

COMPOSITIO MATHEMATICA

RIDHA BELGRADE

**Sur la conjugaison de Kashiwara pour une classe
de connexions méromorphes irrégulières**

Compositio Mathematica, tome 104, n° 3 (1996), p. 279-292

http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__104_3_279_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la conjugaison de Kashiwara pour une classe de connexions méromorphes irrégulières

RIDHA BELGRADE

*Université Henri Poincaré-Nancy, 1 Institut Elie Cartan B.P. 239,
F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, Cedex*

Received 16 May 1994; accepted in final form 17 October 1995

Abstract. Let f be a non constant holomorphic function on a connected complex analytic manifold X . Let \bar{X} the conjugated manifold. For all $(a, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(a) > 0$, we consider the distribution:

$$u = |f|^a (\log |f|)^k \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\bar{f}}\right).$$

We prove that $\mathcal{D}_X u$ is an irregular meromorphic connection, and that its distributions solutions complex $\mathbf{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X u, \mathcal{D}b_X)$ is quasi-isomorphic, as a complex of $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -modules, to $\mathcal{D}_{\bar{X}} u[0]$.

Mots clefs: \mathcal{D} -module, dual, localisé, solutions distributions.

1. Introduction

Ce travail trouve son origine dans la tentative de généraliser les résultats de Kashiwara [K] sur la conjugaison des \mathcal{D}_X -modules holonomes réguliers, résultats qui s'appuient sur la classification de ces derniers et sur la correspondance de Riemann-Hilbert.

On prendra une variété analytique complexe connexe X de dimension n , et f une fonction holomorphe non constante sur X . \bar{X} désignera la variété conjuguée de X , et \bar{f} la fonction conjuguée de f . On notera \mathcal{O}_X le faisceau structural, ω_X le fibré canonique, θ_X le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes, \mathcal{D}_X le faisceau des germes d'opérateurs différentiels holomorphes, et enfin $\mathcal{D}b_X$ celui des germes de distributions sur X .

On désignera par $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de \mathcal{D}_X -modules à gauche.

Rappelons que pour tout \mathcal{D}_X -module à gauche \mathcal{M} , $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b_X)$ possède une structure naturelle de $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -module à gauche. D'où le foncteur de Kashiwara:

$$C_X := \mathbf{R} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\cdot, \mathcal{D}b_X) : \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}).$$

En l'absence d'une classification complète dans le cadre irrégulier pour le moment, on se propose ici comme objectif de démontrer 'directement' le théorème

de conjugaison de Kashiwara pour le \mathcal{D}_X -module engendré par la distribution $(L^1_{\text{loc}},$ pour $(a, k) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}, \text{Re}(a) > 0$), $u_f^{a,k} = \frac{1}{k!} |f|^{2a} (\log |f|^2)^k \exp(\frac{1}{f} - \frac{1}{\bar{f}})$:

THÉORÈME. *On a un isomorphisme naturel dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\bar{X}})$:*

$$C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k}) = \mathcal{D}_{\bar{X}} u_f^{a,k}[0].$$

Des versions faibles de ce théorème ont été traitées dans [B1] et dans [B2]. Le théorème occupera toute la Section 4. Faisons quelques rappels avant de donner les arguments de sa démonstration.

Rappelons que pour tout objet \mathcal{M} de $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$, le dual \mathcal{M}^* est l'objet suivant de $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$: $\text{Hom}_{O_X}(\omega_X, \mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X))[n]$. Pour un \mathcal{D}_X -module \mathcal{M} , ce dual est concentré en degré 0 si et seulement si \mathcal{M} est holonome.

Soit $O_X[*Y]$ le faisceau des germes de fonctions méromorphes à pôles dans $Y = f^{-1}(0)$. Pour tout \mathcal{D}_X -module à gauche \mathcal{M} , son localisé le long de Y : $\mathcal{M}[*Y] = O_X[*Y] \otimes_{O_X} \mathcal{M}$ a une structure naturelle de \mathcal{D}_X -module (et même de $\mathcal{D}_X[*Y]$ -module) à gauche.

Le théorème repose d'abord sur deux propriétés de $\mathcal{M}_f^{a,k} := \mathcal{D}_X u_f^{a,k}$, démontrées dans les Sections 2 et 3, à savoir: ce \mathcal{D}_X -module (holonome) et son dual sont égaux à leurs localisés respectifs le long de Y . Cela montre que pour le calcul de $C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k})$, on peut se permettre les dénominateurs (en f) au niveau des coefficients ($\mathcal{D}b_X$) ainsi que des opérateurs. Ceci a l'avantage de rendre explicitable $C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k})$. En effet, l'annulateur méromorphe de $u_f^{a,k}$ est calculable, et est de plus adéquat pour la détermination d'une $\mathcal{D}_X[*Y]$ -résolution de $\mathcal{M}_f^{a,k}$. $C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k})$ se trouve alors représenté par un complexe de courants de types $(\cdot, 0)$ avec une différentielle holomorphe 'modifiée'. Or, on sait, grâce au théorème de division [Ma], que $\mathcal{D}b_X[*Y]$ s'identifie aux quotients $\frac{\mathcal{D}b_X}{\mathcal{H}_{[Y]}^0(\mathcal{D}b_X)} = \frac{\mathcal{D}b_X}{\mathcal{H}_Y^0(\mathcal{D}b_X)}$.

On s'appuie alors sur des arguments de division dans $\mathcal{D}b_X$ pour se ramener au lemme classique de Dolbeault-Grothendieck [D].

Pour les deux propriétés citées de $\mathcal{M}_f^{a,k}$, on procède en deux temps. Dans la Section 2, on les établit pour le \mathcal{D}_X -module $\mathcal{L}_f^{a,k}$, quotient de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ par sa torsion. Et dans la Section 3, on montre que cette torsion est nulle. Dans la Section 2, comme dans la Section 3, on procède en deux étapes: on établit les résultats dans le cas d'une fonction f monomiale sur \mathbf{C}^n (Prop. 2.1 et 3.2), puis en désingularisant f (Prop. 2.3 et 3.3).

2. Etude du \mathcal{D}_X -module $\mathcal{L}_f^{a,k}$

Dans toute la suite, on aura à considérer les fonctions holomorphes multiformes sur $X \setminus Y$:

$$e_f^{a,j} = \frac{1}{j!} f^a (\log f)^j \exp(f^{-1}), \quad j = 0, \dots, k \quad (e_f^{a,-1} = 0).$$

Si l'on désigne par \mathcal{R} le faisceau sur X des germes de fonctions holomorphes multiformes sur $X \setminus Y$, on peut aisément se convaincre que le sous- $O_X[*Y]$ -module de \mathcal{R} engendré par les $e_f^{a,j}$ ($j = 0, \dots, k$) est libre. On le notera $\mathcal{E}_f^{a,k}$. La structure de \mathcal{D}_X -module sur ce dernier est définie de façon évidente. Pour un système de coordonnées x_1, \dots, x_n sur X , on pose:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f^{-l} e_f^{a,j}) = f^{-l-2} \frac{\partial f}{\partial x_i} ((af - lf - 1)e_f^{a,j} + f e_f^{a,j-1}).$$

Considérons aussi les distributions $u_f^{a,j} = \frac{1}{j!} |f|^{2a} (\log |f|^2)^j \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\bar{f}}\right)$, $j = 0, \dots, k$, ($u_f^{a,-1} = 0$). Il est facile de vérifier qu'il n'existe pas de relation O_X -linéaire entre les $u_f^{a,j}$, et que pour $P \in \mathcal{D}_X$, $a_{i,j} \in O_X[*Y]$, on a:

$$P e_f^{a,j} = \sum_{i=0}^j a_{i,j} e_f^{a,i} \Leftrightarrow P u_f^{a,j} \Big|_{X \setminus Y} = \sum_{i=0}^j a_{i,j} u_f^{a,i} \Big|_{X \setminus Y}. \tag{1}$$

Notons \mathcal{I} et \mathcal{J} les idéaux de \mathcal{D}_X , annulateurs de $e_f^{a,k}$ et $u_f^{a,k}$ respectivement. Les remarques qui précèdent prouvent l'inclusion $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. Il existe par conséquent une surjection:

$$\rho: \mathcal{M}_f^{a,k} := \mathcal{D}_X u_f^{a,k} \rightarrow \mathcal{D}_X e_f^{a,k} \tag{2}$$

le noyau de ρ étant égal à la torsion de $\mathcal{M}_f^{a,k}$. $\mathcal{L}_f^{a,k}$ (quotient de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ par sa torsion) apparaît donc naturellement égal à $\mathcal{D}_X e_f^{a,k}$ ($\subset \mathcal{E}_f^{a,k}$).

Remarque 1. Pour montrer l'holonomie de $\mathcal{L}_f^{a,k}$ et le fait que son dual est localisé le long de Y , nous aurions pu nous réduire, dans la preuve de la Proposition 2.1, au cas où $k = 0$ par récurrence sur k , grâce à l'inclusion $\mathcal{L}_f^{a,k-1} \subset \mathcal{L}_f^{a,k}$, le quotient s'identifiant à $\mathcal{L}_f^{a,0}$. Nous aurions eu, néanmoins, à calculer le dual de ce dernier. Au lieu de cela, nous avons préféré expliciter directement l'idéal \mathcal{I} . La détermination d'un bon système générateur de \mathcal{I} , qui ne semble pas absolument nécessaire pour la Proposition 2.1, nous sera néanmoins très utile pour la Proposition 3.2.

2.1. PROPOSITION. Si la fonction f est monomiale sur $X = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{L}_f^{a,k}$ est holonome. De plus, on a:

$$\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k} \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_f^{a,k})^* \cong \mathcal{L}_{-f}^{-a,k}.$$

Preuve. Supposons que $f = \prod_{i=1}^r x_i^{c_i}$, $c_i > 0$, $r \in [1, n]$. On pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\nabla_i = \frac{1}{c_i} x_i \partial_i$, et $P_s = f(\nabla_1 - a - s) + 1$. On a $\nabla_i(f) = f$ pour $i = 1, \dots, r$, d'où les identités suivantes:

$$P_s(f^s e_f^{a,j}) = f^{s+1} e_f^{a,j-1} \quad \forall j = 0, \dots, k. \tag{3}$$

Et donc, par récurrence sur j :

$$P_{s+j} P_{s+j-1} \dots P_s (f^s e_f^{a,j}) = 0. \tag{4}$$

Or la relation $f \nabla_1 = \nabla_1 f - \nabla_1(f) = \nabla_1 f - f = (\nabla_1 - 1)f$ montre que les opérateurs $1 - P_{s+j} P_{s+j-1} \dots P_s$ sont divisibles à droite par f . Il existe donc des opérateurs $P_{s,j}$ tels que: $1 - P_{s,j} f = P_{s+j} P_{s+j-1} \dots P_s$. D'où les relations:

$$P_{s,j}(f^{s+1} e_f^{a,j}) = f^s e_f^{a,j} \quad \forall j = 0, \dots, k. \tag{5}$$

Les équations (3) et (5) suffisent à démontrer l'égalité $\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k}$. En effet, il s'agit juste de vérifier que:

$$O_X[*Y] e_f^{a,j} \subset \mathcal{L}_f^{a,k} \quad \forall j = 0, \dots, k. \tag{6}$$

Or (5) permet de voir, par récurrence sur l'ordre du pôle, que:

$$O_X[*Y] e_f^{a,j} \subset \mathcal{D}_X e_f^{a,j} \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

Ceci permet, cette fois-ci par une récurrence descendante sur j , de réduire la preuve de (6) à celle de:

$$e_f^{a,j-1} \in \mathcal{D}_X e_f^{a,j} \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Pour cela, on a les identités précises: $e_f^{a,j-1} = P_{-1} P_{-1,j} (e_f^{a,j})$. □

A présent, calculons \mathcal{I} . Soient $Q_i, i = 1, \dots, n$, les opérateurs:

$$Q_i = \begin{cases} P_k P_{k-1} \dots, P_1 P_0 & \text{si } i = 1, \\ \nabla_i - \nabla_1 & \text{si } i \in [2, r], \\ \partial_i & \text{si } i \in [r + 1, n]. \end{cases}$$

D'après (4) on a l'inclusion d'idéaux: $\mathcal{I}_0 := \mathcal{D}_X Q_1 + \dots + \mathcal{D}_X Q_n \subset \mathcal{I}$. En fait, on a le

2.2. LEMME. *On a l'égalité: $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$.*

Preuve. Il suffit évidemment de vérifier les deux inclusions:

- (a) $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_0 + \mathcal{I} \cap O_X[\partial_1]$,
- (b) $\mathcal{I} \cap O_X[\partial_1] \subset O_X[\partial_1]Q_1$.

Pour (a), il suffit, par une récurrence sur l'ordre des opérateurs en les $\partial_i, i = 2, \dots, r$ de vérifier que:

$$\partial_i \in \partial_i Q_1 + \mathcal{D}_X Q_i + O_X[\partial_1] \quad \forall i = 2, \dots, r$$

ce qui s'établit par récurrence sur k . En effet, supposons que:

$$\partial_i P_{k-1} \dots P_1 P_0 = \partial_i + A Q_i + B \quad \text{avec } A \in \mathcal{D}_X \text{ et } B \in O_X[\partial_1].$$

Or, si $f_i = \frac{c_i f}{x_i}$, on a bien $\partial_i f = f_i(\nabla_i + 1)$, et donc:

$$\begin{aligned} \partial_i P_s &= \partial_i + \partial_i f(\nabla_1 - a - s) = \partial_i + f_i(\nabla_1 - a - s)(\nabla_i + 1) \\ &= \partial_i + f_i(\nabla_1 - a - s)Q_i + f_i(\nabla_1 - a - s)(\nabla_1 + 1). \end{aligned}$$

En conséquence: $\partial_i Q_1 = \partial_i P_{k-1} \dots P_1 P_0 + f_i(\nabla_1 - a - k)Q_i P_{k-1} \dots, P_1 P_0 + f_i(\nabla_1 - a - k)(\nabla_1 + 1)P_{k-1} \dots P_1 P_0$ et $[Q_i, f] = [Q_i, \nabla_1] = 0$ donnent alors en définitive $\partial_i Q_1 = \partial_i + C Q_i + D$ avec:

$$\begin{aligned} C &= A + f_i(\nabla_1 - a - k)P_{k-1} \dots P_1 P_0; \\ D &= B + f_i(\nabla_1 - a - k)(\nabla_1 + 1)P_{k-1} \dots P_1 P_0. \end{aligned}$$

Pour établir (b), nous aurons besoin de préciser l'action de $O_X[\partial_1]$ sur les $f^s e_f^{a,j}$. D'abord, on vérifie, par récurrence sur l , que:

$$\nabla_1^l (f^s e_f^{a,j}) = f^s \sum_{i=0}^{\min(j,l)} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} S_{i,l}(s, f^{-1}) e_f^{a,j-i}$$

où $S_{i,l}(s, t) \in \mathbf{C}[s, t]$ est unitaire de degré $l - i$ en t . Les relations $x_1^l \partial_1^l = \prod_{h=0}^{l-1} (c_1 \nabla_1 - h)$ donnent:

$$x_1^l \partial_1^l (f^s e_f^{a,j}) = f^s \sum_{i=0}^{\min(j,l)} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} c_1^l T_{i,l}(s, f^{-1}) e_f^{a,j-i}$$

où $T_{i,l} \in \mathbf{C}[s, t]$ est unitaire et de degré $l - i$ en t .

Si $U_{i,l}(s, t) = (-t)^{l-i} \binom{l}{i} c_1^l T_{i,l}(s, t^{-1})$, les fonctions $V_{i,l}^s(x) = U_{i,l}(s, f(x))$ sont alors holomorphes inversibles au voisinage de Y , pour tout s fixé. Pour tout opérateur $P = \sum_{l=0}^m b_l \partial_1^l \in O_X[\partial_1]$, on aura donc:

$$P(f^s e_f^{a,j}) = f^s \sum_{i=0}^{\min(j,m)} \left(\sum_{l=i}^m \frac{b_l(x)}{(x_1 f)^l} V_{i,l}^s \right) f^i e_f^{a,j-i}.$$

Nous aurons alors besoin de deux sous-lemmes intermédiaires.

2.2.1. Sous-lemme. Soit $(h, j) \in \mathbb{N} \times [0, k]$. On a alors:

$$P(f^h e_f^{a,j}) \in \bigoplus_{i=0}^{j-1} O_X[*Y] e_f^{a,i} \Rightarrow \exists Q \in O_X[\partial_1] \text{ tel que } P = QP_h.$$

Preuve. Par récurrence sur l'ordre de P . Le coefficient de $e_f^{a,j}$ dans $P(f^h e_f^{a,j})$ vaut:

$$f^h \sum_{l=0}^m \frac{b_l(x)}{(x_1 f)^l} V_{j,l}^h.$$

L'hypothèse implique alors que b_m est divisible par $x_1 f$. Il existe donc A et B dans $O_X[\partial_1]$ d'ordres $\leq \text{ordre}(P) - 1$ et tels que $P = AP_h + B$. Or, du fait que $P_h(f^h e_f^{a,j}) = f^{h+1} e_f^{a,j-1}$, les coefficients en $e_f^{a,j}$ de $P(f^h e_f^{a,j})$ et de $B(f^h e_f^{a,j})$ sont égaux. L'hypothèse de récurrence conclut. \square

2.2.2. Sous-lemme. Soit $(h, j) \in \mathbb{N} \times [0, k]$. On a alors:

$$P(f^h e_f^{a,j}) = 0 \Rightarrow \exists R \in O_X[\partial_1] \text{ tel que } P = RP_{h+j} P_{h+j-1} \dots P_h.$$

Preuve. Le sous-lemme précédent fournit $Q \in O_X[\partial_1]$ d'ordre $\leq \text{ordre}(P) - 1$ et tel que $P = QP_h$. On en déduit que:

$$Q(f^{h+1} e_f^{a,j-1}) = QP_h(f^h e_f^{a,j}) = P(f^h e_f^{a,j}) = 0$$

d'où le résultat par récurrence sur l'ordre de P . \square

En faisant $j = k$ et $h = 0$ dans le sous-lemme 2.2.2, on obtient (b). \square

Achevons de prouver la proposition maintenant. Il est facile de voir que les Q_i commutent entre eux deux à deux, et que la suite de leurs symboles principaux $(\sigma(Q_i))_{1 \leq i \leq n}$ est régulière dans O_{T^*X} . On en déduit d'une part que $\mathcal{L}_f^{a,k}$ est holonome, et d'autre part que le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{D}_X; Q_1, \dots, Q_n)$ en est une résolution.

Le dual $(\mathcal{L}_f^{a,k})^*$ s'identifie alors au quotient de \mathcal{D}_X par l'idéal engendré par les opérateurs adjoints $R_i := Q_i^*$. Par ailleurs, si l'on pose $g = \prod_{i=1}^r x_i$, on peut se convaincre, par les mêmes arguments de division dans \mathcal{D}_X précédemment utilisés, que les opérateurs R_i engendrent l'idéal annulateur de:

$$e = g^{-1} f^{-a-k-1} (\log f)^k \exp(-f^{-1}).$$

On conclut alors en remarquant que l'égalité $\mathcal{L}_{-f}^{-a,k} = \mathcal{L}_{-f}^{-a,k}[*Y]$ permet de voir que e est également générateur de $\mathcal{L}_{-f}^{-a,k}$. \square

2.3. PROPOSITION. *Pour une fonction f quelconque, $\mathcal{L}_f^{a,k}$ est holonome. De plus:*

$$\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k} \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_f^{a,k})^* = (\mathcal{E}_f^{a,k})^* [*Y].$$

Preuve. Considérons $\pi : Z \rightarrow X$ un morphisme propre où Z est lisse telle que, pour $T = \pi^{-1}(Y)$, π est un isomorphisme entre $Z \setminus T$ et $X \setminus Y$ et telle que $g = f \circ \pi$ est à croisement normaux [H]. L'égalité $\mathcal{L}_g^{a,k} = \mathcal{L}_g^{a,k}[*T]$ implique (cf. [Bj], p. 109) que:

$$\int_{\pi_*} \mathcal{L}_g^{a,k} = \pi_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Z} \otimes_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{L}_g^{a,k})[0].$$

De plus, cette image est holonome et sans O_X -torsion. Les sections globales $e_f^{a,k}$ et $1_{X \leftarrow Z} \otimes e_g^{a,k}$ de $\mathcal{L}_f^{a,k}$ et $\int_{\pi_*} \mathcal{L}_g^{a,k}$ respectivement permettent de définir une flèche:

$$\mathcal{L}_f^{a,k} \rightarrow \int_{\pi_*} \mathcal{L}_g^{a,k}.$$

L'absence de O_X -torsion dans $\mathcal{L}_f^{a,k}$ montre alors que cette flèche est injective. Ceci établit déjà l'holonomie de $\mathcal{L}_f^{a,k}$, et donc celle de $\mathcal{K}_f^{a,k} := \mathcal{L}_f^{a,k}[*Y]$ (cf. [Me], p. 98). La proposition découlerait alors des deux propriétés:

$$\mathcal{K}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k} \tag{7}$$

et

$$(\mathcal{K}_f^{a,k})^* = (\mathcal{E}_f^{a,k})^* [*Y]. \tag{8}$$

En effet, il resterait juste à vérifier que $\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{K}_f^{a,k}$, égalité équivalente à la nullité de $\mathcal{H}_{[Y]}^1(\mathcal{L}_f^{a,k})$, ce qui découlerait de (8) puisque le dual de ce \mathcal{D}_X -module est de O_X -torsion dans $(\mathcal{K}_f^{a,k})^*$. L'inclusion $\mathcal{K}_f^{a,k} = \mathcal{D}_X[*Y]e_f^{a,k} \subset \mathcal{E}_f^{a,k}$ est évidente. Une récurrence descendante sur j permet de voir que (7) découle de:

$$e_f^{a,j-1} \in \mathcal{D}_X[*Y]e_f^{a,j} \quad \forall j = 1, \dots, k$$

ce qui provient de l'appartenance de f au radical de son idéal jacobien. En effet, pour un champ de vecteurs V tel que $V(f) = f^r$, on a:

$$(V + (1 - af)f^{r-2})e_f^{a,j} = f^{r-1}e_f^{a,j-1}.$$

Par ailleurs, (7) montre que $\mathcal{K}_f^{a,k}$ est plat sur O_X . On aura alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k}) &= \pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k})[0] = \mathcal{D}_{Z \rightarrow X} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} \pi^{-1}(\mathcal{K}_f^{a,k})[0] \\ &= \mathcal{D}_Z[*T](1_{Z \rightarrow X} \otimes \pi^{-1}(e_f^{a,k}))[0]. \end{aligned}$$

Les sections globales $e_g^{a,k}$ et $1_{Z \rightarrow X} \otimes \pi^{-1}(e_f^{a,k})$ de $\mathcal{L}_g^{a,k}$ et $\mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k})$ respectivement permettent d'établir un isomorphisme:

$$\mathcal{L}_g^{a,k}[0] \cong \mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k}).$$

Comme $(\mathcal{L}_g^{a,k})^* = (\mathcal{L}_g^{a,k})^*[*T]$ (Prop. 2.1), on obtient (8) grâce à la relation:

$$\int_{\pi_*} (\mathcal{L}_g^{a,k})^* \cong (\mathcal{K}_f^{a,k})^*[0],$$

laquelle découle de la précédente et des isomorphismes (cf. [Me], p. 72 et p. 97):

$$\int_{\pi_*} (\mathcal{L}_g^{a,k})^* \cong \left(\int_{\pi_!} \mathcal{L}_g^{a,k} \right)^* \quad \text{et} \quad \int_{\pi_!} \mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k}) \cong \mathcal{K}_f^{a,k}[0]. \quad \square$$

3. Etude du \mathcal{D}_X -module $\mathcal{M}_f^{a,k}$

Pour la suite, nous aurons à nous servir du

3.1. LEMME. Soient $u_1 \in L^\infty(X) \cap C^1(X \setminus Y)$, $u_2 \in L^\infty(X) \cap C^0(X \setminus Y)$, P un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 et à coefficients de classe C^1 , tels que la distribution $Pu_1 - u_2$ soit portée par Y . Alors $Pu_1 = u_2$.

Preuve. Le problème est local. Soit X un ouvert de \mathbb{C}^n . Prenons $P = b + \sum_{i=1}^n a_i \partial_i$ et une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(X)$. On a:

$$\begin{aligned} \langle Pu_1, \varphi \rangle &= \langle u_1, P^* \varphi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|f| \geq \varepsilon} u_1 P^* \varphi dx \wedge d\bar{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|f| \geq \varepsilon} u_2 \varphi dx \wedge d\bar{x} + \int_{|f| = \varepsilon} u_1 \psi \right) = \langle u_2, \varphi \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|f| = \varepsilon} u_1 \psi, \end{aligned}$$

avec $\psi = \varphi dx \wedge d\bar{x} \rightarrow (P-b) = \varphi \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i dx_1 \wedge \dots \wedge \check{d}x_i \wedge \dots \wedge dx_n \wedge d\bar{x}$.

La dernière limite est nulle du fait que $\text{Vol}(|f| = \varepsilon) = O(\varepsilon^{1/m})$ au voisinage d'un point de multiplicité m pour f [I: 2e partie, p. 4-6]. □

Rappelons l'existence d'un épimorphisme $\rho: \mathcal{M}_f^{a,k} \rightarrow \mathcal{L}_f^{a,k}$ (cf. (2) dans Section 2). On a:

3.2. PROPOSITION. *Si la fonction f est monomiale sur $X = \mathbf{C}^n$, ρ est un isomorphisme.*

Preuve. Il suffit de prouver l'inclusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. On reprendra les notations de la Proposition 2.1. En vertu du Lemme 2.2, il suffit de prouver que $Q_i u_f^{a,k} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Or pour $i = 2, \dots, n$, c'est directement le Lemme 3.1. Reste Q_1 . Or les relations (3) dans la Proposition 2.1 appuyées de (1) donnent (pour $\text{Re}(s) \geq 0$), toujours en vertu du Lemme 3.1:

$$P_s(f^s u_f^{a,j}) = f^{s+1} u_f^{a,j-1} \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

On en déduit, par récurrence sur k , que l'on a bien $Q_i u_f^{a,k} = 0$. □

3.3. PROPOSITION. *Pour une fonction f quelconque, ρ est un isomorphisme.*

Preuve. Il s'agit de prouver que:

$$\mathcal{H}_Y^0(\mathcal{M}_f^{a,k}) = 0. \tag{9}$$

Le problème est local. Prenons pour X un ouvert de \mathbf{C}^n , et $dx := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \omega_X$. Le courant de type $(n, 0) : v_f = u_f^{a,k} \otimes dx$ engendre un \mathcal{D}_X -module à droite $\mathcal{N}_f^{a,k} = v_f \mathcal{D}_X$ qui n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_f^{a,k} \otimes_{O_X} \omega_X$. (9) est alors équivalent à:

$$\mathcal{H}_Y^0(\mathcal{N}_f^{a,k}) = 0. \tag{10}$$

On fera appel, encore ici, à une désingularisation de Hironaka de $f, \pi: Z \rightarrow X$ (cf. notations de la Proposition 2.3). π étant propre, l'image directe:

$$\pi_*: \pi_*(\theta_Z)[*Y] \rightarrow \theta_X[*Y],$$

est un isomorphisme ([Bj], p. 108). D'où un autre isomorphisme:

$$\pi_*: \mathcal{A}[*Y] \rightarrow \mathcal{D}_X[*Y],$$

où \mathcal{A} est le sous-anneau de $\pi_*(\mathcal{D}_Z)$ engendré par $\pi_*(\theta_Z)$ (sachant que $\pi_*(O_Z) = O_X$). En conséquence, on aura:

$$\forall P \in \mathcal{D}_X \quad \exists m \in \mathbf{N} \quad \exists Q \in \pi_*(\mathcal{D}_Z) \quad \text{tels que} \quad f^m P = \pi_*(Q). \tag{11}$$

Par ailleurs, le courant sur $Z: v_g = u_g^{a,k} \otimes \pi^*(dx)$ vérifie deux choses: d'une part, son image directe $\pi_*(v_g)$ coïncide avec v_f ; d'autre part, il engendre un \mathcal{D}_Z -module à droite $\mathcal{N}_g^{a,k} := v_g \mathcal{D}_Z$ qui n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_g^{a,k} \otimes_{O_Z} \omega_Z$.

Vérifions cela rapidement. D’abord, v_g est une section globale de $\mathcal{M}_g^{a,k} \otimes_{O_Z} \omega_Z$, et donc $\mathcal{N}_g^{a,k}$ est un sous-module de ce dernier. L’égalité cherchée est donc locale. Soient z_1, \dots, z_n des coordonnées sur Z , on a $v_g = \Delta u_g^{a,k} \otimes dz$, où Δ est le déterminant jacobien de π . Comme $\Delta^{-1}(0) \subset T$, il existe $r \in \mathbf{N}^*$, $h \in O_Z$ tels que: $f^r = h\Delta$. La relation (5) de la Proposition 2.1 donne:

$$P_{0,k}P_{1,k} \dots P_{r-1,k}(f^r u_g^{a,k}) = u_g^{a,k}.$$

Si l’on pose $R = P_{0,k}P_{1,k} \dots P_{r-1,k}h$, on aura:

$$R(\Delta u_g^{a,k}) = u_g^{a,k} \quad \text{i.e.} \quad u_g^{a,k} \otimes dz = v_g R^*.$$

D’où l’assertion, du fait que $u_g^{a,k} \otimes dz$ est un générateur de $\mathcal{M}_g^{a,k} \otimes_{O_Z} \omega_Z$. En conséquence $\mathcal{N}_g^{a,k} = \mathcal{N}_g^{a,k}[*T]$, et donc:

$$\pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k}) = \pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k}[*T]). \tag{12}$$

Ce module est donc sans torsion. Ainsi, d’une part, l’image directe des courants définit une injection:

$$\pi_* : \pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k}) \rightarrow \mathcal{D}b_X \otimes_{O_X} \omega_X$$

et, d’autre part, (10) sera établie pourvu que l’on vérifie que: $\mathcal{N}_f^{a,k} \subset \text{Im}(\pi_*)$.

Soient alors $v \in \mathcal{N}_f^{a,k}$ et $P \in \mathcal{D}_X$ tels que $v = v_f P$. Soient m et Q fournis par (11). La multiplication par g^m est bijective sur $\pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k})$ (cf. (12)). Il existe donc $w \in \pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k})$ tel que $v_g = g^m w$. Il s’ensuit que: $v_f = \pi_*(v_g) = \pi_*(g^m w) = f^m \pi_*(w)$.

J’affirme alors que $v = \pi_*(wQ)$. En effet, soit φ une forme de type $(0, n)$ sur X , C^∞ et à support compact. On aura:

$$\begin{aligned} \langle \pi_*(wQ), \varphi \rangle &= \langle wQ, \pi^*(\varphi) \rangle = \langle w, Q\pi^*(\varphi) \rangle = \langle w, \pi^*(f^m P\varphi) \rangle \\ &= \langle \pi_*(w), f^m P\varphi \rangle = \langle f^m \pi_*(w), P\varphi \rangle = \langle v_f, P\varphi \rangle \\ &= \langle v_f P, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 2. Le passage aux courants se justifie bien. En effet, on aurait eu, sinon, à traduire la relation (11) par une action à droite sur des formes test de type (n, n) , laquelle se transforme en une action à gauche (par adjonction) sur des formes test de type $(0, n)$. Or il se trouve que cette adjonction n’est pas une opération globale et n’est donc pas bien définie sur l’opérateur Q dans (11).

4. Conjugaison de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ et de $\mathcal{E}_f^{a,k}$

Si l’on note, comme avant, \mathcal{J} l’annulateur (holomorphe) de $u_f^{a,k}$, on aura:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X u_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X) \cong \{v \in \mathcal{D}b_X; \mathcal{J}v = 0\}.$$

Il s'ensuit une injection $i: \mathcal{D}_{\overline{X}}u_f^{a,k} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_Xu_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X)$ qui définit une flèche dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:

$$i: \mathcal{D}_{\overline{X}}u_f^{a,k}[0] \rightarrow C_X(\mathcal{D}_Xu_f^{a,k}).$$

4.1. THÉORÈME. *Cette flèche est un isomorphisme.*

Preuve. Nous ferons cela en trois étapes: (a) Montrons d'abord que l'on 'peut permettre les dénominateurs'. En effet, par les Propositions 2.3 et 3.3, on a:

$$(\mathcal{M}_f^{a,k})^* = (\mathcal{M}_f^{a,k})^* [*Y].$$

Ceci donne les isomorphismes suivants dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X) &\cong \omega_X \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbf{L}} ((\mathcal{M}_f^{a,k})^* \otimes_{O_X}^{\mathbf{L}} \mathcal{D}b_X)[-n] \\ &\cong \omega_X \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbf{L}} ((\mathcal{M}_f^{a,k})^* \otimes_{O_X}^{\mathbf{L}} \mathcal{D}b_X[*Y])[-n] \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X[*Y]). \end{aligned}$$

Par ailleurs, toujours par les Propositions 2.3 et 3.3, on a:

$$\mathcal{M}_f^{a,k} = \mathcal{M}_f^{a,k} [*Y]. \tag{13}$$

Il s'ensuit l'isomorphisme suivant dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X[*Y]) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X[*Y]). \tag{14}$$

Cela découle de l'existence de résolutions libres pour $\mathcal{M}_f^{a,k}$, ce que l'on peut supposer vrai, puisque notre problème initial est local. □

(b) Le deuxième complexe dans (14) est plus aisé à calculer explicitement. On va, pour cela, construire une résolution de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ en tant que $\mathcal{D}_X[*Y]$ -module. D'abord, on sait plus précisément que (13), à savoir:

$$\mathcal{M}_f^{a,k} = \bigoplus_{j=0}^k O_X[*Y]u_f^{a,j} = \sum_{j=0}^k \mathcal{D}_X[*Y]u_f^{a,j}. \tag{15}$$

On a donc une surjection $d_0: \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y] \rightarrow \mathcal{M}_f^{a,k}$ définie par:

$$d_0(P_1, \dots, P_{k+1}) = \sum_{j=0}^k P_{k+1-j}u_f^{a,j}.$$

Or, pour tout $v \in \theta_X$, on a:

$$\left(v + \frac{(1-af)}{f^2}v(f)\right)u_f^{a,j} = \frac{v(f)}{f}u_f^{a,j-1} \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

Par une récurrence sur k et des calculs locaux (récurrence sur les ordres des opérateurs), on peut facilement se convaincre que $\text{Ker}(d_0) = \text{Im}(d_{-1})$ où

$$d_{-1}: \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y] \otimes_{O_X} \theta_X \rightarrow \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]$$

est définie par:

$$d_{-1}((P_1, \dots, P_{k+1}) \otimes v) = (Q_1, \dots, Q_{k+1}) \quad \text{avec}$$

$$Q_j = P_j \left(v + \frac{(1-af)}{f^2} v(f) \right) - P_{j+1} \frac{v(f)}{f}.$$

Ceci suggère de considérer le complexe $(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet): \mathcal{SP}_{-p} = \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y] \otimes_{O_X} \Lambda^p \theta_X$ et:

$$\begin{aligned} & d_{-p}((P_1, \dots, P_{k+1}) \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (Q_{1,i}, \dots, Q_{k+1,i}) \otimes (v_1 \wedge \dots \wedge \check{v}_i \wedge \dots \wedge v_p) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} (P_1, \dots, P_{k+1}) \\ &\otimes ([v_i, v_j] \wedge v_1 \wedge \dots \wedge \check{v}_i \wedge \dots \wedge \check{v}_j \wedge \dots \wedge v_p) \quad \text{avec} \\ & Q_{j,i} = P_j \left(v_i + \frac{(1-af)}{f^2} v_i(f) \right) - P_{j+1} \frac{v_i(f)}{f}. \end{aligned}$$

Il est également aisé de vérifier que $(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet)$ est acyclique en degrés ≤ -1 . En effet, $(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet)$ coïncide localement avec le complexe de Koszul:

$$\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]; A_1, \dots, A_n),$$

associé aux endomorphismes $\mathcal{D}_X[*Y]$ -linéaires de $\mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]$, A_1, \dots, A_n (commutant entre eux deux à deux), définis par:

$$A_i(P_1, \dots, P_{k+1}) = (Q_{1,i}, \dots, Q_{k+1,i}) \quad \text{avec}$$

$$Q_{j,i} = P_j \left(\partial_i + \frac{(1-af)}{f^2} \partial_i(f) \right) - P_{j+1} \frac{\partial_i(f)}{f}.$$

$(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet)$ est donc une résolution $\mathcal{D}_X[*Y]$ -libre (localement) de $\mathcal{M}_f^{a,k}$. \square

(c) Considérons le complexe de $(k+1)$ -uplets de courants sur X (localisés le long de Y) de types $(\bullet, 0)$, noté $(\Omega^\bullet(\mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]); d')$, d' étant la différentielle

holomorphe. Le complexe $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X[*Y])$ est donc représenté dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\bar{X}})$ par:

$$(\mathit{Hom}_{\mathcal{D}_X[*Y]}(SP_\bullet, \mathcal{D}b_X[*Y]), (d_\bullet)^\bullet) = (\Omega^\bullet(\mathcal{D}b_X^{k+1}[*Y]); d_f)$$

où d_f est obtenue à partir de d' par la modification:

$$d_f(\omega \otimes T) = d'(\omega \otimes T) + \frac{df}{f^2} \wedge \omega \otimes ((1 - af)I - fN)T$$

I étant l'identité et N l'endomorphisme de $\mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]$ défini par:

$$N(T_1, \dots, T_{k+1}) = (T_2, \dots, T_{k+1}, 0).$$

Il est facile de voir que le lemme de Dolbeault-Grothendieck d'une part, et le théorème de division dans $\mathcal{D}b_X$ d'autre part, montrent que $(\Omega^\bullet(\mathcal{D}b_X^{k+1}[*Y]); d')$ est une résolution de $O_{\bar{X}}^{k+1}[*\bar{Y}]$.

Notons également I et N les matrices naturelles associées aux morphismes I et N précédents. La matrice $U_f^{a,N} = |f|^{2(aI+N)} \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\bar{f}}\right)$ est $C^\infty(X \setminus Y)$, à croissance lente le long de Y , ainsi que toutes ses dérivées. Le théorème de division [Ma] montre alors que $U_f^{a,N}$ agit sur $\mathcal{D}b_X^{k+1}[*Y]$. En effet, pour tout $T \in \mathcal{D}b_X^{k+1}$, $\bar{f}^q U_f^{a,N}(T)$ est dans $\mathcal{D}b_X^{k+1}$ pour $q \gg 0$ (par finitude locale de l'ordre dans $\mathcal{D}b_X$). Par le théorème de division, il existe $S \in \mathcal{D}b_X^{k+1}$ telle que $\bar{f}^q U_f^{a,N}(T) = \bar{f}^q S$. On définit alors $U_f^{a,N}(T)$ comme la classe de S dans le quotient $\frac{\mathcal{D}b_X^{k+1}}{\mathcal{H}_Y^0(\mathcal{D}b_X^{k+1})} = \mathcal{D}b_X^{k+1}[*Y]$.

Cette action se prolonge en un isomorphisme de complexes de $O_{\bar{X}}$ -modules:

$$U_f^{a,N} = (\Omega^\bullet(\mathcal{D}b_X^{k+1}[*Y]); d') \rightarrow (\Omega^\bullet(\mathcal{D}b_X^{k+1}[*Y]); d_f).$$

On vérifie, en effet, que $(U_f^{a,N})^{-1} = U_{-f}^{-a,-N}$ est $C^\infty(X \setminus Y)$, à croissance lente le long de Y , ainsi que toutes ses dérivées, et de plus: $U_f^{a,N} \circ d' = d_f \circ U_f^{a,N}$.

On déduit de tout cela que $(\Omega^\bullet(\mathcal{D}b_X^{k+1}[*Y]); d_f)$ est une résolution de:

$$\begin{aligned} U_f^{a,N}(O_{\bar{X}}^{k+1}[*\bar{Y}]) &= \bigoplus_{j=0}^k O_{\bar{X}}[*\bar{Y}] |f|^{2a} (\log |f|^2)^j \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\bar{f}}\right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^k O_{\bar{X}}[*\bar{Y}] u_f^{a,j} = \mathcal{M}_{-\bar{f}}^{a,k} = \mathcal{D}_{\bar{X}} u_f^{a,k}, \end{aligned}$$

par conjugaison de (15). Ceci achève la preuve du théorème. □

4.2. COROLLAIRE. *On a un isomorphisme naturel dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:*

$$C_X(\mathcal{E}_f^{a,k}) \cong \mathcal{E}_{-f}^{a,k}[0].$$

Preuve. Ceci découle des isomorphismes suivants (cf. Prop. 3.3 et Théo. 4.1):

$$\rho^* : C_X(\mathcal{E}_f^{a,k}) \rightarrow C_X(\mathcal{M}_f^{a,k})$$

$$i : \mathcal{M}_{-f}^{a,k} \rightarrow C_X(\mathcal{M}_f^{a,k}) \quad \text{et} \quad \bar{\rho} : \mathcal{M}_{-f}^{a,k} \rightarrow \mathcal{E}_{-f}^{a,k}.$$

Je tiens à remercier D. Barlet et C. Sabbah pour des discussions très fructueuses qui ont permis de réaliser ce travail.

Bibliographie

- [B1] Belgrade, R., *Sur un complexe de Dolbeault-Grothendieck à différentielle modifiée*. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, p. 1009–1012, 1994.
- [B2] Belgrade, R., *Un exemple de conjugaison d'un \mathcal{D} -module holonome irrégulier*. Prépublication de l'Institut Elie Cartan, n° 29, 1993.
- [Bj] Björk, J. E., *Analytic \mathcal{D} -modules and applications*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [D] Dolbeault, P., *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes*. C.R. Acad. Sci. Paris, 263, 1953.
- [H] Hironaka, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*. Annals of math. 79, p. 109–326, 1964.
- [I] Revue de l'Institut Elie Cartan, Séminaire de Géométrie Analytique, volume n° 5, 1980.
- [K] Kashiwara, M., *Regular \mathcal{D} -modules and distributions on complex manifolds*. Advanced Studies in Pure Math. 8, p. 199–206, 1986.
- [Ma] Malgrange, B., *Théorème de division des distributions*. Séminaire Laurent Schwartz, 1959–1960, exposés n° 21 à 25.
- [Me] Mebkhout, Z., *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D} -modules cohérents*. Hermann, Collection Travaux en cours, 1989.