y,\xi,\eta\right)\in C^\infty\left([0,1[\times[-1,1]^3\times\mathbb{R}^4\backslash 0\right)$ dépendant de ε, définie de manière astucieuse ([14], p. 604) et $\sigma_1\left(x\right)\in C^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ égale à 1 sur $\left[0,\frac{1}{4}\varepsilon^2\right]$, nulle sur $\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2,+\infty\right[$, et vérifiant

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2=1 \quad \text{près de } V\left(\varepsilon\right)\subset W\left(\varepsilon\right).$$

On définit

$a_{\varepsilon,1}^{m,\lambda}\left(x,y,\eta\right)=\sigma_1\left(x\right)a_\varepsilon^{m,\lambda}\left(x,y,\xi,\eta\right)$ qui ne dépend pas de ξ,

$a_{\varepsilon,2}^{m,\lambda}(x,y,\xi,\eta) = \sigma_2(x,y,\xi,\eta)\, a_\varepsilon^{m,\lambda}(x,y,\xi,\eta) \in C^\infty\left([0,1[\times[-1,1]^3\times\mathbb{R}^4\backslash 0\right)$,
$h_{\varepsilon,1}^{m,\lambda}(x,y,\eta) = \sigma_1^2(x)\, h_\varepsilon^{m,\lambda}(x,y,\xi,\eta)$ qui ne dépend pas de ξ,
$h_{\varepsilon,2}^{m,\lambda}(x,y,\xi,\eta) = \sigma_2^2(x,y,\xi,\eta)\, h_\varepsilon^{m,\lambda}(x,y,\xi,\eta) \in C^\infty\left([0,1[\times[-1,1]^3\times\mathbb{R}^4\backslash 0\right)$.

On génère ensuite les opérateurs pseudo-différentiels $Q_\varepsilon^{m,\lambda}$, $A_{\varepsilon,1}^{m,\lambda}$, $A_{\varepsilon,2}^{m,\lambda}$, $B_{\varepsilon,1}^{m,\lambda}$, $B_{\varepsilon,2}^{m,\lambda}$, à partir des symboles respectifs $q_\varepsilon^{m,\lambda}$, $a_{\varepsilon,1}^{m,\lambda}$, $a_{\varepsilon,2}^{m,\lambda}$, $h_{\varepsilon,1}^{m,\lambda}$, $h_{\varepsilon,2}^{m,\lambda}$ de manière adéquate ([14], p. 604).

À partir de $-(H_p+k)\, q_\varepsilon^{m,\lambda} = g_\varepsilon^{m+1,\lambda} + h_\varepsilon^{m+1,\lambda}$, on a, en posant $N_\varepsilon^{m+1,\lambda} = \frac{1}{i}\left(\left[P, Q_\varepsilon^{m,\lambda}\right] + (R^*-R)\, Q_\varepsilon^{m,\lambda}\right)$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $(m+1)$,

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2(x)\, N_\varepsilon^{m+1,\lambda} &= \left(A_{\varepsilon,1}^{(m+1)/2,\lambda}\right)^* \left(A_{\varepsilon,1}^{(m+1)/2,\lambda}\right) + B_{\varepsilon,1}^{m+1,\lambda} + C_{\varepsilon,1}^{m,\lambda} \\
\sigma_2^2(x,y,D_x,D_y)\, N_\varepsilon^{m+1,\lambda} &= \left(A_{\varepsilon,2}^{(m+1)/2,\lambda}\right)^* \left(A_{\varepsilon,2}^{(m+1)/2,\lambda}\right) + B_{\varepsilon,2}^{m+1,\lambda} + C_{\varepsilon,2}^{m,\lambda}
\end{aligned} \tag{1}$$

où $C_{\varepsilon,1}^{s,\lambda}$ et $C_{\varepsilon,2}^{s,\lambda}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m.

Donc

$$\begin{aligned}
N_\varepsilon^{m+1,\lambda} &= \left(N_\varepsilon^{m+1,\lambda}\right)_{|V(\varepsilon)} + \left(N_\varepsilon^{m+1,\lambda}\right)_{|\left(suppq_\varepsilon^{m,\lambda}\times\mathbb{R}_\xi\right)\backslash V(\varepsilon)} \\
&= \left(\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x,y,D_x,D_y)\right)\left(N_\varepsilon^{m+1,\lambda}\right)_{|V(\varepsilon)} + \left(N_\varepsilon^{m+1,\lambda}\right)_{|\left(suppq_\varepsilon^{m,\lambda}\times\mathbb{R}_\xi\right)\backslash V(\varepsilon)} \\
&= \left(\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x,y,D_x,D_y)\right)\left(N_\varepsilon^{m+1,\lambda}\right)_{|V(\varepsilon)} + B_{\varepsilon,3}^{m+1,\lambda} \\
&= \sum_{j=1,2}\left(A_{\varepsilon,j}^{(m+1)/2,\lambda}\right)^*\left(A_{\varepsilon,j}^{(m+1)/2,\lambda}\right) + \sum_{j=1,2,3} B_{\varepsilon,j}^{m+1,\lambda} + \sum_{j=1,2} C_{\varepsilon,j}^{m,\lambda}
\end{aligned}$$

où $B_{\varepsilon,3}^{m+1,\lambda} = \left(N_\varepsilon^{m+1,\lambda}\right)_{|\left(suppq_\varepsilon^{m,\lambda}\times\mathbb{R}_\xi\right)\backslash V(\varepsilon)}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $(m+1)$ tel que $B_{\varepsilon,3}^{m+1,\lambda}(E_i) \in C_0^\infty\left([0,1[\times[-1,1]^3\right)$ car $WF(E_i) \subset p^{-1}(0)$ et $\left(\left(suppq_\varepsilon^{m,\lambda}\times\mathbb{R}_\xi\right)\backslash V(\varepsilon)\right)\cap p^{-1}(0) = \emptyset$ grâce à l'estimation (1.19) sur $r(x,y,\eta)$ dans $F^\pm(\varepsilon,\tau)$. D'autre part, sous l'hypothèse

$$\left\{(x,y,\xi,\eta) \in WF_b(E_i)\backslash 0 \le x < \varepsilon_1^2, \quad (y,\eta) \in L^-\left(\varepsilon_1,\varepsilon_1^2\right)\right\} = \emptyset \quad pour\ 0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$$

on a par construction $\left|\int_0^\infty \int B_{\varepsilon,j}^{m+1,\lambda}(E_i)\, E_i\right| < \infty$ pour $j = 1,2$ et ce uniformément en λ. Pour borner les termes $\left|\int_0^\infty \int C_{\varepsilon,j}^{m,\lambda}(E_i)\, E_i\right|$ et le second membre de l'inégalité (1.17), on procédera à un choix adéquat du support de $\sigma_2(x,y,\xi,\eta)$ et par un argument de récurrence sur l'ordre m de régularité de Sobolev [14].

Dans le cas de la solution $B(s,y_1,y_2,t) = V(\Psi(s,y_1,y_2),t) = V(x_1,x_2,x_3,t)$, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty\int\left([P,Q] + (R^*-R)\,Q\right)B_i\overline{B_i} &= \sum_{i=1}^{2}\int\left(\left[\partial_i(m_1+m_2),Q\right]B_i\overline{B_i}\right)_{s=0} \\
&- \sum_{i=1}^{2}\int\left(\partial_i(m_1+m_2)\,[Q,n_i]\left(\tfrac{1}{\nu}B_3\right)\overline{B_i}\right)_{s=0} \\
&- \sum_{i=1}^{2}\int\left([Q,n_i]\left(\partial_i(m_1+m_2)\,B_i\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}B_3}\right)_{s=0} \\
&+ \int_0^\infty\int\left(-\left([P,[n,Q]] + \left(\widetilde{R}^*-R\right)[n,Q]\right)B\overline{\tfrac{1}{\nu}B_3}\right) \\
&+ \int_0^\infty\int\left(\left[\widetilde{P},[n,Q]\right] + \left(R^*-\widetilde{R}\right)[n,Q]\right)\left(\tfrac{1}{\nu}B_3\right)\overline{B} \\
&+ \int_0^\infty\int\left(\left[\widetilde{P},[n,Q]\,n\right] + \left(\widetilde{R}^*-\widetilde{R}\right)[n,Q]\,n\right)\left(\tfrac{1}{\nu}B_3\right)\overline{\tfrac{1}{\nu}B_3}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

En utilisant la construction des rayons faite par Melrose et Sjöstrand ([15], p. 153), on établit que $WF_b\left(U\right) = \bigcup_{i=1}^{3} WF_b\left(U_i\right) \subset \Sigma_b$ et, si $\rho \in WF_b\left(U\right)$, alors il existe une courbe bicaractéristique généralisée passant par ρ et entièrement contenue dans $WF_b\left(U\right)$.

Notons que ce résultat de propagation des singularités a été démontré par Yamamoto [27] en se ramenant à un système matriciel d'équations différentielles du premier ordre.

Nous allons en déduire un résultat de propagation des singularités L^2_ρ :

Soit $\rho \in T^*\left(\partial\Omega \times I\right)\backslash 0$ tel que $U \in L^2_\rho$. Il existe un opérateur A pseudo-différentiel tangentiel, de degré 0, microlocalement supporté près de ρ et microlocalement équivalent à l'identité au voisinage de ρ de tel sorte que $AU \in \left(L^2\left(\Omega \times I\right)\right)^3$.

Soit W la solution de :

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\partial_t^2 - c_o\Delta\right)\left(W - AU\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \\ \left(W - AU\right) \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \\ \operatorname{div}\left(W - AU\right) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \end{array}\right.$$

tel que $W \in \left(L^2\left(\Omega \times I\right)\right)^3$.

On pose $U = U_1 + U_2$ où $U_1 = W - AU$. On a, alors, $U_1 \in \left(L^2\left(\Omega \times I\right)\right)^3$ et U_2 vérifie :

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\partial_t^2 - c_o\Delta\right)U_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \\ U_2 \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \\ \operatorname{div}U_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \end{array}\right.$$

avec $\rho \notin WF_b\left(U_2\right)$. Par conséquent, on a $\rho' \notin WF_b\left(U_2\right)$ et $U \in L^2_\rho$ en tout point $\rho' \in \gamma\left(I\right)$ de la bicaractéristique généralisée passant par $\rho = \gamma\left(s_0\right)$.

L'estimation du théorème 1.1 s'obtient en considérant les deux problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\partial_t^2 - c_o\Delta\right)U_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \\ U_1 \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \\ \operatorname{div}U_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} \left(\partial_t^2 - c_o\Delta\right)U_2 = f \quad \text{dans } \Omega \times I \\ \operatorname{div}U_2 = 0,\ U_1 \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \\ U_2\left(\cdot, s_0\right) = \partial_t U_2\left(\cdot, s_0\right) \quad \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.1.

Nous venons de voir que la propagation des singularités du champ électrique s'effectue le long de la bicaractéristique définie dans Σ_b. On complète ce résultat en montrant que les singularités sont concentrées sur Σ_b, grâce au théorème de régularité elliptique :

Théorème 1.2. Soit (U, V) solution de :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t^2 U - c_o\Delta U = f \quad \text{dans } \Omega \times I \\ U \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \\ \operatorname{div}U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} \partial_t^2 V - c_o\Delta V = f \quad \text{dans } \Omega \times I \\ V.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \\ \operatorname{rot}V \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I \end{array}\right.$$

où $I = [s_0; s_1] \subset \mathbb{R}$, $f \in \left(L^2\left(\Omega \times I\right)\right)^3$. Alors on a $(U, V) \in H^1_\rho$ en tout point de $\rho \notin \Sigma_b$.

De plus, on a les estimations suivantes : $\forall\rho \notin \Sigma_b \quad \exists c > 0$

$$\|U\|_{H^1_\rho} \leq c\left(\|U\|_{L^2(\Omega\times I)} + \|f\|_{L^2(\Omega\times I)}\right) \tag{1.24}$$

$$\|V\|_{H^1_\rho} \leq c\left(\|V\|_{L^2(\Omega\times I)} + \|f\|_{L^2(\Omega\times I)}\right). \tag{1.25}$$

Preuve du théorème 1.2. La démonstration du théorème 1.2 s'obtient à partir des techniques de résolution de problème elliptique. Nous donnons la preuve pour la solution U.

Soit $\rho \in \left\{(x,t,\xi,\tau) \in T^*(\omega \times I)\backslash 0\,;-\tau^2+c_o\left|\xi\right|^2 \neq 0\right\}$ où ω est un ouvert strictement inclus dans Ω. On choisit $\Phi \in C_0^\infty(\omega \times I)$ et Θ une fonction homogène de degré 0, localisée dans un voisinage conique de (ξ,τ). Par homogénéité du symbole $p(x,t,\xi,\tau) = -\tau^2 + c_o\left|\xi\right|^2$, on vérifie que :

$$\Theta p(x,t,\xi,\tau) \neq 0 \quad \Longrightarrow \exists c, R>0 \quad \forall \left|\xi,\tau\right| > R \quad \Theta^2\left|p(x,t,\xi,\tau)\right| \geq c\Theta^2\left|\xi,\tau\right|^2.$$

On en conclut que : $\quad \exists c>0$

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\mathbb{R}^4}\Theta^2\left|\widehat{\Phi U}\right|^2\left(1+\left|\xi,\tau\right|^2\right)d\xi d\tau \quad &\leq c\left\|\Theta\widehat{\Phi U}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} + \textstyle\int_{\left|\xi,\tau\right|>R}\Theta^2\left|\widehat{\Phi U}\right|^2\left(1+\left|\xi,\tau\right|^2\right)d\xi d\tau \\ &\leq c\left(\left\|U\right\|^2_{L^2_\rho} + \left\|\Phi P(U)\right\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^4)}\right).\end{aligned}$$

Au voisinage du bord, par un changement de coordonnées on se ramène localement au demi-espace, le symbole principal de P devient :

$$p(s,y_1,y_2,t,\varsigma,\zeta_1,\zeta_2,\tau) = c_o\varsigma^2 + c_oh(s,y_1,y_2,\zeta_1,\zeta_2) - \tau^2.$$

On reprendra les notations choisies lors du changement de coordonnées locales (1.1) par Ψ. En posant $E(s,y_1,y_2,t) = U(\Psi(s,y_1,y_2),t) = U(x_1,x_2,x_3,t)$, on rappelle que les conditions $U\wedge n = 0$ et $\mathrm{div}U = 0$ sur le bord entrainent (1.5). On décompose E sous la forme : $E = n\wedge F + Dn \quad$ où $\quad F = (E\wedge n)$ et $D = (E.n)$.

Soit $\rho \in \left\{(s,y_1,y_2,t,\varsigma,\zeta_1,\zeta_2,\tau) \in T^*\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\right)\backslash 0\,;-\tau^2+c_oh(0,y_1,y_2,\zeta_1,\zeta_2)>0\right\}$ et Ξ une fonction homogène de degré 0, localisée autour d'un voisinage conique de $(\zeta_1,\zeta_2,\tau) = (\zeta',\tau)$. On considère les oérateurs pseudo-différentiels R et L ayant pour symbole principal $-\tau^2+c_oh(0,y_1,y_2,\zeta_1,\zeta_2)$ et $\Xi(\zeta_1,\zeta_2,\tau)$ respectivement. Grâce à l'inégalité de Garding, on a : $\quad \exists c>0$

$$\tfrac{1}{c}\textstyle\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+\left|\zeta',\tau\right|^2\right)\Xi^2\left|\widehat{\Phi D}'\right|^2 d\zeta' d\tau \leq c\left\|D\right\|^2_{L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)} + \left((L\Phi R)D, L\Phi D\right)_{L^2(\mathbb{R}^3).} \tag{1.26}$$

En intégrant (1.26) par rapport à la variable s, on obtient :

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^1 ds\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+\left|\zeta',\tau\right|^2\right)\Xi^2\left|\widehat{\Phi D}'\right|^2 d\zeta' d\tau + \int_0^1\left(-\partial_s^2(L\Phi D), L\Phi D\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \\ &\quad\leq c\left\|E\right\|^2_{L^2\left([0,1[;L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\right)} + c\textstyle\int_0^1\left(L\Phi[R,n]E, L\Phi D\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds + \left\|f\right\|^2_{L^2(\Omega\times I)}\end{aligned}$$

où $L\Phi[R,n]$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1.

Par intégration par parties, on a :

$$\textstyle\int_0^1\left(-\partial_s^2(L\Phi D), L\Phi D\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3}\Xi^2\left|\partial_s\widehat{\Phi D}'\right|^2 d\zeta' d\tau ds + \left(\partial_s L\Phi D_{|s=0}, L\Phi D_{|s=0}\right)_{L^2(\mathbb{R}^3).}$$

Mais le théorème de trace et la condition sur le bord de type Neumann entrainent que : $\quad \exists c>0 \quad \exists\alpha \in]à0,1[$

$$-\left(L\Phi\partial_s D_{|s=0}, L\Phi D_{|s=0}\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\left\|L\Phi D\right\|^\alpha_{H^1([0,1[\times\mathbb{R}^3)}\left\|E\right\|^{1-\alpha}_{L^2\left([0,1[;L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\right)}.$$

Finalement, $\quad \exists c>0$

$$\textstyle\int_0^1 ds\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+\left|\zeta',\tau\right|^2\right)\Xi^2\left|\widehat{\Phi D}'\right|^2 d\zeta' d\tau + \int_0^1\int_{\mathbb{R}^3}\Xi^2\left|\partial_s\widehat{\Phi D}'\right|^2 d\zeta' d\tau ds \leq c\left\|E\right\|^2_{L^2\left([0,1[;L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\right)} + c\left\|f\right\|^2_{L^2(\Omega\times I)} \tag{1.27}$$

et de même

$$\int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^3} \left(1+|\zeta',\tau|^2\right) \Xi^2 \left|\widehat{\Phi F}'\right|^2 d\zeta' d\tau + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} \Xi^2 \left|\partial_s \widehat{\Phi F}'\right|^2 d\zeta' d\tau ds \leq c \left\|E\right\|^2_{L^2\left([0,1[;L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\right)} + c\left\|f\right\|^2_{L^2(\Omega\times I)} . \tag{1.28}$$

Par conséquent (1.27) et (1.28) donnent

$$\int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^3} \left(1+|\zeta',\tau|^2\right) \Xi^2 \left|\widehat{\Phi E}'\right|^2 d\zeta' d\tau + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} \Xi^2 \left|\partial_s \widehat{\Phi E}'\right|^2 d\zeta' d\tau ds \leq c \left\|U\right\|^2_{L^2(\Omega\times I)} + c\left\|f\right\|^2_{L^2(\Omega\times I)} .$$

Ceci conclut la démonstration pour la solution $U(x_1,x_2,x_3,t)$. La preuve avec la solution $V(x_1,x_2,x_3,t) = V(\Psi(s,y_1,y_2),t) = B(s,y_1,y_2,t)$ est analogue avec les conditions aux limites (1.9).

Il découle du théorème 1.2 et par interpolation, le résultat suivant :

Théorème 1.3. Soit (U,V) solution de :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t^2 U - c_o\Delta U = 0 \quad \text{dans } \Omega\times I \\ U\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I \\ \text{div} U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I \end{array}\right. \qquad et \qquad \left\{\begin{array}{c} \partial_t^2 V - c_o\Delta V = 0 \quad \text{dans } \Omega\times I \\ V.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I \\ \text{rot} V\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times I \end{array}\right.$$

où $I=[s_0;s_1]\subset\mathbb{R}$. Alors, on a les estimations suivantes : $\quad \forall\rho\notin\Sigma_b \quad \exists c>0$

$$\left\|U\right\|_{L^2_\rho} \leq c\left\|U\right\|^{1/2}_{L^2(\Omega\times I)}\left\|U\right\|^{1/2}_{H^{-1}(\Omega\times I)} \tag{1.29}$$

$$\left\|V\right\|_{L^2_\rho} \leq c\left\|V\right\|^{1/2}_{L^2(\Omega\times I)}\left\|V\right\|^{1/2}_{H^{-1}(\Omega\times I)} . \tag{1.30}$$

1.1. **Applications : observation des ondes**

Nous allons établir des estimations d'observabilité stable à partir d'hypothèses géométriques.

Définition 1.1. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $T_c>0$. On dit que ω contrôle géométriquement Ω s'il existe un compact $\widetilde{\omega}$ de ω tel que tout rayon rencontre $\left(\widetilde{\omega}\cap\overline{\Omega}\right)\times]0;T_c[$.

On se propose de montrer l'estimation d'observabilité suivante :

Théorème 1.4. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $T_c>0$ tels que ω contrôle géométriquement Ω. Soit U solution de :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t^2 U - c_o\Delta U = f \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ U\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ \text{div} U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{array}\right.$$

où $T>T_c$, $f\in\left(H^{-1}(\Omega\times]0,T[)\right)^3$. Alors on a l'estimation suivante : $\quad \exists c>0 \quad \exists\widehat{\omega}\subset\subset\omega$

$$\left\|U\right\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\left(\left\|U\right\|_{L^2((\widehat{\omega}\cap\Omega)\times]0,T[)} + \left\|f\right\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}\right) . \tag{1.31}$$

Preuve du théorème 1.4. La démonstration du théorème 1.4 découle des théorèmes 1.1 et 1.3 de la manière suivante :

On décompose U comme suit : $U = W + V$ où W et V sont solutions des systèmes hyperboliques suivants :

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\partial_t^2 - c_o\Delta\right) W = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ W \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ \text{div} W = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\end{array} \right. \tag{1.32}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\partial_t^2 - c_o\Delta\right) V = f \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ \text{div} V = 0,\ V \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ V(\cdot,0) = \partial_t V(\cdot,0) \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

La solution V vérifie :

$$\exists c > 0 \qquad \|V\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|f\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}\,. \tag{1.33}$$

On pose $\epsilon = \frac{1}{2}(T - T_c) > 0$. Montrons l'estimation suivante : $\exists c, d > 0$

$$\|W\|_{L^2(\Omega\times]T-\epsilon,T[)} \leq c\,\|W\|_{L^2((\widehat{\omega}\cap\Omega)\times]0,T[)} + d\,\|W\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}. \tag{1.34}$$

Comme $\overline{\Omega}$ est compact, il existe une famille finie $\{\mathcal{O}_i\}_{i=0,\ldots,m}$ d'ouverts bornés recouvrant $\overline{\Omega}$ tels que $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_i \supset \partial\Omega$ et pour tout $i = 1, ..., m$ un difféomorphisme Ψ_i du pavé ouvert $\mathcal{Q} =]-1,1[^3$ dans $\mathcal{O}_i$ tel que :

$$\Psi_i^{-1}(\mathcal{O}_i \cap \Omega) = \{(s, y_1, y_2) \in \mathcal{Q} \setminus s > 0\}, \quad \Psi_i^{-1}(\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega) = \{(s, y_1, y_2) \in \mathcal{Q} \setminus s = 0\}\cdot$$

Soit alors $\{\alpha_i\}_{i=0,..,m}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\left\{\mathcal{O}_i \cap \overline{\Omega}\right\}_{i=0,\ldots,m}$ de $\overline{\Omega}$.

$$\alpha_0 \in C_0^\infty(\Omega), \quad \alpha_i \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right), \quad \text{supp}(\alpha_i) \subset \mathcal{O}_i \cap \overline{\Omega}.$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(]T_c, T+\epsilon[)$, $\chi = 1$ dans $[T-\epsilon, T]$. Pour tout $(x,t) \in \Omega \times]T-\epsilon, T[$, $W(x,t)$ s'écrit sous la forme :

$$W = \chi\alpha_0 W + \sum_{i=1}^{m} \chi\alpha_i W = \Phi_0 W + \sum_{i=1}^{m} \Phi_i W.$$

Donc, on obtient :

$$\|W\|^2_{L^2(\Omega\times]T-\epsilon,T[)} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^4} \left|\widehat{\Phi_0 W}\right|^2 d\xi' d\tau + \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^3} \left|\Phi_i \widehat{W \circ \Psi_i}'\right|^2 d\zeta' d\tau\right).$$

En découpant, suivant Σ_b, l'espace cotangent $T^*\left(\overline{\Omega} \times]T-\epsilon, T[\right)\backslash 0$ en deux, on se ramène à la situation suivante :

$$\|W\|^2_{L^2(\Omega\times]T-\epsilon,T[)} \leq c\left(\sum_{j=0}^{m} \|W\|^2_{L^2_{\rho_j}} + \sum_{j=0}^{m} \|W\|^2_{L^2_{\rho'_j}}\right) \tag{1.35}$$

où $\rho_j = \left\{(x_j, t, \xi, \tau) \in \Sigma_b \cap T^*\left(\overline{\Omega} \times]T-\epsilon, T[\right)\backslash 0\,; x_j \in \mathcal{O}_j\right\}$ et $\rho'_j = \{(x_j, t, \xi, \tau) \in \left(T^*\left(\overline{\Omega} \times]T-\epsilon, T[\right)\backslash 0\right) \backslash \Sigma_b; x_j \in \mathcal{O}_j\}$.

Au voisinage de $p(x,t,\xi,\tau) \neq 0$, on applique le théorème 1.3 de régularité elliptique. Au voisinage de Σ_b, le théorème 1.1 de propagation des singularités et l'hypothèse de contrôle géométrique impliquent le résultat suivant : $\exists c,d>0 \quad \exists \left(\widetilde{\omega}\cap\overline{\Omega}\right) \subset \widehat{\omega} \subset\subset \omega$

$$\|W\|_{L^2(\Omega\times]T-\epsilon,T[)} \leq c\,\|\Phi W\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} + d\,\|W\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)} \tag{1.36}$$

avec $\Phi \in C_0^\infty(\widehat{\omega}\times]0,T[)$, $\Phi = 1$ dans $\left(\widetilde{\omega}\cap\overline{\Omega}\right)\times]\epsilon,T-\epsilon[$.

L'énergie de W étant conservée, on a finalement : $\exists c,d>0$

$$\|W\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|\Phi W\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} + d\,\|W\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}.$$

Par l'absurde, on montre que : $\|W\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|W\|_{L^2((\widehat{\omega}\cap\Omega)\times]0,T[)}$.

En effet, s'il existe une suite (W_n) telle que

$$\|W_n\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\|W_n\|_{L^2((\widehat{\omega}\cap\Omega)\times]0,T[)} = 0$$

alors, par injection compacte de $L^2(\Omega\times]0,T[)$ dans $H^{-1}(\Omega\times]0,T[)$, il existe $W\in\left(L^2(\Omega\times]0,T[)\right)^3$ solution du sytème hyperbolique (1.32) tel que

$$\|W\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)} = 1 \text{ et } W=0 \quad \text{dans } (\widehat{\omega}\cap\Omega)\times]0,T[. \tag{1.37}$$

On pose $\mathcal{N}$ l'espace des solutions du système (1.32) et vérifiant les relations (1.37). C'est un sous-espace non vide, fermé de $L^2(\Omega\times]0,T[)$ inclus dans $H^1(\Omega\times]0,T[)$. En effet, on a: $\|\partial_t W\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq d\,\|\partial_t W\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}$, et W est solution du problème elliptique :

$$\begin{cases} \Delta W \in \left(H^1(\Omega)\right)' \\ \operatorname{div} W = 0,\ W\wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par injection compacte de $H^1(\Omega\times]0,T[)$ dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$, on en déduit que $\mathcal{N}$ est de dimension fini.

Comme ∂_t est une application linéaire de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$, il existe λ et $W\in\mathcal{N}$ tel que $\partial_t W = \lambda W$. On en conclut que W est solution de

$$\begin{cases} \lambda^2 W - c_o\Delta W = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ W = 0 \quad \text{dans } (\widehat{\omega}\cap\Omega). \end{cases}$$

Donc $W\equiv 0$. Ceci contredit le fait que $\|W\|=1$.

Conclusion

$$\exists c>0 \qquad \|W\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|\Phi W\|_{L^2((\widehat{\omega}\cap\Omega)\times]0,T[)}. \tag{1.38}$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.4.

L'étude de l'observabilité frontière est faite à partir des définitions suivantes :

Définition 1.2. On dit qu'un point $\rho\in\left(T^*\left(\mathbb{R}^4\right)\backslash 0\right)_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}}$ est non diffractif si et seulement si pour tout $\epsilon>0$ il existe $-\epsilon<s<\epsilon$ tel que le point $\gamma(s)$ sur la courbe intégrale de H_p issue de ρ pour $s=0$ n'est pas dans $\overline{\Omega}$.

Définition 1.2. Soit Γ une partie ouverte de $\partial\Omega$ et $T_c>0$. On dira que Γ contrôle géométriquement Ω s'il existe un compact $\widetilde{\Gamma}$ de Γ tel que tout rayon rencontre $\overline{\widetilde{\Gamma}}\times]0;T_c[$ en un point non diffractif.

On se propose de montrer l'estimation d'observabilité frontière suivante :

Théorème 1.5. Soit Γ une partie ouverte de $\partial\Omega$ et $T_c > 0$ tels que Γ contrôle géométriquement Ω. Soit $T > T_c$ et V solution de :

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t^2 V - c_o \Delta V = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ V.n = 0, \quad \mathrm{rot} V \wedge n = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega \setminus \Gamma) \times]0,T[\end{array} \right.$$

tel que $V_{|\partial\Omega} \in \left(L^2\left(\Gamma \times]0,T[\right)\right)^3$ et $\partial_n V \in \left(H^{-1}\left(\Gamma \times]0,T[\right)\right)^3$. Alors on a l'estimation suivante : $\exists c > 0$

$$\|V\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c \left(\|\partial_n V\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|V\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \right). \tag{1.39}$$

Preuve du théorème 1.5. La démonstration du théorème 1.5 découle du lemme de relèvement [5] que nous rappelons :

Lemme 1.1. Soit U distribution prolongeable solution de $P(U) = 0$ dans $\Omega \times \mathbb{R}$ et $\rho \in T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R}) \setminus 0$ un point non diffractif. Si $U_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}} \in L^2_\rho$ et $\partial_n U_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}} \in H^{-1}_\rho$, alors on a $U \in L^2_\rho$.

En reprenant la démonstration du théorème 1.4, l'hypothèse de contrôle géométrique du théorème 1.5 implique : $\exists c, d > 0$

$$\|V\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c \|V\|_{L^2_\rho} + d \|V\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}$$

où $\rho \in T^*(\Gamma \times]\epsilon, T-\epsilon[) \setminus 0$ est un point non difractif. Grâce au lemme 1.1 de relèvement, on en déduit que : $\exists c, d > 0$

$$\|V\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c \left(\|\partial_n V\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|V\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \right) + d \|V\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}.$$

Par l'absurde, on montre que :

$$\|V\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)} \leq c \left(\|\partial_n V\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|V\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \right).$$

En effet, s'il existe une suite (V_n) telle que

$$\|V_n\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|V_n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} = \lim_{n\to+\infty} \|\partial_n V_n\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} = 0$$

alors, par injection compacte de $L^2(\Omega \times]0,T[)$ dans $H^{-1}(\Omega \times]0,T[)$, il existe $V \in \left(L^2(\Omega \times]0,T[)\right)^3$ solution du sytème hyperbolique $\left(\partial_t^2 - c_o\Delta\right) V = 0$ dans $\Omega \times]0,T[$ tel que

$$\|V\|_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)} = 1 \text{ et } V = \partial_n V = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0,T[.$$

Par le théorème d'Holmgren, on conclut que $V \equiv 0$. Ceci contredit le fait que $\|V\| = 1$.

Conclusion

$$\exists c > 0 \qquad \|V\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c \left(\|\partial_n V\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|V\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \right).$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.5.

2. Cadre fonctionnel et équations de Maxwell

Cette partie est consacrée à des rappels sur les espaces fonctionnels couramment utilisés dans le cadre des équations électromagnétiques [1, 6, 7]. Nous ferons les hypothèses géométriques suivantes ([7], p. 252) :

- $\partial\Omega$ a un nombre fini de composantes connexes Γ_0,..,Γ_m (Γ_0 désignant la frontière de la composante connexe infinie de $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$).
- L'ouvert borné Ω peut être rendu simplement connexe par un nombre fini de coupures régulières Σ_1,..,Σ_N, disjointes deux à deux, non tangentes à $\partial\Omega$.

Nous commençons par rappeler les définitions des espaces de cohomologie $\mathbb{H}_1(\Omega)$ et $\mathbb{H}_2(\Omega)$:

$$\mathbb{H}_1(\Omega) = \left\{ g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \mathrm{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0,\ \mathrm{rot} g = 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2(\Omega) &= \left\{ f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \mathrm{div} f = 0,\ \mathrm{rot} f = 0,\ f \wedge n_{|\partial\Omega} = 0 \right\} \\ &= \left\{ f = \nabla\varphi \setminus \ \varphi \in H^1(\Omega),\ \Delta\varphi = 0,\ \varphi_{|\Gamma_i} = \text{constante pour } i = 0 \text{ à } m \right\} \cdot \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

Si Ω est simplement connexe, alors $\mathbb{H}_1(\Omega) \equiv \{0\}$.

Si $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe, alors $\mathbb{H}_2(\Omega) \equiv \{0\}$.

On définit $\mathcal{M}_E$ (resp. $\mathcal{M}_H$) l'orthogonal de $\mathbb{H}_2(\Omega)$ (resp. $\mathbb{H}_1(\Omega)$) pour la norme $\left(L^2(\Omega)\right)^3$. De plus, on considère $\mathcal{S}_E = \mathcal{M}_E \times \left(L^2(\Omega)\right)^3$ et $\mathcal{S}_H = \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \mathcal{M}_H$. Ainsi, on retrouve $\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_H = \left(L^2(\Omega)\right)^6$, si les hypothèses du lemme de Poincaré sont vérifiées (*i.e.* Ω est simplement connexe et $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe).

2.1. Existence et unicité du système de Maxwell

Nous rappelons le principal résultat de régularité :

Soit $\mathcal{A}_o$ l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_o = \left(L^2(\Omega)\right)^6$ de domaine $D(\mathcal{A}_o)$, défini comme suit :

$$\begin{aligned} \|(f,g)\|^2_{\mathcal{H}_o} &= \varepsilon \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \mathcal{A}_o &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ \mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix} \\ D(\mathcal{A}_o) &= \left\{ (f,g) \in \mathcal{H}_o \setminus \ (\mathrm{rot} f, \mathrm{rot} g) \in \mathcal{H}_o,\ f \wedge n_{|\partial\Omega} = 0 \right\} \cdot \end{aligned}$$

On rappelle que l'opérateur $-\mathcal{A}_o$ est générateur infinitésimal d'un groupe unitaire dans $\mathcal{H}_o$ de classe $\mathcal{C}^o$ ([7], p. 519 ou [6], p. 255). Par application du théorème de Hille-Yosida, on a le résultat de régularité

$\forall (E_o, H_o) \in D(\mathcal{A}_o) \quad \exists! (E,H) \in C^0(\mathbb{R}, D(\mathcal{A}_o)) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\mathcal{H}_o))$ solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot} H = 0,\ \mu\partial_t H + \mathrm{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ E \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ E(\cdot,0) = E_o,\ H(\cdot,0) = H_o \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

D'autre part, soit

$$\mathcal{V} = \left\{ f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \mathrm{div} f = 0 \right\} \times \left\{ g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \mathrm{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \Big\{ (f,g) \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \mathrm{rot} f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3,\ f \wedge n = 0,\ \mathrm{div} f = 0, \\ \mathrm{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0,\ \mathrm{rot} g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \Big\} \cdot \end{aligned}$$

En remarquant que l'espace $\mathcal{V}$ est stable par le semi-groupe, nous obtenons le résultat de régularité suivant :

$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{W} \quad \exists! (E,H) \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{W}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ solution du problème suivant

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon\partial_t E-\mathrm{rot}H=0,\ \mu\partial_t H+\mathrm{rot}E=0\quad\text{dans }\Omega\times\mathbb{R}\\ \mathrm{div}\,(\varepsilon E)=0,\ \mathrm{div}\,(\mu H)=0\quad\text{dans }\Omega\times\mathbb{R}\\ E\wedge n=0,\ H.n=0\quad\text{sur }\partial\Omega\times\mathbb{R}\\ E\,(\cdot,0)=E_o,\ H\,(\cdot,0)=H_o\quad\text{dans }\Omega.\end{array}\right. \tag{2.1}$$

De plus, en posant $\mathcal{E}\,(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\varepsilon\,|E|^2+\mu\,|H|^2\right)$ l'énergie du système (2.1), on a :

$$\forall\,(E_o,H_o)\in\mathcal{W}\qquad\frac{d}{dt}\mathcal{E}\,(t)=0.$$

La relation précédente assure que l'énergie est constante $\mathcal{E}\,(t)=\mathcal{E}\,(0)\quad\forall t\in\mathbb{R}$.

On remarquera que les espaces $\mathcal{S}_E$ et $\mathcal{S}_H$ sont invariants pour le problème (2.1). En effet, il suffit de multiplier l'équation $\varepsilon\partial_t E-\mathrm{rot}H=0$ (resp. $\mu\partial_t H+\mathrm{rot}E=0$) par $h_2\in\mathbb{H}_2\,(\Omega)$ (resp. $h_1\in\mathbb{H}_1\,(\Omega)$) et d'intégrer par parties sur Ω pour le vérifier. Par conséquent, on obtient les résultats de régularité :

$\forall\,(E_o,H_o)\in\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_E\quad\exists!\,(E,H)\in C^0\,(\mathbb{R},\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_E)\cap C^1\,(\mathbb{R},\mathcal{V}\cap\mathcal{S}_E)$ solution du problème (2.1).

$\forall\,(E_o,H_o)\in\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_H\quad\exists!\,(E,H)\in C^0\,(\mathbb{R},\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_H)\cap C^1\,(\mathbb{R},\mathcal{V}\cap\mathcal{S}_H)$ solution du problème (2.1).

2.2. **Décompositions orthogonales**

Dans le cadre de problèmes d'électromagnétisme, il est naturel de travailler avec les potentiels scalaire et vecteur liés au champ électromagnétique.

On montre que le champ électromagnétique se décompose de la manière suivante :

Lemme 2.1.

$\forall\,(E_o,H_o)\in\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_E\quad\exists!\,(h_1,A)\in C^1\,(\mathbb{R},\mathbb{H}_1\,(\Omega))\times C^2\left(\mathbb{R},\left(H^1\,(\Omega)\right)^3\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}\quad(E,H)\ \text{solution du problème (2.1)}\\ \varepsilon E=\mathrm{rot}A\\ H=\partial_t A+h_1\\ \mathrm{div}A=0,\ A.n_{|\partial\Omega}=0,\ \int_{\Sigma_i}A.nd\Gamma=0\quad i=0\ \grave{a}\ N.\end{array}\right.$$

De plus, on a les relations suivantes :

$$\|H\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\partial_t A\|^2_{L^2(\Omega)}+\|h_1\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.2}$$

$$\exists c>0\qquad\|A\|^2_{L^2(\Omega)}\leq c\,\|\mathrm{rot}A\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.3}$$

Lemme 2.2.

$\forall\,(E_o,H_o)\in\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_H\quad\exists!\,(h_2,A)\in C^1\,(\mathbb{R},\mathbb{H}_2\,(\Omega))\times C^2\left(\mathbb{R},\left(H^1\,(\Omega)\right)^3\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}\quad(E,H)\ \text{solution du problème (2.1)}\\ E=-\partial_t A+h_2\\ \mu H=\mathrm{rot}A\\ \mathrm{div}A=0,\ A\wedge n_{|\partial\Omega}=0,\ \int_{\Gamma_i}A.nd\Gamma=0\quad i=0\ \grave{a}\ m.\end{array}\right.$$

De plus, on a les relations suivantes :

$$\|E\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\partial_t A\|^2_{L^2(\Omega)}+\|h_2\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.4}$$

$$\exists c > 0 \qquad \|A\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \|\text{rot}A\|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{2.5}$$

Démonstration du lemme 2.1. Le champ $E \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$\varepsilon E = \nabla p + h_2 + rotA, \text{ où } p \in H^1_0(\Omega), \ h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega), \ A \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$$

tel que $\text{div}A = 0$, $A.n_{|\partial\Omega} = 0$, $\int_{\Sigma_i} A.nd\Gamma = 0 \quad i = 0$ à N ([6], p. 55).

Or $\text{div}E = 0$, par conséquent $\Delta p = 0$, ce qui oblige p à être nul. De plus, $E \in \mathcal{M}_E$, donc $h_2 = 0$.

En revenant au système (2.1), on a :

$$\begin{cases} \text{rot}\,(\partial_t A - H) = 0 \\ \text{div}\,(\partial_t A - H) = 0 \\ (\partial_t A - H)\,.n_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Ce qui aboutit à la décomposition du champ électromagnétique désirée, avec $h_1 = \partial_t A - H$. De plus, A est orthogonal à h_1 ([7], p. 256) et il en découle la relation (2.2).

L'inégalité (2.3) se démontre par l'absurde : en effet, si elle n'était pas vraie, il existerait une suite (A_n) bornée dans $\left(H^1(\Omega)\right)^3$ telle que l'on ait :

$$\|A_n\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|rotA_n\|_{L^2(\Omega)} = 0, \ \text{div}A_n = 0, \ A_n.n_{|\partial\Omega} = 0.$$

Par injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il existe $A \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ tel que $\|A\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et $\int_\Omega Ah_1 = 0 \quad \forall h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$, ce qui est contradictoire.

Ceci achève la preuve du lemme 2.1.

Démonstration du lemme 2.2. Le champ $H \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$\mu H = \nabla q + h_1 + \text{rot}A, \text{ où } q \in H^1(\Omega), \ h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega), \ A \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$$

tel que $\text{div}A = 0$, $A \wedge n_{|\partial\Omega} = 0$, $\int_{\Gamma_i} A.nd\Gamma = 0 \quad i = 0$ à m ([7], p. 261).

Or $\text{div}H = 0$ et $H.n_{|\partial\Omega} = 0$, par conséquent $\Delta q = 0$ et $\partial_n q = 0$, ce qui oblige q à être constant. De plus, $H \in \mathcal{M}_H$, donc $h_1 = 0$.

En revenant au système (2.1), on a :

$$\begin{cases} \text{rot}\,(\partial_t A + E) = 0 \\ \text{div}\,(\partial_t A + E) = 0 \\ (\partial_t A + E) \wedge n_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Ce qui aboutit à la décomposition du champ électromagnétique désirée, avec $h_2 = \partial_t A + E$. Par la deuxième définition de $\mathbb{H}_2(\Omega)$, A est orthogonal à h_2 :

$\int_\Omega Ah_2 = \int_\Omega A.\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\text{div}A + \int_{\partial\Omega} \varphi A.n = 0,$

et il en découle les relations (2.4) et (2.5).

Ceci achève la preuve du lemme 2.2.

3. Contrôlabilité exacte frontière et interne des équations de Maxwell

Dans cette section, nous complétons les résultats de controlabilité exacte frontière de Lagnese [9] et Komornik [8]. Aussi, nous rappelons que les résultats de contrôle prouvés par Bardos *et al.* pour l'équation des ondes [5] ont été étendus aux équations de Maxwell par Nalin [16].

3.1. Présentation du probleme de contrôlabilité exacte frontière

Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^3$, situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière (C^∞ sans contact d'ordre infini avec ses droites tangentes). Le domaine Ω est occupé par un champ électromagnétique avec une permittivité ε et une perméabilité μ constantes strictement positives. Soit $E\,(x,t)$ et $H\,(x,t)$, le champ électrique et respectivement le champ magnétique en un point $x \in \Omega$ à l'instant $t > 0$. Ils vérifient les équations de Maxwell :

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}H = 0,\ \mu\partial_t H + \mathrm{rot}E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ \mathrm{div}\,(\varepsilon E) = 0,\ \mathrm{div}\,(\mu H) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ E\,(\cdot, 0) = E_o,\ H\,(\cdot, 0) = H_o \quad \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

Supposons que l'on puisse modifier le champ magnétique tangentiel sur une partie Γ du bord en imposant une densité de courant surfacique J. Nous obtenons la condition aux limites :

$$H \wedge n = J.1_{|\Gamma} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[$$

avec n la normale extérieure au bord. Aussi, on pose

$$\begin{array}{l} L^2_n\,(\partial\Omega) = \left\{X \in \left(L^2\,(\partial\Omega)\right)^3 \setminus\ X.n_{|\partial\Omega} = 0\right\} \\ \mathcal{V}^* = \left\{f \in \left(L^2\,(\Omega)\right)^3 \setminus\ \mathrm{div}f = 0,\ f.n_{|\partial\Omega} = 0\right\} \times \left\{g \in \left(L^2\,(\partial\Omega)\right)^3 \setminus\ \mathrm{div}g = 0\right\}\cdot \end{array}$$

Notre objectif est de choisir le contrôle J de manière à ce qu'il amène, à l'instant $T > 0$, le sytème de Maxwell à l'état d'équilibre *i.e.* $E\,(\cdot, T) = H\,(\cdot, T) = 0$ dans Ω. Ce contrôle sera construit par la méthode HUM d'unicité hilbertienne de Lions [11], qui repose sur une estimation d'observabilité [9].

3.2. Énoncés des résultats

On se propose de montrer, à partir des résultats de propagation des singularités obtenus par analyse microlocale, les résultats de contrôle suivants :

Théorème 3.1. On suppose que Γ contrôle géométriquement Ω. Alors pour toutes données de Cauchy $(E_o, H_o) \in \mathcal{V}^* \cap \left(\left(L^2\,(\Omega)\right)^3 \times \mathcal{M}_E\right)$, il existe un contrôle $J \in L^2\left(0, T; L^2_n\,(\partial\Omega)\right)$, tel que la solution du problème d'évolution

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}H = 0,\ \mu\partial_t H + \mathrm{rot}E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T[\\ \mathrm{div}E = 0,\ \mathrm{div}H = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T[\\ E\,(\cdot, 0) = E_o,\ H\,(\cdot, 0) = H_o \quad \text{dans } \Omega \\ H \wedge n = J.1_{|\Gamma} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{array}\right.$$

vérifie $(E, H)\,(\cdot, t) \equiv 0 \quad$ pour $t \geq T$.

La démonstration du théorème 2.1 découle de la méthode HUM de Lions et d'une estimation d'observabilité stable qui suit

Théorème 3.2. On suppose que Γ contrôle géométriquement Ω. Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{S}_E$ donnée de Cauchy du problème

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}H = 0,\ \mu\partial_t H + \mathrm{rot}E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \mathrm{div}E = 0,\ \mathrm{div}H = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ E\,(\cdot, 0) = E_o,\ H\,(\cdot, 0) = H_o \quad \text{dans } \Omega \\ E \wedge n = 0,\ H.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{array}\right.$$

on ait l'estimation d'observabilité stable suivante

$$\int_0^T \int_\Omega |(E,H)|^2 \leq c \int_0^T \int_\Gamma |H|^2 . \tag{3.1}$$

Preuve du théorème 3.2. La démonstration du théorème 3.2 découle du théorème 1.5. Elle se décompose en deux étapes :

Étape 1
On relie E et H, par intégration par parties et en utilisant la décomposition du champ électromagnétique du lemme 2.1. $(\varepsilon E, \mu H) = (\mathrm{rot} A, \mu \partial_t A + h_1)$ où le potentiel vecteur A est orthogonal à $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ et vérifie les inégalités (2.5) et

$$\|\mu H\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\mu \partial_t A\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h_1\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Soit $\Phi \in C_0^\infty(]0,T[)$, on a, grâce aux formules de Green, les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll}\int_0^T \int_\Omega \varepsilon |\Phi E|^2 & = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} A + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Phi^2 (E \wedge n) A \\ & = -\varepsilon\mu \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \partial_t H \\ & = \int_0^T \int_\Omega \varepsilon\mu 2\Phi \partial_t \Phi A H + \int_0^T \int_\Omega \varepsilon\mu \Phi^2 \partial_t A H.\end{array}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut que :

$$\int_0^T \int_\Omega |\Phi E|^2 + \int_0^T \int_\Omega |\Phi H|^2 \leq c \int_0^T \int_\Omega |H|^2 . \tag{3.2}$$

Quitte à choisir Φ tel que $\Phi = 1$ sur $[T/3, 2T/3]$, on a par conservation de l'énergie :

$$\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |E|^2 + \mu \int_0^T \int_\Omega |H|^2 = 3 \left(\frac{T}{3} \mathcal{E} \left(\frac{2T}{3} \right) \right) \leq c \int_0^T \int_\Omega |H|^2 . \tag{3.3}$$

Conclusion. On s'aperçoit qu'il est suffisant d'étudier la propagation des singularités du champ magnétique.

Étape 2
On se ramène à l'équation des ondes.

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon\mu \partial_t^2 H - \Delta H = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ H.n = 0, \quad \mathrm{rot} H \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[. \end{array} \right.$$

D'après (1.39), on a l'estimation suivante : $\exists c > 0$

$$\|H\|_{L^2(\Omega \times]0,T[)} \leq c \left(\|\partial_n H\|_{H^{-1}(\Gamma \times]0,T[)} + \|H\|_{L^2(\Gamma \times]0,T[)} \right) . \tag{3.4}$$

Les conditions aux limites $\mathrm{div} H = 0$ et $\mathrm{rot} H \wedge n = 0$ sur $\partial\Omega \times]0,T[$ permettent de se ramener au système (1.11) *i.e.* $\partial_n H + \mathcal{L} H = 0$ où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel matriciel d'ordre 1.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.2.

Le théorème 3.2 exprime un résultat d'unicité qui se décompose en deux étapes : le résultat de propagation des singularités L^2 du théorème 1.5 (qui assure que la propagation des singularités du champ magnétique est analogue à celle d'une équation des ondes scalaire) et la condition (1.11) montrent que si $H = 0$ sur une partie du bord, alors $H \equiv 0$, avec l'estimation d'unicité linéaire [16]

$$\|H\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|H\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}$$

sous les hypothèses de contrôle géométrique des travaux de Bardos *et al.* [5]. Il reste à montrer que si $H \equiv 0$, alors $E \equiv 0$. Dans cette dernière étape, il convient de restreindre le champ électrique initial E_o à l'orthogonal de $\mathbb{H}_2(\Omega)$.

En particulier, si $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe et sous les hypothèses de contrôle géométrique, alors pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{V}$, $\|H\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} = 0$ implique $(E_o, H_o) \equiv 0$ avec l'estimation d'unicité linéaire (3.1). Ce type de résultat avait été obtenu par Nalin [16, 25] dans le cadre H^1 : si $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe et sous les hypothèses de contrôle géométrique, alors pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{W}$, $\|\partial_t H\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} = 0$ implique $(E_o, H_o) \equiv 0$ avec l'estimation d'unicité linéaire correspondante.

3.3. Présentation du problème de contrôlabilité exacte interne

Soit $\omega \subset \Omega$ où Ω est un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^3$, situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière (C^∞ sans contact d'ordre infini avec ses droites tangentes). Le domaine Ω est occupé par un champ électromagnétique avec une permittivité ε et une perméabilité μ constantes strictement positives. On considère le système de Maxwell suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot} H = J.1_{|\omega\times]0,T[}, \ \mu\partial_t H + \mathrm{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ \mathrm{div}\,(\mu H) = 0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ E\wedge n = 0, \ H.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times[0,+\infty[\\ E(\cdot,0) = E_o, \ H(\cdot,0) = H_o \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Le problème (3.5) est bien posé. Aussi, on considère

$$L^2_{\mathrm{div}0}(\Omega) = \left\{X \in \left(L^2(\partial\Omega)\right)^3 \setminus \ \mathrm{div}X = 0\right\}\cdot$$

Notre objectif est de choisir le contrôle J de manière à ce qu'il amène, à l'instant $T > 0$, le sytème de Maxwell à l'état d'équilibre *i.e.* $E(\cdot,T) = H(\cdot,T) = 0$ dans Ω. Ce contrôle sera construit par la méthode HUM de Lions qui repose sur une estimation d'observabilité [11].

3.4. Énoncés des résultats

On se propose de montrer, à partir des résultats de propagation des singularités obtenus par analyse microlocale, les résultats de contrôle suivants :

Théorème 3.3. Soit $\widetilde{\omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $\widetilde{\omega}$ contrôle géométriquement Ω. On suppose que $\omega = (\widetilde{\omega}\cap\Omega)$. Alors pour toutes données de Cauchy $(E_o, H_o) \in \mathcal{V}\cap\mathcal{S}_H$, il existe un contrôle $J \in L^2\left(0,T; L^2_{\mathrm{div}0}(\Omega)\right)$, tel que la solution du problème d'évolution (3.5) vérifie $(E,H)(\cdot,t) \equiv 0 \quad$ pour $t \geq T$.

La démonstration du théorème 3.3 découle de la méthode HUM de Lions et d'une estimation d'observabilité stable qui suit

Théorème 3.4. Soit $\widetilde{\omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $\widetilde{\omega}$ contrôle géométriquement Ω. On suppose que $\omega = (\widetilde{\omega}\cap\Omega)$. Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{V}\cap\mathcal{S}_H$ donnée de Cauchy du problème

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot} H = 0, \ \mu\partial_t H + \mathrm{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,T[\\ \mathrm{div} E = 0, \ \mathrm{div} H = 0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,T[\\ E\wedge n = 0, \ H.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ E(\cdot,0) = E_o, \ H(\cdot,0) = H_o \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

on ait l'estimation d'observabilité stable suivante

$$\int_0^T \int_\Omega |(E,H)|^2 \leq c \int_0^T \int_\omega |E|^2 . \tag{3.6}$$

Preuve du théorème 3.4. La démonstration du théorème 3.4 découle du théorème 1.4. Elle se décompose en deux étapes :

Étape 1 :
On relie E et H, par intégration par parties et en utilisant la décomposition du champ électromagnétique du lemme 2.2. $(\varepsilon E, \mu H) = (\varepsilon \partial_t A + h_2, \mathrm{rot} A)$ où le potentiel vecteur A est orthogonal à $h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega)$ et vérifie les inégalités (2.3) et

$$\|\varepsilon H\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\varepsilon \partial_t A\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h_2\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Soit $\Phi \in C_0^\infty(]0,T[)$, on a, grâce aux formules de Green, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^T \int_\Omega \mu |\Phi H|^2 &= \tfrac{1}{\mu} \textstyle\int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} A = \varepsilon\mu \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \partial_t E \\ &= -\textstyle\int_0^T \int_\Omega \varepsilon\mu 2\Phi\partial_t\Phi A E - \int_0^T \int_\Omega \varepsilon\mu\Phi^2 \partial_t A E. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut que :

$$\int_0^T \int_\Omega |\Phi E|^2 + \int_0^T \int_\Omega |\Phi H|^2 \leq c \int_0^T \int_\Omega |E|^2 . \tag{3.7}$$

Quitte à choisir Φ tel que $\Phi = 1$ sur $[T/3, 2T/3]$, on a par conservation de l'énergie :

$$\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |E|^2 + \mu \int_0^T \int_\Omega |H|^2 = 3\left(\frac{T}{3}\mathcal{E}\left(\frac{2T}{3}\right)\right) \leq c \int_0^T \int_\Omega |E|^2 . \tag{3.8}$$

Conclusion. On s'aperçoit qu'il est suffisant d'étudier la propagation des singularités du champ électrique.

Étape 2 :
On se ramène à l'équation des ondes.

$$\begin{cases} \varepsilon\mu\partial_t^2 E - \Delta E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ E \wedge n = 0, \quad \mathrm{div} E = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[. \end{cases}$$

D 'après (1.31), on a l'estimation suivante : $\exists c > 0$

$$\|E\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c \|E\|_{L^2(\omega\times]0,T[)}. \tag{3.9}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3.4.

4. Stabilisation frontière des équations de Maxwell

Dans ce paragraphe, nous complétons l'étude asymptotique du système de Maxwell avec les conditions aux limites absorbantes faite par Barucq et Hanouzet [1,3]. Le problème de stabilisation frontière par la condition aux limites absorbante de Silver-Müller a aussi été étudié par Komornik [8] dans le cadre de géométries particulières par la méthode des multiplicateurs.

4.1. Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^3$. Le domaine Ω est occupé par un champ électromagnétique avec une permittivité ε et une perméabilité μ constantes strictement positives. On pose $z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

On considère le système de Maxwell suivant, où Ω est situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière (C^∞ sans contact d'ordre infini avec ses droites tangentes), avec $\partial\Omega = \Gamma_o \cup \Gamma$ et $\Gamma_o \cap \Gamma = \emptyset$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot} H = 0,\ \mu\partial_t H + \mathrm{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0,+\infty[\\ \mathrm{div}\,(\varepsilon E) = 0,\ \mathrm{div}\,(\mu H) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0,+\infty[\\ E\,(\cdot,0) = E_o,\ H\,(\cdot,0) = H_o \quad \text{dans } \Omega \\ E \wedge n = 0,\ H.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_o \times [0,+\infty[\\ (E \wedge n) \wedge n + z\,(H \wedge n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times [0,+\infty[\,. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

On rappelle les principaux résultats de Barucq et Hanouzet [1,3] :

Le problème (4.1) est bien posé, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \mathrm{div} f = 0 \right\} \times \left\{ g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \mathrm{div} g = 0,\ g.n_{|\Gamma_o} = 0 \right\} \\ \mathcal{W} &= \Big\{ (f,g) \in \left(H^1(\Omega)\right)^6 \setminus \mathrm{div} f = 0,\ f \wedge n_{|\Gamma_o} = 0,\ \mathrm{div} g = 0,\ g.n_{|\Gamma_o} = 0, \\ &\qquad\qquad (f \wedge n) \wedge n + z\,(g \wedge n)_{|\Gamma} = 0 \Big\} \end{aligned}$$

$\forall\,(E_o,H_o) \in \mathcal{W} \quad \exists!\,(E,H) \in C^0\,(]0,+\infty[\,,\mathcal{W}) \cap C^1\,(]0,+\infty[\,,\mathcal{V})$ solution du problème (4.1).
Ce résultat est obtenu par le théorème de Hille-Yosida appliqué à l'opérateur non borné $\mathcal{A}$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{V}$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ \mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\mathcal{W}$ coïncide avec $D\,(\mathcal{A})$ de domaine $\mathcal{A}$ et

$$D\left(\mathcal{A}^2\right) = \left\{ (f,g) \in \left(H^2(\Omega)\right)^6 \setminus \mathrm{div} f = \mathrm{div} g = 0,\ f \wedge n_{|\Gamma_o} = g.n_{|\Gamma_o} = 0,\ (f \wedge n) \wedge n + z\,(g \wedge n)_{|\Gamma} = 0 \right\}.$$

De plus, en posant $\mathcal{E}\,(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon\,|E|^2 + \mu\,|H|^2\right)$ l'énergie du système (4.1), on a :

$$\forall\,(E_o,H_o) \in \mathcal{W} \qquad -\frac{d}{dt}\mathcal{E}\,(t) = \frac{1}{z}\int_\Gamma |E \wedge n|^2 = z\int_\Gamma |H \wedge n|^2\,.$$

La relation précédente assure que l'énergie est décroissante.

D'autre part, on a : $\forall\,(E_o,H_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{M}_\Gamma \quad \lim_{t\to+\infty} (E,H) = (0,0)$ dans $\mathcal{V}$, où $\mathcal{M}_\Gamma$ est l'orthogonal des solutions stationnaires pour la norme $\left(L^2(\Omega)\right)^6$. On rappelle que $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}_\Gamma$ est invariant pour le problème (4.1) [1,3].

En posant $\mathcal{E}'$ la fonctionnelle décroissante $\mathcal{E}'\,(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon\,|\partial_t E|^2 + \mu\,|\partial_t H|^2\right)$, on a :

$$\forall\,(E_o,H_o) \in D\left(\mathcal{A}^2\right) \qquad -\frac{d}{dt}\mathcal{E}'\,(t) = z\int_\Gamma |\partial_t H \wedge n|^2\,.$$

On remarquera que la condition de Silver-Müller $(E \wedge n) \wedge n + z\,(H \wedge n) = 0$ s'écrit aussi $(E \wedge n) - z\,(H \wedge n) \wedge n = 0$ et on obtient $(\mathrm{rot} H \wedge n) + \varepsilon z\,(\partial_t H \wedge n) \wedge n = 0$.

4.2. **Amortissement avec hypothèse de contrôle géométrique**

On se propose de montrer, à partir des résultats de propagation des singularités obtenus par analyse microlocale, les résultats de stabilisation suivants :

Théorème 4.1. On suppose que Γ contrôle géométriquement Ω. Alors il existe $c > 0$ et $\beta > 0$ tel que l'on ait $\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\Gamma$ données de Cauchy du problème (4.1) $\quad \forall t \geq 0 \quad \mathcal{E}(t) \leq ce^{-\beta t}\, \mathcal{E}(0)$.

La démonstration du théorème 4.1 découle du théorème 4.2 qui suit. Notons aussi que la condition suffisante du théorème 4.1 est presque nécessaire en construisant une solution d'énergie localisée [5, 18, 20].

Théorème 4.2. On suppose que Γ contrôle géométriquement Ω. Alors il existe $c > 0$ et $\beta > 0$ tel que l'on ait $\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{M}_\Gamma$ données de Cauchy du problème (4.1) $\quad \forall t \geq 0 \quad (\mathcal{E} + \mathcal{E}')(t) \leq ce^{-\beta t}\, (\mathcal{E} + \mathcal{E}')(0)$.

Preuve du théorème 4.2. La démonstration du théorème 4.2 découle du lemme suivant

Lemme 4.1. Sous les hypothèses du théorème 4.2, si (E, H) est solution du problème (4.1) avec des données de Cauchy dans $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}_\Gamma$, alors on a :

$$\exists c > 0 \quad \int_0^T \int_\Omega \left(|(E, H)|^2 + |(\partial_t E, \partial_t H)|^2 \right) \leq c \int_0^T \int_\Gamma |\partial_t H \wedge n|^2 . \tag{4.2}$$

Preuve du lemme 4.1. Elle se décompose en cinq étapes :

Étape 1 :

On relie $\partial_t E$ et $\partial_t H$, par intégration par parties :

Soit $\Phi \in C_0^\infty (]0, T[)$, on a, grâce aux formules de Green, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \varepsilon \,|\Phi \partial_t E|^2 &= \tfrac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 H \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} H + \tfrac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Gamma \Phi^2 (\mathrm{rot} H \wedge n)\, H \\ &= -\mu \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 H \partial_t^2 H + \int_0^T \int_\Gamma \Phi^2 (\partial_t E \wedge n)\, H \\ &= \int_0^T \int_\Omega \mu \partial_t \left(\Phi^2 H\right) \partial_t H + z \int_0^T \int_\Gamma \Phi^2 (n \wedge H)(\partial_t H \wedge n)\,. \end{aligned}$$

On vérifie tout d'abord l'estimation suivante

$$\|(E, H)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \,\|(\mathrm{rot} E, \mathrm{rot} H)\|_{L^2(\Omega).}$$

Cette dernière inégalité se démontre par l'absurde : en effet, si elle n'est pas vraie, il existerait une suite (E_n, H_n) bornée dans $\left(H^1(\Omega)\right)^6$ telle que

$$\|(E_n, H_n)\|_{L^2(\Omega)} = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \|(\mathrm{rot} E_n, \mathrm{rot} H_n)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \ \lim_{n \to +\infty} \|E_n \wedge n\|_{L^2(\Gamma)} = 0$$

$$\mathrm{div} E_n = \mathrm{div} H_n = 0, \ E_n \wedge n_{|\Gamma_o} = H_n . n_{|\Gamma_o} = 0, (E_n \wedge n) \wedge n + z\,(H_n \wedge n)_{|\Gamma} = 0$$

alors, par injection compacte, il existe donc $(E, H) \in \mathcal{N} \cup \mathcal{N}^\perp$ *où* $\mathcal{N}^\perp = \mathcal{M}_\Gamma$ tel que $\|(E, H)\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Ce qui est contradictoire.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut que :

$$\int_0^T \int_\Omega |\Phi \partial_t E|^2 + \int_0^T \int_\Omega |\Phi \partial_t H|^2 \leq c \left(\int_0^T \int_\Omega |\partial_t H|^2 + \int_0^T \int_\Gamma |\partial_t H \wedge n|^2 \right).$$

Quitte à choisir $\Phi \in C_0^\infty(]0,T[)$ tel que $\Phi = 1$ sur $[T/3, 2T/3]$, on a par décroissance de l'énergie :

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |\partial_t E|^2 + \mu \int_0^T \int_\Omega |\partial_t H|^2 \quad &\leq T\mathcal{E}'(0) = T\mathcal{E}'(T) + Tz \int_0^T \int_\Gamma |\partial_t H \wedge n|^2 \\ &\leq 3\left(\tfrac{T}{3}\mathcal{E}'\left(\tfrac{2T}{3}\right)\right) + Tz \int_0^T \int_\Gamma |\partial_t H \wedge n|^2 \\ &\leq c\left(\int_0^T \int_\Omega |\partial_t H|^2 + \int_0^T \int_\Gamma |\partial_t H \wedge n|^2\right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Conclusion. On s'aperçoit qu'il est suffisant d'étudier la propagation des singularités du champ magnétique.

Étape 2 :
On établit des estimations préliminaires sur le bord Γ :

Tout d'abord, on a : $H = n \wedge (H \wedge n) + (H.n)\, n$ et $|H| \leq c\,(|H \wedge n| + |H.n|)$. En supposant le domaine Ω sous la forme $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \setminus x_3 - g(x_1, x_2) > 0\}$, on rappelle que la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ est défini par $n = (\nu m_1, \nu m_2, \nu)^t$ où $\nu^2\left(1 + m_1^2 + m_2^2\right) = 1$.

Par conséquent, H s'écrit aussi $H = (m_1, m_2, 1)^t\, H_3 + F$ où $|F| \leq \frac{1}{\nu}\,|H \wedge n|$. On en déduit : $\exists c > 0$

$$|(H \wedge n) \wedge n| \leq c\,|H \wedge n| \ \text{ et } \ |H.n| \leq c\,(|H_3| + |H \wedge n|)\,. \tag{4.4}$$

En particulier, la condition de Silver-Müller entraine $|E \wedge n| \leq c\,|H \wedge n|$.

Intéressons nous au cas de $\partial_t H.n$: $\mu\partial_t H.n = -\mathrm{rot}E.n = -\mathrm{div}_{|\Gamma}\,(E \wedge n)$, où $\mathrm{div}_{|\Gamma}$ est un opérateur différentiel tangentiel de degré 1, donc

$$\|\partial_t H.n\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq c\,\|E \wedge n\|_{L^2(\Gamma)}$$

Par conséquent

$$\exists c > 0 \qquad \|\partial_t H\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} \leq c\,\|H \wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \tag{4.5}$$

En ce qui concerne les dérivées normales de chaque composante de H, on pose, avec le changement de coordonées locales (1.1)

$$\widetilde{H}(s, y_1, y_2, t) = H(\Psi(s, y_1, y_2), t) = H(x_1, x_2, x_3, t)$$

de sorte que la divergence s'écrit

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \partial_s \widetilde{H} + \nu \begin{pmatrix} 1 + m_2^2 \\ -m_1 m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} \partial_{y_1} \widetilde{H} + \nu \begin{pmatrix} -m_1 m_2 \\ 1 + m_1^2 \\ -m_2 \end{pmatrix} \partial_{y_2} \widetilde{H} = 0.$$

La condition de Silver-Müller s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & -m_2 \end{pmatrix} \left(\partial_s \widetilde{H} + \varepsilon z \partial_t \widetilde{H}\right) = \nu \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_{y_1} \widetilde{H} + v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{pmatrix} \partial_{y_2} \widetilde{H}.$$

Finalement, la condition au bord du système étudié se ramène alors à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & -m_2 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{pmatrix} \partial_s \widetilde{H} + \varepsilon z \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & -m_2 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \widetilde{H} + ...$$

$$...-\nu\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1-m_2^2 & m_1m_2 & m_1 \end{pmatrix}\partial_{y_1}\widetilde{H}-\nu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & 1 \\ m_1m_2 & -1-m_1^2 & m_2 \end{pmatrix}\partial_{y_2}\widetilde{H}=0.$$

On remarque que la matrice devant $\partial_s\widetilde{H}=\partial_n H$ est inversible. Par conséquent,

$$\partial_s\widetilde{H}+\varepsilon z\begin{pmatrix} 1-\nu m_1^2 & -\nu m_1m_2 & m_1\left(-1+\nu m_1^2+\nu m_2^2\right) \\ -\nu m_1m_2 & 1-\nu m_2^2 & m_2\left(-1+\nu m_1^2+\nu m_2^2\right) \\ -\nu m_1 & -\nu m_2 & \nu\left(m_1^2+m_2^2\right) \end{pmatrix}\partial_t\widetilde{H}+...$$

$$...-\nu\begin{pmatrix} 0 & m_2 & 1 \\ -m_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_{y_1}\widetilde{H}-\nu\begin{pmatrix} 0 & -m_1 & 0 \\ m_1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_{y_2}\widetilde{H}=0.$$

Il en découle l'estimation suivante :

$$\exists c>0 \qquad \|\partial_n H\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)}\leq c\,\|H\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}\leq c\left(\|H_3\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}+\|H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}\right). \tag{4.6}$$

Étape 3 :
Nous estimons H_3 sur le bord Γ :

On rappelle que $\widetilde{H}_3(s,y_1,y_2,t)$ est solution de

$$\begin{cases} P\left(\widetilde{H}_3\right)=\left(-\partial_s^2+R\left(s,y,D_{y,t}\right)\right)\left(\widetilde{H}_3\right)=0 \quad \text{dans } \{s>0\} \\ \partial_s\widetilde{H}_3+\nu\partial_{y_1}\widetilde{H}_3+\nu\partial_{y_2}\widetilde{H}_3+\varepsilon z\partial_t F=0 \quad \text{sur } \{s=0\} \\ F=m_1\left(\widetilde{H}\wedge n\right)_2-m_2\left(\widetilde{H}\wedge n\right)_1 \quad \text{sur } \{s=0\}\cdot \end{cases}$$

Cette condition au bord se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} B\left(y_1,y_2,t,D_{y,t}\right)\left(\widetilde{H}_3\right) &= \partial_s\widetilde{H}_3+\nu m_1\partial_{y_1}\widetilde{H}_3+\nu m_2\partial_{y_2}\widetilde{H}_3+\nu\left(\partial_{y_1}m_1+\partial_{y_2}m_2\right)\widetilde{H}_3 \\ &= \nu\left(\partial_{y_1}-m_1\partial_t\right)\left(\widetilde{H}\wedge n\right)_2-\nu\left(\partial_{y_2}-m_2\partial_t\right)m_2\left(\widetilde{H}\wedge n\right)_1. \end{aligned}$$

Microlocalement, au voisinage des directions où l'opérateur ∂_t est non caractéristique, $\left(\widetilde{H}_3\right)_{|s=0}\in L^2_\rho$ dès que $\left(\partial_t\widetilde{H}_3\right)_{|s=0}\in H^{-1}_\rho$. Mais, le voisinage que l'on vient d'exclure est dans la région elliptique de l'opérateur hyperbolique. On conclut, par un calcul microlocal standard, qu'il existe, dans la région elliptique, un opérateur A_1 pseudo-différentiel d'ordre 1, tangentiel réelle, elliptique tel que $\partial_s\widetilde{H}_3=A_1\left(\widetilde{H}_3\right)$ sur $s=0$. Ainsi, dans la région elliptique, l'opérateur B devient elliptique d'ordre 1, et son symbole principal s'écrit

$$\sigma(B)=A\left(y_1,y_2,t,\zeta_1,\zeta_2,\tau\right)+i\nu\left(y_1,y_2\right)\left[m_1\left(y_1,y_2\right)\zeta_1+m_2\left(y_1,y_2\right)\zeta_2\right].$$

En revenant à la solution H_3, on a montré que [4,5] : $\quad \exists c,d>0$

$$\|H_3\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}\leq c\left(\|H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}+\|\partial_t H_3\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)}\right)+d\,\|H_3\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)}.$$

Conclusion. Grâce à (4.5), $\quad \exists c,d>0$

$$\|H_3\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \leq c\,\|H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d\,\|H_3\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)}. \tag{4.7}$$

Étape 4 :
On se ramène à l'équation des ondes.

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\mu\partial_t^2 H - \Delta H = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ H.n = 0, \quad \mathrm{rot}H\wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_o\times]0,T[\\ (\partial_t H\wedge n)\wedge n - \frac{1}{\varepsilon z}(\mathrm{rot}H\wedge n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_o\times]0,T[\,. \end{array}\right.$$

D 'après (1.39), on a l'estimation suivante : $\quad \exists c>0$

$$\|H\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\left(\|\partial_n H\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|H\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}\right). \tag{4.8}$$

Les estimations (4.4, 4.6, 4.7) des étapes précédentes permettent d'obtenir l'inégalité suivante : $\quad \exists c,d>0$

$$\|\partial_n H\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|H\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \leq c\,\|H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d\,\|(E,H)\|_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)}.$$

Le résultat est encore valable si on remplace (E,H) par $(\partial_t E, \partial_t H)$. Par le théorème de trace (4.3) et (4.8), on a alors, l'inégalité suivante : $\quad \exists c,d>0$

$$\|(\partial_t E,\partial_t H)\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|\partial_t H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d\,\|(E,H)\|_{H^{1/2+\epsilon}(\Omega\times]0,T[)}.$$

Les résultats de régularité ([1], p. 76) permettent de conclure à $\quad \exists c,d>0$

$$\|(E,H)\|_{H^1(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|\partial_t H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d\,\|(E,H)\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}. \tag{4.9}$$

Étape 5 :
Il reste à montrer que $\|(E,H)\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|\partial_t H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}$. On démontre cette inégalité par l'absurde :
En effet, supposons qu'il existe une suite (E_n,H_n) solution du problème (4.1) telle que

$$\|(E_n,H_n)\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\|\partial_t H\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} = 0$$

alors, (E_n,H_n) vérifie l'inégalité (4.9) : $\|(E_n,H_n)\|_{H^1(\Omega\times]0,T[)} \leq c\,\|\partial_t H_n\wedge n\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d$. Donc (E_n,H_n) est borné dans $H^1(\Omega\times]0,T[)$. Par injection compacte de $H^1(\Omega\times]0,T[)$ dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$, on en extrait une sous-suite convergente. Ainsi, il existe $(E,H) = \lim_{n\to+\infty}(E_n,H_n)$ dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}H = 0, \ \mu\partial_t H + \mathrm{rot}E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ \mathrm{div}(\varepsilon E) = 0, \ \mathrm{div}(\mu H) = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ E\wedge n = 0, \ H.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_o\times]0,T[\\ E\wedge n = 0, \ H\wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma\times]0,T[\\ \|(E,H)\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} = 1. \end{array}\right.$$

On pose $\mathcal{N}$ l'espace des solutions du système ci-dessus. C'est un sous-espace non vide, fermé de $H^1(\Omega\times]0,T[)$ inclus dans $H^2(\Omega\times]0,T[)$ avec $\|(E,H)\|_{H^2(\Omega\times]0,T[)} \leq d\,\|(E,H)\|_{H^1(\Omega\times]0,T[)}$, donc par injection compacte de $H^2(\Omega\times]0,T[)$dans $H^1(\Omega\times]0,T[)$, on en déduit que $\mathcal{N}$ est de dimension fini.

Comme ∂_t est une application linéaire de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$, il existe λ et $(E,H)\in\mathcal{N}$ tel que $\partial_t(E,H)=\lambda(E,H)$. On en conclut que $(E,H)\equiv(0,0)$, car $(E(\cdot,0),H(\cdot,0))\in\mathcal{W}\cap\mathcal{M}_\Gamma$, où $\mathcal{M}_\Gamma$ est l'orthogonal des solutions stationnaires pour la norme $\mathcal{V}$. Ceci contredit le fait que $\|(E,H)\|=1$.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.2.

5. Stabilisation interne des équations de Maxwell

Nous terminons l'étude des systèmes de Maxwell dissipatifs en traitant les cas d'amortissement interne.

En particulier, on cherche à connaitre le comportement asymptotique en temps de la solution des équations de Maxwell avec loi d'Ohm.

Nous choisissons une conductivité σ positive dans tout le domaine de calcul Ω, nulle dans un sous-domaine ω_- connexe défini par $\omega_-=\Omega\setminus(\mathrm{supp}\sigma\cap\Omega)$. On définit l'ouvert ω_+ par $\Omega=\omega_+\cup\Gamma\cup\omega_-$ où Γ est l'interface qui sépare les ouverts ω_+ et ω_-. Sous la condition de contrôle géométrique, nous montrons que le type de décroissance (exponentielle ou polynomiale) dépend de la régularité de la conductivité ou, plus précisemment, de la rapidité de l'annulation de la conductivité en Γ. Aussi, nous traitons le cas $\sigma\in L^\infty(\Omega)$, σ bornée par des constantes strictement positives dans ω_+, qui assure la stabilisation uniforme et nous établissons une décroissance de type polynomiale si $\sigma\in C(\Omega)$, nulle sur Γ de même ordre que $dist(x,\Gamma)$.

Ce travail complète la note sur la contrôlabilité interne des équations de Maxwell [19], dans laquelle nous étendons les résultats de contrôle interne prouvés par Bardos *et al.* [5]. Nous rappelons qu'une étude à basse fréquence des équations de Maxwell dissipatives a été réalisée par Weck et Witsch [26].

5.1. Présentation du problème et cadre fonctionnel

Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^3$, situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière (C^∞ sans contact d'ordre infini avec ses droites tangentes). Le domaine Ω est occupé par un champ électromagnétique (E,H) avec une permittivité ε et une perméabilité μ constantes strictement positives.

On considère le système de Maxwell suivant

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t E-\mathrm{rot}H+\sigma E=0,\ \mu\partial_t H+\mathrm{rot}E=0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ E(\cdot,0)=E_o,\ H(\cdot,0)=H_o \quad \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div}(\mu H)=0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ E\wedge n=0,\ H.n=0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times[0,+\infty[\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

On se donne une fonction positive $\sigma\in L^\infty(\Omega)$. Nous commençons par établir les principaux résultats de régularité.

Le problème (5.1) est bien posé, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}&=\left\{f\in\left(L^2(\Omega)\right)^3\right\}\times\left\{g\in\left(L^2(\Omega)\right)^3\setminus\ \mathrm{div}g=0,\ g.n_{|\Gamma_o}=0\right\} \\ \mathcal{W}&=\Big\{(f,g)\in\left(L^2(\Omega)\right)^3\times\left(L^2(\Omega)\right)^3\setminus\ \mathrm{rot}f\in\left(L^2(\Omega)\right)^3,\ f\wedge n_{|\partial\Omega}=0, \\ &\qquad\qquad \mathrm{div}g=0,\ g.n_{|\partial\Omega}=0,\ \mathrm{rot}g\in\left(L^2(\Omega)\right)^3\Big\} \end{aligned}$$

$\forall(E_o,H_o)\in\mathcal{W}\quad\exists!\,(E,H)\in C^0(]0,+\infty[,\mathcal{W})\cap C^1(]0,+\infty[,\mathcal{V})$ solution du problème (5.1).
Ce résultat de régularité est une application du théorème Hille-Yosida avec l'opérateur non borné $\mathcal{A}$ et son domaine $D(\mathcal{A})=\mathcal{W}$.

Nous considérons $\omega_-=\Omega\setminus(\mathrm{supp}\sigma\cap\Omega)$. Si $\omega_-\neq\emptyset$, alors Ω se découpe en deux ouverts ω_+ et ω_- non vides, de sorte que $\Omega=\omega_+\cup\Gamma\cup\omega_-$ où Γ est une surface.

Pour étudier le noyau de l'opérateur rotationnel, nous ferons les hypothèses suivantes ([7], p. 252) :

- $\partial\Omega$ et $\partial\omega_-$ ont un nombre fini de composantes connexes.

- Les ouverts bornés réguliers connexes Ω et ω_- peuvent être rendus simplement connexes par un nombre fini de coupures régulières, disjointes deux à deux, non tangentes au bord.

On pose $\mathcal{S}_H = \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \mathcal{M}_H$, où $\mathcal{M}_H$ est l'orthogonal des champs magnétiques des solutions stationnaires pour la norme $\left(L^2(\Omega)\right)^3$. Sous la condition $\omega_- \neq \emptyset$, on pose $\mathcal{M}_\omega = \left(\text{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)\right)^3 \cap \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \mathcal{M}_H$. L'espace $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}_H$ est alors invariant pour le problème (5.1). Ainsi, on obtient le résultat de régularité :

$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{M}_H \quad \exists! (E, H) \in C^0(]0, +\infty[, \mathcal{W} \cap \mathcal{M}_H) \cap C^1(]0, +\infty[, \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_H)$ solution du problème (5.1).

L'étude du système (5.1) se poursuivra par la détermination du comportement en temps long de la fonctionnelle $\mathcal{E}'(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon \left|\partial_t E\right|^2 + \mu \left|\partial_t H\right|^2\right)$, suivant le principe d'invariance de LaSalle. Nous obtiendrons, ensuite, par un argument de densité le comportement asymptotique de l'énergie, si $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe. Nous terminerons l'étude du système de Maxwell avec loi d'Ohm par établir le type de décroissance de $\mathcal{E}'(t)$ quand la conductivité est continue dans Ω.

5.1.1. *Existence et unicité du système de Maxwell*

Nous rappelons le principal résultat de régularité :

Soit $\mathcal{A}_o$ l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_o = \left(L^2(\Omega)\right)^6$ de domaine $D(\mathcal{A}_o)$, défini comme suit :

$$\begin{aligned}
\|(f,g)\|^2_{\mathcal{H}_o} &= \varepsilon \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\mathcal{A}_o &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^{-1}\text{rot} \\ \mu^{-1}\text{rot} & 0 \end{pmatrix} \\
D(\mathcal{A}_o) &= \left\{(f,g) \in \mathcal{H}_o \setminus \ (\text{rot}f, \text{rot}g) \in \mathcal{H}_o,\ f \wedge n_{|\partial\Omega} = 0\right\}.
\end{aligned}$$

On rappelle que l'opérateur $-\mathcal{A}_o$ est générateur infinitésimal d'un groupe unitaire dans $\mathcal{H}_o$ de classe $\mathcal{C}^o$ ([7], p. 519 ou [6], p. 255).

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_o$ défini comme suit :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_o + \mathcal{B}, \quad \text{avec } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ opérateur non borné dans } \mathcal{H}_o.$$

On a, alors :

$D(\mathcal{A}_o + \mathcal{B})$ est dense dans $\mathcal{H}_o$ (car $D(\mathcal{A}_o + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}_o)$ dense dans $\mathcal{H}_o$).

$(\mathcal{A}_o + \mathcal{B})$ est fermé (car $\mathcal{B}$ est borné).

On vérifie que $(\mathcal{A}_o + \mathcal{B})$ et $(\mathcal{A}_o + \mathcal{B})^* = (-\mathcal{A}_o + \mathcal{B})$ sont monotones. On en conclut que $(\mathcal{A}_o + \mathcal{B})$ est maximal monotone et que, pour tout $\lambda > 0$, $(Id + \lambda(\mathcal{A}_o + \mathcal{B}))$ est bijectif de $D(\mathcal{A}_o)$ sur $\mathcal{H}_o$. Par conséquent, $-\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe $\mathcal{C}^o$.

D'autre part, soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \text{div}f = 0\right\} \times \left\{g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \text{div}g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0\right\} \\
\mathcal{W} &= \Big\{(f,g) \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2(\Omega)\right)^3 \setminus \ \text{rot}f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3,\ f \wedge n = 0,\ \text{div}f = 0, \\
&\qquad \text{div}g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0,\ \text{rot}g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3\Big\}.
\end{aligned}$$

En remarquant que l'espace $\mathcal{V}$ est stable par le semi-groupe, nous obtenons le résultat de régularité suivant :

$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{W} \quad \exists! (E, H) \in C^0(]0, +\infty[, \mathcal{W}) \cap C^1(]0, +\infty[, \mathcal{V})$ solution du problème (5.1).

De plus, en posant $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon |E|^2 + \mu |H|^2\right)$ l'énergie du système (5.1), on a :

$$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{W} \qquad \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \int_\Omega \sigma |E|^2 = 0.$$

La relation précédente assure que l'énergie est décroissante.

D'autre part, on pose $\mathcal{E}'(t)$ la fonctionnelle définie par $\mathcal{E}'(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon\left|\partial_t E\right|^2 + \mu\left|\partial_t H\right|^2\right)$, de sorte que l'on ait : $\frac{d}{dt}\mathcal{E}'(t) + \int_\Omega \sigma\left|\partial_t E\right|^2 = 0$.

5.1.2. *Sous-espaces invariants*

Nous ferons les hypothèses géométriques suivantes ([7], p. 252) :

- $\partial\Omega$ a un nombre fini de composantes connexes Γ_0,...,Γ_m (Γ_0 désignant la frontière de la composante connexe infinie de $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$).
- L'ouvert borné Ω peut être rendu simplement connexe par un nombre fini de coupures régulières Σ_1,..,Σ_N, disjointes deux à deux, non tangentes à $\partial\Omega$.

On définit $\mathcal{M}_H$ l'orthogonal de $\mathbb{H}_1(\Omega)$ pour la norme $\left(L^2(\Omega)\right)^3$. Ainsi, on retrouve $\mathcal{M}_H = \left(L^2(\Omega)\right)^3$, si les hypothèses du lemme de Poincaré sont vérifiées. On pose $\mathcal{S}_H = \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \mathcal{M}_H$.

L'espace $\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_H$ est alors invariant pour le problème (5.1). Il suffit de multiplier l'équation $\mu\partial_t H + \mathrm{rot}E = 0$ par $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ et d'intégrer par parties sur Ω pour le vérifier. Par conséquent, on obtient les résultats de régularité :

$\forall(E_o, H_o) \in \mathcal{W}\cap\mathcal{S}_H \quad \exists!\,(E,H) \in C^0\left(]0,+\infty[\,,\mathcal{W}\cap\mathcal{S}_H\right)\cap C^1\left(]0,+\infty[\,,\mathcal{V}\cap\mathcal{S}_H\right)$ solution du problème (5.1).

Pour étudier l'image du rotationnel, nous rajoutons les hypothèses suivantes ([7], p. 252) :

- $\partial\omega_-$ a un nombre fini de composantes connexes $\gamma_0,..,\gamma_r$.
- L'ouvert borné régulier connexe ω_- peut être rendu simplement connexe par un nombre fini de coupures régulières, disjointes deux à deux, non tangentes à $\partial\omega_-$.

Nous rappelons, alors, que l'image du rotationnel, $\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3$, est fermé dans $\left(L^2(\omega_-)\right)^3$ ([7], p. 257) :

$$\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3 = \left\{U \in \left(L^2(\omega_-)\right)^3 \setminus \mathrm{div}U = 0,\ \int_{\gamma_i} U.n = 0 \quad i = 0 \text{ à } r\right\}.$$

Son orthogonal dans $\left(L^2(\omega_-)\right)^3$ est l'espace :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3\right)^\perp &= \left\{V \in \left(L^2(\omega_-)\right)^3 \setminus \mathrm{rot}V = 0,\ V\wedge n_{|\partial\omega_-} = 0\right\}\\ &= \left\{V = \nabla\varphi \setminus \varphi \in H^1(\omega_-),\ \varphi_{|\gamma_i} = \text{constante pour } i = 0 \text{ à } r\right\}.\end{aligned}$$

Sous la condition $\omega_- \neq \emptyset$, on pose $\mathcal{M}_\omega = \left(rot\left(H^1(\omega_-)\right)^3 \cap \left(L^2(\Omega)\right)^3\right) \times \mathcal{M}_H$. L'espace $\mathcal{W}\cap\mathcal{M}_\omega$ est alors invariant pour le problème (5.1).

L'invariance de l'espace $\mathcal{W}\cap\mathcal{M}_\omega$ pour le problème (5.1) se vérifie en multipliant par $V \in \left(\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3\right)^\perp$ l'équation $\varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}H + \sigma E = 0$. Ainsi on obtient le résultat de régularité :

$\forall(E_o, H_o) \in \mathcal{W}\cap\mathcal{M}_\omega \quad \exists!\,(E,H) \in C^0\left(]0,+\infty[\,,\mathcal{W}\cap\mathcal{M}_\omega\right)\cap C^1\left(]0,+\infty[\,,\mathcal{V}\cap\mathcal{M}_\omega\right)$ solution du problème (5.1).

5.1.3. *Décompositions orthogonales*

Contrairement à ce qui se passe avec le système de Maxwell homogène, la stabilisation intérieure ne préserve pas la condition de divergence nulle du champ électrique. Il est donc naturel de décomposer le champ électrique en deux parties : une partie à divergence nulle et une partie à rotationnel nul.

On montre que le champ électromagnétique se décompose de la manière suivante :

Lemme 5.1.

$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{S}_H \quad \exists! \, (p, h_2, A) \in C^1 \left( ]0, +\infty[\, , H_0^1 (\Omega) \times \mathbb{H}_2 (\Omega) \right) \times C^2 \left( ]0, +\infty[\, , \left(H^1 (\Omega) \right)^3 \right)$ tel que

$$\begin{cases} \quad (E, H) \text{ solution du problème (5.1)} \\ E = -\nabla p - \partial_t A + h_2 \\ \mu H = \mathrm{rot} A \\ \mathrm{div} A = 0, \; A \wedge n_{|\partial\Omega} = 0, \; \int_{\Gamma_i} A.n d\Gamma = 0 \quad i = 0 \text{ à } m. \end{cases}$$

De plus, on a les relations suivantes :

$$\|E\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t A\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h_2\|^2_{L^2(\Omega)} \; . \tag{5.2}$$

$$\exists c > 0 \qquad \|A\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \, \|\mathrm{rot} A\|^2_{L^2(\Omega)} \; . \tag{5.3}$$

Démonstration du lemme 5.1. Le champ $H \in \left(L^2 (\Omega) \right)^3$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$\mu H = \nabla q + h_1 + \mathrm{rot} A, \text{ où } q \in H^1 (\Omega) \, , \; h_1 \in \mathbb{H}_1 (\Omega) \, , \; A \in \left(H^1 (\Omega) \right)^3$$

tel que $\mathrm{div} A = 0, \; A \wedge n_{|\partial\Omega} = 0, \; \int_{\Gamma_i} A.n d\Gamma = 0 \quad i = 0$ à m ([7], p. 261).

Or $\mathrm{div} H = 0$ et $H.n_{|\partial\Omega} = 0$, par conséquent $\Delta q = 0$ et $\partial_n q = 0$, ce qui oblige q à être constant. De plus, $H \in \mathcal{M}_H$, donc $h_1 = 0$.

En revenant au système (5.1), on a :

$$\begin{cases} \mathrm{rot} \left(\partial_t A + \nabla p + E \right) = 0 \\ \mathrm{div} \left(\partial_t A + \nabla p + E \right) = 0 \\ \left(\partial_t A + \nabla p + E \right) \wedge n_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Ce qui aboutit à la décomposition du champ électromagnétique désirée, avec $h_2 = \partial_t A + \nabla p + E$. Par la deuxième définition de $\mathbb{H}_2 (\Omega)$, A est orthogonal à h_2 :

$$\int_\Omega A h_2 = \int_\Omega A.\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi \mathrm{div} A + \int_{\partial\Omega} \varphi A.n = 0,$$

et il en découle l'inégalité (5.2).

L'inégalité (5.3) se démontre par l'absurde : en effet, si elle n'était pas vraie, il existerait une suite (A_n) bornée dans $\left(H^1 (\Omega) \right)^3$ telle que l'on ait :

$$\|A_n\|_{L^2(\Omega \times]0,T[)} = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \|\mathrm{rot} A_n\|_{L^2(\Omega)} = 0, \; \mathrm{div} A_n = 0, \; A_n \wedge n_{|\partial\Omega} = 0.$$

Par injection compacte de $H^1 (\Omega)$ dans $L^2 (\Omega)$, il existe $A \in \mathbb{H}_2 (\Omega)$ tel que $\|A\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et $\int_\Omega A h_2 = 0 \quad \forall h_2 \in \mathbb{H}_2 (\Omega)$, ce qui est contradictoire.

Ceci achève la preuve du lemme 5.1. de décomposition.

5.1.4. *Applications*

Nous commençons par relier localement en temps le champ électrique au champ magnétique.

Proposition 5.1. Soit $T > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{S}_H$ donnée de Cauchy du problème (5.1), on ait :

$$\int_0^T \int_\Omega \varepsilon \left|E\right|^2 + \int_0^T \int_\Omega \mu \left|H\right|^2 \leq c \int_0^T \int_\Omega \left|E\right|^2 . \tag{5.4}$$

Démonstration de la proposition 5.1. Elle découle du lemme suivant :

Lemme 5.2. Soit $T > 0$ et $\Phi \in C_0^\infty\left(]0,T[\right)$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{S}_H$ donnée de Cauchy du problème (5.1), on ait :

$$\int_0^T \int_\Omega \varepsilon \left|\Phi E\right|^2 + \int_0^T \int_\Omega \mu \left|\Phi H\right|^2 \leq c \int_0^T \int_\Omega \left|E\right|^2 \tag{5.5}$$

où la constante c dépend de $\sup\limits_{[0,T]} |\Phi|$ et $\sup\limits_{[0,T]} |\partial_t \Phi|$.

Démonstration du lemme 5.2. Elle découle du lemme 5.1 de décomposition.

On décompose le champ électrique E et le champ magnétique H de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = -\nabla p - \partial_t A + h_2 \\ \mu H = \mathrm{rot} A \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \in H_0^1(\Omega),\ h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega),\ A \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 \\ \mathrm{div} A = 0,\ A \wedge n_{|\partial\Omega} = 0,\ \int_{\Gamma_i} A.nd\Gamma = 0 \quad i = 0 \text{ à } m. \end{array} \right.$$

On a, par intégration par parties, les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \int_0^T \int_\Omega \left|\Phi \mathrm{rot} A\right|^2 & = \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} A \\ & = \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \mu \left(\varepsilon \partial_t E + \sigma E\right) \\ & = -\int_0^T \int_\Omega \partial_t \left(\Phi^2 A\right) \mu \varepsilon E + \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \mu \sigma E \\ & = -\int_0^T \int_\Omega 2\Phi \partial_t \Phi A \mu \varepsilon E - \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 \partial_t A \mu \varepsilon E + \int_0^T \int_\Omega \Phi^2 A \mu \sigma E. \end{array}$$

Grâce aux inégalités (5.2, 5.3) du lemme 5.1 de décomposition et Cauchy-Schwarz, on conclut que : $\exists c > 0$

$$\int_0^T \int_\Omega \left|\Phi \mathrm{rot} A\right|^2 \leq c \left(\int_0^T \int_\Omega \left|E\right|^2 + \left\|\Phi \partial_t A\right\|_{L^2(\Omega \times]0,T[)} . \left\|E\right\|_{L^2(\Omega \times]0,T[)} \right). \tag{5.6}$$

Ce qui aboutit à (5.5).

Quitte à choisir $\Phi \in C_0^\infty\left(]0,T[\right)$ tel que $\Phi = 1$ sur $[T/3, 2T/3]$, on a par décroissance de l'énergie :

$$\begin{array}{ll} \int_0^T \int_\Omega \varepsilon \left|E\right|^2 + \int_0^T \int_\Omega \mu \left|H\right|^2 & \leq T\mathcal{E}(0) = T\mathcal{E}(T) + T \int_0^T \int_\Omega \sigma \left|E\right|^2 \leq 3 \left(\frac{T}{3} \mathcal{E}\left(\frac{2T}{3}\right)\right) + T \int_0^T \int_\Omega \sigma \left|E\right|^2 \\ & \leq \left(3c + T \sup|\sigma|\right) \int_0^T \int_\Omega \left|E\right|^2 . \end{array} \tag{5.7}$$

Remarque 5.1. On a aussi le résultat suivant :

Soit $T > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $\zeta > 0$ et $(E_o, H_o) \in \mathcal{W}$ donnée de Cauchy du problème (5.1), on ait :

$$\int_\zeta^{\zeta+T} \int_\Omega \varepsilon \left|\partial_t E\right|^2 + \int_\zeta^{\zeta+T} \int_\Omega \mu \left|\partial_t H\right|^2 \leq c \int_\zeta^{\zeta+T} \int_\Omega \left|\partial_t E\right|^2 . \tag{5.8}$$

En effet, en décomposant $(\partial_t E, \partial_t H) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{S}_H$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t E = -\nabla p - \partial_t A + h_2 \\ \mu \partial_t H = \mathrm{rot} A \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{l} p \in H_0^1(\Omega), \; h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega), \; A \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 \\ \mathrm{div} A = 0, \; A \wedge n_{|\partial\Omega} = 0, \; \int_{\Gamma_i} A.nd\Gamma = 0 \quad i = 0 \text{ à } m. \end{array}\right.$$

On a, par intégration par parties, avec $I =]\zeta, \zeta + T[$ et $\Phi \in C_0^\infty(I)$, les relations suivantes :

$$\begin{array}{rl} \int_I \int_\Omega |\Phi \mathrm{rot} A|^2 & = \int_I \int_\Omega \Phi^2 A \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} A = -\int_I \int_\Omega \Phi^2 A \mu \left(\varepsilon \partial_t^2 E + \sigma \partial_t E\right) \\ & = \int_I \int_\Omega \partial_t \left(\Phi^2 A\right) \mu \varepsilon \partial_t E - \int_I \int_\Omega \Phi^2 A \mu \sigma \partial_t E \\ & = \int_I \int_\Omega 2\Phi \partial_t \Phi A \mu \varepsilon \partial_t E + \int_I \int_\Omega \Phi^2 \partial_t A \mu \varepsilon \partial_t E + \int_I \int_\Omega \Phi^2 A \mu \sigma \partial_t E. \end{array}$$

Grâce aux inégalités (5.2, 5.3) du lemme 5.1 de décomposition et Cauchy-Schwarz, on conclut que : $\exists c > 0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T} \int_\Omega \varepsilon |\Phi \partial_t E|^2 + \mu |\Phi \partial_t H|^2 \leq c \int_\zeta^{\zeta+T} \int_\Omega |\partial_t E|^2 . \tag{5.9}$$

On conclut de façon analogue à la démonstration de la proposition 5.1.

Remarque 5.2. L'étude du champ électrique $E \in C^1\left([0, +\infty[\,; \left(L^2(\Omega)\right)^3\right)$ se fera avec la décomposition orthogonale : $E = -\nabla p + W$, où $W \in C^1\left([0, +\infty[\,; \left(L^2(\Omega)\right)^3, \text{ à divergence nulle}\right)$ et $p \in C^1\left([0, +\infty[\,; H_0^1(\Omega)\right)$.

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{div} E = -\Delta p \\ \mathrm{rot} E = \mathrm{rot} W \\ E \wedge n_{|\partial\Omega} = W \wedge n_{|\partial\Omega} \end{array}\right. \tag{5.10}$$

(en effet, $\nabla p \wedge n$ est une dérivée tangentielle de p à $\partial\Omega$, or $p_{|\partial\Omega} = 0$).

Les équations du problème (5.1) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon \partial_t W - \varepsilon \partial_t \nabla p - \mathrm{rot} H + \sigma E = 0 \\ \mu \partial_t H + \mathrm{rot} E = 0 \\ \mathrm{div} W = \mathrm{div} H = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ W \wedge n = 0, \; H.n = 0, \; p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[. \end{array}\right. \tag{5.11}$$

Ainsi, la partie rotationnelle du champ électrique W est solution du système hyperbolique :

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon \partial_t^2 W + \mu^{-1} \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} W + \sigma \partial_t W - \sigma \partial_t \nabla p - \varepsilon \partial_t^2 \nabla p = 0, \; \mathrm{div} W = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ W \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[\end{array}\right.$$

qui s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon \partial_t^2 W - \mu^{-1} \Delta W + \sigma \partial_t W - \sigma \partial_t \nabla p - \varepsilon \partial_t^2 \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ W \wedge n = 0, \; \mathrm{div} W = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[. \end{array}\right.$$

En ce qui concerne la partie divergence du champ électrique, nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.2. Pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{W}$ donnée de Cauchy du problème (5.1), on a :

$$\|\varepsilon\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\sigma E\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.12}$$

$$\left\|\varepsilon\partial_t^2\nabla p\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\sigma\partial_t E\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.13}$$

Démonstration de la proposition 5.2. Il suffit de multiplier par $\varepsilon\partial_t\nabla p$ l'équation $\varepsilon\partial_t W - \varepsilon\partial_t\nabla p - \mathrm{rot}H + \sigma E = 0$ et d'intégrer par parties sur Ω.

5.2. **Comportement asymptotique**

5.2.1. *Amortissement sur tout le domaine*

Il découle immédiatement de la prposition 5.1 le théorème suivant :

Théorème 5.1. On suppose $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ minorée par une constante strictement positive. Alors l'énergie du champ électromagnétique décroit exponentiellement, quand le temps t tend vers l'infini.

Plus précisemment, il existe $c > 0$ et $\beta > 0$ tel que l'on ait : $\forall(E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{S}_H$ donnée de Cauchy du problème (5.1) $\forall t \geq 0 \quad \mathcal{E}(t) \leq ce^{-\beta t}\ \mathcal{E}(0)$.

5.2.2. *Amortissement sur une partie du domaine*

On considère le cas où $\omega_- = \Omega\setminus(\mathrm{supp}\sigma \cap \Omega)$ est connexe, non vide, avec $\sigma \in L^\infty(\Omega)$. Nous commençons par établir le comportement asymptotique de $(\partial_t E, \partial_t H)$.

Théorème 5.2. $\forall(E_o, H_o) \in \mathcal{W}$ donnée de Cauchy du problème (5.1) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathcal{E}'(t) = 0$.

On en déduit le théorème suivant

Théorème 5.3. On suppose que $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe. $\forall(E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega$ donnée de Cauchy du problème (5.1) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathcal{E}(t) = 0$.

Aussi, on cherchera une condition suffisante pour que l'énergie du champ électromagnétique dépende continûment de la fonctionnelle $\mathcal{E}'$.

Théorème 5.4. On suppose que $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe et que l 'ouvert $\omega_+ = \Omega\setminus(\overline{\omega_-} \cap \Omega)$ est connexe. Si $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ est minorée dans ω_+ par une constante strictement positive, alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega$ donnée de Cauchy du problème (5.1), on a : $\forall t \geq 0 \quad \mathcal{E}(t) \leq c\mathcal{E}'(t)$.

Preuve du théorème 5.2. démonstration découle du lemme suivant :

Lemme 5.3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_\Omega |\partial_t\nabla p|^2 = 0$.

Démonstration du lemme 5.3.

$$\begin{aligned}(t-T)\|\partial_t\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)} = &\int_T^t \tfrac{d}{ds}(s-T)\|\partial_t\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \int_T^t (s-T)\tfrac{d}{ds}\left(\|\partial_t\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)}\right)ds \\ &\leq \int_T^t \|\partial_t\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + 2(t-T)\int_T^t \|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}\left\|\partial_t^2\nabla p\right\|_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

En choisissant $0 < T < 1 + T < t$ et en multipliant l'inégalité par $\frac{1}{(t-T)}$, on a :

$$\|\partial_t\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\int_T^t \|\partial_t\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \int_T^t \left\|\partial_t^2\nabla p\right\|_{L^2(\Omega)}ds.$$

Par ailleurs, grâce aux inégalités (5.12) et (5.13) de la proposition 5.2,

$$\int_T^t |\partial_t \nabla p|^2 \leq \varepsilon^{-2} (\sup |\sigma|) \int_T^t \left(-\frac{d}{dt}\mathcal{E}\right) \leq \varepsilon^{-2} (\sup |\sigma|) \left|\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(t)\right|$$

$$\int_T^t \left|\partial_t^2 \nabla p\right|^2 \leq \varepsilon^{-2} (\sup |\sigma|) \int_T^t \left(-\frac{d}{dt}\mathcal{E}'\right) \leq \varepsilon^{-2} (\sup |\sigma|) \left|\mathcal{E}'(T) - \mathcal{E}'(t)\right|.$$

Les fonctionnelles $\mathcal{E}(t)$ et $\mathcal{E}'(t)$ étant continues, décroissantes, positives, elles admettent une limite :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists T_1 > 0 \quad \forall s, s > T_1 \quad |\mathcal{E}(s) - \mathcal{E}(t)| + |\mathcal{E}'(s) - \mathcal{E}'(t)| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$, en choisissant $T = 1 + T_1$, nous concluons la démonstration du lemme 5.3 :

$$\forall t > (1+T) \quad \|\partial_t \nabla p(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 3\varepsilon^{-2} (\sup |\sigma|)\, \epsilon.$$

Retournons à la démonstration du théorème 5.2 :

On vérifie, à partir de la conservation de l'énergie, que $(\partial_t W, \partial_t H)$ est uniformément borné dans $\left(H^1(\Omega)\right)^6$ pourvu que $(E_o, H_o) \in D\left(\mathcal{A}^2\right)$, plus précisemment on a l'estimation suivante :

$$\|(\partial_t W, \partial_t H)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|(E_o, H_o)\|_{D(\mathcal{A}^2).} \tag{5.14}$$

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, on en déduit qu'il existe une sous-suite extraite $(\partial_t W(t_k), \partial_t H(t_k))$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} (\partial_t W(t_k), \partial_t H(t_k)) = (W'_\infty, H'_\infty) \quad \text{dans } \left(L^2(\Omega)\right)^6.$$

On remarque aussi que

$$(\partial_t E, \partial_t H) = Z(t)(E'_o, H'_o) \quad \text{où } (\varepsilon E'_o, \mu H'_o) = (\mathrm{rot} H_o - \sigma E_o, -\mathrm{rot} E_o) \in D(\mathcal{A}).$$

Grâce au lemme 5.3, on en déduit qu'il existe une sous-suite extraite $Z(t_k)(E'_o, H'_o)$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} Z(t_k)(E'_o, H'_o) = (E'_\infty, H'_\infty) \quad \text{dans } \left(L^2(\Omega)\right)^6.$$

De plus, on s'aperçoit que $\mathrm{div} E'_\infty = 0$ dans Ω, car $\mathrm{div} W'_\infty = 0$ dans Ω. D'autre part, on vérifie que $H'_\infty \in \mathcal{M}_H$, car $\int_\Omega H'_o h_1 = 0 \quad \forall h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$.

Comme $Z(t)$ est un semi-groupe, on a aussi : $\forall s > 0$

$$\lim_{t_k\to+\infty} \|Z(s) Z(t_k - s)(E'_o, H'_o)\|_{\mathcal{H}_o} = \lim_{t_k\to+\infty} \|Z(t_k)(E'_o, H'_o)\|_{\mathcal{H}_o} = \|(E'_\infty, H'_\infty)\|_{\mathcal{H}_o}.$$

Par ailleurs, $2\mathcal{E}'(t) = \left\|\left(\sqrt{\varepsilon}\partial_t E, \sqrt{\mu}\partial_t H\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|Z(t)(E'_o, H'_o)\|_{\mathcal{H}_o}$ est une fonction positive décroissante. On a donc, en choisissant une sous-suite $t_{k'}$ telle que $t_{k'} \leq t_k - s$, les relations suivantes :

$$\|(E'_\infty, H'_\infty)\|_{\mathcal{H}_o} \leq \lim_{t_{k'}\to+\infty} \|Z(s) Z(t_{k'})(E'_o, H'_o)\|_{\mathcal{H}_o} \leq \|Z(s)(E'_\infty, H'_\infty)\|_{\mathcal{H}_o} \leq \|(E'_\infty, H'_\infty)\|_{\mathcal{H}_o}.$$

On en conclut que $(E'_\infty, H'_\infty) = (0, 0)$.

En effet, le couple (E'_∞, H'_∞) est donnée de Cauchy du problème suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot} H = 0,\ \mu\partial_t H + \mathrm{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ \mathrm{div} H = 0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ E\wedge n = 0,\ H.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times[0,+\infty[\\ E = 0 \quad \text{dans } \omega_+\times[0,+\infty[\end{cases}$$

avec $(E'_\infty, H'_\infty)\in\left(L^2(\Omega)\right)^6$ vérifiant $H'_\infty\in\mathcal{M}_H$ et $\mathrm{div}E'_\infty = 0$. Par conséquent, $\mathrm{div}E\equiv 0$. Le champ E est alors solution d 'un problème hyperbolique. Par le théorème d'Holmgren ou le résultat d'unicité de Rauch et Taylor [21] $E\equiv 0$. Ainsi, $H\in\mathbb{H}_1(\Omega)\cap\mathcal{M}_H$, donc $H\equiv 0$. En particulier, $(E'_\infty, H'_\infty) = (0,0)$.

Finalement, par densité de $D\left(\mathcal{A}^2\right)$ dans $D(\mathcal{A})$, on a :

$$\forall\,(E_o,H_o)\in D(\mathcal{A})\ \text{ donnée de Cauchy du problème (5.1)} \quad \lim_{t\to+\infty}\mathcal{E}'(t) = 0.$$

Preuve du théorème 5.3. Nous déduisons le comportement asymptotique du champ électromagnétique (E,H) par densité.

Soit $\mathcal{A}_\omega$ la restriction de l'opérateur $\mathcal{A}$ à l'espace $\mathcal{V}\cap\mathcal{M}_\omega$. On vérifie que $\mathcal{A}_\omega$ est toujours maximal monotone, de sorte que $\mathcal{A}_\omega$ est fermé et $D(\mathcal{A}_\omega) = \mathcal{W}\cap\mathcal{M}_\omega$ est dense dans $\mathcal{V}\cap\mathcal{M}_\omega$. Sachant que $\overline{\mathrm{Im}\mathcal{A}_\omega} = (Ker\mathcal{A}^*_\omega)^\perp$ avec $Ker\mathcal{A}^*_\omega = (Ker\mathcal{A}^*)\cap\mathcal{M}_\omega$, on montre que $\mathrm{Im}\mathcal{A}_\omega$ est dense dans $\mathcal{V}\cap\mathcal{M}_\omega$ si $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe.

En effet, on se ramène à résoudre le problème statique suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{rot}H + \sigma E = 0,\ \mathrm{rot}E = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div}H = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ E\wedge n = 0,\ H.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ (E,H)\in\mathcal{M}_\omega,\ \mathbb{H}_2(\Omega) = \{0\}\cdot \end{cases}$$

On vérifie que $(E,H)\equiv 0$. En effet, par la formule de Green, $E = 0$ dans ω_+. On rappelle que si $\omega_-\neq\emptyset$, alors Ω se découpe en deux ouverts ω_+ et ω_- non vides, de sorte que $\Omega = \omega_+\cup\Gamma\cup\omega_-$ où Γ est une surface et $\omega_- = \Omega\setminus(\mathrm{supp}\sigma\cap\Omega)$ avec $\sigma > 0$ dans ω_+.

Avec la décomposition orthogonale du champ électrique sous la forme $E = -\nabla p + W$, les équations deviennent :

$$\begin{cases} \mathrm{div}H = 0 \\ \mathrm{rot}H = 0 \\ H.n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{div}W = 0 \\ \mathrm{rot}W = 0 \\ W\wedge n = 0 \end{cases}$$

ce qui implique $(W,H)\equiv 0$, car $H\in(\mathbb{H}_1(\Omega))^\perp$ et $\mathbb{H}_2(\Omega) = \{0\}$.

On en déduit que $\nabla p = 0$ dans ω_+ et $p =$ constante sur Γ. D'autre part, par la formule de Green, on a :

$$\int_{\omega_-}|\nabla p|^2 = \int_{\omega_-}\mathrm{div}Ep - \int_{\partial\omega_-}E.np = \int_{\omega_-}\mathrm{div}Ep - \sum_{i=0}^{r} p_{|\gamma_i}\int_{\gamma_i}E.n.$$

Mais, $E_{|\omega_-}\in\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3$, avec

$$\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3 = \left\{E\in\left(L^2(\omega_-)\right)^3\setminus\mathrm{div}E = 0 \text{ dans } \omega_-,\ \int_{\gamma_i}E.n = 0 \quad i = 0 \text{ à } r\right\}\cdot$$

Par conséquent, $E = 0$ dans ω_-. Ceci termine la résolution du problème statique.

Finalement, si $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe, alors $\overline{\mathrm{Im}\mathcal{A}_\omega} = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega$. Cela se traduit par l'assertion suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall (E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega \quad \exists (U_o, V_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{M}_\omega \qquad \|(E_o, H_o) - \mathcal{A}(U_o, V_o)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

On détermine ainsi, le comportement asymptotique de champ électromagnétique par densité. $\forall \epsilon, t > 0$

$$\|Z(t)(E_o, H_o)\| \leq \epsilon + 2\mathcal{E}'(t; (U_o, V_o)). \tag{5.15}$$

Nous concluons enfin que si $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe et $\omega_- \neq \emptyset$, alors on a :

$$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega \text{ donnée de Cauchy du problème (5.1)} \quad \lim_{t \to +\infty} \mathcal{E}(t) = 0.$$

Preuve du théorème 5.4. Nous voulons démontrer l'estimation suivante : $\exists c > 0 \quad \forall t \geq 0$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\varepsilon |E|^2 + \mu |H|^2 \right) \leq c \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\varepsilon |\partial_t E|^2 + \mu |\partial_t H|^2 \right) = c \mathcal{E}'(t).$$

À partir du système (5.1) et de la strict positivité de σ dans ω_+, on obtient :

$$(\inf |\sigma|) \int_{\omega_+} |E|^2 \leq \int_\Omega \sigma |E|^2 = - \int_\Omega \varepsilon \partial_t E E - \int_\Omega \mu \partial_t H H \leq 8 \sqrt{\mathcal{E}(t)} \sqrt{\mathcal{E}'(t)}. \tag{5.16}$$

Il découle des hypothèses $H \in (\mathbb{H}_1(\Omega))^\perp$ et $\mathbb{H}_2(\Omega) = \{0\}$, les inégalités suivantes : $\exists c, d > 0$

$$\|H\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\mathrm{rot} H\|_{L^2(\Omega)} \leq d \left(\|\varepsilon \partial_t E\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma E\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{5.17}$$

$$\|W\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\mathrm{rot} W\|_{L^2(\Omega)} \leq d \|\mu \partial_t H\|_{L^2(\Omega).} \tag{5.18}$$

D'autre part, on a :

$$\|\nabla p\|_{L^2(\omega_+)} \leq \|E\|_{L^2(\omega_+)} + \|W\|_{L^2(\Omega).} \tag{5.19}$$

Conclusion. À partir des estimations (5.16–5.18) et (5.19), $\exists c > 0$

$$\|(H, W)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p\|^2_{L^2(\omega_+)} \leq c \left(\mathcal{E}'(t) + \sqrt{\mathcal{E}(t)} \sqrt{\mathcal{E}'(t)} \right). \tag{5.20}$$

Il reste à estimer ∇p dans ω_-, on s'appuyera sur le lemme suivant :

Lemme 5.4. On suppose ω_+ connexe, non vide. Alors, il existe $c > 0$ tel que pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \left(\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3 \cap \left(L^2(\Omega)\right)^3 \right) \times \left(L^2(\Omega)\right)^3$ donnée de Cauchy du problème (5.1), on ait :

$$\|\nabla p\|^2_{L^2(\omega_-)} \leq c \left(\|\nabla p\|^2_{L^2(\omega_+)} + \|W\|^2_{L^2(\omega_-)} \right). \tag{5.21}$$

Démonstration du lemme 5.4. Nous distinguons deux cas :

Cas où $\partial\omega_+ \cap \partial\Omega \neq \emptyset$: on rappelle que -$\Delta p = \mathrm{div} E$ de sorte que p est solution du système elliptique suivant

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \quad \text{dans } \omega_- \\ p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\omega_- \\ p \in H^{1/2}(\partial\omega_+) \quad \text{sur } \partial\omega_+ \cap \partial\omega_-. \end{cases}$$

Donc, par l'inégalité de Poincaré, on a les estimations suivantes : $\exists c, d > 0$

$$\|\nabla p\|_{L^2(\omega_-)} \leq c \|p\|_{H^{1/2}(\partial\omega_+)} \leq d \|\nabla p\|_{L^2(\omega_+)}. \tag{5.22}$$

Cas où $\partial\omega_+ \cap \partial\Omega = \emptyset$: nous allons décomposer $p \in H_0^1(\Omega)$ de manière adéquate. Soit

$$\delta\widetilde{e} = \left| \begin{array}{l} \widetilde{e} = p_{|\omega_+} - \frac{1}{mes(\omega_+)} \int_{\omega_+} p \quad \text{dans } \omega_+ \\ \widehat{e} \quad \text{dans } \omega_-, \quad \text{solution de } \begin{cases} \Delta\widehat{e} = 0 \quad \text{dans } \omega_- \\ \widehat{e} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \widehat{e} = \widetilde{e} \quad \text{sur } \partial\omega_+. \end{cases} \end{array} \right.$$

On vérifie que $\delta\widetilde{e} \in H_0^1(\Omega)$ et $\int_{\omega_+} \widetilde{e} = 0$. Par le théorème de trace et l'inégalité de Poincaré ([7], p. 922) : $\exists c, d > 0$

$$\|\nabla\widehat{e}\|_{L^2(\omega_-)} \leq c \|\widetilde{e}\|_{H^{1/2}(\partial\omega_+)} \leq d \|\nabla\widetilde{e}\|_{L^2(\omega_+)} = d \|\nabla p\|_{L^2(\omega_+)}. \tag{5.23}$$

Soit $\overline{e} = p - \delta\widetilde{e}$. On vérifie que $\overline{e} \in H_0^1(\Omega)$ et $\overline{e}$ est constant sur $\partial\omega_+$. Par conséquent, $\nabla\overline{e} \in \left(\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3\right)^\perp$. Or, avec $E \in \left(\mathrm{rot}\left(H^1(\omega_-)\right)^3\right)$, on a :

$$\|\nabla\overline{e}\|^2_{L^2(\omega_-)} = \int_{\omega_-} E\nabla\overline{e} - \int_{\omega_-} \nabla\delta\widetilde{e}\nabla\overline{e} - \int_{\omega_-} W\nabla\overline{e}. \tag{5.24}$$

Finalement, à partir de (5.23) et (5.24), $\exists c > 0$

$$\|\nabla p\|_{L^2(\omega_-)} \leq \|\nabla\delta\widetilde{e}\|_{L^2(\omega_-)} + \|\nabla\overline{e}\|_{L^2(\omega_-)} \leq c\left(\|\nabla p\|_{L^2(\omega_+)} + \|W\|_{L^2(\omega_-)}\right).$$

Ceci termine la preuve du lemme 5.4. Le théorème 5.4 est alors démontré.

5.3. Décroissance exponentielle

Nous complètons l'étude asymptotique du système de Maxwell avec loi d'Ohm en estimant le type de décroissance de l'énergie.

Théorème 5.5. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que ω contrôle géométriquement Ω. On suppose que $\omega_+ = (\omega \cap \Omega)$, $\omega_- = \Omega \backslash (\mathrm{supp}\sigma \cap \Omega)$ connexes et que $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe. Si $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ est nulle dans ω_-, bornée par des constantes strictement positives dans ω_+, alors il existe $c > 0$ et $\beta > 0$ tel que l'on ait :

$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega$ données de Cauchy du problème (5.1) $\quad \forall t \geq 0 \quad \mathcal{E}(t) \leq ce^{-\beta t}\, \mathcal{E}(0)$.

Théorème 5.6. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que ω contrôle géométriquement Ω. On suppose que $\omega_+ = (\omega \cap \Omega)$, $\omega_- = \Omega \backslash (\mathrm{supp}\sigma \cap \Omega)$ connexes et que $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe. Si $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ est nulle dans ω_- , bornée par des constantes strictement positives dans ω_+, alors il existe $c > 0$ et $\beta > 0$ tel que l'on ait :

$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{M}_\omega$ données de Cauchy du problème (5.1) $\quad \forall t \geq 0 \quad (\mathcal{E} + \mathcal{E}')(t) \leq ce^{-\beta t} \ (\mathcal{E} + \mathcal{E}')(0).$

Preuve du théorème 5.6. La démonstration se décompose en deux étapes :

Étape 1 :

Nous relions $\partial_t H$ à $\partial_t E$: nous rappelons qu'à partir de la décomposition orthogonale du champ électrique sous la forme $E = -\nabla p + W$ et de la proposition 5.1, nous avons l'estimation suivante : $\exists c > 0$

$$\int_0^T \mathcal{E}'(t)\, dt \leq c \int_0^T \int_\Omega |\partial_t E|^2 . \tag{5.25}$$

Étape 2 :

Nous estimons $\partial_t W$, de sorte que sous la condition de contrôle géométrique, on établit l'estimation suivante : $\exists c > 0$

$$\int_0^T \int_\Omega |\partial_t E|^2 \leq c \left(\int_0^T \int_\Omega \sigma |\partial_t E|^2 + \int_0^T \int_\Omega \sigma |E|^2 \right). \tag{5.26}$$

En effet, la solution W vérifie le système hyperbolique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \partial_t^2 W - \mu^{-1} \Delta W + \sigma \partial_t E - \varepsilon \partial_t^2 \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ \text{div} W = 0,\ W \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[. \end{array} \right.$$

En appliquant (1.31) du théorème 1.4, au système hyperbolique en $\partial_t W$, on obtient avec l'hypothèse de contrôle géométrique : $\quad \exists c, d > 0\ \exists \widehat{\omega} \subset \Omega$

$$\|\partial_t W\|_{L^2(\Omega \times]0,T[)} \leq c \left(\|\partial_t W\|_{L^2(\widehat{\omega} \times]0,T[)} + \left\| \sigma \partial_t E - \varepsilon \partial_t^2 \nabla p \right\|_{L^2(\Omega \times]0,T[)} \right)$$

avec

$$\|\partial_t W\|^2_{L^2(\widehat{\omega} \times]0,T[)} \leq c \int_0^T \int_\Omega \sigma |\partial_t W|^2 .$$

Par conséquent, avec (5.12) et (5.13) de la proposition 5.2, on a : $\exists c > 0$

$$\int_0^T \int_\Omega |\partial_t E|^2 = \|(\partial_t W, \partial_t \nabla p)\|^2_{L^2(\Omega \times]0,T[)} \leq c \left(\int_0^T \int_\Omega \sigma |\partial_t E|^2 + \int_0^T \int_\Omega \sigma |E|^2 \right)$$

et finalement, grâce à (5.25), $\quad \exists c > 0$

$$\int_0^T \mathcal{E}'(t)\, dt \leq c \left(\int_0^T \int_\Omega \sigma |\partial_t E|^2 + \int_0^T \int_\Omega \sigma |E|^2 \right). \tag{5.27}$$

Par application du théorème 5.4, qui relie $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$, on obtient si ω_+ est connexe et $\mathbb{H}_2(\Omega) = \{0\}$, l'estimation suivante

$$\exists c, T > 0 \qquad \{\mathcal{E} + \mathcal{E}'\}(T) \leq c \int_0^T -\frac{d}{dt} \{\mathcal{E} + \mathcal{E}'\}(s)\, ds. \tag{5.28}$$

Conclusion

$$\exists\delta\in\left]0,1\right[,T>0\qquad\left\{\mathcal{E}+\mathcal{E}'\right\}(T)\leq\delta\left\{\mathcal{E}+\mathcal{E}'\right\}(0)\,.\tag{5.29}$$

Les propriétés de semi-groupe [17] terminent la démonstration du théorème 5.6.

La démonstration du théorème 5.5 découle du théorème 5.6 grâce au lemme suivant :

Lemme 5.5. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $-\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un C^osemi-groupe de contraction $Z(t)$ sur $\mathcal{H}\supset D(\mathcal{A})$. S'il existe $c,\beta>0$, tel que

$$\forall U_o\in D(\mathcal{A})\quad\forall t\geq0\qquad\left\|Z(t)U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2+\left\|\mathcal{A}Z(t)U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2\leq ce^{-\beta t}\ \left(\left\|U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2+\left\|\mathcal{A}U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)$$

alors, on a

$$\forall U_o\in\mathcal{H}\quad\forall t\geq0\qquad\left\|Z(t)U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2\leq10ce^{-\beta t}\ \left\|U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Démonstration du lemme 5.5. Comme l'opérateur non borné $\mathcal{A}$ de domaine $D(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}$ est maximal monotone, on sait que

$$\forall V_o\in\mathcal{H}\quad\exists U_o\in D(\mathcal{A})\qquad U_o+\mathcal{A}U_o=V_o.$$

Par conséquent,

$$\left\|Z(t)V_o\right\|_{\mathcal{H}}\leq\left\|Z(t)U_o\right\|_{\mathcal{H}}+\left\|\mathcal{A}Z(t)U_o\right\|_{\mathcal{H}}$$

et par monotonicité de $\mathcal{A}$, on a

$$\left\|U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2\leq\left\|U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2+\left(\mathcal{A}U_o,U_o\right)_{\mathcal{H}}=\left(V_o,U_o\right)_{\mathcal{H}}.$$

Ainsi

$$\left\|U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2+\left\|\mathcal{A}U_o\right\|_{\mathcal{H}}^2\leq5\left\|V_o\right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Conclusion

$$\forall V_o\in\mathcal{H}\quad\forall t\geq0\qquad\left\|Z(t)V_o\right\|_{\mathcal{H}}^2\leq10ce^{-\beta t}\ \left\|V_o\right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Ceci conclut la preuve du lemme 5.5.

5.4. Lemme de décroissance polynomiale

On se propose de montrer le lemme suivant :

Lemme 5.6. Soit $\mathcal{F}$ une fonctionnelle positive, décroissante, $\mathcal{F}(0)\neq0$. Si on a: $\exists c,\beta,T>0,\ c_o\geq0\quad\forall\zeta>0\ \forall\epsilon>0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T}\mathcal{F}(t)\,dt\leq c\left(\epsilon\left(c_o+\mathcal{F}(0)\right)+\frac{1}{\epsilon^\beta}\int_\zeta^{\zeta+T}-\frac{d}{dt}\mathcal{F}(s)\,ds\right)$$

alors, il existe $c>0$ et $\gamma=\frac{1}{\beta+1}\in\left]0,1\right[$ tels que l'on ait :

$$\forall t\geq0\qquad\mathcal{F}(t)\leq c\left(\frac{1}{t+1}\right)^\gamma\ \left(c_o+\mathcal{F}(0)\right).$$

La démonstration que nous donnons s'inspire de celle établie par Lebeau et Robbiano pour la décroissance de type logarithmique de l'énergie de solution des ondes dissipatives sur le bord [13].

Démonstration du lemme 5.6. La fonctionnelle étant décroissante, on a : $\exists c, \beta, T > 0$, $\exists c_o \geq 0 \quad \forall \zeta > 0 \; \forall \epsilon > 0$

$$T\mathcal{F}(\zeta + T) \leq c\left(\epsilon\left[c_o + \mathcal{F}(0)\right] + \frac{1}{\epsilon^\beta}\left[\mathcal{F}(\zeta) - \mathcal{F}(\zeta + T)\right]\right).$$

En posant $\mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{F}(t)}{c_o + \mathcal{F}(0)}$, on minimise en ϵ et on obtient, avec $\gamma = \frac{1}{\beta+1}$: $\quad \exists c > 1 \quad \forall \zeta > 0$

$$\mathcal{L}(\zeta + T) \leq c\left(\mathcal{L}(\zeta) - \mathcal{L}(\zeta + T)\right)^\gamma.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on écrit $t = nT + s$ avec $0 \leq s < T$, d'où $nT \leq t < (n+1)T$. Par décroissance de la fonctionnelle $\mathcal{L}$, on vérifie que $\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(nT)$, d'autre part $\mathcal{L}(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. En posant $\zeta = (n-1)T > 0$, on obtient la relation de récurrence : $\forall n > 1$

$$\mathcal{L}(nT) \leq c\left(\mathcal{L}((n-1)T) - \mathcal{L}(nT)\right)^\gamma.$$

On pose $\alpha_n = \mathcal{L}(nT)$. La suite α_n est décroissante, bornée par $\mathcal{L}(0) \leq 1$, et vérifie si $n > 1$

$$\begin{cases} \alpha_n \leq c\left(\alpha_{n-1} - \alpha_n\right)^\gamma \\ \alpha_{n-1} \leq 1. \end{cases}$$

Si $0 < \alpha_{n-1} - \alpha_n \leq \frac{1}{n}$, alors $\alpha_n \leq c\frac{1}{n^\gamma}$.

Si $\alpha_{n-1} - \alpha_n > \frac{1}{n}$, alors $n^\gamma \alpha_n < (n-1)^\gamma \alpha_{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^\gamma = (n-1)^\gamma \alpha_{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-\gamma}$.

Conclusion

soit $\quad n^\gamma \alpha_n \leq c$

soit $\quad n^\gamma \alpha_n < (n-1)\alpha_{n-1} \quad$ où $\alpha_1 \leq 1$.

Donc, pour tout $n > 1$, $n^\gamma \alpha_n \leq \max(c; 1) = c$. En revenant à la fonctionnelle $\mathcal{F}$, on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t) \leq c\left(\frac{T}{t-T}\right)^\gamma \left(c_o + \mathcal{F}(0)\right) \quad \forall t > T \\ \mathcal{F}(t) \leq \mathcal{F}(0) \quad \forall t \leq T. \end{cases}$$

Ceci termine la preuve du lemme 5.6.

5.5. Décroissance polynomiale

On s'intéresse finalement aux équations de Maxwell avec loi d'Ohm avec une conductivité régulière : $\sigma \in C(\Omega)$ et $\nabla\sigma \in L^\infty(\Omega)$. Il est vraisemblable, suite aux résultats de Lebeau sur la stabilisation des ondes Dirichlet avec changement de type de la condition aux limites [10], qu'il n'y a pas de décroissance uniforme de l'énergie si la conductivité s'annule à un ordre plus élevé que 1 en Γ.

Ainsi, en appliquant la divergence à la première équation du système (5.1), on a :

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\mathrm{div}E + \sigma\mathrm{div}E + \nabla\sigma.E = 0. \tag{5.30}$$

On s'aperçoit, par le lemme de Gronwald, que la divergence du champ électrique est, localement en temps, définie dans $L^2(\Omega)$. De plus, nous avons l'assertion suivante :

$$\mathrm{div}E(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \omega_- \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}E = 0 \quad \text{dans } \omega_- \times \left]0, +\infty\right[.$$

On rappelle que le noyau de la divergence dans ω_- se décompose orthogonalement en $\ker \mathrm{div} = \mathbb{H}_2(\omega_-) \oplus \mathrm{rot}H^1(\omega_-)$, ([7], p. 257). En posant $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{E,\omega} \cap \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \mathcal{M}_H$, où $\mathcal{M}_{E,\omega}$ est l'orthogonal de $\mathbb{H}_2(\omega_-)$ pour la norme $\left(L^2(\omega_-)\right)^3$. Il en découle du théorème 5.3 le résultat suivant :

On suppose que $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe. Si $\sigma \in C(\Omega)$ et $\nabla\sigma \in L^\infty(\Omega)$, pour tout $(E_o, H_o) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega$ donnée de Cauchy du problème (5.1) tel que $\mathrm{div}E_o = 0$ dans ω_-, on a : $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{E}(t) = 0$.

Notons que $\mathcal{M}_s = \left(L^2(\Omega)\right)^6$, si les hypothèses du lemme de Poincaré sont vérifiées et si $\partial\omega_+ \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, avec ω_+, ω_- connexes.

Nous complétons l'étude asymptotique en estimant le type de décroissance de l'énergie avec données de Cauchy dans un sous-espace de $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega$, sous la condition de contrôle géométrique.

5.5.1. *Système de Maxwell avec densité de charge de carré intégrable*

Nous commençons par établir un second résultat de régularité. Le domaine borné, connexe, régulier Ω est occupé par un champ électromagnétique (E, H) avec une permittivité ε et une perméabilité μ constantes strictement positives. On décompose Ω en deux ouverts non vides, connexes ω_+ et ω_- de sorte que $\Omega = \omega_+ \cup \Gamma \cup \omega_-$ où Γ est une surface régulière.

Nous supposons que la conductivité σ est une fonction régulière positive de $\mathbb{R}^3$, nulle dans ω_- , strictement positive dans ω_+.

Le problème de Maxwell avec loi d'Ohm devient

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\partial_t E - \mathrm{rot}H + \sigma E = 0,\ \mu\partial_t H + \mathrm{rot}E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0,+\infty[\\ E(\cdot,0) = E_o,\ H(\cdot,0) = H_o \quad \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div}E = 0 \quad \text{dans } \omega_- \times [0,+\infty[,\ \mathrm{div}H = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0,+\infty[\\ E \wedge n = 0,\ H.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,+\infty[. \end{array}\right. \tag{5.31}$$

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert

$\mathcal{H} = \left\{(E_o, H_o) \in \left(L^2(\Omega)\right)^6 \setminus \sigma\mathrm{div}E_o \in L^2(\Omega),\ (\mathrm{div}E_o)_{|\omega_-} = 0,\ \mathrm{div}H_o = 0,\ H_o.n_{|\partial\Omega} = 0\right\}$
muni de la norme

$$\|(E_o, H_o)\|_{\mathcal{H}}^2 = \varepsilon\|E_o\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu\|H_o\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\sigma\mathrm{div}E_o\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de domaine $D(\mathcal{A})$, défini comme suit :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\sigma & -\varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ \mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $(Id + \lambda\mathcal{A})$ est bijectif de $D(\mathcal{A}_o) \cap \mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$. Or il existe $\beta > 0$, tel que $(\mathcal{A} + \beta Id)$ est monotone muni de la norme sur $D(\mathcal{A}_o) \cap \mathcal{H}$, car σ est régulière et bornée dans Ω. On notera dorénavant $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_o) \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. Nous concluons, par le théorème de Hille-Yosida, que $-\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe de contraction, noté $Z(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Le problème est donc bien posé et on a les principaux résultats de régularité suivants :

$\forall (E_o, H_o) \in D(\mathcal{A}) \quad \exists! (E, H) \in C^0(]0,+\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^1(]0,+\infty[, \mathcal{H})$ solution du problème (5.31) .

$\forall (E_o, H_o) \in D(\mathcal{A}^2) \quad \exists! (E, H) \in C^0(]0,+\infty[, D(\mathcal{A}^2)) \cap C^1(]0,+\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^2(]0,+\infty[, \mathcal{H})$ solution du problème (5.31) .

On pose $\mathcal{E}'(t)$ la fonctionnelle définie par $\mathcal{E}'(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon|\partial_t E|^2 + \mu|\partial_t H|^2\right)$.

5.5.2. *Estimations d'énergie*

Nous obtenons les estimations d'énergie suivantes :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \int_\Omega \sigma |E|^2 = 0 \tag{5.32}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}'(t) + \int_\Omega \sigma |\partial_t E|^2 = 0 \tag{5.33}$$

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon |\sigma \mathrm{div} E|^2 + \left(\sup |\nabla\sigma|^2\right) \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \int_\Omega \sigma^3 |\mathrm{div} E|^2 \leq 0 \tag{5.34}$$

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon |\sigma \mathrm{div}\partial_t E|^2 + \left(\sup |\nabla\sigma|^2\right) \frac{d}{dt}\mathcal{E}'(t) + \int_\Omega \sigma^3 |\mathrm{div}\partial_t E|^2 \leq 0. \tag{5.35}$$

La preuve des deux premières égalité (5.32, 5.33) est évidente. La troisième estimation (5.34) s'obtient de la manière suivante

On vérifie que

$$\varepsilon \frac{d}{dt}(\sigma \mathrm{div} E) + \sigma^2 \mathrm{div} E + \sigma \nabla\sigma . E = 0. \tag{5.36}$$

En multipliant l'équation (5.36) par $\sigma \mathrm{div} E$, on a alors

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\textstyle\int \varepsilon |\sigma \mathrm{div} E|^2 + \int_\Omega \sigma^3 |\mathrm{div} E|^2 \quad \leq \left|\int_\Omega \sigma^2 \mathrm{div} E \nabla\sigma . E\right| \leq (\sup |\nabla\sigma|) \left\|\sqrt{\sigma}E\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\sigma\sqrt{\sigma}\mathrm{div} E\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \varepsilon |\sigma \mathrm{div} E|^2 + \int_\Omega \sigma^3 |\mathrm{div} E|^2 \leq \frac{1}{2}\left((\sup |\nabla\sigma|)^2 \left\|\sqrt{\sigma}E\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\sigma\sqrt{\sigma}\mathrm{div} E\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

La relation (5.32) permet de conclure.

5.5.3. *Estimation polynomiale*

On suppose ω_+ localement d'un seul côté de $\partial\omega_+$ sa frontière C^∞. Soit $\widetilde{\rho} \in C^\infty\left(\overline{\omega_+}\right)$, strictement positive dans ω_+, nulle sur Γ, du même ordre que $\mathrm{dist}(x, \Gamma)$.

On choisit dorénavant la conductivité σ de la façon suivante

$$\sigma(x) = \left| \begin{array}{ll} \widetilde{\rho}^s(x) & \text{si } x \in \omega_+ \quad \text{où } s \geq 1 \\ 0 & \text{si } x \in \omega_- \cup \Gamma. \end{array} \right.$$

Théorème 5.7. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que ω contrôle géométriquement Ω. On suppose que $\omega_+ = (\omega \cap \Omega)$, $\omega_- = \Omega \backslash (\overline{\omega_+} \cap \Omega)$ connexes. Alors il existe $\gamma \in]0, 1[$ et $c > 1$ tel que l'on ait :

$\forall (E_o, H_o) \in D(\mathcal{A})$ données de Cauchy du problème (5.31)

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathcal{E}'(t) + \int_\Omega \sigma |\mathrm{div}\partial_t E(\cdot, t)|^2 \leq c \left(\frac{1}{t+1}\right)^{\gamma/s} \left(\|\sigma \mathrm{div} E_o\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{E}(0) + \mathcal{E}'(0)\right).$$

Théorème 5.8. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que ω contrôle géométriquement Ω. On suppose que $\omega_+ = (\omega \cap \Omega)$, $\omega_- = \Omega \backslash (\overline{\omega_+} \cap \Omega)$ connexes et que $\partial\Omega$ n'a qu'une composante connexe. Alors il existe $\gamma \in]0,1[$ et $c > 1$ tel que l'on ait :

$\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S}_H$ données de Cauchy du problème (5.31)

$$\operatorname{div}(\varepsilon E_0) + \nabla\sigma.(-\operatorname{rot}_\Omega)^{-1}(\mu H_o) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \Longrightarrow \quad \forall t \geq 0 \qquad \mathcal{E}(t) \leq c\left(\frac{1}{t+1}\right)^{\gamma/s} \mathcal{E}(0).$$

On remarquera que la condition $\operatorname{div}(\varepsilon E_0) + \nabla\sigma.(-\operatorname{rot}_\Omega)^{-1}(\mu H_o) = 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$ n'est pas preservée par l'action du semi-groupe.

Preuve du théorème 5.8. La démonstration du théorème 5.8 découle du théorème 5.7. On vérifie l'assertion suivante :

$$\begin{aligned} &\forall (E_o, H_o) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S}_H \qquad \operatorname{div}(\varepsilon E_0) + \nabla\sigma.(-\operatorname{rot}_\Omega)^{-1}(\mu H_o) = 0 \quad \text{dans } \omega_+ \\ \Longrightarrow \quad &\exists! (U_o, V_o) \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega) \times H_0(\operatorname{div}0, \Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}V_o - \sigma U_o = \varepsilon E_o \quad \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{rot}U_o = \mu H_o \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}U_o = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $H_0(\operatorname{rot}, \Omega) = \left\{U \in (L^2(\Omega))^3 \backslash \operatorname{rot}U \in (L^2(\Omega))^3,\ U \wedge n_{|\partial\Omega} = 0\right\}$ et $H_0(\operatorname{div}0, \Omega) = \left\{V \in (L^2(\Omega))^3 \backslash \operatorname{div}V = 0,\ V.n_{|\partial\Omega} = 0\right\}$.

En effet, en reprenant la démonstration du lemme de décomposition, on a l'existence de $U_o \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\mu H_o = -\operatorname{rot}U_o$. De plus, U_o est unique avec les conditions $\operatorname{div}U_o = 0$, $\int_{\Gamma_i} U_o.nd\Gamma = 0 \quad i = 0$ *à* m ([6], p. 53). Par conséquent, $U_0 \in (H^1(\Omega))^3$, s'écrit $U_o = (-\operatorname{rot}_\Omega)^{-1}(\mu H_o)$.

D'autre part, $(\varepsilon E_o + \sigma U_o) \in (L^2(\Omega))^3$ et vérifie $\operatorname{div}(\varepsilon E_o + \sigma U_o) = 0$, on conclut qu'il existe $V_0 \in (H^1(\Omega))^3$ tel que $(\varepsilon E_o + \sigma U_o) = \operatorname{rot}V_o$ avec l'hypothèse $\mathbb{H}_2(\Omega) = \{0\}$ ([6], p. 53).

Les données (U_o, V_o) satisfont alors aux hypothèses du théorème 5.7 et on a

$$\frac{d}{dt}Z(t)(U_o, V_o) = Z(t)(-\mathcal{A}(U_o, V_o)) = Z(t)(E_o, H_o).$$

Preuve du théorème 5.7. On montre que $\mathcal{E}'(t)$ décroit polynomialement vers zéro avec une hypothèse géométrique et une conductivité adéquate. La démonstration se décompose en quatre étapes :

Étape 1 :
Nous relions $\partial_t H$ à $\partial_t E$: nous rappelons qu'à partir de la décomposition orthogonale du champ électrique sous la forme $E = -\nabla p + W$ et de la remarque 5.1, nous avons l'estimation suivante : $\exists c > 0 \quad \forall \zeta > 0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T} \mathcal{E}'(t)\,dt \leq c\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega |\partial_t E|^2. \tag{5.38}$$

Étape 2 :
Nous estimons $\partial_t W$, de sorte que sous la condition de contrôle géométrique, on établit l'estimation suivante : $\exists c > 0 \quad \forall \zeta > 0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega |\partial_t E|^2 \leq c\left(\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega \sigma|\partial_t E|^2 + \int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega \left|\frac{d}{dt}\nabla p\right|^2\right).$$

En effet, la solution W vérifie le système hyperbolique suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\partial_t^2 W - \mu^{-1}\Delta W + \sigma\partial_t E - \varepsilon\partial_t^2 \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0,+\infty[\\ \text{div} W = 0,\ W \wedge n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,+\infty[. \end{array}\right.$$

En appliquant (1.31) du théorème 1.4, au système hyperbolique en $\partial_t W$, on obtient avec l'hypothèse de contrôle géométrique et en posant $I =]\zeta, \zeta + T[$: $\quad \exists c, d > 0\ \exists \widehat{\omega} \subset \Omega$

$$\|\partial_t W\|_{L^2(\Omega\times I)} \le c\left(\|\partial_t W\|_{L^2(\widehat{\omega}\times I)} + \left\|\sigma\partial_t E - \varepsilon\partial_t^2\nabla p\right\|_{L^2(\Omega\times I)}\right)$$

avec

$$\|\partial_t W\|^2_{L^2(\widehat{\omega}\times I)} \le c\int_I\int_\Omega \sigma\left|\partial_t W\right|^2 .$$

Or par la proposition 5.2, nous avons

$$\left\|\varepsilon\partial_t^2\nabla p\right\|^2_{L^2(\Omega\times I)} \le \|\sigma\partial_t E\|^2_{L^2(\Omega\times I)} .$$

Par conséquent

$$\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega |\partial_t E|^2 \le c\left(\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega \sigma\left|\partial_t E\right|^2 + \int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega \left|\nabla\partial_t p\right|^2\right)$$

et finalement, grâce à (5.38), $\quad \exists c > 0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T}\mathcal{E}'(t)\,dt \le c\left(\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega \sigma\left|\partial_t E\right|^2 + \int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega\left|\frac{d}{dt}\nabla p\right|^2\right). \tag{5.39}$$

Étape 3 :
Nous estimons $\partial_t\nabla p$, grâce à l'inégalité de Hardy : $\quad \exists c > 0 \quad \forall\epsilon > 0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega\left|\frac{d}{dt}\nabla p\right|^2 \le \epsilon\int_\zeta^{\zeta+T}\int_{\omega_+}\left|\frac{d}{dt}\Delta p\right|^2 + \frac{c}{\epsilon^\beta}\int_\zeta^{\zeta+T}\int_{\omega_+}\sigma^3\left|\frac{d}{dt}\Delta p\right|^2 . \tag{5.40}$$

Rappel sur l'inégalité de Hardy :
On suppose ω_+ borné, localement d'un seul côté de $\partial\omega_+$ sa frontière C^∞. Soit $\rho \in C^\infty\left(\overline{\omega_+}\right)$, positive dans ω_+, nulle sur $\partial\omega_+$, du même ordre que $dist\left(x, \partial\omega_+\right)$. On considère $0 \le h < \frac{1}{2}$, alors l'application $u \longmapsto \frac{u}{\rho^h}$ est continue linéaire de $H^h\left(\omega_+\right)$ dans $L^2\left(\omega_+\right)$.

Revenons à la démonstration de l'estimation (5.40) :
Soit $0 < h < \frac{1}{2}$, comme $\frac{d}{dt}p \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega\left|\frac{d}{dt}\nabla p\right|^2 = -\int_{\omega_+}\Delta\partial_t p\partial_t p = -\int_{\omega_+}\rho^h\Delta\partial_t p\frac{\partial_t p}{\rho^h}.$$

Les inégalités de Hardy et Poincaré donnent : $\quad \exists c, d > 0$

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial_t p}{\rho^h}\right|^2 \le c\left\|\partial_t p\right\|^2_{H^1(\omega_+)} \le d\left\|\nabla\partial_t p\right\|^2_{L^2(\omega_+)} .$$

Donc

$$\int_\Omega \left|\frac{d}{dt}\nabla p\right|^2 \leq c\int_{\omega_+} \rho^{2h}\left|\frac{d}{dt}\Delta p\right|^2.$$

On découpe ω_+ en deux parties : $\omega_+ = D_\epsilon \cup \omega_\epsilon$ où $D_\epsilon = \left\{x \in \omega_+ \setminus \sigma(x) \leq \epsilon^{\frac{s}{2h}}\right\}$ et $\omega_\epsilon = \omega_+ \setminus D_\epsilon$. On choisit ρ tel que $\rho \leq \widetilde{\rho}$, on obtient alors :

$$\int_{\omega_+} \rho^{2h}\left|\tfrac{d}{dt}\Delta p\right|^2 = \int_{D_\epsilon} \rho^{2h}\left|\tfrac{d}{dt}\Delta p\right|^2 + \int_{\omega_\epsilon} \rho^{2h}\left|\tfrac{d}{dt}\Delta p\right|^2 \leq \epsilon\int_\Omega \left|\tfrac{d}{dt}\Delta p\right|^2 + \tfrac{1}{\epsilon^\beta}\int_{\omega_\epsilon} \rho^3\left|\tfrac{d}{dt}\Delta p\right|^2$$

où $\beta = \frac{-2h+3s}{2h} > 0$. Ceci termine l'étape 3.

Étape 4 :

Nous estimons $\frac{d}{dt}\Delta p$. Grâce à l'estimation d'énergie (5.34), on montre que $\frac{d}{dt}\mathrm{div}E$ est uniformément borné : $\exists c > 0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T}\int_\Omega \left|\frac{d}{dt}\Delta p\right|^2 \leq cT\left(\|\sigma\mathrm{div}E_o\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{E}(0)\right). \tag{5.41}$$

C'est immédiat car $\varepsilon\frac{d}{dt}\Delta p = -\sigma\Delta p + \nabla\sigma.E$ et $\sigma\Delta p$ est uniformément borné avec (5.34).

Conclusion

En posant $\mathcal{F}(t) = \left(\sup|\nabla\sigma|^2\right)\mathcal{E}'(t) + \varepsilon\|\sigma\mathrm{div}\partial_t E(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, on a : $\forall\zeta > 0\ \forall\epsilon > 0$

$$\int_\zeta^{\zeta+T}\mathcal{F}(t)\,dt \leq c\left(\epsilon\left(\varepsilon\|\sigma\mathrm{div}\partial_t E_o\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{E}(0) + \mathcal{F}(0)\right) + \frac{1}{\epsilon^\beta}\int_\zeta^{\zeta+T} -\frac{d}{dt}\mathcal{F}(s)\,ds\right).$$

On conclut avec le lemme 5.6 de décroissance polynomiale.

$$\forall t > T \qquad \mathcal{E}'(t) + \int_\Omega \sigma|\mathrm{div}\partial_t E(\cdot,t)|^2 \leq c\left(\frac{T}{t-T}\right)^\gamma\left(\|\sigma\mathrm{div}E_o\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{E}(0) + \mathcal{E}'(0)\right)$$

avec $\gamma = \frac{2h}{3s}$ et $0 < h < \frac{1}{2}$.

References

[1] H. Barucq, Étude asymptotique du système de Maxwell avec conditions aux limites absorbantes. Thèse de l'université de Bordeaux I (1993).

[2] N. Burq, Mesures semi-classiques et mesures de défaut, Séminaire Bourbaki. *Asterisque* **245** (1997) 167-195.

[3] H. Barucq et B. Hanouzet, Étude asymptotique du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller II. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **316** (1993) 1019-1024.

[4] C. Bardos, L. Halpern, G. Lebeau, J. Rauch et E. Zuazua, Stabilisation de l'équation des ondes au moyen d'un feedback portant sur la condition aux limites de Dirichlet. *Asymptot. Anal.* **4** (1991) 285-291.

[5] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.* **30** (1992) 1024-1065.

[6] M. Cessenat, Mathematical method in electromagnetism - linear theorie and applications. *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.* **41** (1996).

[7] R. Dautray et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Masson (1988).

[8] V. Komornik, Boundary stabilization, observation and control of Maxwell's equations. *Panamer. Math. J.* **4** (1994) 47-61.

[9] J. Lagnese, Exact boundary controllability of Maxwell's equations in a general region. *SIAM J. Control Optim.* **27** (1989) 374-388.

[10] G. Lebeau, Contrôle et stabilisation hyperboliques. Séminaire E.D.P. École Polytechnique (1990).

[11] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribués. RMA, Masson, Paris (1988).
[12] J.-L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes. Dunod (1968).
[13] G. Lebeau et L. Robbiano, Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Duke Math. J.* **86** (1997) 465-491.
[14] R. Melrose et J. Sjöstrand, Singularities of boundary value problems I. *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978) 593-617.
[15] R. Melrose et J. Sjöstrand, Singularities of boundary value problems II. *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982) 129-168.
[16] O. Nalin, Contrôlabilité exacte sur une partie du bord des équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **309** (1989) 811-815.
[17] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York (1983).
[18] K.-D. Phung, Stabilisation frontière du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **3233** (1995) 187-192.
[19] K.-D. Phung, Controlabilité exacte et stabilisation interne des équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **3233** (1996) 169-174.
[20] J.V. Ralston, Solutions of Wave equation with localized energy. *Comm. Pure. Appl. Math.* **22** (1969) 807-823.
[21] J. Rauch et M. Taylor, Penetration into shadow region and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems. *Indiana Univ. Mathematics J.* **22** (1972) 277-284.
[22] M. Taylor, Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1981).
[23] M. Taylor, Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975) 457-478.
[24] M. Taylor, Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations II. *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976) 463-481.
[25] N. Weck, Exact boundary controllability for a Maxwell problem, submitted to *SIAM J. Control. Optim.*
[26] N. Weck et K.J. Witsch, Low frequency asymptotics for dissipative Maxwell's equations in bounded domains. *Math. Methods Appl. Sci.* **13** (1990) 81-93.
[27] K. Yamamoto, Singularities of solutions to the boundary value problem for elastic and Maxwell's equations. *Japan J. Math. (N.S.)* **14** (1988) 119-163.