COMPOSITIO MATHEMATICA

J. BRÜDERN
E. FOUVRY

Le crible à vecteurs

Compositio Mathematica, tome 102, nº 3 (1996), p. 337-355
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__102_3_337_0>

Compositio Mathematica **102:** 337–355, 1996.

Le crible à vecteurs

J. BRÜDERN[1] and E. FOUVRY[2]
[1]*Mathematisches Institut, 3–5 Bunsenstrasse, D-37073 Göttingen, Germany*
[2]*Mathématique–Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay Cédex, France*

Received 1 March 1994; accepted in final form 3 May 1995

Abstract. By sifting the sequence of vectors $(n, n+2)$ (n integer), by playing with the flexibility of the coefficients of the Rosser–Iwaniec sieve and by inserting upperbounds (due to Deshouillers and Iwaniec) for sums of Kloosterman sums, we improve some results concerning the set of integers n such that n and $n+2$ both have large prime factors only.

Résumé. En criblant la suite des vecteurs de la forme $(n, n+2)$ (n entier), en jouant sur la souplesse des coefficients du crible de Rosser–Iwaniec et en insérant des majorations (dues à Deshouillers et Iwaniec) de sommes de sommes de Kloosterman, on améliore certains résultats concernant l'ensemble des entiers n tels que n et $n+2$ n'aient que des grands facteurs premiers.

Key words: Primes 11A41, Kloosterman sums 11L05, Sieves 11N35

1. Introduction

Un problème de crible, dans sa plus grande généralité, consiste, étant donnée une suite finie d'entiers $\mathcal{A}$ et un ensemble de nombres premiers $\mathcal{P}$, à évaluer, par excès ou par défaut, la quantité $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)$ qui est le cardinal des entiers de $\mathcal{A}$ dont tous les diviseurs premiers appartenant à $\mathcal{P}$, sont supérieurs ou égaux au réel donné z.

On appellera *crible à vecteurs* toute méthode renseignant sur la question suivante:

Etant donnés $\mathfrak{A}$ un ensemble fini de vecteurs $(a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{Z}^{*r}$,

$\mathfrak{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_r$, le produit de r ensembles de nombres premiers $\mathcal{P}_i$,
$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_r)$, un r-uplet de nombres réels $\geqslant 2$,

comment majorer ou minorer la quantité

$$S(\mathfrak{A}; \mathfrak{P}, \mathbf{z}) = |\{(a_1, \ldots, a_r) \in \mathfrak{A}; p_i | a_i \text{ et } p_i \in \mathcal{P}_i \Rightarrow p_i \geqslant z_i \, (i = 1, \ldots, r)\}|?$$

Les hypothèses sur $\mathfrak{A}$ concernent la quantité $|\mathfrak{A}_{\mathbf{d}}|$ qui, par définition, est le cardinal de l'ensemble

$$\{(a_1, \ldots, a_r) \in \mathfrak{A};\ d_i | a_i \, (i = 1, \ldots, r)\},$$

(avec $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{N}^{*r}$) et s'expriment sous la forme

$$|\mathfrak{A}_{\mathbf{d}}| = \frac{\omega(\mathbf{d})}{d_1 \ldots d_r} X + r(\mathfrak{A}, \mathbf{d}), \tag{1.1}$$

où X est un paramètre indépendant de $\mathbf{d}$ et $r(\mathfrak{A}, \mathbf{d})$ un terme d'erreur dont on espère une contribution négligeable dans les formules finales. Enfin, on demande à la fonction ω de vérifier la propriété suivante de multiplicativité

$$\omega(1, \ldots, 1) = 1,$$

et

$$\omega(d_1, \ldots, d_r) = \prod_p \prod_{p^{\nu_i} \| d_i} \omega(p^{\nu_1}, \ldots, p^{\nu_r}),$$

pour tout $\mathbf{d}$ tel que chaque d_i soit sans facteur carré.

Il est toujours possible de passer d'un crible à vecteurs à un crible pour entiers en considérant l'ensemble d'entiers, comportant d'éventuelles répétitions

$$\mathcal{B} = \{a_1 \ldots a_r;\ (a_1, \ldots, a_r) \in \mathfrak{A}\}.$$

Par des formules d'inclusion-exclusion, (1.1) mène à une formule d'approximation pour $|\mathcal{B}_d|$, en fonction de X, de ω et des $r(\mathfrak{A}, \mathbf{d})$ où les $\mathbf{d}$ sont tels que le produit $d_1 \ldots d_r$ ait les mêmes facteurs premiers que d ([B–F] formule suivant Lemma 8, par exemple). Il reste alors à utiliser l'encadrement trivial

$$S\left(\mathcal{B};\ \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathcal{P}_i,\ \max_{1 \leqslant i \leqslant r} z_i\right) \leqslant S(\mathfrak{A}; \mathfrak{P}, \mathbf{z}) \leqslant S\left(\mathcal{B};\ \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathcal{P}_i,\ \min_{1 \leqslant i \leqslant r} z_i\right). \tag{1.2}$$

Remarquons que (1.2) est catastrophique lorsque les ensembles $\mathcal{P}_i$ sont vraiment différents, la réunion ou l'intersection de ces ensembles est alors beaucoup plus grande ou beaucoup plus petite que les $\mathcal{P}_i$. De même, lorsque les ordres de grandeur des z_i sont différents, (1.2) est de piètre qualité.

Toutefois, même si les z_i sont égaux, si les $\mathcal{P}_i$ sont les mêmes et si $\mathfrak{A}$ est invariant par permutation des indices, il est parfois rentable de travailler avec un crible à vecteurs. C'est le cas de [B–F] où est abordé le problème de la représentation d'un entier $N \equiv 4 \pmod{24}$, sous la forme

$$N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2, \tag{1.3}$$

avec tous les facteurs premiers des a_i plus grands que N^γavec $\gamma > 0$. La constante γ voit sa valeur passer de 1/127.01 à 1/68.86 par l'emploi d'un crible à vecteurs plutôt qu'un crible de dimension 4 appliqué aux $a_1 \ldots a_4$ vérifiant (1.3). Une des raisons est que, dans l'abord de cette question par la méthode du cercle inaugurée par Kloosterman, on est essentiellement conduit à une majoration anachronique de $|r(\mathfrak{A}, \mathbf{d})|$ par une fonction croissante de $\max d_i$. Une autre raison est la valeur de β_4, *sieving limit* en dimension 4.

L'objet de ce travail est de présenter une autre situation où le crible à vecteurs présente un intérêt manifeste. Nous avons préféré une situation concrète au développement d'une théorie, qui aurait, *ipso facto*, souffert d'une trop grande généralité.

Nous montrerons le

THÉORÈME. *Soit* $0 \leqslant \kappa < 1$, *q un entier vérifiant* $1 \leqslant q \leqslant x^{\kappa}$ *et* $\mathcal{P}$ *un ensemble quelconque de nombres premiers. Il existe alors une fonction* $\theta(\kappa)$ *tendant vers 0,2406 pour* κ *tendant vers 0 telle que, uniformément sur* $\mathcal{P}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta(\kappa)$, *on ait la minoration*

$$|\{n \leqslant x;\ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q),\ p|n(n-2) \text{ et } p \in \mathcal{P} \Longrightarrow p \geqslant x^{\theta}\}| \gg \frac{x}{q} \prod_{\substack{2<p<x^{\theta} \\ p\in\mathcal{P},\ p\nmid q}} \Big(1 - \frac{2}{p}\Big).$$

Montrons d'abord l'intérêt de ce théorème pour $q = 1$. Un abord direct de cette question est d'appliquer les formules de crible en dimension 2 à l'ensemble $\{n(n-2); n \leqslant x\}$, le terme d'erreur étant alors trivialement contrôlé jusqu'aux modules $\leqslant x^{1-\varepsilon}$. En se reportant au travail de Diamond, Halberstam et Richert ([D–H–R]), on obtient l'exactitude du Théorème mais pour toute valeur inférieure de θ à $\frac{1}{4{,}2664} = 0{,}2343\ldots$.

Il est bien connu qu'il est plus intéressant d'aborder par le crible linéaire toute question se rapportant à la classique conjecture des nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire de cribler la suite $\{p + 2; p \leqslant x\}$ au lieu de $\{n(n-2); n \leqslant x\}$. Maintenant, l'intrusion de la condition $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, apparemment interdit cet abord dès que q vérifie $\frac{1}{2}x^{\kappa} < q < x^{\kappa}$ avec $\kappa > 0$ même très petit. En effet, dans le cas où $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers, on serait amené à cribler l'ensemble $\{n - 2; n \leqslant x, n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q), p|n \Rightarrow p \geqslant x^{\theta}\}$, mais on ne connaît pas de façon précise le cardinal de cet ensemble mais seulement des minoration et majoration obtenues par le crible. Ceci est à rapprocher de notre connaissance de la répartition des suites liées à la suite des nombres premiers, connaissance qui n'est actuellement satisfaisante que pour $q < (\log x)^{A}$ (théorème de Siegel–Walfisz).

En conclusion, par des arguments de continuité, nous voyons la supériorité de ce Théorème sur tous les résultats précédemment connus.

Un autre intérêt de ce Théorème est de fournir un exemple fort simple de kloostermanie, c'est à dire d'utilisation de majorations en moyenne de sommes de Kloosterman (voir Lemme 2), puisque, par sa structure même, le crible à vecteurs conduit à des formes multilinéaires bien adaptées à cet outil très puissant de la théorie analytique des nombres.

Rappelons que si $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers, et si $q = 1$, les résultats sont de bien meilleure qualité. Ainsi en criblant $\{p + 2; p \leqslant x\}$ et en appliquant le théorème de Bombieri–Vinogradov, on a directement le Théorème pour tout $\theta < \frac{1}{4}$ ou mieux encore pour tout $\theta < \frac{2}{7}$ en faisant appel au théorème de Bombieri, Friedlander et Iwaniec sur la répartition en moyenne des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. On peut même porter cette valeur à

$\theta < 0,3$, en criblant l'ensemble $\{p_1p_2+2; p_1 \sim x^{2/5},\ p_2 \sim x^{3/5}\}$ et en appliquant un résultat sur la répartition de la convolution de deux suites ([F–G] Lemma 6, par exemple).

Il est clair que la technique ici développée, a des applications au problème dual, celui de la majoration du cardinal des nombres premiers jumeaux.

La plus grande partie de ce travail a été effectuée, pendant que les auteurs bénéficiaient d'un séjour au Mathematisches Forschungsinstitut d'Oberwolfach, financé par le 'Förderpreis Algebra–Zahlentheorie 1993'.

2. Traitement des termes d'erreur

Puisque nous utiliserons la théorie des sommes d'exponentielles, il est bon de partir d'un problème lisse.

Soit f_1 une fonction positive ou nulle, à support compact $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$, et de classe C^∞. On pose alors $f(t) = f_x(t) = f_1(\frac{t}{x})$ et, pour aborder tout problème lié à la conjecture des nombres premiers jumeaux, il faut, dans un premier temps s'intéresser pour $(d_1d_2,q)=1$ et d_1 et d_2 sans facteur carré, à la quantité

$$A^{(q)}_{d_1,d_2}(f) = \sum_{\substack{n_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)\\ d_1\mid n_1}} \sum_{\substack{n_2=n_1-2\\ d_2\mid n_2}} f(n_1),$$

pour l'écrire sous la forme (1.1).

Si $(d_1,d_2)\neq 1$ ou 2, on a $A^{(q)}_{d_1,d_2}(f)=0$.

Dans le cas où $(d_1,d_2)=1$, on a les égalités

$$A^{(q)}_{d_1,d_2}(f) = \sum_{\substack{m\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)\\ m\equiv 0(\mathrm{mod}\ d_1)\\ m\equiv 2(\mathrm{mod}\ d_2)}} f(m) = \sum_{m} f(m),$$

où la somme est faite sur les $m \equiv 2d_1\overline{d_1}^{(d_2)}q\overline{q}^{(d_2)} + d_1d_2\overline{d_1d_2}^{(q)} (\mathrm{mod}\ qd_1d_2)$ où $\overline{d_1}^{(d_2)}$ désigne l'inverse de $d_1(\mathrm{mod}\ d_2)$. Soit $H \geqslant \frac{qd_1d_2}{x}(d_1d_2x)^\varepsilon$, la formule sommatoire de Poisson et la lissité de la fonction f entraînent l'égalité

$$A^{(q)}_{d_1,d_2}(f) = \frac{X}{d_1d_2} + \frac{1}{qd_1d_2}\sum_{1\leqslant|h|\leqslant H}\hat{f}\left(\frac{h}{qd_1d_2}\right)e\left(-\frac{2h\overline{d}_1\overline{q}}{d_2} - \frac{h\overline{d}_1\overline{d}_2}{q}\right)$$
$$+\,O_{\varepsilon,C}(x^{-C}) \qquad (2.1)$$

valable pour tout C et tout $\varepsilon>0$. Le symbole $e(.)$ désigne le caractère additif de période 1, $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f,

$$X = x\hat{f}_1(0)q^{-1},$$

et on convient que, dans toute fraction $\frac{\overline{r}}{s}$, $\overline{r}$ est l'inverse de $r(\bmod s)$.

Dans le cas où $(d_1, d_2) = 2$ et 4 ne divise pas d_2, il suffit de diviser par deux pour écrire directement

$$A^{(q)}_{d_1,d_2}(f) = \frac{2X}{d_1d_2} + \frac{2}{qd_1d_2}\sum_{1\leqslant|h|\leqslant H}\hat{f}\left(\frac{2h}{qd_1d_2}\right)e\left(\frac{-2h\overline{d}_1\overline{q}}{(d_2/2)} - \frac{2h\overline{d}_1\overline{d}_2}{q}\right)$$
$$+ O_{\varepsilon,C}(x^{-C}), \tag{2.2}$$

et une formule analogue lorsque $(d_1, d_2) = 2$ et 4 ne divise pas d_1.

Il est donc naturel de poser, toujours sous la condition $(d_1d_2, q) = 1$,

$$\begin{cases} \omega(d_1, d_2) = 1 \text{ si } (d_1, d_2) = 1, \\ \omega(d_1, d_2) = 2 \text{ si } (d_1, d_2) = 2, \\ \omega(d_1, d_2) = 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Par conformité à (1.1), on voit que les formules (2.1), (2.2) et (2.3) donnent naturellement la définition de $r(A^{(q)}(f), (d_1, d_2))$.

2.1. Mise en place du crible

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux ensembles de nombres premiers, z_1 et z_2 deux réels supérieurs à 2. Nous nous intéressons à la minoration de la quantité

$$S(A^{(q)}(f); (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2), (z_1, z_2)) = \sum_{n_1}\sum_{n_2} f(n_1), \tag{2.4}$$

la somme étant faite sur les n_1 et n_2 vérifiant

$$n_1 \equiv 1(\bmod q), n_1 - n_2 = 2;\ p_i|n_i \text{ et } p_i \in \mathcal{P}_i \Rightarrow p_i \geqslant z_i\ (i = 1 \text{ ou } 2).$$

Soient $\Lambda_i^{\pm}$ $(i = 1$ ou $2)$ quatre fonctions arithmétiques réelles, vérifiant l'encadrement

$$\Lambda_i^- \leqslant \mu * \mathbf{1} \leqslant \Lambda_i^+\ (i = 1 \text{ ou } 2). \tag{2.5}$$

La relation précédente, où μ est la fonction de Möbius et $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1, indique que les fonctions $\Lambda_i^{\pm}$ peuvent servir à construire un crible pour entiers, crible qui n'est pas précisé pour l'instant. Si (n_1, n_2) est un couple d'entiers strictement positifs, on déduit de (2.5) la minoration

$$\begin{aligned}(\mu * \mathbf{1})(n_1)(\mu * \mathbf{1})(n_2) \geqslant{} & \Lambda_1^+(n_1)\Lambda_2^-(n_2) + \Lambda_1^-(n_1)\Lambda_2^+(n_2) \\ & -\Lambda_1^+(n_1)\Lambda_2^+(n_2).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour continuer cette étude, nous envisagerons deux situations suivant la nature des coefficients $\Lambda^{\pm}$ qui, toutefois seront toujours de la forme $\lambda * \mathbf{1}$. On dira que la fonction arithmétique f est *de niveau* D, si $f(d) = 0$ pour $d > D$ et on note $\|f\|_\infty = \sup\{|f(d)|; d \geqslant 1\}$.

On dira aussi qu'une fonction arithmétique g, de niveau D est *bien factorisable*, si, pour toute écriture $D = D'D''\,(D', D'' \geqslant 1)$, il existe des fonctions g' et g'' de niveau D' et D'' vérifiant $\|g'\|_\infty$, $\|g''\|_\infty \leqslant 1$ et $g = g' * g''$.

2.2. Première majoration du terme d'erreur

Bien que le résultat de ce paragraphe ne soit pas assez profond pour démontrer le Théorème, il sert d'agréable introduction à la Proposition 2, qui, elle, est cruciale. Dans un premier temps, nous montrerons la

PROPOSITION 1. *Soient λ_1 et λ_2 de niveau D_1 et D_2, avec $\|\lambda_1\|_\infty$, $\|\lambda_2\|_\infty \leqslant 1$. Il existe alors une constante absolue C_0 telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait la relation*

$$\sum_{d_1}\sum_{d_2} \lambda_1(d_1)\lambda_2(d_2) r(A^{(q)}(f), (d_1, d_2)) = O_\varepsilon(x^{1-\varepsilon}q^{-1}),$$

uniformément sous les conditions

$$q^{C_0}D_1 \leqslant x^{1-10\varepsilon}, \qquad q^{C_0}D_1D_2^3 \leqslant x^{2-10\varepsilon}.$$

La constante C_0 quoique facile à calculer n'est guère intéressante, puisque nous ne regardons le Théorème que pour $\kappa \to 0$. Dans le cas où $q = 1$, la Proposition 1 permet de dépasser la valeur triviale $D_1D_2 = x$, lorsque D_1 est plus grand que D_2 mais ne donne rien dans le cas symétrique $D_1 = D_2$, ce qui est dû à l'emploi du Lemme 1 ci-dessous. Nous faisons la convention que, dans les calculs qui suivront la valeur de C_0 peut varier d'une ligne à l'autre.

Démonstration. Nous nous restreignons au cas où $(d_1, d_2) = 1$. D'après (2.1), en prenant $C = 1$, en découpant les intervalles de variation $[1, D_1]$ et $[1, D_2]$ en $O((\log x)^2)$ sous-intervalles de la forme $[\Delta_1, 2\Delta_1]$ et $[\Delta_2, 2\Delta_2]$, la démonstration de la Proposition 1 se ramène à montrer l'inégalité

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(\Delta_1, \Delta_2)\\ &\quad = \sum_{\substack{d_1\sim\Delta_1 \\ (q,d_1d_2)=(d_1,d_2)=1}} \sum_{d_2\sim\Delta_2} \sum_{1\leqslant|h|\leqslant H} \frac{\lambda_1(d_1)\lambda_2(d_2)}{d_1d_2}\hat{f}\left(\frac{h}{qd_1d_2}\right) e\left(-\frac{2h\overline{d_1q}}{d_2} - \frac{h\overline{d_1d_2}}{q}\right)\\ &\quad \ll x^{1-\varepsilon}, \qquad (2.7)\end{aligned}$$

pour $H = (q\Delta_1\Delta_2)x^{-1+\varepsilon}$ et tout $\Delta_1 \leqslant D_1$ et $\Delta_2 \leqslant D_2$.

Par retour à la définition de $\hat{f}$, on voit que pour un certain t de $[\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$, on a l'inégalité

$$\mathcal{R}(\Delta_1, \Delta_2) \ll \frac{x}{\Delta_1} \sum_{\substack{d_1 \sim \Delta_1 \\ (d_1,q)=1}} \left| \sum_{\substack{d_2 \sim \Delta_2 \\ (d_2,qd_1)=1}} \frac{\lambda_2(d_2)}{d_2} \times \sum_{1 \leqslant |h| \leqslant H} e\left(-\frac{2h\overline{d_1 q}}{d_2} - \frac{h\overline{d_1 d_2}}{q}\right) e\left(\frac{ht}{qd_1d_2}\right) \right| \tag{2.8}$$

On éclate la somme à la droite de (2.8) en $O(q^3)$ sommes où les classes de h, d_1 et $d_2 (\bmod q)$ sont fixées. Dans chacune de ces sommes le terme $e(\frac{h\overline{d_1 d_2}}{q})$ est alors constant.

L'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée à chacune de ces sommes conduit à

$$\mathcal{R}(\Delta_1, \Delta_2) \ll \frac{xq^3}{\Delta_1^{1/2}\Delta_2} \left\{ \sum_{\substack{d_2, d_2' \sim \Delta_2 \\ (d_2 d_2', q)=1}} \sum_{1 \leqslant |h|, |h'| \leqslant H} \left| \sum_{\substack{d_1 \sim \Delta_1 \\ (d_1, d_2 d_2')=1}} \times e\left(\left(\frac{h}{d_2} - \frac{h'}{d_2'}\right) \frac{t}{qd_1}\right) e\left(-\frac{2(hd_2' - h'd_2)\overline{d_1 q}}{d_2 d_2'}\right) \right| \right\}^{1/2}. \tag{2.9}$$

Signalons que, avec davantage de soin, la puissance de q dans (2.9) peut être diminuée, ceci est sans importance pour la suite (voir la discussion ci-dessus concernant C_0). Les termes diagonaux correspondent à $hd_2' - h'd_2 = 0$, leur nombre est $O(H\Delta_2 x^\varepsilon)$; pour les autres termes, nous faisons appel à la classique majoration des sommes courtes de Kloosterman–Ramanujan, conséquence des travaux de Weil (voir par exemple [Ho] p. 36). On a le

LEMME 1. *Soit $l \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ et $0 \leqslant a < b \leqslant r$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'égalité*

$$\sum_{\substack{(s,r)=1 \\ a \leqslant s \leqslant b}} e\left(l\frac{\overline{s}}{r}\right) = O_\varepsilon((l,r)^{1/2} r^{1/2+\varepsilon}).$$

Par intégration par parties on élimine le premier terme $e(.)$ de (2.9). Puis on découpe l'intervalle de sommation sur d_1 en $O(\Delta_1\Delta_2^{-2})$ segments de longueur

d_2d_2' et d'un éventuel intervalle incomplet. Sur chacun des intervalles complets, la somme sur d_1 est une somme de Ramanujan, dont on majore la valeur absolue par $O((hd_2' - h'd_2, d_2d_2')x^\varepsilon)$. Pour l'intervalle incomplet, on utilise le Lemme 1, d'où la majoration

$$\mathcal{R}(\Delta_1,\Delta_2) \ll \frac{q^3x^{1+\varepsilon}}{\Delta_1^{1/2}\Delta_2}\left\{H\Delta_1\Delta_2 + \sum_h\sum_{h'}\sum_{d_2}\sum_{d_2'}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2^2}(hd_2' - h'd_2, d_2d_2') + \Delta_2(hd_2' - h'd_2, d_2d_2')^{1/2}\right)\right\}^{1/2}.$$

Pour sommer les plus grands diviseurs communs, on pose $d_2 = \delta\delta_2$ et $d_2' = \delta\delta_2'$ avec $(\delta_2, \delta_2') = 1$, on a alors les relations

$$\sum_h\sum_{h'}\sum_{d_2}\sum_{d_2'}(hd_2' - h'd_2, d_2d_2')$$

$$\leqslant \sum_h\sum_{h'}\sum_{\delta_2}\sum_{\delta_2'}(h,\delta_2)(h',\delta_2') \sum_{\delta\ll\min(\Delta_2/\delta_2,\ \Delta_2/\delta_2')} \delta(h\delta_2' - h'\delta_2, \delta) \ll H^2\Delta_2^2x^\varepsilon,$$

d'où la majoration

$$\mathcal{R}(\Delta_1,\Delta_2) \ll \frac{q^3x^{1+\varepsilon}}{\Delta_1^{1/2}\Delta_2}\left\{H\Delta_1\Delta_2 + H^2\Delta_1 + H^2\Delta_2^3\right\}^{1/2},$$

ce qui donne, en remplaçant H par sa valeur

$$\mathcal{R}(\Delta_1,\Delta_2) \ll q^{C_0}(x^{1/2}\Delta_1^{1/2} + \Delta_1 + \Delta_1^{1/2}\Delta_2^{3/2})x^\varepsilon.$$

Le cas le pire est évidemment $\Delta_1 = D_1$ et $\Delta_2 = D_2$, la démonstration de (2.7) et de la Proposition 1 sont donc complètes.

2.3. Deuxième majoration du terme d'erreur

Il est remarquable de constater que l'étude de la quantité $\mathcal{R}(\Delta_1,\Delta_2)$ se prête très facilement à l'emploi des majorations en moyenne des sommes de Kloosterman (voir Lemme 2), pourvu que l'un des λ_i soit bien factorisable. On montre la

PROPOSITION 2. *Soient λ_1 de niveau D_1 vérifiant $\|\lambda_1\|_\infty \leqslant 1$ et λ_2 bien factorisable de niveau D_2. Il existe alors deux constantes absolues c et C_0, telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a la relation*

$$\sum_{d_1}\sum_{d_2}\lambda_1(d_1)\lambda_2(d_2)r(A^{(q)}(f),(d_1,d_2)) = O(x^{1-\varepsilon}q^{-1}),$$

dès qu'on a les relations

$$q^{C_0}D_1 \leqslant x^{1-c\varepsilon}, \qquad q^{C_0}D_1D_2^2 \leqslant x^{2-c\varepsilon},$$
$$q^{C_0}D_1^2D_2^3 \leqslant x^{3-c\varepsilon}, \qquad q^{C_0}D_1^4D_2^4 \leqslant x^{5-c\varepsilon}.$$

Démonstration. On part de l'inégalité (2.8) , on décompose λ_2 en $\lambda_2 = \lambda_2' * \lambda_2''$ avec λ_2', λ_2'' de niveaux D_2', D_2'' avec $D_2 = D_2'D_2''$, on fixe les congruences des variables h, d_1, d_2' et d_2'' modulo q pour écrire finalement

$$\mathcal{R}(\Delta_1, \Delta_2) \ll \left(\frac{q^4 x}{\Delta_1}\log^2 x\right) \sup \frac{1}{\Delta_2'} R^*_{(q_0,q_1)}(\Delta_1, \Delta_2', \Delta_2''), \tag{2.10}$$

où le supremum est pris sur les $(\Delta_2', \Delta_2'', q_0, q_1)$ vérifiant les conditions

$$\Delta_2'\Delta_2'' = \Delta_2; \qquad 1 \leqslant \Delta_2' \leqslant D_2';$$
$$1 \leqslant \Delta_2'' \leqslant D_2'', \quad (q_0, q) = 1; \qquad 1 \leqslant q_1 \leqslant q,$$

et où on a posé

$$R^*_{(q_0,q_1)}(\Delta_1, \Delta_2', \Delta_2'') = \sum_{d_1} f_{\Delta_1}(d_1) \sum_{(d_2', d_1 q)=1} f_{\Delta_2'}(d_2')$$
$$\times \left| \sum_{d_2''} \frac{\lambda_2''(d_2'')}{d_2''} \sum_{\substack{1 \leqslant |h| \leqslant H \\ h \equiv q_1 (\mathrm{mod}\ q)}} e\left(-\frac{2h\overline{d_1 q}}{d_2'd_2''}\right) e\left(\frac{ht}{q d_1 d_2' d_2''}\right) \right|.$$

où la somme est faite sur les d_2'' vérifiant

$$(d_2'', d_1) = 1, d_2'' \equiv q_0 (\mathrm{mod}\ q), d_2'' \sim \Delta_2''.$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne l'inégalité

$$R^{*2}_{(q_0,q_1)}(\Delta_1, \Delta_2', \Delta_2'') \ll \Delta_1\Delta_2' \sum_{d_1} \sum_{(d_2', d_1 q)=1} f_{\Delta_1}(d_1) f_{\Delta_2'}(d_2') \sum_{l} \sum_{(s, d_1 q)=1}$$
$$\times\, b_{l,s} e\left(-\frac{l\overline{d_1 q}}{d_2' s}\right) e\left(\frac{lt}{2q d_1 d_2' s}\right), \tag{2.11}$$

avec

$$b_{l,s} = \sum_{\substack{s = d_2'' d_2''' \\ l = 2(h d_2''' - h' d_2'')}} \lambda_2''(d_2'')\lambda_2''(d_2''')(d_2''d_2''')^{-1}.$$

Dans cette dernière expression, les variables de sommation vérifient en outre les conditions $d_2'', d_2''' \sim \Delta_2''$, $1 \leqslant |h|$, $|h'| \leqslant H, d_2'' \equiv d_2''' \equiv q_0 (\mathrm{mod}\ q)$ et h, $h' \equiv q_1 (\mathrm{mod}\ q)$. Puisque on a $|l| \leqslant H\Delta_2'' \ll q\Delta_1\Delta_2'\Delta_2''^2 x^{-1+\varepsilon}$, on voit que la fonction

$$g(d_1, d_2', l, q, s) = f_{\Delta_1}(d_1) f_{\Delta_2'}(d_2') e\left(\frac{lt}{2qd_1d_2's}\right),$$

est *presque lisse*, c'est-à-dire, que pour tout $m, n \geqslant 0$, on a

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial d_1^m \partial d_2'^n} g(d_1, d_2', l, q, s) \ll_{m,n} d_1^{-m} d_2'^{-n} x^{(m+n)\varepsilon},$$

on peut appliquer une légère généralisation du Théorème 12 de [D–I], où est présenté le cas d'une fonction lisse. On a le

LEMME 2. *Soient $C, D, N, R, S \geqslant 1$, $\eta > 0$, $b_{n,r,s}$ une suite de nombres complexes, $g(c, d, n, r, s)$ une fonction à support dans $[C, 2C] \times [D, 2D] \times]0, \infty[^3$, vérifiant pour tout entier α et $\beta \geqslant 0$ l'inégalité*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial c^\alpha \partial d^\beta} g(c, d, n, r, s) \ll_{\alpha,\beta} (CDNRS)^{(\alpha+\beta)\eta} c^{-\alpha} d^{-\beta}.$$

Soit

$$\mathcal{K}(C, D, N, R, S) = \sum_{r \sim R} \sum_{s \sim S} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} b_{n,r,s} \sum_{c} \sum_{\substack{d \\ (rd,sc)=1}} g(c, d, n, r, s) e\left(n \frac{\overline{rd}}{sc}\right).$$

Il existe alors une constante absolue c_0, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait la relation

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(C, D, N, R, S) \ll &(CDNRS)^{\varepsilon + c_0\eta} \\ &\times \{CS(RS+N)(C+DR) + C^2DS((RS+N)R)^{1/2} \\ &+ D^2NRS^{-1}\}^{1/2} \left\{\sum_r \sum_s \sum_n |b_{n,r,s}|^2\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Il est clair que cette majoration n'a d'intérêt que pour η très petit. La contribution à la partie droite de (2.11) des termes diagonaux ($l = 0$) est trivialement

$$\ll \Delta_1\Delta_2'(\Delta_1\Delta_2'.\Delta_2''^{-2}.H.\Delta_2'')x^\varepsilon \ll q\Delta_1^3\Delta_2'^3 x^{-1+2\varepsilon}. \tag{2.12}$$

Pour les termes non diagonaux, nous appliquons le Lemme 2 avec

$$C = \Delta_2',\ D = \Delta_1,\ N = H\Delta_2'',\ R = q,\ S = \Delta_2''^2.$$

Pour évaluer la quantité $\sum_l \sum_s |b_{l,s}|^2$, on écrit la suite d'inégalités

$$\sum_l \sum_s |b_{l,s}|^2 \ll \Delta_2''^{-4} \sum_l \sum_s \left(\sum_{d_2''d_2'''=s} \sum_{2(hd_2'''-h'd_2'')=l} 1 \right)^2$$

$$\ll \Delta_2''^{-4} \sum_l \sum_s \left(\sum_{d_2''d_2'''=s} 1 \right) \left(\sum_{d_2''d_2'''=s} \left(\sum_{2(hd_2'''-h'd_2'')=l} 1 \right)^2 \right)$$

$$\ll x^\varepsilon \Delta_2''^{-4} \sum_{d_2''} \sum_{d_2'''} \sum_l \left(\sum_{2(hd_2'''-h'd_2'')=l} 1 \right)^2 .$$

Enfin, la quadruple somme est égale au nombre de solutions de l'équation

$$(h - h_1)d_2''' = (h' - h_1')d_2'',$$

ce nombre étant $O(H^2\Delta_2''^2 + H^3\Delta_2''x^\varepsilon)$. On obtient finalement la majoration

$$\sum_l \sum_s |b_{l,s}|^2 \ll H^2\Delta_2''^{-2}(1 + H\Delta_2''^{-1})x^\varepsilon. \tag{2.13}$$

On regroupe maintenant (2.11), (2.12) et (2.13) pour écrire l'inégalité

$$\begin{aligned} R^{*2}_{(q_0,q_1)}(\Delta_1, \Delta_2', \Delta_2'') &\ll q\Delta_1^3\Delta_2'^3 x^{-1+2\varepsilon} \\ &+\Delta_1\Delta_2' \Big(\Delta_2'\Delta_2''^2(q\Delta_2''^2 + H\Delta_2'')(\Delta_2' + \Delta_1 q) \\ &+\Delta_2'^2.\Delta_1.\Delta_2''^2((q\Delta_2''^2 + H\Delta_2'')q)^{1/2} + \Delta_1^2.H\Delta_2''.q.\Delta_2''^{-2}\Big)^{1/2} \\ &\times \left(H^2\Delta_2''^{-2}(1 + H\Delta_2''^{-1})\right)^{1/2} x^{2c\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Puisqu'on désire montrer pour tout $\Delta_1 \leqslant D_1$ et $\Delta_2 \leqslant D_2$, l'inégalité $\mathcal{R}(\Delta_1, \Delta_2) \ll x^{1-\varepsilon}$, le premier terme à droite de (2.14), amène, grâce à (2.10), la condition suffisante

$$q^{C_0}\left(\frac{x}{\Delta_1}\log^2 x\right) \sup_{\Delta_2' \leqslant D_2'} \frac{1}{\Delta_2'}(\Delta_1^3\Delta_2'^3 x^{-1+2\varepsilon})^{1/2} \ll x^{1-\varepsilon},$$

condition toujours vérifiée, dès qu'on a l'inégalité

$$q^{C_0}D_1D_2' \leqslant x^{1-10\varepsilon}. \tag{2.15}$$

Sous la condition (2.15), on a l'inégalité $q^{C_0}H\Delta_2''^{-1} \leqslant 1$, qui simplifie (2.14) en

$$R^{*2}_{(q_0,q_1)}(\Delta_1,\Delta_2',\Delta_2'')$$
$$\ll \{\Delta_1^3\Delta_2'^3x^{-1+2\varepsilon} + \Delta_1^2\Delta_2'^2x^{-1+2c\varepsilon}(\Delta_2'\Delta_2''^2 + \Delta_1^{1/2}\Delta_2'^{1/2}\Delta_2''^2$$
$$+\Delta_1^{1/2}\Delta_2'\Delta_2''^{3/2} + \Delta_1)\}q^{C_0}.$$

En conclusion, grâce à (2.10), on a l'inégalité recherchée, dès que, en plus de (2.15), on a les conditions

$$q^{C_0}\max(D_2D_2'', D_1^{1/2}D_2^{1/2}D_2''^{3/2}, D_1^{1/2}D_2D_2''^{1/2}, D_1) \leqslant x^{1-20c\varepsilon}.$$

On fixe $D_2' = q^{-C_0}D_1^{-1}x^{1-10\varepsilon}$ d'où $D_2'' = q^{C_0}D_1D_2x^{-1+10\varepsilon}$ et la démonstration de la Proposition 2 est complète. Signalons que dans le cas $D_2'' < 1$, c'est-à-dire $q^{C_0}D_1D_2 < x^{1-10\varepsilon}$, cette Proposition est triviale.

3. Comment cribler la somme $A^{(q)}(f)$

3.1. Le lemme fondamental

Dans un premier temps, nous criblerons légèrement la somme $A^{(q)}(f)$, par le lemme fondamental du crible en dimension 2. Il est possible d'utiliser ici le crible vectoriel ([B–F] paragraphe 3.2), cette technique est plus longue, mais présente l'avantage de produire un terme d'erreur bilinéaire, autrement dit le coefficient $\psi^{\pm}_{d_1,d_2}$ du Lemme 3 est remplacé par $\psi^{\pm}_{d_1}\psi^{\pm}_{d_2}$, mais, puisque les intervalles de variation de d_1 et d_2 sont très petits, ceci n'a aucune importance (voir Propositions 1 et 2).

Notons qu'il revient au même de supposer que $\mathcal{P}$ ne contient aucun diviseur premier de q. Dans tout ce paragraphe, on désignera par ε un réel positif très petit, D et Δ sont supérieurs à 2 (ce seront même des puissances positives de x), $u = D^{\varepsilon^2}, P(u) = \prod_{p<u, p\in\mathcal{P}} p$. Pour simplifier, nous écrivons $S(A^{(q)}(f),\mathcal{P},u)$ pour $S(A^{(q)}(f),\mathcal{P}\times\mathcal{P},(u,u))$.

Soient l_1 et l_2 deux entiers, avec tous leurs diviseurs premiers supérieurs à u, vérifiant $(l_1l_2,q) = 1$ et d un entier sans facteur carré. Le passage du crible vectoriel au crible de dimension 2 se fait par les deux égalités

$$S(A^{(q)}_{l_1,l_2}(f),\mathcal{P},u)$$
$$= \sum_{\substack{m_1 \\ l_1m_1\equiv 1 (\bmod q)}} \sum_{\substack{m_2 \\ l_1m_1-l_2m_2=2}} f(l_1m_1)(\mu * \mathbf{1})\left((m_1m_2,P(u))\right) \tag{3.1}$$

et

$$\sum_{\substack{m_1\\ l_1m_1\equiv 1(mod\ q)}} \sum_{\substack{m_2\\ l_1m_1-l_2m_2=2\ d|m_1m_2}} f(l_1m_1)$$

$$= \mu(d) \sum_{\substack{d_1\\ p|d_1d_2\Leftrightarrow p|d}} \sum_{d_2} \mu(d_1)\mu(d_2)A^{(q)}_{l_1d_1,l_2d_2}(f)$$

$$= \frac{\omega(l_1,l_2)}{l_1l_2}X.\mu(d) \sum_{\substack{d_1\\ p|d_1d_2\Leftrightarrow p|d}} \sum_{d_2} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1d_2}\omega(d_1,d_2)$$

$$+\mu(d) \sum_{\substack{d_1\\ p|d_1d_2\Leftrightarrow p|d}} \sum_{d_2} \mu(d_1)\mu(d_2)r(A^{(q)}(f),(d_1l_1,d_2l_2)), \tag{3.2}$$

par le Lemme 8 de [B–F] et les formules (2.1) et (2.2).

Par la définition de $\omega(d_1,d_2)$, on voit que le terme principal de l'égalité précédente s'écrit aussi

$$\frac{\Omega(d)}{d}\,\frac{\omega(l_1,l_2)}{l_1l_2}\,X,$$

avec

$$\Omega(d) = \prod_{p|d,p>2,p\in\mathcal{P}} 2. \tag{3.3}$$

Soit $\{\varphi_d^{\pm}\}$ les coefficients du crible de Rosser–Iwaniec, relatifs au paramètre D^{ϵ}, à l'ensemble $\mathcal{P}$ et à la dimension 2. Puisque ces coefficients vérifient l'encadrement

$$\varphi^- * \mathbf{1} \leqslant \mu * \mathbf{1} \leqslant \varphi^+ * \mathbf{1},$$

on parvient, en utilisant (3.1), (3.2) et l'encadrement précédent aux inégalités

$$S(A^{(q)}_{l_1,l_2}(f),\mathcal{P},u) \lessgtr \frac{\omega(l_1,l_2)}{l_1l_2}X \sum_{\substack{d|P(u)\\ d<D^{\epsilon}}} \frac{\varphi_d^{\pm}\Omega(d)}{d}$$

$$+ \sum_{\substack{d|P(u)\\ d<D^{\epsilon}}} \varphi_d^{\pm}\mu(d) \sum_{\substack{d_1\\ p|d_1d_2\Leftrightarrow p|d}} \sum_{d_2}$$

$$\times\mu(d_1)\mu(d_2)r(A^{(q)}(f),(d_1l_1,d_2l_2)).$$

De façon flagrante, la définition (3.3) montre que la fonction $\Omega(d)$ vérifie les conditions du crible de dimension 2 et le Lemme fondamental ([Iw1] Theorem 4, par exemple) donne l'égalité

$$\sum_{\substack{d|P(u)\\ d<D^\varepsilon}} \frac{\varphi_d^{\pm}\Omega(d)}{d} = \prod_{p<u, p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{\Omega(p)}{p}\right)(1 + O(\varepsilon^{1/\varepsilon})).$$

Ainsi on a montré le

LEMME 3. *Soient l_1 et l_2 des entiers premiers avec q, dont tous les facteurs premiers sont supérieurs à u. Il existe alors deux suites de coefficients $\psi^{\pm}_{d_1,d_2}$ ($|\psi^{\pm}_{d_1,d_2}| \leqslant 1$) tels que, uniformément sur $\mathcal{P}$, l_1, l_2 et $\varepsilon > 0$, on ait l'encadrement*

$$S(A^{(q)}_{l_1,l_2}(f), \mathcal{P}, u) \lessgtr \prod_{p<u, p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{\Omega(p)}{p}\right) \frac{\omega(l_1, l_2)}{l_1 l_2} X(1 + O(\varepsilon^{1/\varepsilon}))$$
$$+ \sum_{\substack{d_1|P(u)\\ d_1<D^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_2|P(u)\\ d_2<D^\varepsilon}} \psi^{\pm}_{d_1,d_2} r(A^{(q)}(f), (d_1 l_1, d_2 l_2)).$$

3.2. LES COEFFICIENTS D'IWANIEC

Notons $\tilde{A}^{(q)}(f)$ la somme

$$\sum_{\substack{n_1\\ n_1\equiv 1 (mod\, q)}} \sum_{\substack{n_2, n_1-n_2=2\\ p|n_1n_2 \Rightarrow p\geqslant u}} f(n_1).$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que $\tilde{A}^{(q)}(f)$ vérifie la relation

$$S(\tilde{A}^{(q)}(f), \mathcal{P}, z) \gg V(z)X,$$

avec $V(z) = \prod_{p\in\mathcal{P},\, p<z}(1 - \frac{\Omega(p)}{p})$, $z = x^{\theta(\kappa)}$ (κ très petit). Posons $P(u, z) = \prod_{u\leqslant p<z, p\in\mathcal{P}} p$, la quantité étudiée devient

$$S(\tilde{A}^{(q)}(f), \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{n_1\\ n_1\equiv 1 (mod\, q)}} \sum_{\substack{n_2, n_1-n_2=2\\ p|n_1n_2 \Rightarrow p\geqslant u}}$$
$$\times f(n_1)(\mu * \mathbf{1})((n_1, P(u,z)))(\mu * \mathbf{1})((n_2, P(u,z))). \quad (3.4)$$

L'inégalité (2.6) permet de minorer $S(\tilde{A}^{(q)}(f), \mathcal{P}, z)$, un choix naturel serait de prendre pour fonctions $\Lambda^{\pm}$ les fonctions $\lambda^{\pm} * \mathbf{1}$, où les fonctions $\lambda^{\pm}$ sont les coefficients du crible de Rosser en dimension 1. Il nous faut toutefois choisir des coefficients proches, mais beaucoup plus sophistiqués pour créer des formes bilinéaires de termes d'erreur. Nous utilisons donc les poids construits par Iwaniec dans son célèbre travail ([Iw2]), où il montre après des prouesses techniques, que le crible linéaire a effectivement un terme d'erreur très souple. Nous suivrons donc au maximum les notations de [Iw2]. On pose $\eta = \varepsilon^9$, $\mathcal{G} = \{D^{\varepsilon^2(1+\eta)^n}; n \geqslant 0\}$, les lettres $D_1, \ldots, D_r, \ldots$ désignent uniquement des éléments de $\mathcal{G}$ et la lettre p désigne toujours un nombre premier de $\mathcal{P}$. On note aussi π_{D_i} la fonction caractéristique des nombres premiers (de $\mathcal{P}$) de l'intervalle $[D_i, D_i^{1+\eta}[$, inférieurs à z. Nous extrayons des formules (17), (18) et (19) de [Iw2] le

LEMME 4. *Soit n un entier vérifiant $p|n$ et $p \in \mathcal{P} \Rightarrow p \geqslant u$. On a alors les inégalités*

$$(\mu * \mathbf{1})((n, P(u,z))) \leqslant 1 - \sum_{r \geqslant 0} \sum_{(I)} (\pi_{D_1} * \ldots * \pi_{D_{2r+1}} * \mathbf{1})(n) + \sum_{r \geqslant 1} \sum_{(II)} (\pi_{D_1} * \ldots * \pi_{D_{2r}} * \mathbf{1})(n) \tag{3.5}$$

et

$$(\mu * \mathbf{1})((n, P(u,z))) \geqslant 1 - \sum_{r \geqslant 0} \sum_{(III)} (\pi_{D_1} * \ldots * \pi_{D_{2r+1}} * \mathbf{1})(n) + \sum_{r \geqslant 1} \sum_{(IV)} (\pi_{D_1} * \ldots * \pi_{D_{2r}} * \mathbf{1})(n) \tag{3.6}$$

Dans ces expressions, les conditions de sommation signifient respectivement:

(I) $D_1 > \cdots > D_{2r+1}$ *et* $D_1 \ldots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D^{1/(1+\eta)}$ *pour tout* $0 \leqslant l \leqslant r$
(II) $D_1 \geqslant \cdots \geqslant D_{2r}$ *et* $D_1 \ldots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D$ *pour tout* $0 \leqslant l \leqslant r$
(III) $D_1 \geqslant \cdots \geqslant D_{2r+1}$ *et* $D_1 \ldots D_{2l-1} D_{2l}^3 < D$ *pour tout* $1 \leqslant l \leqslant r$
(IV) $D_1 > \cdots > D_{2r}$ *et* $D_1 \ldots D_{2l-1} D_{2l}^3 < D^{1/(1+\eta)}$ *pour tout* $1 \leqslant l \leqslant r$.

L'inégalité (2.6) sera appliquée avec pour choix de Λ_1^+ et Λ_2^+ la fonction définie à droite de (3.5), et pour Λ_1^- et Λ_2^- la fonction à droite de (3.6). Posons alors $\psi^+ = \Lambda_1^+ * \mu = \Lambda_2^+ * \mu$ et $\psi^- = \Lambda_1^- * \mu = \Lambda_2^- * \mu$. Les Lemmes 3 et 4, les formules (2.6) et (3.4) et les propriétés de convolution conduisent à la minoration

$$S(\tilde{A}^{(q)}(f), \mathcal{P}, z) \geqslant XV(u) \left\{ \sum_{l_1 | P(u,z)} \sum_{l_2 | P(u,z)} \left(\frac{\psi_{l_1}^+ \psi_{l_2}^-}{l_1 l_2} + \frac{\psi_{l_1}^- \psi_{l_2}^+}{l_1 l_2} - \frac{\psi_{l_1}^+ \psi_{l_2}^+}{l_1 l_2} \right) \omega(l_1, l_2) \right\} + E + R, \tag{3.7}$$

où E et R sont des termes d'erreur dont la définition sera donnée ultérieurement.

3.3. MAJORATION DE E

Ce terme d'erreur est engendré par le $O(\varepsilon^{1/\varepsilon})$ du Lemme 3, on décompose E en

$$E \ll \varepsilon^{1/\varepsilon} X V(u) \left(\sum_{l|P(u,z)} \frac{\psi_l}{l} \right)^2,$$

où ψ_l désigne l'une ou l'autre des fonctions $|\psi_l^{\pm}|$. La contribution des l avec $\psi_l \leqslant 1$ est facile à évaluer puisqu'on a

$$\sum_{l|P(u,z)} \frac{1}{l} \leqslant \prod_{u \leqslant p < z} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ll \varepsilon^{-2}. \tag{3.8}$$

On remarque que, lorsque $\psi_l \geqslant 2$, l a au moins deux diviseurs premiers dans au moins, un intervalle $[D_i, D_i^{1+\eta}[$. Soient $k \geqslant 1, r_1, \dots, r_k \geqslant 2$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r_1, \dots, r_k)$ l'ensemble des l ayant exactement r_i diviseurs premiers dans un certain intervalle $[D_i, D_i^{1+\eta}[$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, (ces D_i étant distincts) et au plus un diviseur premier dans chacun des autres intervalles. On a l'inégalité

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l|P(u,z), l \in \mathcal{L}} \frac{\psi_l}{l} \right) &\leqslant \sum_{D_1, \dots, D_k \in \mathcal{G}} \left(\sum_{D_1 \leqslant p < D_1^{1+\eta}} \left(\frac{1}{p}\right) \right)^{r_1} \cdots \left(\sum_{D_k \leqslant p < D_k^{1+\eta}} \left(\frac{1}{p}\right) \right)^{r_k} \\ &\quad \times \prod_{u \leqslant p < z} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &\ll (2\eta)^{r_1 + \dots + r_k - k} \left(\sum_{u \leqslant p < z} \frac{1}{p} \right)^k \varepsilon^{-2} \ll \varepsilon^{8(r_1 + \dots + r_k - k)} . \varepsilon^{-2(k+1)}. \end{aligned}$$

Il reste à sommer sur les $r_1, \dots, r_k \geqslant 2$ puis sur $k \geqslant 1$ et utiliser (3.8) pour conclure que E vérifie

$$E \ll X V(u) (\varepsilon^{-2} + \varepsilon^3)^2 \varepsilon^{1/\varepsilon} \ll X V(z) \varepsilon^{-8} \varepsilon^{1/\varepsilon}. \tag{3.9}$$

3.4. MAJORATION DE R

Ce terme provient des termes $\sum_{\substack{d_1|P(u)\\ d_1<D^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_2|P(u)\\ d_2<D^\varepsilon}} \psi^{\pm}_{d_1,d_2} r(A^{(q)}(f),(d_1l_1,d_2l_2))$. Il est la somme de $O(|\mathcal{G}|^{2/\varepsilon^2}) = O_\varepsilon(1)$ termes, dont nous extrayons, par exemple, le terme typique suivant

$$\sum_{l_1|P(u,z)} \sum_{l_2|P(u,z)} (\pi_{D_1} * \cdots * \pi_{D_{2r+1}})(l_1)(\pi_{D_1} * \cdots * \pi_{D_{2s+1}})(l_2)$$

$$\sum_{\substack{d_1|P(u)\\ d_1<D^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_2|P(u)\\ d_2<D^\varepsilon}} \psi^{-}_{d_1,d_2} r(A^{(q)}(f),(d_1l_1,d_2l_2)),$$

où la famille $D_1,\ldots,D_{2r+1}$ vérifie les conditions (I), et la famille $D_1,\ldots,D_{2s+1}$ vérifie les conditions (III) mais avec le paramètre D remplacé par Δ dans l'inégalité que vérifie $D_1\ldots D_{2l}^3$. Ainsi D et Δ sont respectivement attachés aux fonctions ψ^+ et ψ^-. Les conditions (I) et (III) entraînent que les fonctions $\pi_{D_1} * \cdots * \pi_{D_{2r+1}}$ et $\pi_{D_1} * \cdots * \pi_{D_{2s+1}}$ sont bien factorisables de niveau D et Δ. On choisit alors $D = x^{(1/2)-100c\varepsilon}q^{-C_0}$ et $\Delta = x^{(3/4)-100c\varepsilon}q^{-C_0}$. Il est utile de signaler que dans le cas des termes d'erreur provenant du troisième terme de (2.6), c'est-à-dire de $\Lambda_1^+\Lambda_2^+$, on n'a affaire qu'à des coefficients bien factorisables de niveau D et D.

Après utilisation de la Proposition 2 et sommation sur les D_i possibles, on a

$$R = O(x^{1-\varepsilon}q^{-1}). \tag{3.10}$$

3.5. LE TERME PRINCIPAL

Au vu de (3.7), (3.9) et (3.10), il suffit de montrer que le terme principal de (3,7), noté TP, vérifie

$$TP \gg XV(z). \tag{3.11}$$

Dans un premier temps, nous allons séparer les variables l_1 et l_2, c'est-à-dire montrer qu'on peut les supposer premières entre elles. En effet si $(l_1,l_2)\neq 1$, on a $(l_1,l_2)\geqslant u$, d'où la relation

$$\begin{aligned}\sum_{l_1|P(u,z)} \sum_{l_2|P(u,z)} \frac{\psi^+_{l_1}\psi^-_{l_2}}{l_1l_2}\omega(l_1,l_2) &= \sum_{l_1|P(u,z)} \frac{\psi^+_{l_1}}{l_1} \sum_{l_2|P(u,z)} \frac{\psi^-_{l_2}}{l_2} \\ &\quad + O\left(\sum_{\delta\geqslant u}\frac{1}{\delta^2}\left(\sum_{l\leqslant\Delta}\frac{1}{l}\right)^2\right) \\ &= \sum_{l_1|P(u,z)} \frac{\psi^+_{l_1}}{l_1} \sum_{l_2|P(u,z)} \frac{\psi^-_{l_2}}{l_2} + O(u^{-(1/2)}).\end{aligned}$$

Il est maintenant utile de tenir compte de la symétrie du problème qui transforme TP en

$$TP = XV(u)\left(\sum_{l_1|P(u,z)} \frac{\psi^+_{l_1}}{l_1}\right)\left(2\sum_{l_2|P(u,z)} \frac{\psi^-_{l_2}}{l_2} - \sum_{l_1|P(u,z)} \frac{\psi^+_{l_1}}{l_1}\right)$$
$$+O(X^{1-\varepsilon^3}). \tag{3.12}$$

Il convient de comparer les sommes $\sum_{l_1|P(u,z)}(\psi^+_{l_1}/l_1)$ et $\sum_{l_2|P(u,z)}(\psi^-_{l_2}/l_2)$ aux sommes plus classiques $\sum_{l_1|P(u,z)}(\mu^+_{l_1}/l_1)$ et $\sum_{l_2|P(u,z)}(\mu^-_{l_2}/l_2)$ où $\mu^\pm$ désigne la suite des coefficients de Rosser en dimension 1, associés aux paramètres D et Δ. Cette évaluation est faite explicitement pages 317–320 de [Iw2], en effet, la quantité $L^+(\varepsilon, D, P(z))$ est exactement notre somme $\sum_{l_1|P(u,z)}(\psi^+_{l_1}/l_1)$, ce qui permet d'énoncer le

LEMME 5 ([Iw2]). *On a pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'égalité*

$$\sum_{l|P(u,z)} \frac{\psi^\pm_l}{l} - \sum_{l|P(u,z)} \frac{\mu^\pm_l}{l} = O(\varepsilon^3 + \varepsilon^{-6}(\log D)^{-1}). \tag{3.13}$$

Le Lemme 3 de [Iw2] et la formule (4.1) de [Iw1] fournissent les inégalités

$$\prod_{u\leqslant p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right) \leqslant \sum_{l|P(u,z)} \frac{\mu^+_l}{l} \leqslant \prod_{u\leqslant p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left\{F\left(\frac{\log D}{\log z}\right)\right.$$
$$\left. +O((\log D)^{-(1/3)})\right\}, \tag{3.14}$$

et

$$\sum_{l|P(u,z)} \frac{\mu^-_l}{l} \geqslant \prod_{u\leqslant p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left\{f\left(\frac{\log \Delta}{\log z}\right) + O((\log \Delta)^{-(1/3)})\right\}. \tag{3.15}$$

Pour démontrer (3.11), il suffit de regrouper (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) et de vérifier l'inégalité

$$2f\left(\frac{\log \Delta}{\log z}\right) - F\left(\frac{\log D}{\log z}\right) > 0,$$

pour $z = x^{\theta(\kappa)}$ (κ très petit), ce qui est aisé puisque, pour $2 \leqslant s \leqslant 4$, on a $f(s) = 2e^\gamma \log(s-1)/s$ et pour $1 \leqslant s \leqslant 3$ on a $F(s) = 2e^\gamma/s$. Signalons que

$0,2406$ est strictement inférieur à $3/4(1+\exp 0,75)$, qui est l'unique racine de l'équation en ξ:

$$2f\left(\frac{\log x^{3/4}}{\log x^{\xi}}\right)-F\left(\frac{\log x^{1/2}}{\log x^{\xi}}\right)=0.$$

Ceci termine la démonstration du Théorème.

References

[B–F] Brüdern, J. and Fouvry, E.: Lagrange's Four Squares Theorem with almost Prime Variables, *J. f. d. reine u. angew. Mathematik* 454 (1994) 59–96.

[F–G] Fouvry, E. and Grupp, F.: On the Switching Principle in Sieve Theory, *J. f. d. reine u. angew. Mathematik* 370 (1986) 101–126.

[D–I] Deshouillers, J.-M. and Iwaniec, H.: Kloosterman Sums and Fourier Coefficients of Cusp Forms, *Inv. Math.* 70 (1982) 219–288.

[D–H–R] Diamond, H., Halberstam, H. and Richert, H.-E.: Combinatorial Sieves of Dimension Exceeding 1, *J. of Number Theory* 28 (1988) 306–346.

[Ho] Hooley, C.: Applications of Sieve Methods to the Theory of Numbers, *Cambridge Tracts in Math.* 70, 1976.

[Iw1] Iwaniec, H.: Rosser's Sieve, *Acta Arith.* 36 (1980), 171–202.

[Iw2] Iwaniec, H.: A New Form of the Error Term in the Linear Sieve, *Acta Arith.* 37 (1980) 307–320.