

COMPOSITIO MATHEMATICA

BERTRAND LEMAIRE

Intégrabilité locale des caractères-distributions de $GL_N(F)$ où F est un corps local non-archimédien de caractéristique quelconque

Compositio Mathematica, tome 100, n° 1 (1996), p. 41-75

http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__100_1_41_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Intégrabilité locale des caractères-distributions de $GL_N(F)$ où F est un corps local non-archimédien de caractéristique quelconque

BERTRAND LEMAIRE

Département de Mathématiques et URA D 0752 du C.N.R.S, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France

Received 24 May 1994; accepted in final form 28 November 1994

On étudie dans ce papier le comportement local du caractère-distribution Θ_π d'une représentation admissible irréductible π du groupe $G = GL_N(F)$, où N est un entier ≥ 2 et F un corps local non-archimédien (de corps résiduel fini) de caractéristique quelconque. On montre que Θ_π est localement intégrable sur tout le groupe, au sens où il existe une fonction localement intégrable $\gamma_\pi : G \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\langle \Theta_\pi, \varphi \rangle = \int_G \varphi(g) \gamma_\pi(g) dg$ (où dg est la mesure de Haar sur G définissant Θ_π) pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(G)$.

En caractéristique nulle, ce résultat a été démontré par Harish-Chandra pour $G = G(F)$ groupe des F -points de n'importe quel groupe algébrique réductif connexe G/F ([Ha 3]), puis étendu par Clozel à G non connexe ([Cl 1]). Quant à la caractéristique positive, les difficultés sont multiples: absence de l'application exponentielle permettant de transférer la question sur l'algèbre de Lie de G ; existence d'éléments 'semi-simples inséparables' (ou 'faussement semi-simples') au voisinage desquels le procédé de descente d'Harish-Chandra ramenant l'étude de Θ_π à celle d'une distribution invariante au voisinage de l'élément neutre d'un groupe plus petit, ne fonctionne plus; résultats de Howe sur les germes de caractères ([Ho]) valables en toute caractéristique mais seulement pour $G = GL_N$; etc.

Pour F de caractéristique > 0 et $G = GL_N(F)$, Rodier a résolu le problème au voisinage des éléments séparables* (i.e. dont le polynôme minimal est séparable sur F), essentiellement en remplaçant l'application exponentielle par l'application $\text{Lie}(G) \rightarrow G, g \mapsto 1 + g$ ([Ro]). La question de l'intégrabilité locale de Θ_π sur tout le groupe se ramène dès lors à l'étude de Θ_π au voisinage des éléments semi-simples inséparables (tout élément de G ayant des conjugués aussi proches que l'on veut d'un élément semi-simple dans la fermeture de sa classe de conjugaison).

* En fait, Rodier a aussi montré que les caractères-distributions sont localement intégrables sur tout le groupe $GL_N(F)$ pourvu que la caractéristique du corps F soit $\geq N$.

On reprend ici point par point l'organisation de l'article de Rodier, elle-même héritée d'Harish-Chandra. On montre comment, grâce à la *corestriction modérée* de Bushnell–Kutzko ([Bu-Ku]), on peut construire, pour tout élément semi-simple (non-nécessairement séparable) y de G , une submersion ramenant l'étude du caractère-distribution Θ_π au voisinage de y dans G à celle d'une distribution $\text{Ad}G_y$ -invariante θ_π sur l'algèbre de Lie du centralisateur G_y de y dans G (n° 1 et n° 2). Cette construction nous transportant directement sur $\text{Lie}(G_y)$, elle permet de faire l'économie du passage de G_y à $\text{Lie}(G_y)$ (objet, dans le cas séparable, de quelques démonstrations délicates de Rodier). Pour étudier cette distribution θ_π , on utilise directement les énoncés de Rodier relatifs aux représentations des sous-groupes ouverts compacts de G , lesquels font pendant à la théorie de Kirillov utilisée par Harish-Chandra en caractéristique nulle (n° 3 et n° 4). On conclut grâce aux résultats de Howe sur les germes de caractères, valables, comme on l'a dit plus haut, pour GL_N en toute caractéristique (n° 5).

Revenons sur le point crucial de la démonstration. L'application (introduite par Harish-Chandra, reprise par Rodier) $G \times G_y \rightarrow G$, $(g, b) \mapsto gybg^{-1}$ est submersive au point $(1, 1)$ si et seulement si l'élément y est séparable sur F , auquel cas le principe de submersion permet, par un procédé d'intégration sur les fibres, de tirer la restriction de Θ_π à un voisinage ouvert $\text{Ad}G$ -invariant de y dans G vers une distribution $\text{Ad}G_y$ -invariante au voisinage de 1 dans G_y . Pour y inséparable, cette construction n'est pas utilisable. L'idée nouvelle est de produire un homomorphisme de $(\text{Lie}(G_y) \times \text{Lie}(G_y))$ -bimodules $s: \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G_y)$ réalisant la restriction des caractères au sens où $\Psi_1(gb) = \Psi_2(s(g)b)$ ($(g, b) \in \text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G_y)$) pour des caractères additifs non-triviaux fixés Ψ_1 et Ψ_2 respectivement de $\text{Lie}(G)$ et $\text{Lie}(G_y)$. On fixe alors un élément x de G appartenant à la pré-image de 1 par s et l'on considère l'application $G \times \text{Lie}(G_y) \rightarrow \text{Lie}(G)$, $(g, b) \mapsto gy(1 + xb)g^{-1}$. Elle est submersive au point $(1, 0)$ et permet de tirer la restriction de Θ_π à un voisinage ouvert $\text{Ad}G$ -invariant de y dans G vers une distribution, en général *non* $\text{Ad}G_y$ -invariante, au voisinage de 0 dans $\text{Lie}(G_y)$. Rééditant l'opération ci-dessus en remplaçant x successivement par tous ses conjugués $b^{-1}xb$ ($b \in G_y$), on construit une fibration au-dessus de $\text{Lie}(G_y)$ permettant de montrer, par une utilisation assez fine du principe de submersion, que cette distribution est $\text{Ad}G_y$ -invariante sur $\text{Lie}(G_y)$. L'étude peut alors commencer, l'application s traduisant sur $\text{Lie}(G_y)$ les propriétés du caractère-distribution Θ_π .

1. Notations et présentation des acteurs

1.1. Soient

- F un corps local non archimédien de corps résiduel fini de cardinal q ; autrement dit, ou bien F est une extension finie d'un corps p -adique \mathbb{Q}_p , ou bien F est isomorphe à un corps de séries formelles $k((\varpi))$ en une indéterminée ϖ sur un corps fini k .
- \mathcal{O}_F l'anneau des entiers de F .

- \mathcal{P}_F l'idéal maximal de \mathcal{O}_F .
- ϖ_F une uniformisante de F .
- $\| \cdot \|_F$ la valeur absolue sur F normalisée par $|\varpi_F|_F = q^{-1}$.
- N un entier ≥ 2 et $G = GL_N(F)$.
- \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G identifiée à l'algèbre de matrices $M(N, F)$ munie de l'opération adjointe $adg(v) = [g, v] = gv - vg$ ($(g, v) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$). On note encore $\| \cdot \|_F$ la norme sur \mathfrak{g} donnée par la plus grande valeur absolue des coefficients et l'on dote \mathfrak{g} et G de la topologie ϖ_F -adique induite par $\| \cdot \|_F$.
- $S = \{g \in \mathfrak{g}, |g|_F = 1\} \subset \mathfrak{g}$ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine.
- \mathcal{N} l'ensemble des éléments nilpotents de \mathfrak{g} .

On note Ad l'action de G sur \mathfrak{g} par conjugaison.

Si H est une partie de G , W et V deux parties de \mathfrak{g} , et g un élément de \mathfrak{g} , on note

$$AdH(V) = \{Adh(v), h \in H, v \in V\},$$

$$adW(V) = [W, V] = \{[w, v], w \in W, v \in V\},$$

$$H_g = \{h \in H, Adh(g) = g\}.$$

1.2. Soit y un élément *semi-simple* de G , i.e. un élément dont le polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles (mais non-nécessairement séparables) sur F deux à deux distincts.

Commençons par isoler les *composantes primaires* de y . Notons $\Phi(y)$ l'ensemble des composantes irréductibles du polynôme minimal de y . Pour chaque polynôme $Q = Q(T) \in \Phi(y)$, soit V_Q le sous- F -espace vectoriel de F^N défini par

$$V_Q = \text{Ker}\{Q(y) : F^N \rightarrow F^N\}.$$

Alors [(Bou] Alg. VII, Sect. 5, n° 1, Prop. 3)

$$F^N = \bigoplus_{Q \in \Phi(y)} V_Q,$$

et l'on note M le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de y défini par

$$M = \{g \in G, g(V_Q) \subset V_Q \quad \forall Q \in \Phi(y)\} = \prod_{Q \in \Phi(y)} \text{Aut}_F(V_Q).$$

Pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, soient N_Q la dimension du F -espace vectoriel V_Q , α_Q la multiplicité de Q en tant que composante irréductible du polynôme caractéristique de y et y_Q la composante de $y \in M$ sur $\text{Aut}_F(V_Q)$. Ainsi, $N_Q =$

$\alpha_Q \deg(Q)$ et, notant $E_Q = F[y_Q] \cong F[T]/(Q)$ l'extension de F (contenue dans la F -algèbre $\text{End}_F(V_Q)$) engendrée par y_Q , le centralisateur G_y de y dans G est

$$G_y = \prod_{Q \in \Phi(y)} \text{Aut}_{E_Q}(V_Q) \subset \prod_{Q \in \Phi(y)} \text{Aut}_F(V_Q) = M;$$

il est isomorphe à

$$\prod_{Q \in \Phi(y)} \text{GL}_{\alpha_Q}(E_Q).$$

Pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, soient

- $e_Q = e(E_Q/F)$ et $f_Q = f(E_Q/F)$ respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de l'extension E_Q/F .
- \mathcal{O}_Q l'anneau des entiers de E_Q .
- \mathcal{P}_Q l'idéal maximal de \mathcal{O}_Q .
- ϖ_Q une uniformisante de E_Q .
- $\mathfrak{m}_Q = \text{End}_F(V_Q)$ et $M_Q = \text{Aut}_F(V_Q)$ le groupe des éléments inversibles de \mathfrak{m}_Q .
- $\mathfrak{b}_Q \subset \mathfrak{m}_Q$ la E_Q -algèbre des E_Q -endomorphismes de V_Q et $B_Q \subset M_Q$ le groupe des éléments inversible de \mathfrak{b}_Q .
- \mathcal{M}_Q un \mathcal{O}_F -ordre héréditaire de \mathfrak{m}_Q normalisé par E_Q^\times tel que $\mathcal{B}_Q = \mathfrak{b}_Q \cap \mathcal{M}_Q$ soit un \mathcal{O}_Q -ordre héréditaire maximal (i.e. isomorphe à $M(\alpha_Q, \mathcal{O}_Q)$) de \mathfrak{b}_Q (cf. [Bu-Ku] chap.1).
- \mathcal{M}_Q^m ($m \in \mathbb{Z}$) les puissances du radical de Jacobson \mathcal{M}_Q^1 de \mathcal{M}_Q et ([Bu-Ku] (1.2.4)) $\mathcal{B}_Q^m = \mathfrak{b}_Q \cap \mathcal{M}_Q^m$ ($m \in \mathbb{Z}$) les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{B}_Q^1 = \mathfrak{b}_Q \cap \mathcal{M}_Q^1$ de \mathcal{B}_Q .

Notons $\mathfrak{b} = \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathfrak{b}_Q \subset \mathfrak{m} = \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathfrak{m}_Q$ le commutant de y dans \mathfrak{g} et B le groupe des éléments inversibles de \mathfrak{b} ; on a $B = G_y$.

Soient

- $\mathcal{G} = M(N, \mathcal{O}_F)$ l' \mathcal{O}_F héréditaire maximal standard de \mathfrak{g} .
- $\mathcal{G}^m = \{g \in \mathfrak{g}, |g|_F \leq q^{-m}\}$ ($m \in \mathbb{Z}$), les puissances du radical de Jacobson \mathcal{G}^1 de \mathcal{G} .
- $G^m = 1 + \mathcal{G}^m$ (m entier ≥ 1), les sous-groupes de congruence modulo \mathcal{P}_F^m du groupe multiplicatif $\text{GL}_N(\mathcal{O}_F)$ de l' \mathcal{O}_F -ordre \mathcal{G} .

Quitte à conjuguer y par un élément de G , on supposera que le sous-groupe de Levi M de G associé aux composantes primaires de y est *standard*, c'est-à-dire produit diagonal dans G de groupes linéaires sur F . Quitte à conjuguer une seconde fois y par un élément de M (cf. le système de représentants des classes de M_Q -conjugaison d' \mathcal{O}_F -ordres héréditaires de \mathfrak{m}_Q donné dans [Bu] (1.8)), on supposera vérifiées les relations d'inclusion

$$\mathfrak{m} \cap \mathcal{G}^1 \subset \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{M}_Q \subset \mathfrak{m} \cap \mathcal{G}.$$

Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, on note \mathcal{M}^m l' \mathcal{O}_F -réseau de \mathfrak{m} défini par

$$\mathcal{M}^m = \varpi_F^m \left(\prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{M}_Q \right) \quad \left(\text{on a } \mathcal{M}^m = \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{M}_Q^{me_Q} \right)$$

et \mathcal{B}^m le $(\prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{O}_Q)$ -réseau de \mathfrak{b} défini par

$$\mathcal{B}^m = \mathfrak{b} \cap \mathcal{M}^m = \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{B}_Q^{me_Q}.$$

En accord avec les notations précédentes, on pose $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}^0$.

Pour chaque suite $(\beta) = (\beta_Q)_{Q \in \Phi(y)} \in \mathbb{Z}^{\#\Phi(y)}$, on note $\mathcal{B}^{(\beta)}$ le $(\prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{O}_Q)$ -réseau de \mathfrak{b} défini par

$$\mathcal{B}^{(\beta)} = \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{B}_Q^{\beta_Q}.$$

1.3. Personnage central: la *corestriction modérée* ([Bu-Ku] (1.3))

On fixe (arbitrairement) un caractère* additif τ_F de F de *conducteur* \mathcal{P}_F (i.e. trivial sur \mathcal{P}_F mais non-trivial sur \mathcal{O}_F) et, pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, un caractère additif τ_Q de E_Q de *conducteur* \mathcal{P}_Q .

Soit $s_Q : \mathfrak{m}_Q \rightarrow \mathfrak{b}_Q$ ($Q \in \Phi(y)$) l'*unique corestriction modérée sur* \mathfrak{m}_Q relativement à l'extension E_Q/F qui réalise la restriction des caractères ([Bu-Ku] (1.3.4)), au sens où

$$\tau_F \circ \text{Tr}_{\mathfrak{m}_Q/F}(vb) = \tau_Q \circ \text{Tr}_{\mathfrak{b}_Q/E_Q}(s_Q(v)b) \quad (v \in \mathfrak{m}_Q, b \in \mathfrak{b}_Q)$$

où Tr désigne la trace usuelle des endomorphismes. Rappelons que s_Q est un homomorphisme de $(\mathfrak{b}_Q, \mathfrak{b}_Q)$ -bimodules tel que $s_Q(\mathcal{R}) = \mathfrak{b}_Q \cap \mathcal{R}$ pour tout \mathcal{O}_F -ordre héréditaire \mathcal{R} de \mathfrak{m}_Q normalisé par E_Q^\times ; en particulier, on a l'égalité $s_Q(\mathcal{M}_Q^m) = \mathcal{B}_Q^m$ ($m \in \mathbb{Z}$) ([Bu-Ku] (1.3.4)(ii)).

Soient $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ la sous- F -algèbre parabolique *standard* (i.e. contenant la sous- F -algèbre de Borel des matrices triangulaires supérieures) de \mathfrak{g} de composante de Levi \mathfrak{m} , $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{m}$ la sous- F -algèbre parabolique opposée à \mathfrak{p} et $\text{pr}_\mathfrak{m} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m}$ la projection de \mathfrak{g} sur \mathfrak{m} relativement à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. Soit $s_\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{b}$ l'homomorphisme de $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$ -bimodules défini par

$$s_\mathfrak{m}(v) = \prod_{Q \in \Phi(y)} s_Q(v_Q) \quad \left(v = \left(\prod_{Q \in \Phi(y)} v_Q \right) \in \mathfrak{m} = \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathfrak{m}_Q \right)$$

et soit $s = s_\mathfrak{m} \circ \text{pr}_\mathfrak{m} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$. Ainsi, notant $\Psi_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ le caractère défini par

$$\Psi_\mathfrak{g}(g) = \tau_F \circ \text{Tr}_{\mathfrak{g}/F}(g) \quad (g \in \mathfrak{g})$$

* On entend par caractère (d'un groupe topologique) un homomorphisme continu dans \mathbb{C} .

et $\Psi_{\mathfrak{b}}: \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ le caractère défini par

$$\Psi_{\mathfrak{b}}(b) = \prod_{Q \in \Phi(y)} \tau_Q \circ \text{Tr}_{\mathfrak{b}_Q/E_Q}(b_Q) \quad \left(b = \left(\prod_{Q \in \Phi(y)} b_Q \right) \in \mathfrak{b} \right),$$

par construction on a la relation

$$\Psi_{\mathfrak{g}}(gb) = \tau_F \circ \text{Tr}_{\mathfrak{m}/F}(\text{pr}_{\mathfrak{m}}(g)b) = \Psi_{\mathfrak{b}}(s(g)b) \quad (g \in \mathfrak{g}, b \in \mathfrak{b}).$$

Si Λ est un \mathcal{O}_F -réseau de \mathfrak{g} , on note Λ^* l' \mathcal{O}_F -réseau de \mathfrak{g} dual de Λ pour $\Psi_{\mathfrak{g}}$ défini par

$$\Lambda^* = \{g \in \mathfrak{g}, \Psi_{\mathfrak{g}}(gv) = 1 \ (v \in \Lambda)\}.$$

De même, si Γ est un $(\prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{O}_Q)$ -réseau de \mathfrak{b} , on note Γ^* le $(\prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{O}_Q)$ -réseau de \mathfrak{b} dual de Γ pour $\Psi_{\mathfrak{b}}$ défini par

$$\Gamma^* = \{b \in \mathfrak{b}, \Psi_{\mathfrak{b}}(b\gamma) = 1 \ (\gamma \in \Gamma)\}.$$

1.4. Si Σ est un espace topologique totalement discontinu, on note $C_c^\infty(\Sigma)$ (ou simplement $C_c(\Sigma)$ si la topologie sur Σ est la topologie discrète) l'espace des fonctions $\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ localement constantes à support compact. L'espace des distributions sur Σ est le dual algébrique de Σ , noté $\mathcal{D}(\Sigma)$. Si D est une distribution sur Σ , on note $\int_{\Sigma} \phi(g) dD(g)$ ou encore $\langle D, \phi \rangle$ la valeur de D sur la fonction $\phi \in C_c^\infty(\Sigma)$.

Si Γ est une partie ouverte de Σ , on identifie naturellement $C_c^\infty(\Gamma)$ à l'espace des fonctions sur Σ à support dans Γ . De même, si Γ est une partie fermée de Σ , on identifie $\mathcal{D}(\Gamma)$ à l'espace des distributions sur Σ à support dans Γ (cf. [Be-Ze] n° 1.7 et 1.8).

Si Γ est une partie ouverte compacte de Σ , on note $\mathbf{1}_{\Gamma}$ la fonction caractéristique de Γ .

Si l'espace Σ est muni d'une action de groupe $\tau: H \rightarrow \text{Aut}(\Sigma)$, on note τ^* et τ les actions de H sur $C_c^\infty(\Sigma)$ et $\mathcal{D}(\Sigma)$ respectivement définies par

$$(\tau^*h(\phi))(x) = \phi(\tau h^{-1}(x)) \quad (h \in H, \phi \in C_c^\infty(\Sigma), x \in \Sigma),$$

$$\langle \tau h(D), \phi \rangle = \langle D, \tau^*h^{-1}(\phi) \rangle \quad (h \in H, D \in \mathcal{D}(\Sigma), \phi \in C_c^\infty(\Sigma)).$$

Si $d\mu$ est une mesure sur Σ , toute fonction $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ localement intégrable par rapport à $d\mu$ induit une distribution $\lambda d\mu$ sur Σ , définie par $\langle \lambda d\mu, \phi \rangle = \int_{\Sigma} \phi(g) \lambda(g) d\mu(g)$ ($\phi \in C_c^\infty(\Sigma)$). Une distribution de cette forme est dite *localement intégrable par rapport à $d\mu$* . Si de plus Σ possède une structure de groupe topologique localement compact, alors Σ est muni d'une *mesure de Haar* (i.e. une mesure de Radon invariante à gauche et non-identiquement nulle) unique à un

facteur constant prés, et l'on dira seulement 'localement intégrable' pour 'localement intégrable par rapport à une mesure de Haar sur Σ ' (l'intégrabilité locale ne dépendant bien évidemment pas de la mesure de Haar choisie).

Si Γ est un sous-groupe de G et Σ une partie $\text{Ad}\Gamma$ -invariante de \mathfrak{g} , on note $J_\Gamma(\Sigma)$ le sous-espace de $\mathcal{D}(\Sigma)$ des distributions $\text{Ad}\Gamma$ -invariantes sur Σ .

Soient dX et dH les mesures de Haar sur \mathfrak{g} et \mathfrak{b} telle que $\text{vol}(\mathcal{G}, dX) = \text{vol}(\mathcal{B}, dH) = 1$. Le caractère $\Psi_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ définit une transformée de Fourier sur $C_c^\infty(\mathfrak{g})$

$$\phi^\wedge(g) = \int_{\mathfrak{g}} \phi(X) \overline{\Psi_{\mathfrak{g}}(gX)} dX \quad (\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}), g \in \mathfrak{g}),$$

laquelle induit une transformée de Fourier sur $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$

$$\langle D^\wedge, \phi \rangle = \langle D, \phi^\wedge \rangle \quad (D \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}), \phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g})).$$

De la même manière, le caractère $\Psi_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ définit une transformée de Fourier* sur $C_c^\infty(\mathfrak{b})$

$$\phi^\wedge(b) = \int_{\mathfrak{b}} \phi(H) \overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(bH)} dH \quad (\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{b}), b \in \mathfrak{b}),$$

laquelle induit une transformée de Fourier sur $\mathcal{D}(\mathfrak{b})$

$$\langle D^\wedge, \phi \rangle = \langle D, \phi^\wedge \rangle \quad (D \in \mathcal{D}(\mathfrak{b}), \phi \in C_c^\infty(\mathfrak{b})).$$

1.5. Formule de Plancherel pour les sous-groupes ouverts compacts de G .

Soit dg la mesure de Haar sur G telle que $\text{vol}(GL_N(\mathcal{O}_F), dg) = 1$.

Si K est un sous-groupe ouvert compact de G , on note $\varepsilon(K)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de K .

Si ρ est une représentation lisse irréductible** de K , on note χ_ρ le caractère (i.e le caractère-trace) de ρ , $\text{deg}(\rho)$ le degré de ρ et $\xi_\rho = \text{vol}(K, dg)^{-1} \text{deg}(\rho) \chi_\rho$ l'idempotent associé à ρ (dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G)$ d'espace vectoriel sous-jacent $C_c^\infty(G)$ munie du produit de convolution $\phi * \varphi(v) = \int_G \phi(g) \varphi(g^{-1}v) dg$ ($\phi \in C_c^\infty(G), \varphi \in C_c^\infty(G), v \in G$)).

Avec ces notations, la formule de Plancherel pour K s'écrit

$$\varepsilon(1) = \sum_{\rho \in \varepsilon(K)} \xi_\rho dg$$

* Comme pour la dualité des réseaux (cf. n° 1.3) désignée par le même symbole * pour les réseaux de \mathfrak{g} et pour les réseaux de \mathfrak{b} , on désigne par le même symbole ^ la dualité des fonctions et des distributions dans \mathfrak{g} et dans \mathfrak{b} . Le contexte dans lequel on utilisera ces objets sera toujours suffisamment clair pour que la lecture ne soit pas gênée par cette imprécision.

** Par abus de notation, nous ne ferons pas de distinction entre une représentation lisse irréductible et sa classe d'équivalence (noter que les objets χ_ρ , $\text{deg}(\rho)$ et par suite ξ_ρ , ne dépendent que de la classe de ρ).

où $\varepsilon(1)$ désigne la distribution sur G *masse unité en 1* donnée par $\langle \varepsilon(1), \phi \rangle = \phi(1)$ ($\phi \in C_c^\infty(G)$).

Pour toute distribution $D \in \mathcal{D}(G)$ et toute fonction $\phi \in C_c^\infty(g)$, on note $D * \phi$ la fonction sur G donnée par $D * \phi(v) = \int_G \phi(g^{-1}v) dD(g)$ ($v \in G$). Ainsi, conséquence directe de la formule de Plancherel pour K rappelée ci-dessus ([Ha 3] Lemma 33),

$$D = \sum_{\rho \in \varepsilon(K)} (D * \xi_\rho) dg \quad (D \in \mathcal{D}(G)).$$

2. Descente des caractères

On ‘construit’ un élément x de $\mathcal{M} \cap \mathbf{M}$ appartenant à la pré-image de 1 (l’élément unité de \mathfrak{b}) par s et vérifiant des propriétés telles* que dans le cas *séparable modéré* (c’est-à-dire le cas où pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, l’extension E_Q/F est séparable et modérément ramifiée), x appartienne au centre de \mathfrak{b} (n° 2.1). Grâce à cet élément x , on produit une submersion (n° 2.2) permettant de ramener l’étude d’une distribution $\text{Ad}G$ -invariante sur G (donc en particulier du caractère-distribution d’une représentation admissible irréductible de G) au voisinage de y dans G à celle d’une distribution $\text{Ad}B$ -invariante sur \mathfrak{b} (n° 2.3).

2.1. Pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, on peut définir l’ \mathcal{O}_F -ordre \mathcal{M}_Q de \mathfrak{m}_Q comme le stabilisateur dans \mathfrak{m}_Q d’une chaîne de \mathcal{O}_F -réseaux $\mathcal{L}_Q = \{\mathcal{L}_{Q,i}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ dans V_Q (d’ailleurs cette chaîne est unique à changement d’indexation près); notons que les $\mathcal{L}_{Q,i}$ sont des \mathcal{O}_Q -réseaux car E_Q^\times normalise \mathcal{M}_Q (cf. [Bu-Ku] Prop. (1.2.1)). Fixons une E_Q -base $\{w_{Q,k}\}$ de V_Q qui soit une \mathcal{O}_Q -base de la chaîne \mathcal{L}_Q (cf. [Bu-Ku] Def. (1.1.7)) et notons W_Q le sous- F -espace vectoriel de V_Q engendré par $\{w_{Q,k}\}$. Le choix de W_Q induit une injection de F -algèbres

$$\iota_{W_Q} : \text{End}_F(E_Q) \rightarrow \mathfrak{m}_Q, \tag{2.1.1}$$

qui prolonge l’inclusion $E_Q \subset \mathfrak{m}_Q$ (le corps E_Q étant canoniquement inclus dans $\text{End}_F(E_Q)$), et un isomorphisme de $(\text{End}_F(E_Q), \mathfrak{b}_Q)$ -bimodules ou (W_Q, E_Q) -décomposition de \mathfrak{m}_Q suivant la terminologie de Bushnell–Kutzko ([Bu-Ku] (1.2.6))

$$\nu_{W_Q} : \text{End}_F(E_Q) \otimes_{E_Q} \mathfrak{b}_Q \xrightarrow{\cong} \mathfrak{m}_Q. \tag{2.1.2}$$

Explicitement, l’isomorphisme 2.1.(2) est donné par l’injection 2.1.(1), l’inclusion canonique de \mathfrak{b}_Q dans \mathfrak{m}_Q et la multiplication dans \mathfrak{m}_Q .

* Bien que ces propriétés ne soient pas réellement indispensables à la construction (les conditions $x \in \mathcal{M} \cap \mathbf{M}$ et $s(x) = 1$ suffisant à la démonstration), on espère ainsi mettre en évidence les mécanismes distinguant le cas séparable du cas inséparable d’une part, le cas séparable modéré du cas séparable sauvage d’autre part.

Notons \mathcal{A}_Q l'unique \mathcal{O}_F -ordre héréditaire de $\text{End}_F(E_Q)$ normalisé par E_Q^\times et \mathcal{A}_Q^m ($m \in \mathbb{Z}$) les puissances du radical de Jacobson \mathcal{A}_Q^1 de \mathcal{A}_Q . Alors la (W_Q, E_Q) -décomposition 2.1.(2) induit, par restriction pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, un isomorphisme de $(\mathcal{A}_Q, \mathcal{B}_Q)$ -bimodules ([Bu-Ku] Cor. (1.2.8))

$$\mathcal{A}_Q \otimes_{\mathcal{O}_Q} \mathcal{B}_Q^m \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_Q^m. \quad 2.1.(3)$$

Soit $s_{0,Q}: \text{End}_F(E_Q) \rightarrow E_Q$ l'unique corestriction modérée sur $\text{End}_F(E_Q)$ relativement à E_Q/F telle que $s_Q = s_{0,Q} \otimes 1_{\mathfrak{b}}$ en termes de la (W_Q, E_Q) -décomposition 2.1.(2) ([Bu-Ku] Prop. (1.3.9)).

Commençons par montrer que la pré-image de 1 (l'élément unité de E_Q) par la corestriction $s_{0,Q}$ est d'intersection non vide avec $\mathcal{A}_Q \cap \text{Aut}_F(E_Q)$. Rappelons que $s_{0,Q}(\mathcal{A}_Q^m) = \mathcal{P}_Q^m$ ($m \in \mathbb{Z}$) ([Bu-Ku] Prop. (1.3.4)(ii)). Comme $1 + \mathcal{P}_Q$ est ouvert dans \mathcal{O}_Q , $(s_{0,Q}^{-1}(1 + \mathcal{P}_Q)) \cap \mathcal{A}_Q$ est ouvert dans \mathcal{A}_Q , non vide car $1 + \mathcal{P}_Q \subset \mathcal{O}_Q = s_{0,Q}(\mathcal{A}_Q)$, par suite d'intersection non vide avec $\mathcal{A}_Q \cap \text{Aut}_F(E_Q)$. Donnons-nous un élément $a \in \mathcal{A}_Q \cap \text{Aut}_F(E_Q)$ tel que $s_{0,Q}(a) = 1 + \alpha$ pour un élément $\alpha \in \mathcal{P}_Q$. Ainsi, $(1 + \alpha) \in \mathcal{O}_Q^\times$ et $s_{0,Q}((1 + \alpha)^{-1}a) = (1 + \alpha)^{-1}s_{0,Q}(a) = 1$. Enfin, comme $\mathcal{O}_Q^\times \mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_Q$, l'élément $(1 + \alpha)^{-1}a$ appartient à $\mathcal{A}_Q \cap \text{Aut}_F(E_Q)$.

Soit $x_{0,Q}$ un élément de $\mathcal{A}_Q \cap \text{Aut}_F(E_Q)$ appartenant à la pré-image de 1 par la corestriction $s_{0,Q}$ et tel que le commutant L_Q de $x_{0,Q}$ dans E_Q soit une sous-extension de E_Q/F de degré maximal. Soit x_Q l'élément de $\mathcal{M}_Q \cap M_Q$ défini par

$$x_Q = \iota_{W_Q}(x_{0,Q}) = \nu_{W_Q}(x_{0,Q} \otimes_{E_Q} 1).$$

Par construction, $s_Q(x_Q)$ est l'élément unité de \mathfrak{b}_Q .

REMARQUE 2.1.1. (1) Si l'extension E_Q/F est séparable, la projection orthogonale $\text{pr}_Q: \text{End}_F(E_Q) \rightarrow E_Q$ relativement à l'accouplement non-dégénéré sur $\text{End}_F(E_Q)$

$$(v, w) \mapsto \text{Tr}_{\text{End}_F(E_Q)/F}(vw) \quad ((v, w) \in \text{End}_F(E_Q) \times \text{End}_F(E_Q)),$$

est un (E_Q, E_Q) -homomorphisme non nul (cette propriété caractérise les extensions séparables de F).

Le caractère de E_Q défini par

$$z \mapsto \tau_F \circ \text{Tr}_{\text{End}_F(E_Q)/F}(z) = \tau_F \circ \text{Tr}_{E_Q/F}(z) \quad (z \in E_Q)$$

a pour conducteur $\mathcal{P}_F \mathcal{D}_Q^{-1}$, \mathcal{D}_Q désignant la *différente* de l'extension E_Q/F . Par conséquent, l'application pr_Q est une corestriction modérée sur $\text{End}_F(E_Q)$ relativement à E_Q/F (et donc coïncide avec $u_Q s_{0,Q}$ pour un élément $u_Q \in \mathcal{O}_Q^\times$) si et seulement si $\mathcal{P}_F \mathcal{D}_Q^{-1} = \mathcal{P}_Q$, c'est-à-dire si et seulement si l'extension E_Q/F est

modérément ramifiée (cf. [Bu-Ku] Remark (1.3.8)(ii)). Si tel est le cas, l'élément $x_{0,Q} = u_Q$ est l'unique élément de $\text{Aut}_F(E_Q)$ vérifiant les hypothèses de la construction.

Si tel n'est pas le cas (i.e. si l'extension E_Q/F est séparable mais possède une composante sauvage non-triviale), l'exposant de Swan $\text{Sw}_Q = d_Q - (e_Q - 1)$ de l'extension E_Q/F où d_Q désigne l'exposant de la différentielle, est strictement positif ([Se] Prop. 13) et l'application

$$v \mapsto \varpi_Q^{\text{Sw}_Q} \text{pr}_Q(v) \quad (v \in \text{End}_F(E_Q))$$

est une corestriction modérée sur $\text{End}_F(E_Q)$ relativement à E_Q/F . Elle coïncide donc avec $u_Q s_{0,Q}$ pour un élément $u_Q \in \mathcal{O}_Q^\times$, et $u_Q \varpi_Q^{-\text{Sw}_Q}$ est l'unique élément de E_Q^\times appartenant à la pré-image de 1 par la corestriction $s_{0,Q}$. Il n'appartient pas à l' \mathcal{O}_F -ordre \mathcal{A}_Q .

(2) Si l'extension E_Q/F est inséparable, alors la restriction à E_Q de l'accouplement non-dégénéré sur $\text{End}_F(E_Q)$ décrit en 2.1.1.(1) est identiquement nulle. Par conséquent E_Q est dans le noyau de l'application $s_{0,Q}$, donc d'intersection vide avec la pré-image de 1 par $s_{0,Q}$. \square

Soit $x \in \mathcal{M} \cap M$ l'élément défini par

$$x = \left(\prod_{Q \in \Phi(y)} x_Q \right) \in \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{M}_Q = \mathcal{M}.$$

REMARQUE 2.1.2. Pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, l'inclusion de W_Q dans V_Q et l'action de l'élément y_Q sur V_Q induisent un isomorphisme de E_Q -algèbres $E_Q \otimes_F \text{End}_F(W_Q) \rightarrow \mathfrak{b}_Q$; comme le commutant de l'élément x_Q dans \mathfrak{b}_Q coïncide avec l'image de $L_Q \otimes_F \text{End}_F(W_Q)$ par cet isomorphisme ([Bu-Ku] Prop. (1.4.2)), le centralisateur B_{x_Q} de x_Q dans B est isomorphe au groupe des éléments inversibles de $L_Q \otimes_F \text{End}_F(W_Q)$ donc isomorphe à $\text{GL}_{\alpha_Q}(L_Q)$.

Sans approfondir davantage les propriétés de l'élément x , signalons toutefois que, mis à part les deux cas (non-exclusifs l'un de l'autre) suivants

- (i) y séparable modéré (auquel cas x appartient au centre de \mathfrak{b} , cf. la Remarque 2.1.1),
- (ii) y régulier (i.e. $\alpha_Q = 1$ pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$),

l'AdB-orbite de x , homéomorphe au produit $\prod_{Q \in \Phi(y)} (\text{GL}_{\alpha_Q}(E_Q) / \text{GL}_{\alpha_Q}(L_Q))$, n'est pas bornée. Cette 'propriété' nous a en particulier interdit d'utiliser l'approche à laquelle nous avons initialement pensé: reprenant la méthode exposée par Harish-Chandra dans [Ha 1], on peut aisément ramener l'étude d'une distribution AdG-invariante sur G au voisinage de y dans G à celle d'une distribution AdB-invariante sur $\text{AdB}(x\mathfrak{b})$ au voisinage de 0 dans $\text{AdB}(x\mathfrak{b})$. Mais le fait que l'AdB-orbite de

x ne soit en général pas bornée empêche de tirer brutalement la construction sur \mathfrak{b} en 'tuant' x avec la coresstriction s ; on tombe en effet sur une intégrale dont on ne sait dire, a priori, si elle converge. Après quelques essais infructueux dans cette direction, on a finalement opté pour une autre approche: la submersion qui permet de descendre sur $\text{Ad}B(x\mathfrak{b})$ permet tout aussi bien de descendre sur $x\mathfrak{b}$, cette fois sans la propriété d'invariance. Mais la construction se transportant naturellement de $x\mathfrak{b}$ à \mathfrak{b} , on retrouve – il est vrai péniblement – cette propriété d'invariance sur \mathfrak{b} (n° 2.3). \square

2.2. Construction d'une submersion généralisant celle utilisée par Harish-Chandra dans le cadre séparable ([Ha 3] Sect. 17 ou [Ro] Prop. 1).

Pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, l'application

$$[y_Q, \cdot] : \mathfrak{m}_Q \rightarrow \mathfrak{m}_Q, \quad v \mapsto [y_Q, v]$$

induit une suite exacte scindée de \mathfrak{b}_Q -modules gauches (cf. [Bu-Ku](1.4))

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_Q \mathfrak{b}_Q \xrightarrow{[y_Q, \cdot]} \mathfrak{m}_Q \xrightarrow{s_Q} \mathfrak{b}_Q \rightarrow 0$$

et une décomposition de \mathfrak{m}_Q en

$$\mathfrak{m}_Q = y_Q x_Q \mathfrak{b}_Q \oplus [y_Q, \mathfrak{m}_Q].$$

Soit U la partie de \mathfrak{m} définie par

$$U = x\mathfrak{b} = \prod_{Q \in \Phi(y)} x_Q \mathfrak{b}_Q$$

et soit V_m un sous- F -espace de \mathfrak{m} supplémentaire de \mathfrak{b} dans \mathfrak{m} (le choix de V_m n'a pas d'importance pour notre propos).

Avec les notations du numéro 1.3, soit V le supplémentaire de \mathfrak{b} dans \mathfrak{g} défini par

$$V = \mathfrak{n}^- \oplus V_m \oplus \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}.$$

Pour chaque élément $w \in \text{Ad}B(U)$, soit $\Phi_w : U \times V \rightarrow \mathfrak{g}$ l'application définie par

$$\Phi_w(u, v) = yu + [y(1 + w), v] \quad ((u, v) \in U \times V).$$

LEMME 2.2.1. *L'application Φ_0 est bijective.*

Démonstration. Comme $y \in \mathfrak{m}$, $[y, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ et $[y, \mathfrak{n}^-] \subset \mathfrak{n}^-$. Le commutant \mathfrak{b} de y dans \mathfrak{g} étant contenu dans \mathfrak{m} , l'application

$$\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{n}, \quad v \mapsto [y, v]$$

est un isomorphisme de F -espaces vectoriels. Il suffit donc de montrer que la restriction de Φ_0 à $U \times V_{\mathfrak{m}}$ induit une bijection de $U \times V_{\mathfrak{m}}$ sur \mathfrak{m} . Or

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \prod_{Q \in \Phi(y)} (y_Q x_Q \mathfrak{b}_Q \oplus [y_Q, \mathfrak{m}_Q]) \\ &= yU \oplus [y, \mathfrak{m}] \\ &= yU \oplus [y, V_{\mathfrak{m}}]. \end{aligned}$$

D'où le Lemme 2.2.1. □

Soit U' le voisinage ouvert de 0 dans U défini par

$$U' = \left\{ w \in U \text{ tel que } \begin{array}{l} \text{(i) } \det_{\mathfrak{m}/F}(1+w) \neq 0 \text{ (i.e. } 1+w \in M) \\ \text{(ii) } \det_{\text{End}_{F(\mathfrak{g})}/F}(\Phi_w \circ \Phi_0^{-1}) \neq 0 \text{ (i.e. } \Phi_w \text{ est bijective)} \end{array} \right\}.$$

La proposition suivante, simple application de travaux assez anciens d'Harish-Chandra ([Ha 1] Lemma 12), est la clé permettant d'étendre au cas où y est semi-simple mais pas nécessairement séparable les techniques développées par Harish-Chandra puis Rodier dans le cadre séparable.

PROPOSITION 2.2.2. *L'application $\delta : G \times U' \rightarrow G$ définie par*

$$\delta(g, u) = gy(1+u)g^{-1} \quad ((g, u) \in G \times U')$$

est partout submersive

Démonstration. Il s'agit de vérifier que la différentielle $d\delta_{(g,u)}$ de l'application δ au point (g, u) est surjective pour tout $(g, u) \in G \times U'$. La relation $\delta(hg, u) = h\delta(g, u)h^{-1}$ pour tout $(h, g, u) \in G \times G \times U$ nous permet de n'effectuer la vérification qu'aux points $(1, u)$, $u \in U'$.

Soit donc u un élément de U' . Identifiant l'espace tangent à $G \times U'$ au point $(1, u)$ à $\mathfrak{g} \times U$ et l'espace tangent à G au point $y(1+u)$ à \mathfrak{g} , la différentielle $d\delta_{(1,u)}$ de δ au point $(1, u)$ s'écrit

$$d\delta_{(1,u)} : \mathfrak{g} \times U \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (X, xH) \mapsto yxH + [y(1+u), -X].$$

On conclut grâce à la bijectivité de l'application Φ_u . □

De l'égalité $\text{Adg}(y(+\text{Adb}(u))) = \text{Adb}(y(1+u))$ pour tout $(g, b, u) \in G \times B \times U$, on déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.2.3. *Pour tout élément $b \in B$, l'application*

$$\delta_b : G \times \text{Adb}(U') \rightarrow G, \quad (g, w) \mapsto gy(1+w)g^{-1}$$

est partout submersive. □

2.3. Le principe de submersion d'Harish-Chandra ([Ha 2] Theorem 11).

Soit π une représentation admissible irréductible de G et soit Θ_π le caractère-distribution de π induit par la mesure de Haar dg sur G .

Soit du la mesure de Haar sur le groupe additif U , image de la mesure dH sur \mathfrak{b} (cf. n° 1.4) par l'isomorphisme de variétés ϖ_F -adiques $\mathfrak{b} \rightarrow U, H \mapsto xH$ d'application réciproque la restriction de s à U .

Comme l'application $\delta : G \times U' \rightarrow G$ est partout submersive (Proposition 2.2.2), il existe une et une seule application linéaire surjective ([Ha 2] Theorem 11; [Ha 1] Theorem 1 pour la démonstration)

$$C_c^\infty(G \times U') \rightarrow C_c^\infty(\delta(G \times U')), \quad \varphi \mapsto \varphi^\delta$$

telle que

$$\iint_{G \times U'} \varphi(g, u) F(gy(1+u)g^{-1}) dg du = \int_G \varphi^\delta(g) F(g) dg$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(G \times U')$ et toute fonction $F \in C_c^\infty(\delta(G \times U'))$. De plus, l'image φ^δ d'une fonction $\varphi \in C_c^\infty(G \times U')$ étant obtenue en intégrant φ sur les fibres de l'application δ , son support vérifie la relation d'inclusion $\text{Supp}(\varphi^\delta) \subset \delta(\text{Supp}(\varphi))$.

Le Lemme suivant n'est que la traduction, en termes de la submersion δ , du Lemme 21 de [Ha 2] énoncé et démontré par Harish-Chandra pour une autre submersion.

LEMME 2.3.1. *Il existe une unique distribution ϑ_π sur U' telle que*

$$\langle \vartheta_\pi, \varphi^\delta \rangle = \langle \Theta_\pi, \varphi \rangle$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(G \times U')$, où $\varphi^\delta \in C_c^\infty(U')$ est définie par

$$\varphi^\delta(u) = \int_G \varphi(g, u) dg \quad (u \in U').$$

Démonstration ([Ha 2] Lemma 21). Soit D_π la distribution sur $G \times U'$ définie par

$$\langle D_\pi, \varphi \rangle = \langle \Theta_\pi, \varphi^\delta \rangle \quad (\varphi \in C_c^\infty(G \times U')).$$

Pour tout élément $a \in G$ et toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(G \times U')$, notons $\lambda^*a(\varphi) \in C_c^\infty(G \times U')$ la fonction définie par

$$\lambda^*a(\varphi)(g, u) = \varphi(a^{-1}g, u) \quad ((g, u) \in G \times U').$$

Soient un élément $a \in G$ et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(G \times U')$, alors

$$\begin{aligned} \int_G (\lambda^*a(\varphi))^\delta(g) F(g) dg &= \iint_{G \times U'} \varphi(a^{-1}g, u) F(gy(1+u)g^{-1}) dg du \\ &= \iint_{G \times U'} \varphi(g, u) \text{Ad}^*a^{-1}(F)(g(y(1+u))) dg du \\ &= \int_G \varphi^\delta(g) \text{Ad}^*a^{-1}(F)(g) dg \\ &= \int_G \text{Ad}^*a(\varphi^\delta)(g) F(g) dg \end{aligned}$$

pour toute fonction $F \in C_c^\infty(\delta(G \times U'))$ et donc (propriété d'unicité de l'application $\phi \mapsto \phi^\delta$)

$$(\lambda^*a(\varphi))^\delta = \text{Ad}^*a(\varphi^\delta).$$

Comme la distribution Θ_π est $\text{Ad}G$ -invariante sur G , on a montré la relation

$$\langle D_\pi, \lambda^*a(\varphi) \rangle = \langle D_\pi, \varphi \rangle \quad (a \in G, \varphi \in C_c^\infty(G \times U')).$$

Pour chaque fonction $\beta \in C_c^\infty(U')$, notons $\tau_\pi(\beta)$ la distribution sur G définie par

$$\langle \tau_\pi(\beta), \phi \rangle = \langle D_\pi, \phi \otimes \beta \rangle \quad (\phi \in C_c^\infty(G)).$$

Alors, notant encore λ l'action de G sur G par multiplication à gauche,

$$\begin{aligned} \langle \tau_\pi(\beta), \lambda^*a(\phi) \rangle &= \langle D_\pi, \lambda^*a(\phi \otimes \beta) \rangle \\ &= \langle D_\pi, \phi \otimes \beta \rangle \\ &= \langle \tau_\pi(\beta), \phi \rangle \end{aligned}$$

pour tout élément $a \in G$ et toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G)$. On en déduit ([Ha 2] Lemma 17) que $\tau_\pi(\beta) = \vartheta_\pi(\beta) du$ pour une constante complexe $\vartheta_\pi(\beta)$. Fixons une fonction $\phi_0 \in C_c^\infty(G)$ telle que $\int_G \phi_0(g) dg = 1$. La relation $\vartheta_\pi(\beta) = \langle \tau_\pi(\beta), \phi_0 \rangle = \langle D_\pi, \phi_0 \otimes \beta \rangle$ ($\beta \in C_c^\infty(U')$) nous assure que l'application

$$\beta \mapsto \vartheta_\pi(\beta) \quad (\beta \in C_c^\infty(U'))$$

est une distribution sur U' .

Comme $C_c^\infty(G \times U') = C_c^\infty(G) \otimes C_c^\infty(U')$ ([Ha 2] Corol. of Lemma 16), la relation

$$\begin{aligned} \left(\int_G \phi(g) dg \right) \langle \vartheta_\pi, \beta \rangle &= \langle D_\pi, \phi \otimes \beta \rangle \\ &= \langle \Theta_\pi, (\phi \otimes \beta)^\beta \rangle \quad ((\phi, \beta) \in C_c^\infty(G) \times C_c^\infty(U')) \end{aligned}$$

et la linéarité de l'application $\varphi \mapsto \varphi^\delta$ entraînent

$$\langle \vartheta_\pi, \varphi_\delta \rangle = \langle \Theta_\pi, \varphi^\delta \rangle \quad (\varphi \in C_c^\infty(G \times U')).$$

Enfin, comme $\beta = (\phi_0 \otimes \beta)^\delta$ ($\beta \in C_c^\infty(U')$), l'application $C_c^\infty(G \times U') \rightarrow C_c^\infty(U')$, $\varphi \mapsto \varphi_\delta$ est surjective et ϑ_π est uniquement déterminée par D_π , donc (conséquence cette fois de la surjectivité de l'application $\varphi \mapsto \varphi^\delta$) par Θ_π . \square

Mis à part le cas où pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, l'extension E_Q/F est séparable et modérément ramifiée, auquel cas l'élément x appartient au centre de \mathfrak{b} (cf. la Remarque 2.1.1) et $\vartheta_\pi \in J_B(\mathfrak{b})$, la distribution ϑ_π construite ci-dessus est peu agréable à étudier comme telle. L'idée est de montrer que la distribution sur $s(U') \subset \mathfrak{b}$ définie par

$$\phi \mapsto \langle \vartheta_\pi, (\phi \circ s)|_{U'} \rangle \quad (\phi \in C_c^\infty(s(U'))),$$

coïncide sur un voisinage ouvert compact $s(U'') \subset s(U')$ de 0 dans \mathfrak{b} avec la restriction à $s(U'')$ d'une distribution $\text{Ad}B$ -invariante sur $\text{Ad}B(s(U''))$. Pour ce faire, on exploite de manière un peu plus précise le principe de submersion d'Harish-Chandra, essentiellement la propriété d'unicité de l'application $\varphi \mapsto \varphi^\delta$.

Pour chaque élément $b \in B$, notons U'_b la partie $\text{Ad}b(U')$ de \mathfrak{m} . On reprend avec les couples d'objets (δ_b, U'_b) ($b \in B$), les constructions déjà effectuées avec le couple (δ, U') . Comme l'application $\delta_b : G \times U'_b \rightarrow G$ est partout submersive (Corollaire 2.2.3), il existe une et une seule application linéaire surjective ([Ha 2] Theorem 11)

$$C_c^\infty(G \times U'_b) \rightarrow C_c^\infty(\delta_b(G \times U'_b)), \quad \varphi \mapsto \varphi^{\delta_b}$$

telle que

$$\int \int_{G \times U'} \varphi(g, bub^{-1}) F(gy(1 + bub^{-1})g^{-1}) dg du = \int_G \varphi^{\delta_b}(g) F(g) dg$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(G \times U'_b)$ et toute fonction $F \in C_c^\infty(\delta_b(G \times U'_b)) = C_c^\infty(\delta(G \times U'))$. De même, la démonstration du Lemme 21 de [Ha 1] appliquée

à la submersion δ_b entraîne (cf. le Lemme 2.3.1) l'existence et l'unicité d'une distribution $\vartheta_\pi(b)$ sur U'_b telle que

$$\langle \vartheta_\pi(b), \varphi_{\delta_b} \rangle = \langle \Theta_\pi, \varphi^{\delta_b} \rangle$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(G \times U'_b)$, où $\varphi_{\delta_b} \in C_c^\infty(U'_b)$ est définie par

$$\varphi_{\delta_b}(w) = \int_G \varphi(g, w) dg \quad (w \in U'_b).$$

Soit c_0 le plus petit $c \in \mathbb{Z}$ tel que $x\mathcal{B}^c \subset U'$. Notons U'' le voisinage ouvert compact de 0 dans U' défini par $U'' = x\mathcal{B}^{c_0}$ et $U''_b = \text{Ad}b(U'') \subset U'_b$ ($b \in B$).

Soit \mathcal{E} le \mathbb{C} -espace vectoriel somme directe des $C_c^\infty(U''_b)$ ($b \in B$) (i.e. le \mathbb{C} -espace des sommes formelles $\bigoplus_{b \in B} \varphi_b$, $\varphi_b \in C_c^\infty(U''_b)$, $\varphi_b \equiv 0$ pour presque tout $b \in B$) et soit \mathcal{E}_1 le sous-espace de \mathcal{E} formé des éléments $\bigoplus_{b \in B} \varphi_b$ tels que $(\sum_{b \in B} \varphi_b)(w) = 0$ pour tout $w \in \text{Ad}B(U'')$ où $B(w) = \{b \in B / w \in U''_b\} \subset B$ ($w \in \text{Ad}B(U'')$).

LEMME 2.3.2.

(1) Pour tout élément $b \in B$ et toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U')$,

$$\langle \vartheta_\pi(b), \text{Ad}^*b(\varphi) \rangle = \langle \vartheta_\pi, \varphi \rangle.$$

(2) Pour tout couple $(b, c) \in B \times B$ et toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U'_b \cap U'_c)$,

$$\langle \vartheta_\pi(b), \varphi \rangle = \langle \vartheta_\pi(c), \varphi \rangle.$$

(3) Pour tout élément $\bigoplus_{b \in B} \varphi_b \in \mathcal{E}_1$

$$\sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(b), \varphi_b \rangle = 0.$$

Démonstration. (1) Soient un élément $b \in B$ et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(U')$. Notant λ l'action de G sur G définie par $\lambda g(h) = hg^{-1}$ ($(g, h) \in G \times G$), on a

$$\begin{aligned} & \iint_{G \times U'} \phi(g) \text{Ad}^*b(\varphi)(\text{Ad}b(u)) F(gy(1 + \text{Ad}b(u))g^{-1}) dg du \\ &= \iint_{G \times U} \phi(gb^{-1}) \varphi(u) F(gy(1 + u)g^{-1}) dg du \quad (g \mapsto gb^{-1}) \\ &= \int_G (\lambda^*b^{-1}(\phi) \otimes \varphi)^\delta(g) F(g) dg \end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G)$ et toute fonction $F \in C_c^\infty(\delta(G \times U'))$. L'unicité de l'application δ_b entraînant la relation

$$(\phi \otimes \text{Ad}^*b(\varphi))^{\delta_b} = (\lambda^*b^{-1}(\phi) \otimes \varphi)^\delta \quad (\phi \in C_c^\infty(G)),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 \langle \vartheta_\pi(b), \text{Ad}^*b(\varphi) \rangle &= \langle \vartheta_\pi(b), (\phi_0 \otimes \text{Ad}^*b(\varphi))_{\delta_b} \rangle \\
 &= \langle \Theta_\pi, (\phi_0 \otimes \text{Ad}^*b(\varphi))^{\delta_b} \rangle \\
 &= \langle \Theta_\pi, (\lambda^*b^{-1}(\phi_0) \otimes \varphi)^\delta \rangle \\
 &= \langle \vartheta_\pi, (\lambda^*b^{-1}(\phi_0) \otimes \varphi)_\delta \rangle = \langle \vartheta_\pi, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi_0 \in C_c^\infty(G)$ telle que $\int_G \phi_0(g) dg = 1$.

(2) Commençons par traiter le cas où $c = 1$. Soient un élément $b \in B$ et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(U'_b \cap U')$. Pour tout $u \in U' \cap \text{Ad}b^{-1}(U')$, la relation $s(bub^{-1}) = bs(u)b^{-1}$ entraîne l'égalité $bub^{-1} = xbs(u)b^{-1}$; par conséquent le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 U' \cap \text{Ad}b^{-1}(U') & \xrightarrow{\text{Ad}b} & U'_b \cap U' \\
 \downarrow s & & \downarrow s \\
 s(U' \cap \text{Ad}b^{-1}(U')) & \xrightarrow{\text{Ad}b} & s(U'_b \cap U')
 \end{array}$$

est commutatif. Comme la mesure dH sur \mathfrak{b} est $\text{Ad}B$ -invariante, on obtient

$$\begin{aligned}
 &\iint_{G \times U'} \phi(g)\varphi(bub^{-1}) F(gy(1 + bub^{-1})g^{-1}) dg du \\
 &= \iint_{G \times U'} \phi(g)\varphi(u) F(gy(1 + u)g^{-1}) dg du \quad (u \mapsto b^{-1}ub) \\
 &= \int_G (\phi \otimes \varphi)^\delta(g) F(g) dg
 \end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G)$ et toute fonction $F \in C_c^\infty(\delta(G \times U'))$, puis

$$(\phi \otimes \varphi)^{\delta_b} = (\phi \otimes \varphi)^\delta \quad (\phi \in C_c^\infty(G))$$

grâce à l'unicité de l'application δ_b . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \langle \vartheta_\pi(b), \varphi \rangle &= \langle \vartheta_\pi(b), (\phi_0 \otimes \varphi)_{\delta_b} \rangle \\
 &= \langle \Theta_\pi, (\phi_0 \otimes \varphi)^{\delta_b} \rangle \\
 &= \langle \Theta_\pi, (\phi_0 \otimes \varphi)^\delta \rangle \\
 &= \langle \vartheta_\pi, (\phi_0 \otimes \varphi)_\delta \rangle = \langle \vartheta_\pi, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi_0 \in C_c^\infty(G)$ telle que $\int_G \phi_0(g) dg = 1$.

Passons au cas général. Soient un couple $(b, c) \in B \times B$ et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(U'_b \cap U'_c)$. Comme $\varphi = \text{Ad}^*b(\text{Ad}^*b^{-1}(\varphi))$ et $\text{Ad}^*b^{-1}(\varphi) \in C_c^\infty(U')$, le point (1) du Lemme 2.3.2 entraîne l'égalité $\langle \vartheta_\pi(b), \varphi \rangle = \langle \vartheta_\pi, \text{Ad}^*b^{-1}(\varphi) \rangle$; posant $d = b^{-1}c$, on a $\text{Ad}^*b^{-1}(\varphi) \in C_c^\infty(U' \cap U'_d)$ et donc $\langle \vartheta_\pi, \text{Ad}^*b^{-1}(\varphi) \rangle = \langle \vartheta_\pi(d), \text{Ad}^*b^{-1}(\varphi) \rangle$ grâce au cas particulier du point (2) montré ci-dessus. De nouveau grâce au point (1), on obtient $\langle \vartheta_\pi(d), \text{Ad}^*b^{-1}(\varphi) \rangle = \langle \vartheta_\pi, \text{Ad}^*d^{-1}b^{-1}(\varphi) \rangle$ avec $d^{-1}b^{-1} = c^{-1}$, puis $\langle \vartheta_\pi, \text{Ad}^*c^{-1}(\varphi) \rangle = \langle \vartheta_\pi(c), \varphi \rangle$.

(3) Pour chaque élément $\oplus_{b \in B} \varphi_b \in \mathcal{E}$, notons $\sigma(\oplus_{b \in B} \varphi_b) \subset B$ l'ensemble (fini) des éléments $b \in B$ tels que $\varphi_b \neq 0$. On raisonne par induction sur le cardinal de $\sigma(\oplus_{b \in B} \varphi_b)$.

Si $\oplus_{b \in B} \varphi_b = 0_{\mathcal{E}}$, alors $\sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(b), \varphi_b \rangle = 0$. Par ailleurs, il est clair que si $\oplus_{b \in B} \varphi_b \in \mathcal{E}_1$ et si $\oplus_{b \in B} \varphi_b \neq 0_{\mathcal{E}}$, alors le cardinal de $\sigma(\oplus_{b \in B} \varphi_b)$ est ≥ 2 .

Soit donc un élément $\oplus_{b \in B} \varphi_b \in \mathcal{E}_1$ tel que $\sigma(\oplus_{b \in B} \varphi_b) = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ pour un entier $n \geq 1$. Pour chaque $m \in \{1, \dots, n\}$, la partie

$$W_m = U''_{b_{n+1}} \cap U''_{b_m}$$

est ouverte compacte dans U''_{b_m} . On peut donc décomposer l'élément $\oplus_{b \in B} \varphi_b$ en

$$\bigoplus_{b \in B} \varphi_b = \left(\bigoplus_{b \in B} \phi_b \right) + \left(\bigoplus_{b \in B} \psi_b \right)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{b_{n+1}} = \varphi_{b_{n+1}} \text{ (resp. } \psi_{b_{n+1}} = 0) \\ \phi_{b_m} = \varphi_{b_m}|_{W_m} \text{ prolongée par 0 sur } U''_{b_m} - W_m \\ \text{(resp. } \psi_{b_m} = \varphi_{b_m} - \phi_{b_m}) \text{ si } 1 \leq m \leq n. \\ \phi_b = \psi_b = 0 \text{ si } b \notin \sigma\left(\bigoplus_{b \in B} \varphi_b\right) \end{array} \right.$$

Par construction, $\bigoplus_{b \in B} \phi_b \in \mathcal{E}_1$, $\bigoplus_{b \in B} \psi_b \in \mathcal{E}_1$, $\#(\sigma(\bigoplus_{b \in B} \psi_b)) \leq n$ et

$$\begin{aligned} \sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(b), \phi_b \rangle &= \sum_{1 \leq m \leq n+1} \langle \vartheta_\pi(b_m), \phi_{b_m} \rangle \\ &= \left\langle \vartheta_\pi(b_{n+1}), \sum_{1 \leq m \leq n+1} \phi_{b_m} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

grâce au point (2) du Lemme 2.3.2.

D'où le point (3) du Lemme 2.3.2. □

Soit ϱ_π la forme linéaire sur \mathcal{E} définie par

$$\varrho_\pi \left(\bigoplus_{b \in B} \varphi_b \right) = \sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(b), \varphi_b \rangle = \left\langle \vartheta_\pi, \sum_{b \in B} \text{Ad}^* b^{-1}(\varphi_b) \right\rangle$$

pour tout élément $\bigoplus_{b \in B} \varphi_b \in \mathcal{E}$. On note encore ϱ_π la forme linéaire induite sur l'espace quotient $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ (grâce au Lemme 2.3.2.(3)).

Si $\phi \in C_c^\infty(\text{Ad}B(s(U''))) \subset C_c^\infty(\mathfrak{b})$, le support de ϕ est contenu dans l'union d'un nombre fini d'ouverts de \mathfrak{b} du type $s(U_b'') = \text{Ad}B(s(U''))$ ($b \in B$); par suite, ϕ admet une décomposition de la forme $\phi = \sum_{b \in B} \phi_b$ ($\phi_b \in C_c^\infty(s(U_b'')) \subset C_c^\infty(\mathfrak{b})$, $\phi_b \equiv 0$ pour presque tout $b \in B$) à laquelle on peut associer l'élément

$$\bigoplus_{b \in B} (\phi_b \circ s)|_{U_b''} \in \mathcal{E},$$

élément dont la classe modulo \mathcal{E}_1 ne dépend que de ϕ (au sens où cette classe est indépendante de la décomposition $\sum_{b \in B} \phi_b$ de ϕ choisie).

Soit D_π la distribution sur $\text{Ad}B(s(U''))$ définie par

$$\langle D_\pi, \phi \rangle = \varrho_\pi \left(\bigoplus_{b \in B} (\phi_b \circ s)|_{U_b} \right)$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\text{Ad}B(s(U''))) et toute décomposition $\phi = \sum_{b \in B} \phi_b$ ($\phi_b \in C_c^\infty(s(U_b''))$, $\phi_b \equiv 0$ pour presque tout $b \in B$).$

On aimerait, pour la suite, pouvoir travailler avec une distribution sur \mathfrak{b} . Il suffit pour cela de considérer la restriction de la distribution D_π à une partie ouverte fermée et $\text{Ad}B$ -invariante de \mathfrak{b} contenue dans $\text{Ad}B(s(U''))$. C'est l'objet de la construction ci-dessous.

Pour tout élément $g \in \mathfrak{g}$, notons $P_g(T) = \sum_{0 \leq m \leq N} a_m(g) T^m$ ($a_m(g) \in F$, $a_N(g) = 1$) le polynôme caractéristique de g . Soit \mathcal{U}_b la partie de \mathfrak{b} définie par

$$\mathcal{U}_b = \{b \in \mathfrak{b}, |a_m(b)|_F \leq 1 \text{ pour chaque } m \in \{0, \dots, N-1\}\}.$$

Alors ([Ro] Lemme 3), \mathcal{U}_b est une partie ouverte fermée $\text{Ad}B$ -invariante de \mathfrak{b} , $\mathcal{O}_F \mathcal{U}_b = \mathcal{U}_b$, et il existe une partie compacte \mathcal{K} de \mathfrak{b} telle que $\mathcal{U}_b \subset \text{Ad}B(\mathcal{K})$. Soit \mathcal{P}_F^k ($k \in \mathbb{Z}$) la plus petite puissance de l'idéal maximal de \mathcal{O}_F telle que $\mathcal{P}_F^k \mathcal{U}_b \subset \text{Ad}B(s(U'')) = \text{Ad}B(\mathcal{B}^{c_0})$ (cette définition a un sens car pour $m \in \mathbb{Z}$ suffisamment grand, $\mathcal{P}_F^m \mathcal{K} \subset \mathcal{B}^{c_0}$ et par conséquent $\mathcal{P}_F^m \mathcal{U}_b \subset \text{Ad}B(\mathcal{P}_F^m \mathcal{K}) \subset \text{Ad}B(\mathcal{B}^{c_0})$). Ainsi, $\Omega = \mathcal{P}_F^k \mathcal{U}_b$ est un voisinage ouvert fermé $\text{Ad}B$ -invariant (et compact modulo conjugaison dans B) de 0 dans \mathfrak{b} contenu dans $\text{Ad}B(s(U''))$.

Soit alors θ_π la distribution sur \mathfrak{b} définie par

$$\begin{cases} \theta_\pi|_{\mathfrak{b}-\Omega} \equiv 0 \\ \langle \theta_\pi, \phi \rangle = \langle D_\pi, \phi \rangle \quad \text{si } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \end{cases}.$$

PROPOSITION 2.3.3.

- (1) La distribution θ_π est $\text{Ad}B$ -invariante sur \mathfrak{b} .
 (2) Pour tout sous-groupe ouvert compact K de G et toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega \cap s(U''))$,

$$\langle \theta_\pi, \phi \rangle = \sum_{\rho \in \varepsilon(K)} \int_{U'} \phi \circ s(u) \Theta_\pi * \xi_\rho(y(1+u)) \, du.$$

Démonstration. (1) Soit une fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{b})$ et soit $\phi|_\Omega = \sum_{b \in B} \phi_b$ ($\phi_b \in C_c^\infty(s(U_b''))$, $\phi_b \equiv 0$ pour presque tout $b \in B$) une décomposition de la restriction de ϕ à Ω . Pour tout élément $\gamma \in B$, on a la décomposition $\text{Ad}^*\gamma(\phi)|_\Omega = \sum_{b \in B} \text{Ad}^*\gamma(\phi_b)$ où $\text{Ad}^*\gamma(\phi_b) \in C_c^\infty(s(U_{\gamma b}''))$ ($b \in B$), et l'égalité

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}\gamma^{-1}(\theta_\pi), \phi \rangle &= \langle \theta_\pi, \text{Ad}^*\gamma(\phi) \rangle \\ &= \sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(\gamma b), \text{Ad}^*\gamma(\phi_b) \circ s \rangle \\ &= \sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(\gamma b), \text{Ad}^*\gamma(\phi_b \circ s) \rangle \\ &= \sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(b), \phi_b \circ s \rangle = \langle \theta_\pi, \phi \rangle \end{aligned}$$

par définition de θ_π et grâce au point (1) du Lemme 2.3.2.

D'où le point (1) de la Proposition 2.3.3.

(2) Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et soit $\psi_K \in C_c^\infty(G)$ la fonction définie par $\psi_K = \text{vol}(K, dg)^{-1} \mathbf{1}_K$. La formule de Plancherel pour K (cf. n° 1.5)

$$\langle \Theta_\pi, F \rangle = \sum_{\rho \in \varepsilon(K)} \int_G F(g) \Theta_\pi * \xi_\rho(g) \, dg \quad (F \in C_c^\infty(G)),$$

entraîne la relation

$$\begin{aligned} \langle \theta_\pi, \phi \rangle &= \langle \vartheta_\pi, (\phi \circ s)|_{U''} \rangle \\ &= \langle \vartheta_\pi, (\psi_K \otimes (\phi \circ s))|_{U'} \delta \rangle \\ &= \langle \Theta_\pi, (\psi_K \otimes (\phi \circ s))|_{U'} \delta \rangle \\ &= \sum_{\rho \in \varepsilon(K)} \int_G (\psi_K \otimes (\phi \circ s))|_{U'} \delta(g) \Theta_\pi * \xi_\rho(g) \, dg, \end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega \cap s(U''))$.

Comme $\Theta_\pi * \xi_\rho$ ($\rho \in \varepsilon(K)$) est une fonction localement constante et $\text{Ad}K$ -invariante sur G , par définition de l'application $C_c^\infty(G \times U') \rightarrow C_c^\infty(\delta(G \times U'))$, $\varphi \mapsto \varphi^\delta$, on a

$$\begin{aligned} & \int_G (\psi_K \otimes (\phi \circ s)|_{U'})^\delta(g) \Theta_\pi * \xi_\rho(g) dg \\ &= \iint_{G \times U'} \psi_K(g) \phi \circ s(u) \Theta_\pi * \xi_\rho(gy(1+u)g^{-1}) dg du \\ &= \iint_{K \times U'} \text{vol}(K, dg)^{-1} \phi \circ s(u) \Theta_\pi * \xi_\rho(gy(1+u)g^{-1}) dg du \\ &= \int_{U'} \phi \circ s(u) \Theta_\pi * \xi_\rho(y(1+u)) du, \end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(s(U'))$ et toute représentation $\rho \in \varepsilon(K)$.

D'où le point (2) de la Proposition 2.3.3. \square

Soit c_1 le plus petit entier ≥ 1 tel que l'on ait l'inclusion $\mathcal{B}^{c_1} \subset \Omega \cap s(U'') = \Omega \cap \mathcal{B}^{c_0}$.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, notons $(\mathcal{B}^a)^\wedge$ le groupes des caractères de \mathcal{B}^a .

Si a est un entier $\geq c_1$, alors pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{B}^a)$, donc en particulier pour tout caractère de \mathcal{B}^a , le support de la restriction de $\phi \circ s$ à U'' est contenu dans l'ouvert $x\mathcal{B}^a$ de U'' . D'où la proposition suivante, conséquence de la formule d'intégration 2.3.3.(2).

PROPOSITION 2.3.4. *Soient un entier $a \geq c_1$ et un caractère $\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ tel que $\langle \theta_\pi, \bar{\chi} \rangle \neq 0$ (où $\bar{\chi} \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ désigne le caractère complexe-conjugué de χ). Sous ces hypothèses, il existe une représentation $\rho \in \varepsilon(G^a)$ telle que*

- (i) $\Theta_\pi * \xi_\rho|_{yG^a} \neq 0$
- (ii) $\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \rho(1+xH) dH \neq 0$.

Démonstration. La formule d'intégration 2.3.3.(2) pour $\bar{\chi} \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ donne

$$\begin{aligned} \langle \theta_\pi, \bar{\chi} \rangle &= \sum_{\tau \in \varepsilon(G^a)} \int_{x\mathcal{B}^a} \bar{\chi} \circ s(u) \Theta_\pi * \xi_\tau(y(1+u)) du \\ &= \sum_{\tau \in \varepsilon(G^a)} \int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \Theta_\pi * \xi_\tau(y(1+xH)) dH. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une représentation $\rho \in \varepsilon(G^a)$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \Theta_\pi * \xi_\rho(y(1+xH)) dH \neq 0.$$

Les inclusions $x\mathcal{B}^a \subset \mathcal{M}^a \subset \mathfrak{m} \cap \mathcal{G}^a$ entraînent le point (i) de la Proposition 2.3.4.

Quant au point (ii), il découle de la formule

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \Theta_\pi * \xi_\rho(y(1+xH)) \, dH \\ &= \iint_{G \times \mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \xi_\rho(g^{-1}y(1+xH)) \, d\Theta_\pi(g) \, dH \\ &= \frac{\deg(\rho)}{\text{vol}(G^a, dg)} \text{Tr} \left(\int_{yG^a} \rho(g^{-1}y) \left(\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \rho(1+xH) \, dH \right) d\Theta_\pi(g) \right) \end{aligned}$$

où $\text{Tr}(\Gamma(\rho))$ désigne la trace de l'opérateur $\Gamma(\rho)$. □

3. Etude locale des caractères sur G ([Ro] n° III)

Si F est de caractéristique nulle, la théorie de Kirillov permet, pour n'importe quel groupe algébrique réductif connexe G/F , de décrire les caractères des représentations irréductibles des petits sous-groupes ouverts compacts de $G(F)$. Pour $G = \text{GL}_N$, Rodier a établi un énoncé moins précis mais indépendant de la caractéristique (en remplaçant, comme on l'a déjà dit dans l'introduction, l'application exponentielle par l'application $\mathfrak{g} \rightarrow G, g \mapsto 1+g$) et permettant une étude locale du caractère-distribution Θ_π . Ce sont ces résultats que nous rappelons brièvement dans ce numéro.

3.1. Pour chaque entier $a \geq 1$, notons ε^a l'isomorphisme de variétés ϖ_F -adiques

$$\varepsilon^a: \mathcal{G}^a \rightarrow G^a, \quad g \mapsto 1+g.$$

Si a est un entier ≥ 1 et si n est un entier $\geq 2a$, alors G^{n-a}/G^n est central dans G^a/G^n et l'application ε^{n-a} induit par passage au quotient un isomorphisme de groupes $\varepsilon^{n-a}/\varepsilon^n: \mathcal{G}^{n-a}/\mathcal{G}^n \rightarrow G^{n-a}/G^n$. Par ailleurs, l'application $\Psi_{\mathfrak{g}}$ (cf. n° 1.4) induit un isomorphisme de \mathfrak{g} sur le groupe \mathfrak{g}^\wedge des caractères de \mathfrak{g} et, par restriction et passage au quotient, un isomorphisme de $\mathcal{G}^{1-n}/\mathcal{G}^{1+a-n}$ sur $(G^{n-a}/G^n)^\wedge$ (cf. par exemple [Bu] (1.13)).

Soient un entier $a \geq 1$ et une représentation $\rho \in \varepsilon(G^a)$ de niveau n , i.e. triviale sur G^n et non-triviale sur G^{n-1} . Supposons $n \geq 2a$. Alors ρ induit par restriction un caractère ω_ρ de G^{n-a} de la forme

$$g \mapsto \omega_\rho(1+g) = \Psi_{\mathfrak{g}}(zg) \quad (g \in \mathcal{G}^{n-a})$$

pour un élément $z \in \mathfrak{g}$ de norme $|z|_F = q^{n-1}$ déterminé de manière unique modulo \mathcal{G}^{1+a-n} . On note alors Z_ρ la classe $z + \mathcal{G}^{1+a-n} \in \mathcal{G}^{1-n}/\mathcal{G}^{1+a-n} \cong (G^{n-a}/G^a)^\wedge$.

On peut, sous ces hypothèses, énoncer le Lemme 1 de [Ro].

LEMME 3.1. *Soit $\lambda_\rho = \xi_\rho \circ \varepsilon^a \in C_c^\infty(\mathcal{G}^a)$. Alors Z_ρ est l'unique classe de $\mathcal{G}^{1-n}/\mathcal{G}^{1+a-n}$ satisfaisant la relation d'inclusion $\text{Supp}(\lambda_\rho^\wedge) \subset Z_\rho$. \square*

3.2. Conséquences du Lemme 3.1 quant à l'étude du caractère-distribution Θ_π au voisinage de y dans G . Recopions les Propositions 4 et 6 de [Ro]:

PROPOSITION 3.2.1. *Soit un entier a tel que la représentation π ait un vecteur non nul fixé par G^a . Soient un entier $n \geq 2a$ et une représentation $\rho \in \varepsilon(G^a)$ de niveau n et telle que $\Theta_\pi * \xi_\rho \neq 0$. Alors il existe un élément $z \in \mathcal{N}$ (de norme $|z|_F = q^{n-1}$) tel que $Z_\rho = z + \mathcal{G}^{1+a-n}$. \square*

PROPOSITION 3.2.2. *Il existe un entier $d = d(y) \leq 0$ tel que, si a, π, n et ρ vérifient toutes les hypothèses de la proposition 3.2.1 et si de plus la fonction $\Theta_\pi * \xi_\rho$ est non identiquement nulle sur le voisinage yG^a de y dans G , alors $Z_\rho \subset \mathfrak{b} + \mathcal{G}^{d+1+a-n}$. \square*

4. Etude locale des caractères sur \mathfrak{b}

On montre dans ce numéro comment les propriétés locales du caractère-distribution Θ_π rappelées au numéro 3, se traduisent sur la distribution θ_π construite au numéro 2.

Notons d_F la distance sur \mathfrak{g} associée à la norme $|\cdot|_F$. L'énoncé suivant fait directement écho au Lemme 2 de [Ro].

LEMME 4.1. *Pour tout voisinage ouvert compact \mathcal{W} de $S \cap \mathcal{N} \cap \mathfrak{b}$ dans $S \cap \mathfrak{b}$, il existe un entier $\nu = \nu(\mathcal{W}) \geq 1$ tel que si $g \in S \cap \mathcal{N}$ et si $d_F(g, \mathfrak{b}) \leq q^{-\nu}$, alors $s(gx) \in \mathcal{W}$.*

Démonstration. La partie \mathcal{W} étant ouverte compacte dans $S \cap \mathfrak{b}$, elle est ouverte compacte dans \mathfrak{b} et il existe un entier r tel que $\mathcal{W} + \mathcal{B}^r = \mathcal{W}$.

Soit $\zeta: (S \cap \mathcal{N})x \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $\zeta(g) = d_F(gx^{-1}, \mathfrak{b})$ ($g \in (S \cap \mathcal{N})x$). Alors $\zeta^{-1}(0) = (S \cap \mathcal{N} \cap \mathfrak{b})x$ et la partie \mathcal{V} de $(S \cap \mathcal{N})x$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= s^{-1}(\mathcal{W}) \cap ((S \cap \mathcal{N})x) \\ &= (\mathfrak{n}^{-1} \oplus \mathcal{W}x \oplus [y, \mathfrak{m}] \oplus \mathfrak{n}) \cap ((S \cap \mathcal{N})x), \end{aligned}$$

est un voisinage compact ouvert de $\zeta^{-1}(0)$ dans $(S \cap \mathcal{N})x$. La partie $(S \cap \mathcal{N})x - \mathcal{V}$ est compacte dans $(S \cap \mathcal{N})x$ et son image par l'application ζ ne contient pas 0; par conséquent il existe un entier $\nu \geq r+1$ tel que $\zeta((S \cap \mathcal{N})x - \mathcal{V}) \subset [2q^{-\nu}, +\infty[$.

Ainsi, les conditions $g \in S \cap \mathcal{N}$ et $d_F(g, \mathfrak{b}) \leq q^{-\nu}$ entraînent $gx \in \mathcal{V}$ et $s(gx) \in \mathcal{W}$. \square

Soit W un voisinage ouvert fermé de $\mathcal{N} \cap (\mathfrak{b} - \{0\})$ dans $\mathfrak{b} - \{0\}$ tel que $F^\times W = W$ (un tel voisinage existe car $\mathcal{N} \cap \mathfrak{b} = F(S \cap \mathcal{N} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$ induit

une sous-variété ϖ_F -adique compacte $F^\times \setminus (\mathcal{N} \cap (\mathfrak{b} - \{0\}))$ de l'espace projectif $F^\times \setminus (\mathfrak{b} - \{0\})$ et soit un entier $a(W, \pi)$ vérifiant les conditions

- (i) $a(W, \pi) \geq c_1$ (où c_1 est l'entier ≥ 1 de la Proposition 2.3.4) i.e. $\mathcal{B}^{a(W, \pi)} \subset \mathcal{B}^{c_1} \subset \Omega \cap s(U'')$.
- (ii) $a(W, \pi) \geq \nu - d$ (où d est un entier ≤ 0 comme dans la Proposition 3.2.2 et $\nu = \nu(S \cap W)$ est un entier ≥ 1 comme dans le Lemme 4.1).
- (iii) $(S \cap W) + \mathcal{B}^{a(W, \pi)-1} = S \cap W$.
- (iv) π possède un vecteur non nul fixé par le groupe $G^{a(W, \pi)}$.

Il est clair que tout entier a suffisamment grand vérifie ces propriétés.

PROPOSITION 4.2. *Soit un entier $a \geq a(W, \pi)$. Alors, pour tout caractère $\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ tel que $\langle \theta_\pi, \bar{\chi} \rangle \neq 0$, on a $\text{Supp}(\chi^\wedge) \subset W \cup (\mathcal{B}^{2a-1})^*$.*

Démonstration. On distingue deux cas de figure:

(1) Le caractère $\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ est non-trivial sur \mathcal{B}^{2a-1} . L'hypothèse $\langle \theta_\pi, \bar{\chi} \rangle \neq 0$ entraîne alors l'existence d'une représentation $\rho \in \varepsilon(G^a)$ telle que (Proposition 2.3.4)

$$\begin{cases} \Theta_\pi * \xi_\rho|_{\mathcal{Y}G^a} \neq 0 \\ \int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \rho(1 + xH) dH \neq 0 \end{cases}$$

Montrons que les conditions ci-dessus entraînent que le niveau n de ρ est $\geq 2a$. Supposons par l'absurde $n < 2a$; comme $x \in \mathcal{G}$, pour chaque élément $H \in \mathcal{B}^a$, ρ est constante sur la partie $1 + x(H + \mathcal{B}^n) \subset (1 + xH)G^n$ de G . D'où l'on déduit la relation

$$\int_{\mathcal{B}^n} \bar{\chi}(H) dH \neq 0,$$

laquelle entraîne que χ est trivial sur $\mathcal{B}^n \supset \mathcal{B}^{2a-1}$; contradiction.

Soit $z \in \mathcal{N}$ de norme $|z|_F = q^{n-1}$ tel que $Z_\rho = z + \mathcal{G}^{1+a-n}$ (Proposition 3.2.1).

Comme $\rho(1 + x(H' + H)) = \rho(1 + xH')\rho(1 + xH)$ ($(H', H) \in \mathcal{B}^a \times \mathcal{B}^{n-a}$), la condition

$$\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H) \rho(1 + xH) dH \neq 0$$

entraîne l'inégalité

$$\int_{\mathcal{B}^{n-a}} \bar{\chi}(H) \rho(1 + xH) dH \neq 0,$$

cette dernière assertion étant équivalente à

$$\int_{\mathcal{B}^{n-a}} \bar{\chi}(H) \Psi_{\mathfrak{g}}(zxH) dH \neq 0.$$

D'où l'on déduit (théorie des représentations des groupes finis) que

$$\chi(H) = \Psi_{\mathfrak{g}}(zxH) = \Psi_{\mathfrak{b}}(s(zx)H) \quad (H \in \mathcal{B}^{n-a}).$$

Rappelons que l'application $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}^\times, (H, H') \mapsto \Psi_{\mathfrak{b}}(HH')$ induit un isomorphisme de \mathfrak{b} sur le groupe \mathfrak{b}^\wedge des caractères de \mathfrak{b} , lui-même induisant par restriction et passage au quotient, un isomorphisme de $(\mathcal{B}^n)^*/(\mathcal{B}^{n-a})^*$ sur $(\mathcal{B}^{n-a}/\mathcal{B}^n)^\wedge$. Ainsi (cf. n° 1.4),

$$(\chi \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}^{n-a}})^\wedge = \text{vol}(\mathcal{B}^{n-a}, dH) \mathbf{1}_{s(zx) + (\mathcal{B}^{n-a})^*}$$

et

$$\text{Supp}(\chi^\wedge) \subset s(zx) + (\mathcal{B}^{n-a})^*$$

car

$$\begin{aligned} \chi^\wedge(H') &= \int_{\mathcal{B}^a} \chi(H) \overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H)} dH \\ &= \sum_{\mathcal{F}(\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a})} \chi(H'') \overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H'')} \int_{\mathcal{B}^{n-a}} \chi(H) \overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H)} dH \\ &= \sum_{\mathcal{F}(\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a})} \chi(H'') \overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H'')} (\chi \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}^{n-a}})^\wedge(H') \end{aligned}$$

pour tout élément $H' \in \mathfrak{b}$, $\mathcal{F}(\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a})$ désignant une famille (arbitraire) de représentants H'' des classes de $\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a}$.

La condition $a \geq \nu - d$ entraîne que $s(\varpi_F^{n-1}zx)$ appartient à $S \cap W$. En effet, $z \in \mathcal{N}$ est de norme $|z|_F = q^{n-1}$, par conséquent $\varpi_F^{n-1}z \in S \cap \mathcal{N}$ et, d'après le Lemme 4.1, il suffit de vérifier que $\varpi_F^{n-1}z$ satisfait l'inégalité $d_F(\varpi_F^{n-1}z, \mathfrak{b}) \leq q^{-\nu}$. Or $d_F(z, \mathfrak{b}) \leq q^{-(d+1+a-n)}$ (Proposition 3.2.2), d'où l'on déduit la relation $d_F(\varpi_F^{n-1}z, \mathfrak{b}) \leq q^{-(d+a)} \leq q^{-\nu}$.

Comme $S \cap W + \mathcal{B}^{a-1} = S \cap W$, $s(\varpi_F^{n-1}zx) \in S \cap W$ entraîne $s(\varpi_F^{n-1}zx) + \mathcal{B}^{a-1} \subset S \cap W$ et, par F^\times -homothétie, $s(zx) + \varpi_F^{1-n}\mathcal{B}^{a-1} = s(zx) + \mathcal{B}^{a-n} \subset W$. Or (cf. [Bu] (1.13)),

$$(\mathcal{B}^{n-a})^* = \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{B}_Q^{1-(n-a)e_Q} = \varpi_F^{a-n} \left(\prod_{Q \in \Phi(y)} \mathcal{B}_Q^1 \right) \subset \mathcal{B}^{a-n},$$

par conséquent $\text{Supp}(\chi) \subset W$.

(2) Le caractère $\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ est trivial sur \mathcal{B}^{2a-1} . Alors χ se factorise en un caractère du groupe fini $\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{2a-1}$ et $\text{Supp}(\chi^\wedge) \subset (\mathcal{B}^{2a-1})^*$. \square

5. Intégrabilité locale des caractères

On montre comment les énoncés montrés dans les numéros précédents permettent, grâce à un argument de finitude dû à Howe, de décrire la structure du caractère-distribution Θ_π au voisinage de y dans G : décomposition en germes de caractères, intégrabilité.

5.1. *Rappel de la théorie de Howe.* A partir de la profonde condition (**) de [Ho] et grâce à des morceaux de démonstrations empruntés à [Ro], on montre une conséquence du Theorem 2 de [Ho], plus maniable pour le propos qui nous intéresse (cf. n° 2.5).

Si Σ est une partie de \mathfrak{b} et Λ un \mathcal{O}_F -réseau de \mathfrak{b} , soit $J_B(\Sigma, \Lambda) \subset J_B(\mathfrak{b})$ (cf. n° 1.4) le sous-espace des distributions D telles que pour tout $H \in \mathfrak{b}$, $(D * \mathbf{1}_\Lambda(H) = \langle D, \mathbf{1}_{H+\Lambda} \rangle \neq 0) \Rightarrow (H \in \Sigma)$, et notons

$$j_\Lambda : \mathcal{D}(\mathfrak{b}) \rightarrow (C_c(\mathfrak{b}/\Lambda))^*$$

l'application surjective duale de l'injection

$$C_c(\mathfrak{b}/\Lambda) \rightarrow C_c^\infty(\mathfrak{b}).$$

Soit $J^0(\mathfrak{b}) = \{D \in J_B(\mathfrak{b}), \text{Supp}(D) \subset \text{Ad}B(W_D) \text{ pour une partie compacte } W_D \subset \mathfrak{b}\} \subset J_B(\mathfrak{b})$ le sous-espace des distributions à support compact modulo conjugaison par B .

Soit $Z_B = \prod_{Q \in \Phi(y)} (E_Q^\times)$ le centre de B .

PROPOSITION 5.1. *Il existe un voisinage ouvert fermé V de $\mathcal{N} \cap (\mathfrak{b} - \{0\})$ dans $\mathfrak{b} - \{0\}$ tel que*

(i) $Z_B V = V$.

(ii) *pour toute partie ouverte compacte X de \mathfrak{b} et tout $\mathbb{Z}^{\#\Phi(y)}$ -uplet $(\delta) = (\delta_Q)_{Q \in \Phi(y)}$*

$$j_{B^{(\delta)}}(J_B(V \cap X, \mathcal{B}^{(\delta)})) \subset j_{B^{(\delta)}}(J^0(\mathfrak{b})).$$

Démonstration. Notons τ l'action de B sur \mathfrak{b} donnée par $\tau b(H) = bH$ ($b \in B, H \in \mathfrak{b}$). Si b appartient à Z_B , l'image par τb d'une distribution $D \in J_B(\mathfrak{b})$ (resp. $D \in J^0(\mathfrak{b})$) appartient encore à $J_B(\mathfrak{b})$ (resp. à $J^0(\mathfrak{b})$). De plus,

$$(\tau b(D) * \mathbf{1}_{bB^{(\delta)}})(bH) = (D * \mathbf{1}_{B^{(\delta)}})(H) \quad (b \in B, D \in J(\mathfrak{b}), H \in \mathfrak{b})$$

pour tout $\mathbb{Z}^{\#\Phi(y)}$ -uplet $(\delta) = (\delta_Q)_{Q \in \Phi(y)}$. Ainsi, si $(\delta) \in \mathbb{Z}^{\#\Phi(y)}$ et si $b \in Z_B$ est un élément tel que $bB^{(\delta)} = \mathcal{B}$, alors pour toute partie V de \mathfrak{b} telle que $Z_B V = V$ et toute partie X de \mathfrak{b} , l'homothétie τb sur \mathfrak{b} induit un isomorphisme de $J_B(V \cap X, \mathcal{B}^{(\delta)})$ sur $J_B(V \cup bX, \mathcal{B})$.

Il suffit donc de montrer la Proposition 5.1 pour $(\delta) = (0, \dots, 0)$.

Pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, \mathcal{B}_Q est un \mathcal{O}_Q -ordre héréditaire maximal de \mathfrak{b}_Q . Par conséquent (condition (**)) de [Ho]), si z est un élément nilpotent non nul de \mathfrak{b}_Q , il existe un entier $r = r(z)$ et un entier $m = m(z) \leq 0$ tels que si $b \in E_Q(z + \mathcal{B}_Q^r) \cap (\mathcal{B}_Q^n - \mathcal{B}_Q^{n+1})$ pour un entier $n < m$, alors il existe une partition de $b + \mathcal{B}_Q$ en $b + \mathcal{B}_Q = \coprod_{1 \leq i \leq i(b)} X_i$ et, pour chaque indice $i \in \{1, \dots, i(b)\}$, des éléments $b_{i,j} \in B$ ($j \in \{1, \dots, j(b, i)\}$), tels que

- (1) $\text{Add}_{i,j}(X_i) \subset \mathcal{B}_Q^{(n+1)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, i(b)\}$ et tout $j \in \{1, \dots, j(b, i)\}$,
- (2) les parties $\text{Add}_{i,j}(X_i)$ sont disjointes pour des couples (i, j) distincts,
- (3) $(\coprod_{1 \leq j \leq i(b)} \text{Add}_{i,j}(X_i)) + \mathcal{B}_Q = \coprod_{1 \leq j \leq i(b)} \text{Add}_{i,j}(X_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, i(b)\}$.

Notons \mathcal{N}_Q l'ensemble des éléments nilpotents de \mathfrak{b}_Q . La partie $\mathcal{N}_Q - \{0\}$ est fermée dans $\mathfrak{b}_Q - \{0\}$ et stable par E_Q^\times -homothéties. Donc $\mathcal{N}_Q \cap (\mathcal{B}_Q - \mathcal{B}_Q^1)$ est une partie compacte dans $\mathfrak{b}_Q - \{0\}$ et $\mathcal{N}_Q - \{0\} = E_Q^\times(\mathcal{N}_Q \cap (\mathcal{B}_Q - \mathcal{B}_Q^1))$. Pour chaque $z \in (\mathcal{N}_Q \cap (\mathcal{B}_Q - \mathcal{B}_Q^1))$, fixons un couple d'entiers $(r(z), m(z))$ comme ci-dessus; fixons aussi un ensemble fini N d'éléments de $\mathcal{N}_Q \cap (\mathcal{B}_Q - \mathcal{B}_Q^1)$ tel que $\cup_{z \in N} z + \mathcal{B}_Q^{r(z)}$ recouvre $\mathcal{N}_Q \cap (\mathcal{B}_Q - \mathcal{B}_Q^1)$. Pour chaque $z \in N$, la partie $E_Q^\times(z + \mathcal{B}_Q^{r(z)})$ est ouverte et fermée dans $\mathfrak{b}_Q - \{0\}$, donc $V_Q = \cup_{z \in N} E_Q^\times(z + \mathcal{B}_Q^{r(z)})$ est un voisinage ouvert fermé de $\mathcal{N}_Q - \{0\}$ dans $\mathfrak{b}_Q - \{0\}$. Notons m_Q le minimum des $m(z)$ pour z parcourant les éléments de N ; si $b \in V_Q \cap (\mathcal{B}_Q^n - \mathcal{B}_Q^{n+1})$ pour un entier $n < m_Q$, alors il existe une partition de $b + \mathcal{B}_Q$ en $b + \mathcal{B}_Q = \coprod_{1 \leq i \leq i(b)} X_i$ et, pour chaque indice $i \in \{1, \dots, i(b)\}$, des éléments $b_{i,j} \in B$ ($j \in \{1, \dots, j(b, i)\}$), tels que soient satisfaites les conditions (1), (2), (3) ci-dessus.

Soit $V = \coprod_{Q \in \Phi(y)} V_Q$ (c'est un voisinage ouvert fermé de $\mathcal{N} \cap (\mathfrak{b} - \{0\})$ dans $\mathfrak{b} - \{0\}$ tel que $Z_B V = V$) et soit $(\beta) = (\beta_Q)_{Q \in \Phi(y)}$ le $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$ -uplet défini par $\beta_Q = m_Q$ ($Q \in \Phi(y)$).

Soit X une partie ouverte compacte de \mathfrak{b} et soit (γ) un $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$ -uplet tel que l'on ait $X \subset \mathcal{B}^{(\gamma)}$ et $\mathcal{B}^{(\beta)} \subset \mathcal{B}^{(\gamma)}$. Pour chaque fonction $\phi \in C_c(\mathfrak{b}/\mathcal{B})$, notons $\sigma(\phi)$ la fonctionnelle linéaire sur l'espace $J_B(V \cup \mathcal{B}^{(\gamma)}, \mathcal{B})$ définie par $\sigma(\phi)(D) = \langle D, \phi \rangle$ ($D \in J_B(V \cup \mathcal{B}^{(\gamma)}, \mathcal{B})$). Montrons alors par induction, grâce aux propriétés de V et à l'inclusion $\mathcal{B}^{(\beta)} \subset \mathcal{B}^{(\gamma)}$, que les fonctionnelles linéaires $\sigma(\mathbf{1}_{b+B})$, $b \in \mathcal{B}^{(\gamma)}$, engendrent le sous-espace $\sigma(C_c(\mathfrak{b}/\mathcal{B}))$ du dual de $J_B(V \cup \mathcal{B}^{(\gamma)}, \mathcal{B})$. Si b n'appartient pas à $V \cup \mathcal{B}^{(\gamma)}$ alors $\sigma(\mathbf{1}_{b+B}) = 0$ car (par définition)

$$\sigma(\mathbf{1}_{b+B})(D) = \langle D, \mathbf{1}_{b+B} \rangle = D * \mathbf{1}_B(b) = 0$$

pour toute distribution $D \in J_B(V \cup \mathcal{B}^{(\gamma)}, \mathcal{B})$. Si b appartient à $V \cap (\mathcal{B}^{(\alpha)} - \mathcal{B}^{(\gamma)})$ pour un $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$ -uplet (α) , alors il existe une partition de $b + \mathcal{B}$ en $b + \mathcal{B} = \coprod_{1 \leq i \leq i(b)} X_i$, un $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$ -uplet (μ) tel que $\mathcal{B}^{(\alpha)} \supsetneq \mathcal{B}^{(\mu)} \supset \mathcal{B}^{(\gamma)}$ et des éléments $b_{i,j} \in B$ ($i \in \{1, \dots, i(b)\}$, $j \in \{1, \dots, j(b, i)\}$), tels que

- (1) $\text{Ad}b_{i,j}(X_i) \subset \mathcal{B}^{(\mu)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, i(b)\}$ et tout $j \in \{1, \dots, j(b, i)\}$,
- (2) les parties $\text{Ad}b_{i,j}(X_i)$ sont disjointes pour des couples (i, j) distincts,
- (3) $(\coprod_{1 \leq j \leq i(b)} \text{Ad}b_{i,j}(X_i)) + \mathcal{B} = \coprod_{1 \leq j \leq i(b)} \text{Ad}b_{i,j}(X_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, i(b)\}$.

De ces conditions, on déduit la relation

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{1}_{\mathcal{B}+\mathcal{B}}) &= \sum_{1 \leq i \leq i(b)} \sigma(\mathbf{1}_{X_i}) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq i(b)} j(b, i)^{-1} \sigma \left(\mathbf{1}_{\coprod_{1 \leq j \leq j(b, i)} \text{Ad}b_{i,j}(X_i)} \right) \\ &\subset \sigma(C_c^\infty(\mathcal{B}^{(\mu)}/\mathcal{B})). \end{aligned}$$

Or $\mathcal{B}^{(\gamma)}/\mathcal{B}$ est un ensemble fini, donc $j_{\mathcal{B}}(J_{\mathcal{B}}(V \cup \mathcal{B}^{(\gamma)}, \mathcal{B}))$ est un \mathbb{C} -espace de dimension finie.

Soit une famille finie $\mathcal{F} \subset C_c(\mathfrak{b}/\mathcal{B})$ séparant les éléments du sous-espace $j_{\mathcal{B}}(J_{\mathcal{B}}(V \cup X, \mathcal{B}))$ de $j_{\mathcal{B}}(J_{\mathcal{B}}(V \cup \mathcal{B}^{(\gamma)}, \mathcal{B}))$. Rappelons que la partie $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathfrak{b}}$ de \mathfrak{b} définie au numéro 2.3 satisfait les propriétés

- (i) \mathcal{U} est ouverte, fermée et $\text{Ad}B$ -invariante dans \mathfrak{b} ,
- (ii) $\mathcal{O}_F \mathcal{U} = \mathcal{U}$,
- (iii) $\mathcal{U} \subset \text{Ad}B(\mathcal{K})$ pour une partie compacte \mathcal{K} de \mathfrak{b} .

La réunion des supports des fonctions $\phi \in \mathcal{F}$ est une partie compacte de \mathfrak{b} , par conséquent il existe un entier k tel que $\text{Supp}(\phi) \subset \varpi_F^k \mathcal{U}$ ($\phi \in \mathcal{F}$). Pour toute distribution $D \in J_{\mathcal{B}}(\mathfrak{b})$, la distribution $\eta_k(D)$ sur \mathfrak{b} définie par

$$\langle \eta_k(D), \phi \rangle = \langle D, \mathbf{1}_{\varpi_F^k \mathcal{U}} \cdot \phi \rangle \quad (\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{b}))$$

est clairement $\text{Ad}B$ -invariante et de support contenu dans $\text{Ad}B(\varpi_F^k \mathcal{K})$. Montrons, en suivant la fin de la démonstration de la Proposition 10 de [Ro], que si l'entier k est choisi suffisamment petit, alors $(V \cup \varpi_F^k \mathcal{U}) + \mathcal{B} = V \cup \varpi_F^k \mathcal{U}$ et η_k satisfait l'égalité $\eta_k(D) * \mathbf{1}_{\mathcal{B}} = D * \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ pour toute distribution $D \in J_{\mathcal{B}}(V \cup X, \mathcal{B})$.

Il existe un entier r tel que $\text{Ad}B(\mathcal{K}) \subset V \cup \mathcal{B}^r$ ([Ho] Lemma 1). On peut décomposer la partie $\mathcal{U} \cap V$ de \mathfrak{b} en

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cup V &= ((\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r) \cup ((\mathcal{U} \cup V) \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)) \\ &= ((\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r) \cup (V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)) \end{aligned}$$

car $\mathcal{U} \subset \text{Ad}B(\mathcal{K}) \subset V \cup \mathcal{B}^r$. Comme les parties $(\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r$ et $V \cap \mathcal{B}^r$ sont ouvertes et compactes dans \mathfrak{b} , il existe un entier s et un entier t (on peut supposer $t \geq r + 1$) tels que

$$\begin{cases} ((\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r) + \mathcal{B}^s = (\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r \\ (V \cap \mathcal{B}^r) + \mathcal{B}^t = V \cap \mathcal{B}^r \end{cases} .$$

Soit un élément $b \in V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)$. Alors $b \in V \cap (\mathcal{B}^{r-m} - \mathcal{B}^{r-m+1})$ pour un entier $m \geq 1$. Comme la partie V est stable par multiplication par ϖ_F^m , la définition de t assure que la partie $\varpi_F^m b + \mathcal{B}^t$ est contenue dans $V \cap \mathcal{B}^r$. Par conséquent $b + \mathcal{B}^{t-m} \subset V \cap \mathcal{B}^{r-m}$ et même (l'entier t étant supposé $\geq r+1$) $b + \mathcal{B}^{t-m} \subset V \cap (\mathcal{B}^{r-m} - \mathcal{B}^{r-m+1}) \subset V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)$. On a donc montré l'égalité $(V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)) + \mathcal{B}^{t-1} = V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)$. Ainsi, si k est un entier $\leq -\sup\{s, t-1\}$, alors

$$(\varpi_F^k \mathcal{U} \cup V) + \mathcal{B} = \varpi_F^k \mathcal{U} \cup V$$

car

$$\begin{aligned} \varpi_F^{-k}((\varpi_F^k \mathcal{U} \cup V) + \mathcal{B}) &= (\mathcal{U} \cup V) + \mathcal{B}^{-k} \\ &= (((\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r) + \mathcal{B}^{-k}) \\ &\quad \cup ((V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)) + \mathcal{B}^{-k}). \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} ((\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r) + \mathcal{B}^{-k} \subset ((\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r) + \mathcal{B}^s = (\mathcal{U} \cup V) \cap \mathcal{B}^r \\ (V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)) + \mathcal{B}^{-k} \subset (V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r)) + \mathcal{B}^{t-1} = V \cap (\mathfrak{b} - \mathcal{B}^r) \end{cases}$$

Soit donc un entier k tel que

$$\begin{cases} (V \cup \varpi_F^k \mathcal{U}) + \mathcal{B} = V \cup \varpi_F^k \mathcal{U} \\ \text{Supp}(\phi) \subset \varpi_F^k \mathcal{U} \ (\phi \in \mathcal{F}) \end{cases}$$

et supposé de plus satisfaire l'inégalité $k \leq 1 - t + r$. Soient une distribution $D \in J_B(V \cap X, \mathcal{B})$ et un élément $b \in (\mathfrak{b} - (V \cup X))$; montrons que $\eta_k(D) * \mathbf{1}_B(b) = 0$. L'hypothèse $b \notin V$ conduit à distinguer deux cas:

① b n'appartient pas à $\varpi_F^k \mathcal{U}$. Alors $(b + \mathcal{B}) \cap \varpi_F^k \mathcal{U}$ est vide car si $b + H \in \varpi_F^k \mathcal{U}$ pour un élément $H \in \mathcal{B}$, l'égalité $(\varpi_F^k \mathcal{U} \cup V) + \mathcal{B} = \varpi_F^k \mathcal{U} \cup V$ entraîne $b \in \varpi_F^k \mathcal{U} \cup V$, contradiction.

② b appartient à $\varpi_F^k \mathcal{U}$. Montrons qu'en ce cas $(b + \mathcal{B}) \cap \varpi_F^k \mathcal{U} = b + \mathcal{B}$. Soit un élément $H \in \mathcal{B}$. Alors on a $b + H \in \varpi_F^k \mathcal{U} \cup V$ car $(\varpi_F^k \mathcal{U} \cup V) + \mathcal{B} = \varpi_F^k \mathcal{U} \cup V$. Supposons par l'absurde que $b + H \in (V - (\varpi_F^k \mathcal{U} \cap V))$. Comme la partie \mathcal{B} est contenue dans \mathcal{U} (cf. la définition de \mathcal{U} donnée au numéro 2.3), $\mathcal{B}^k \subset \varpi_F^k \mathcal{U}$ et par conséquent $b + H \in (V - \mathcal{B}^k)$. Ainsi, $b + H \in (\mathcal{B}^{k-m} - \mathcal{B}^{k-m+1})$ pour un entier $m \geq 1$. Par multiplication à gauche par ϖ_F^{r-k-m} (et toujours grâce à la propriété $F \times V = V$), on obtient la relation $\varpi_F^{r-k+m}(b + H) \in V \cap \mathcal{B}^r$. Or, l'hypothèse $k \leq 1 - t + r$ et l'inégalité $m \geq 1$ entraînant la relation $r - k + m \geq t + m - 1 \geq t$, l'élément $\varpi_F^{r-k+m} H$ appartient à \mathcal{B}^t et donc (grâce à la propriété $(V \cap \mathcal{B}^r) + \mathcal{B}^t = V \cap \mathcal{B}^r$) l'élément $\varpi_F^{r-k+m} b$ appartient à $V \cap \mathcal{B}^r$. Par conséquent $b \in V$, contradiction. On a donc bien montré l'égalité $(b + \mathcal{B}) \cap \varpi_F^k \mathcal{U} = b + \mathcal{B}$.

Des cas ① et ② ci-dessus, on déduit que

$$\eta_k(D) * \mathbf{1}_B(b) = \langle \eta_k(D), \mathbf{1}_{b+B} \rangle = \langle D, \mathbf{1}_{(b+B) \cap \varpi_{\mathbb{F}}^k \mathcal{U}} \rangle = 0.$$

Par ailleurs, puisque la famille \mathcal{F} sépare l'espace $j_B(J_B(V \cup X, \mathcal{B}))$, la relation

$$\langle \eta_k(D), \phi \rangle = \langle D, \mathbf{1}_{\varpi_{\mathbb{F}}^k \mathcal{U}} \cdot \phi \rangle = \langle D, \phi \rangle \quad (D \in J_B(\mathfrak{b}), \phi \in \mathcal{F})$$

entraîne l'égalité

$$D * \mathbf{1}_B = \eta_k(D) * \mathbf{1}_B \quad (D \in J_B(V \cup X, \mathcal{B})).$$

En définitive, si l'entier k est suffisamment petit, alors $j_B(D) = j_B(\eta_k(D)) \in j_B(J^0(\mathfrak{b}))$ pour toute distribution $D \in J_B(V \cup X, \mathcal{B})$ et la Proposition 5.1 est complètement démontrée. \square

5.2. D'après la Proposition 5 de [Ho], si O est une $\text{Ad}B$ -orbite dans $\mathcal{N} \cap \mathfrak{b}$, la donnée d'un élément H de O et d'une mesure de Haar db_H sur le centralisateur (unimodulaire) de H dans B définit une distribution $\text{Ad}B$ -invariante sur \mathfrak{b}

$$\phi \mapsto I^B(\phi, H, db_H) = \int_{B_H \backslash B} \phi(b^{-1} H b) \frac{db}{db_H} \quad (\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{b})),$$

où db désigne la mesure de Haar sur B telle que $\text{vol}(B^\times, db) = 1$. Comme la mesure $\text{Ad}B$ -invariante sur O , image par l'application $B_H \backslash B \rightarrow O$, $B_H b \mapsto b^{-1} H b$ de la mesure $\frac{db}{db_H}$ sur $B_H \backslash B$, est unique à un facteur constant près, on peut noter $\nu_O \in J^0(\mathfrak{b})$ l'intégrale orbitale sur O (arbitrairement) normalisée par $\nu_O(\mathbf{1}_B) = 1$.

PROPOSITION 5.2.1. *Pour chaque $\text{Ad}B$ -orbite nilpotente O de \mathfrak{b} , il existe un unique nombre complexe $c_O(\pi)$ tel que si m est un entier suffisamment grand, alors*

$$\left(\theta_\pi - \sum_O c_O(\pi) \nu_O^\wedge \right) \Big|_{\mathcal{B}^m} = 0,$$

O décrivant l'ensemble fini des $\text{Ad}B$ -orbites nilpotentes de \mathfrak{b} .

Démonstration. Soient V un voisinage ouvert fermé de $\mathcal{N} \cap (\mathfrak{b} - \{0\})$ dans $\mathfrak{b} - \{0\}$ tel que $Z_B V = V$ comme dans la Proposition 5.1, $a(V, \pi)$ un entier comme dans le numéro 4.2, et a un entier $\geq a(V, \pi)$.

La formule de Plancherel pour le sous-groupe ouvert compact \mathcal{B}^a du groupe abélien \mathfrak{b} entraîne l'expression suivante pour la restriction à \mathcal{B}^a de la distribution θ_π

$$\mathbf{1}_{\mathcal{B}^a} \cdot \theta_\pi = \sum_{\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge} \left(\frac{\langle \theta_\pi, \bar{\chi} \rangle}{\langle \chi, \bar{\chi} \rangle} \chi \right) dH.$$

Le support de la transformée de Fourier χ^\wedge d'un caractère $\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ ayant une contribution non-triviale dans cette somme est contenu dans $V \cup (\mathcal{B}^{2a-1})^*$ (Proposition 4.2), par conséquent

$$\text{Supp}((\mathbf{1}_{\mathcal{B}^a} \cdot \theta_\pi)^\wedge) \subset V \cup (\mathcal{B}^{2a-1})^*,$$

avec

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{B}^a} \cdot \theta_\pi)^\wedge = \text{vol}((\mathcal{B}^a)^*, dH)^{-1} (\theta_\pi^\wedge * \mathbf{1}_{(\mathcal{B}^a)^*}) dH.$$

Notant $\alpha(a) = (\alpha(a)_Q)_{Q \in \Phi(y)}$ le $\mathbb{Z}^{\#\Phi(y)}$ -uplet défini par $\alpha(a)_Q = 1 - ae_Q$ ($Q \in \Phi(y)$), on a l'égalité $(\mathcal{B}^a)^* = \mathcal{B}^{\alpha(a)}$ (cf. par exemple [Bu] (1.13)) et donc $\theta_\pi^\wedge \in J_B(V \cup (\mathcal{B}^{2a-1})^*, \mathcal{B}^{\alpha(a)})$.

Soit une distribution $\eta \in J^0(\mathfrak{b})$ telle que (Proposition 5.1)

$$j_{(\mathcal{B}^a)^*}(\eta) = j_{(\mathcal{B}^a)^*}(\theta_\pi^\wedge).$$

Par dualité, on a l'égalité

$$\mathbf{1}_{\mathcal{B}^a} \cdot \eta^\wedge = \mathbf{1}_{\mathcal{B}^a} \cdot \theta_\pi.$$

Or, η appartenant à $J^0(\mathfrak{b})$, il existe un entier $m \geq a$ tel que la restriction à \mathcal{B}^m de la transformée de Fourier η^\wedge de η soit combinaison linéaire des restrictions à \mathcal{B}^m des transformées de Fourier ν_O^\wedge des intégrales orbitales ν_O , O parcourant l'ensemble des $\text{Ad}B$ -orbites nilpotentes de \mathfrak{b} ([Ho] Prop. 3).

D'où la Proposition 5.2.1. □

COROLLAIRE 5.2.2. *Le caractère-distribution Θ_π est intégrable au voisinage de y dans G .*

Démonstration. Notons \mathfrak{b}' l'ensemble des éléments $b = \prod_{Q \in \Phi(y)} b_Q \in \prod_{Q \in \Phi(y)} \mathfrak{b}_Q = \mathfrak{b}$ tels que pour chaque polynôme $Q \in \Phi(y)$, l'élément b_Q est séparable sur E_Q et semi-simple régulier dans \mathfrak{b}_Q (i.e. le centralisateur de b_Q dans B_Q est un sous-groupe de Cartan de B_Q); \mathfrak{b}' est un ouvert dense de \mathfrak{b} et $\text{vol}(\mathfrak{b} - \mathfrak{b}', dH) = 0$. D'après la Proposition 5 de [Ho] et le Lemme 4.7.6 de [Si] (cf. aussi [Ha 3] Theorem 3; certains arguments utilisés par Harish-Chandra, comme la démonstration du Theorem 16 de [Ha 2], nécessitent toutefois une preuve en caractéristique positive), pour chaque orbite nilpotente O de \mathfrak{b} , la transformée de Fourier ν_O^\wedge de l'intégrale orbitale ν_O est une fonction localement intégrable sur \mathfrak{b} , localement constante sur \mathfrak{b}' . On en déduit que si l'entier m de la Proposition 5.2.1 est suffisamment grand, alors il existe une fonction intégrable f_π sur \mathcal{B}^m , localement constante sur l'ouvert $\mathcal{B}^m \cap \mathfrak{b}'$ de \mathcal{B}^m , telle que $\langle \theta_\pi, \varphi \rangle = \int_{\mathfrak{b}} \varphi(H) f_\pi(H) dH$ pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{B}^m)$.

Rappelons que la distribution $\theta_\pi \in J_B(\mathfrak{b})$ a été obtenue en tirant sur \mathfrak{b} , grâce à l'application s , la distribution $\vartheta_\pi \in \mathcal{D}(\Omega)$, elle même construite en intégrant le

caractère-distribution Θ_π sur les fibres de la submersion $\delta: G \times U' \rightarrow G$, $(g, u) \mapsto gy(1+u)g^{-1}$. Fixons un (petit) sous-groupe ouvert compact K de G et un entier $r \geq m$ tels qu'il existe un système de coordonnées $(K \times x\mathcal{B}^r, \nu, F^{\alpha-\beta})$ où $\alpha = \dim_F(\mathfrak{g})$ et $\beta = \dim_F(\mathfrak{b})$, un système de coordonnées (G, η, F^α) et une application linéaire surjective $\zeta: F^{\alpha+\beta} \rightarrow F^\alpha$ tels que $\eta \circ \delta = \zeta \circ \nu$ (cf. [Bou] Var., Sect. 5, n° 5.1). Dans ces conditions, on a l'égalité

$$(\mathbf{1}_{X \times Y})^\delta = \frac{\text{vol}(X, dg)\text{vol}(Y, du)}{\text{vol}(\delta(X \times Y), dg)} \mathbf{1}_{\delta(X \times Y)}$$

pour toute partie ouverte compacte $X \times Y \subset K \times x\mathcal{B}^r$.

Montrons que si deux couples (k_1, u_1) et (k_2, u_2) de l'ouvert $K \times (x(\mathcal{B}^r \cap \mathfrak{b}'))$ de $G \times U'$ satisfont l'égalité $\delta(k_1, u_1) = \delta(k_2, u_2)$, alors $f_\pi \circ s(u_1) = f_\pi \circ s(u_2)$. Pour $i = 1, 2$, fixons un voisinage ouvert compact non vide W_i de u_i dans $x(\mathcal{B}^r \cap \mathfrak{b}')$ tel que $f_\pi \circ s(u) = f_\pi \circ s(u_i)$ pour tout $u \in W_i$; alors la partie $\Gamma = \delta(K \times W_1) \cap \delta(K \times W_2)$ est un voisinage ouvert compact et $\text{Ad}K$ -invariant de $\delta(k_1, u_1) = \delta(k_2, u_2)$ dans G et $R_i = \{u \in W_i, \delta(K, u) \subset \Gamma\}$ est un voisinage ouvert compact de u_i dans W_i . Par construction $\delta(K \times R_1) = \Gamma = \delta(K \times R_2)$ et, notant ϕ_K la fonction $\text{vol}(K, dg)^{-1} \mathbf{1}_K$, on a ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} f_\pi \circ s(u_i) &= \text{vol}(R_i, du)^{-1} \langle \theta_\pi, \mathbf{1}_{s(R_i)} \rangle \\ &= \text{vol}(R_i, du)^{-1} \langle \Theta_\pi, (\phi_K \circ \mathbf{1}_{R_i})^\delta \rangle \\ &= \text{vol}(R_i, du)^{-1} \frac{\text{vol}(R_i, du)}{\text{vol}(\Gamma, dg)} \langle \Theta_\pi, \mathbf{1}_\Gamma \rangle = \text{vol}(\Gamma, dg)^{-1} \langle \Theta_\pi, \mathbf{1}_\Gamma \rangle. \end{aligned}$$

On peut donc définir presque partout une fonction γ_π sur le voisinage ouvert $\delta(K \times x\mathcal{B}^r)$ de y dans G en posant $\gamma_\pi \circ \delta(k, u) = f_\pi \circ s(u)$ ($(k, u) \in K \times x(\mathcal{B}^r \cap \mathfrak{b}')$). Alors,

$$\begin{aligned} \langle \theta_\pi, \varphi \rangle &= \int_{\mathcal{B}^r} \varphi(H) f_\pi(H) dH \\ &= \int_{x\mathcal{B}^r} \varphi \circ s(u) f_\pi \circ s(u) du \\ &= \int_{K \times (x\mathcal{B}^r)} \phi_0(g) \varphi \circ s(u) \gamma_\pi \circ \delta(g, u) dg du \\ &= \int_{\delta(K \times x\mathcal{B}^r)} (\phi_0 \otimes (\varphi \circ s)|_{x\mathcal{B}^r})^\delta(g) \gamma_\pi(g) dg \\ &= \langle \Theta_\pi, (\phi_0 \otimes (\varphi \circ s)|_{x\mathcal{B}^r})^\delta \rangle, \end{aligned}$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{B}^r)$ et toute fonction $\phi_0 \in C_c^\infty(K)$ telle que $\int_K \phi_0(g) dg = 1$. De la surjectivité de l'application linéaire ([Ha 2]) Theorem 11 et Corol. of Lemma 16)

$$C_c^\infty(K) \otimes C_c^\infty(\mathcal{B}^r) \rightarrow C_c^\infty(\delta(K \times (x\mathcal{B}^r))), \quad \phi \otimes \varphi \mapsto (\phi \otimes (\varphi \circ s)|_{x\mathcal{B}^r})^\delta,$$

on déduit l'égalité $d\Theta_\pi(g) = \gamma_\pi(g) dg$ pour presque tout $g \in \delta(K \times (xB^r))$. Comme la fonction $\gamma_\pi \circ \delta$ coïncide presque partout avec la fonction intégrable $\mathbf{1}_K \otimes (f_\pi \circ s)$ sur $K \times (xB^r)$, γ_π est intégrable sur $\delta(K \times (xB^r))$ ([Ha 1] Corol. of Theorem 11). \square

Modulo une certaine liberté à l'égard des notations, on a en fait montré la variante plus précise suivante du Corollaire 5.2.2 (avec les notations de la Proposition 5.2.1):

COROLLAIRE 5.2.3. *Si m est un entier suffisamment grand,*

$$\Theta_\pi(y(1 + xH)) = \sum_O c_O(\pi) \nu_O^\wedge(H),$$

pour presque tout $H \in \mathcal{B}^m$. \square

Considérons maintenant un quelconque élément $g \in G$. On sait (cf. [La] Lemma (4.8.4) ou bien [Le] Chap. 3, Prop. 2.2.6.1) qu'il existe un sous-groupe parabolique P de G (de radical unipotent U) contenant le centralisateur G_g de g dans G et une composante de Levi M de P tels que, notant $g = g_M g_U$ ($(g_M, g_U) \in M \times U$) la décomposition de g suivant $P = MU$,

- (i) g_M est semi-simple (non-nécessairement séparable) dans G et M est le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de g_M (cf. n° 1.2),
 - (ii) l'Ad P -orbite $O_P(g)$ est dense dans $O_M(g_M)U$ pour la topologie ϖ_F -adique.
- En particulier, g a des conjugués (dans P) aussi voisins que l'on veut de g_M .

En définitive, on a montré:

THÉORÈME 5.2.4. *Le caractère-distribution Θ_π d'une représentation admissible irréductible π de G est localement intégrable sur G .*

On conclura ce papier par un bref survol des conséquences impliquées – directement ou moins directement – par le Théorème 5.2.4. Le corps F est, jusqu'à la fin, supposé de caractéristique > 0 et l'on note toujours $G = GL_N(F)$.

La formule d'intégration de Weyl devient dès lors un outil utilisable en caractéristique > 0 , le caractère-distribution Θ_π d'une représentation admissible irréductible π de G s'exprimant en termes des intégrales orbitales semi-simples régulières séparables dans G^* . Notons que, contrairement à la caractéristique nulle où le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan est toujours fini, la somme apparaissant dans la formule peut être infinie (exemple: dans $GL_2(F)$ où $F = k((\varpi))$ est le corps des séries formelles en une indéterminée ϖ sur le

* On peut dire (avec une pointe de provocation) que les éléments inséparables, nonobstant les difficultés rencontrées lorsqu'on essaie d'étendre à leur voisinage les résultats d'analyse harmonique connus en caractéristique nulle (cf. [Le] Chap. 3 et 4), n'ont pas un rôle vraiment pertinent dans l'analyse harmonique sur G . D'ailleurs, Rodier avait déjà montré que le caractère-distribution Θ_π d'une représentation admissible irréductible π de G ne dépend que de sa restriction à l'ouvert G_{reg} des éléments semi-simples réguliers séparables ([Ro] Theorem 2).

corps $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il y a une infinité de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan elliptiques en bijection avec les classes d'isomorphisme d'extensions quadratiques séparables de F). On peut aussi, via cette formule, appliquer les divers procédés de troncature de la trace mis au point par Clozel en caractéristique nulle, et prouver la conjecture de Howe pour G de manière directe (c'est-à-dire sans comparer l'analyse harmonique sur G avec celle sur $GL_N(E)$ pour E de caractéristique nulle, comme on l'a fait dans le chapitre 4 de [Le]); pour ce faire, on suit de très près [Cl2] en contournant l'argument de finitude du nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan grâce au théorème de densité des caractères des représentations admissibles irréductibles tempérées (unitaires) dans l'espace des distributions invariantes, théorème dont la démonstration ne dépend pas de la caractéristique du corps de base. D'ailleurs, cette preuve est, modulo bien sûr l'intégrabilité locale des caractères, valable pour n'importe quel groupe réductif connexe G/F , alors que les arguments utilisés dans [Le] (résultats de [Bu-Ku] sur l'entrelacement des strates simples elliptiques, isomorphismes d'algèbres de Hecke, finitude du nombre d'exposants spéciaux pour la série discrète, etc.) semblent nettement plus difficilement généralisables.

On peut aisément étendre à G une bonne partie des résultats relatifs à l'analyse harmonique sur l'espace de Schwartz montrés (en caractéristique nulle et pour n'importe quel groupe réductif connexe G/F) par Clozel dans [Cl3]. On a en particulier – impliquées par la conjecture de Howe, la formule d'intégration de Weyl et la théorie des germes de Shalika – les relations d'orthogonalité des caractères pour la série discrète unitaire*. L'intégrabilité locale des caractères-distributions de G simplifie donc notablement la preuve de la correspondance entre la série discrète de G et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles d'une algèbre à division de dimension N^2 sur F . On peut en effet faire l'économie des contorsions délicates que l'absence des relations d'orthogonalité rendait nécessaires, et suivre sans grandes modifications la démonstration donnée par Rogawski en caractéristique nulle ([Rog]).

Enfin, et bien que la tâche semble un peu moins facile, on doit pouvoir étendre à G un certain nombre de résultats exposés par Kazhdan dans [Ka].

Remerciement

Je tiens à remercier Guy Henniart de m'avoir, avec tellement d'enthousiasme, encouragé à travailler sur ces questions et d'avoir patiemment lu et corrigé le texte que je lui proposais.

* Cette démonstration fut décrite par Harish-Chandra dans une lettre à M.-F. Vignéras en 1982, donc modulo la conjecture de Howe démontrée par Clozel quelques années plus tard. Entre-temps, Kazhdan donna une preuve de ces relations d'orthogonalité différente de celle d'Harish-Chandra puisque basée non plus sur l'espace de Schwartz mais sur l'espace $C_c^\infty(G)$ ([Ka], 1986). Cela est du reste très clairement expliqué dans l'introduction de [Cl3].

Références

- [Bou] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques: Algèbre Ch. VII*, Hermann, Paris, 1958.
N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques: Variétés différentielles et analytiques, fascicule de résultats (nouveau tirage)*, c.c.l.s. diffusion, Paris, 1982.
- [Bu] C.J. Bushnell, Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of $GL(N)$, *J. reine angew Math.* **375/376** (1987), 184–220.
- [Be-Ze] I.N. Bernstein & A.V. Zelevinsky, Representations of the group $GL(N, F)$ where F is a local non-archimedean field, *Usp. Mat. Nauk.* 31, n° 3 (1976), 5–70.
- [Bu-Ku] C.J. Bushnell & P.C. Kutzko, The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups, *Ann. of Math. Studies*, vol. 129, Princeton U. Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- [Cl 1] L. Clozel, Characters of non-connected, reductive p -adic groups, *Canad. J. Math.* **34** (1987), 149–167.
- [Cl 2] L. Clozel, Orbital integrals on p -adic groups: a proof of the Howe conjecture, *Ann. Math.* **129** (1989), 237–251.
- [Cl 3] L. Clozel, Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p -adic group in Harmonic Analysis on Reductive p -adic groups, Proc. Bowdoin conf. 1989, *Progress in Math.* vol. 101 (W. Barker, P. Sally, ed.), Birkhäuser, Boston, 1991, 101–121.
- [Ha 1] Harish-Chandra, Invariant distributions on Lie Algebras, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 271–309.
- [Ha 2] Harish-Chandra, Harmonic analysis on reductive p -adic groups, *Lectures Notes in Math.*, vol. 162, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [Ha 3] Harish-Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p -adic groups, *Queen's Papers in Pure and Applied Math.* **48** (1978), 377–380.
- [Ho] R. Howe, The Fourier transform and germs of characters, *Math. Ann.* **208** (1974), 305–322.
- [Ka] D. Kazhdan, Cuspidal geometry of p -adic groups, *J. Analyse Math.* **47** (1986), 1–36.
- [La] G. Laumon, Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties (Part 1). *Publ. Math. U. Paris-Sud*, 1991.
- [Le] B. Lemaire, *Thèse, univ. Paris-Sud*, 8 février 1994.
- [Ro] F. Rodier, Intégrabilité locale des caractères du groupe $GL(n, k)$ où k est un corps local de caractéristique positive, *Duke Math. J.* **85** (1985), 771–792.
- [Rog] J.D. Rogawski, Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field, *Duke Math. J.* **50** (1983), 161–196.
- [Se] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.
- [Si] A.J. Silberger, Introduction to harmonic analysis on reductive p -adic groups, *Mathematical Notes*, vol. 23, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1979.