COMPOSITIO MATHEMATICA

E. LESIGNE
C. MAUDUIT
B. MOSSE

Le théorème ergodique le long d'une suite q-multiplicative

Compositio Mathematica, tome 93, nº 1 (1994), p. 49-79
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__93_1_49_0>

Compositio Mathematica **93**: 49–79, 1994.

Le théorème ergodique le long d'une suite q-multiplicative

E. LESIGNE[1], C. MAUDUIT[2] & B. MOSSE[3]

[1]*Département de Mathématiques, Université François-Rabelais, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours;* [2]*Département de Mathématiques, Université Claude-Bernard, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex;* [3]*Laboratoire de Mathématiques Discrètes, UPR 9016, 163 avenue de Luminy, case 930, 13288 Marseille cedex 9*

Received 20 February 1992; accepted in revised form 28 June 1993

Introduction

On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Soit q un nombre entier supérieur ou égal à 2. On dit que $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ est une suite q-multiplicative si, pour tout nombre entier t supérieur ou égal à 1, on a:

$$\text{si } (a, b) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } b < q^t \text{ alors } u(aq^t + b) = u(aq^t)u(b).$$

Une suite q-multiplicative est donc entièrement déterminée par la donnée de sa valeur pour les nombres entiers de la forme

$$jq^k \,((j, k) \in \{0, \dots, q-1\} \times \mathbb{N}):$$

en effet, si

$$n = \sum_{k\in N} j_k q^k, \text{ avec } j_k \in \{0, \dots, q-1\} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ alors}$$

$$u(n) = \prod_{k\in\mathbb{N}} u(j_k q^k).$$

La notion de suite q-multiplicative introduite en 1948 par R. Bellman et H. N. Shapiro, a été étudiée par de nombreux auteurs: [Coq], [C-K-M], [Del], [Gue], [Lia], [Mos], [Que],.... Un exemple naturel est donné par la suite $u(n) = e^{2i\pi\theta n}$, ou par la suite $u(n) = e^{2i\pi\theta s_q(n)}$ où $s_q(n)$ désigne la somme des chiffres de n écrit en base q et θ un nombre réel.

La suite u est dite à spectre (de Fourier-Bohr) vide si, pour tout nombre réel x, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} u(k) = 0.$$

Dans cet article, nous remarquons que toute suite q-multiplicative non périodique à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{U}$ est à spectre vide, et nous établissons les théorèmes ergodiques suivants.

THEOREME A. *Soit u une suite q-multiplicative à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{U}$. Pour toute valeur λ prise par la suite u,*

$$\{k \in N,\ u(n) = \lambda\} = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$$

est une sous-suite d'entiers universellement bonne pour le théorème ergodique. Autrement dit: soit $(\Omega, \mathscr{J}, \mu)$ un espace probabilisé et T une transformation mesurable de cet espace, préservant la mesure μ; pour tout $f \in L^1(\mu)$, la suite

$$\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} f \circ T^{n_k}\right)_{K>0}$$

converge dans $L^1(\mu)$ et presque partout.

Par exemple, pour tous nombres entiers m et q supérieurs ou égaux à 2 et pour tout d inférieur à m, la suite des entiers dont la somme des chiffres en base q est égale à d modulo m est une sous-suite d'entiers universellement bonne pour le théorème ergodique.

THEOREME B. *Soit u une suite q-multiplicative à valeurs dans un sous-groupe fermé G de $\mathbb{U}$, telle que, pour tout caractère non trivial γ de G, la suite $\gamma u = (\gamma(u(n)))_{n\geq 0}$ soit à spectre vide. Soit $(\Omega, \mathscr{J}, \mu)$ un espace probabilisé et T une transformation mesurable de cet espace préservant la mesure μ.*

Pour tout $f \in L^1(\mu)$, pour toute fonction w continue sur G, la suite

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w(u(k))\ f \circ T^k\right)_{n>0}$$

converge dans $L^1(\mu)$ et presque partout; si de plus $\int_G w(g)dg = 0$, alors cette suite tend vers zéro.

Remarquons que d'après [Bes], si θ est irrationnel ou de la forme a/b avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, b et $q-1$ premiers entre eux, alors la suite $u(n) = e^{2i\pi\theta s_q(n)}$ (où $s_q(n)$ désigne la somme des chiffres de n écrit en base q)

satisfait l'hypothèse du théorème B. Un autre exemple est donné dans [Men]: si la suite vérifie la condition $[(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $b < q^t \Rightarrow u(aq^t + b) = u(a)u(b)]$ et si au moins une valeur parmi $\{u(1), u(2), \ldots, u(q-1)\}$ n'est pas racine de l'unité, alors u satisfait l'hypothèse du théorème B, avec $G = \mathbb{U}$.

Le problème général des théorèmes ergodiques le long d'une sous-suite est le suivant. Etant donnée une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on se demande si, pour tout système dynamique mesuré $(\Omega, \mathcal{J}, \mu, T)$ et pour tout $f \in L^1(\mu)$, la suite

$$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f \circ T^{n_k}$$

converge. Les principaux résultats connus dans ce domaine sont présentés dans [B-L] et [Kre], ainsi que dans [Bou1], [Bou2] et dans [Tho] où est exposé l'ensemble des résultats récents de Bourgain.

Présentons plus en détail le contenu de cet article.

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des suites q-multiplicatives: d'une part celles qui sont non périodiques sont caractérisées par le fait qu'elles sont "déterminées à tous les ordres"; d'autre part, dans un groupe fini, les suites q-multiplicatives non périodiques sont toujours à spectre vide.

Dans la seconde partie, on montre comment est naturellement associé à une suite q-multiplicative dans le groupe G un système dynamique qui est une extension par G d'une translation sur le groupe des entiers q-adiques. Le fait que la suite q-multiplicative soit déterminée à tous les ordres traduit le fait que ce système est isomorphe au sous-shift associé à la suite.

Les propriétés ergodiques de ce système dynamique sont étudiées dans la troisième partie; il est remarquable que le seul fait que la suite q-multiplicative et ses images par les caractères $(\neq 1)$ de G soient à spectre vide, suffise pour assurer la stricte ergodicité du système. On obtient également par cette méthode une description des propriétés ergodiques du sous-shift naturellement associé à la suite. Ce résultat est à relier à celui de Liardet ([Lia2], th. 7) qui donne une condition pour qu'une suite q-multiplicative soit strictement ergodique, ainsi qu'au travail de Keane ([Kea]) sur les suites de Morse généralisées. Une particularité de la méthode décrite ici est qu'aucun calcul sur les corrélations multiples de la suite n'est nécessaire.

Pour établir, dans la quatrième partie, les théorèmes ergodiques annoncés, nous démontrons le résultat suivant sur les "suites de temps de retour" dans les extensions abéliennes de rotations. Ce résultat précise pour ces systèmes particuliers le théorème de Bourgain ([Bou1]) en le rendant effectif. On utilise pour l'établir la preuve du théorème de Bourgain donnée dans [B-F-K-O] et la description des propriétés ergodiques de ces produits gauches.

THEOREME C. *Soient* $(X, +)$ *et* $(G, .)$ *deux groupes compacts abéliens métrisables, soit* α *un élément de* G *et soit* φ *une application Riemann-intégrable de* X *dans* G.

On suppose que le système dynamique $(X \times G,\ T_\varphi : (x, g) \to (x + \alpha, g . \varphi(x)))$, *muni de la mesure uniforme sur* $X \times G$ *admet* $(X, x \to x + \alpha)$ *comme facteur maximal à spectre discret* (cf. définition 3.4).

Soient w *une fonction continue sur* $X \times G$, *et* (x_0, g_0) *un point de* $X \times G$. *On a alors:*

(a) *si* $(\Omega, \mathscr{J}, \mu, S)$ *est un système dynamique mesuré et si* $f \in L^1(\mu)$, *alors la suite*

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w(T_\varphi^k(x_0, g_0)) \cdot f(S^k\omega)\right)_{n>0}$$

converge pour μ*-presque tout* ω;

(b) *si de plus* $\int_G w(x, g)dg \equiv 0$, *alors la suite précédente tend vers zéro.*

Plan de l'article:

I. Quelques propriétés des suites q-multiplicatives non périodiques

DEFINITION 1.1 Une suite $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G est dite q-multiplicative si pour tout nombre entier t supérieur ou égal à 1, on a: si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $b < q^t$ alors $u(aq^t + b) = u(aq^t)u(b)$.

NOTATIONS. Etant donnés deux entiers naturels i et j tels que $i \leqslant j$, on désigne par $u[i, j]$ le $(j - i + 1)$-uplet $(u(i),\ u(i + 1), \ldots, u(j))$.

Pour tous entiers naturels a et b, $a \neq 0$, $\mathrm{mod}_a(b)$ désigne le reste de la division euclidienne de b par a.

D'autre part E désigne la fonction partie entière.

1. Propriétés de détermination

Soit q un entier naturel $\geqslant 2$, et G un groupe d'élément neutre 1_G.

La définition suivante est inspirée de [Mar]. Elle permet de préciser la structure combinatoire des suites q-multiplicatives lorsque $u(\mathbb{N})$ est fini.

DEFINITION 1.2. Soit t un entier >0. On dit que la suite q-multiplicative u est déterminée à l'ordre t s'il existe un entier naturel L tel que

$$\text{si } u[i, i + L] = u[j, j + L], \text{ alors } i \equiv j \bmod q^t.$$

PROPOSITION 1.3. *Soit u une suite q-multiplicative à valeurs dans un groupe quelconque G. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Il existe un entier $t > 0$ tel que u n'est pas déterminée à l'ordre t.*
(2) *u est périodique.*
(3) *Il existe un élément g d'ordre fini de G et un entier naturel h tels que pour tout entier naturel n on ait:*

$$u(n) = u(\mathrm{mod}_{q^{h+1}}(n))g^{E(n/q^{h+1})}.$$

NOTATION. Soit n un entier naturel. Nous désignerons par $e_k(n)$ le k-ème chiffre de n en base q:

$$n = \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k(n)q^k, \text{ avec } e_k(n) \in \{0, \ldots, q - 1\} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

LEMME 1.4. *Si u n'est pas déterminée à l'ordre* 1, *alors*

$$u(n) = u(\mathrm{mod}_q(n))u(q)^{E(n/q)}$$

pour tout entier naturel n.

Preuve de lemme 1.4. Remarquons tout d'abord, l étant un entier >0 donné, que s'il existe deux entiers naturels i et j, $i \not\equiv j \bmod q$, tels que

$$u[i, i + q^{l+1} - 1] = u[j, j + q^{l+1} - 1],$$

il existe deux entiers naturels i' et j', tels que $e_0(i') < q - 1$,

$$e_0(j') = \cdots = e_{l-1}(j') = q - 1,$$
$$e_l(j') < q - 1,$$

et

$$u[i', i' + 1] = u[j', j' + 1].$$

Il vient alors:

$$u(e_0(i'))u(e_1(i')q)\cdots u(e_k(i')q^k)\cdots = u(q - 1)u(e_1(j')q)\cdots u(e_k(j')q^k)\cdots$$

et

$$u(e_0(i') + 1)u(e_1(i')q)\cdots u(e_k(i')q^k)\cdots = u((e_l(j') + 1)q^l)u((e_{l+1}(j')q^{l+1})\cdots .$$

D'où par division membre à membre:

$$u(e_0(i'))(u(e_0(i') + 1))^{-1}$$
$$= u(q - 1)u(e_1(j')q)\cdots u(e_l(j')q^l)(u((e_l(j') + 1)q^l))^{-1}.$$

Afin d'exploiter ce type d'égalité notons que si u n'est pas déterminée à l'ordre 1, il existe deux suites $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels vérifiant:

$e_0(i_n)$ est un élément e_0 de $\{0, \ldots, q - 2\}$ indépendant de n,

$$e_0(j_n) = e_1(j_n) = \cdots = e_n(j_n) = q - 1,$$
$$u[i_n, i_n + q^{n+1}] = u[j_n, j_n + q^{n+1}].$$

Des égalités

$$u[i_n + aq, i_n + aq + 1] = u[j_n + aq, j_n + aq + 1],\ 1 \leqslant a < q \quad (n \geqslant 2),$$

on tire donc:

$$u(q) = u(e_0 + 1)(u(e_0))^{-1}u(q - 1),$$
$$u(2q) = u(e_0 + 1)(u(e_0))^{-1}u(q - 1)u(q) = (u(q))^2, \ldots$$
$$u((q - 1)q) = (u(q))^{q-1}.$$

En exploitant ainsi successivement les égalités

$$u[i_n + aq^k, i_n + aq^k + 1] = u[j_n + aq^k, j_n + aq^k + 1],$$
$$1 \leqslant a < q \quad (n \geqslant k+1),$$

on aboutit à:

$u(aq) = (u(q))^a$ pour tout entier naturel a, d'où la démonstration du lemme. □

Preuve de la proposition 1.3. Soit t un entier >0 et u une suite q-multiplicative non déterminée à l'ordre t. Soit h le plus petit des entiers naturels r tels que u ne soit pas déterminée à l'ordre $r + 1$.

On déduit du lemme appliqué à la suite q-multiplicative $n \to u(nq^h)$ que u admet une expression de la forme:

$$u(n) = u(\operatorname{mod}_{q^{h+1}}(n))(u(q^{h+1}))^{E(n/q^{h+1})}.$$

Soit maintenant g un élément de G. Si g est d'ordre fini, la suite q-multiplicative u définie par:

$$u(n) = u(\operatorname{mod}_{q^{h+1}}(n))g^{E(n/q^{h+1})}$$

est périodique, et donc non déterminée à l'ordre t pout t assez grand.

Inversement, supposons que g n'est pas d'ordre fini, et étudions les rangs d'apparition des blocs de u de longueur égale à q^{h+1}: si m et n sont deux entiers naturels distincts, tels que

$$u[n, n + q^{h+1} - 1] = u[m, m + q^{h+1} - 1],$$

l'égalité $\operatorname{mod}_{q^{h+1}}(m) = \operatorname{mod}_{q^{h+1}}(n)$ est exclue par le fait que g n'est pas d'ordre fini.

Si par exemple on a $n_0 = \operatorname{mod}_{q^{h+1}}(n) < m_0 = \operatorname{mod}_{q^{h+1}}(m)$, il vient:

$$u(n_0)g^{E(n/q^{h+1})} = u(m_0)g^{E(m/q^{h+1})},$$

$$u(n_0+1)g^{E(n/q^{h+1})} = u(m_0+1)g^{E(n/q^{h+1})},\ldots$$
$$u(n_0+q^{h+1}-m_0)g^{E(n/q^{h+1})} = g^{E(m/q^{h+1})+1}$$
$$g^{E(n/q^{h+1})}+1 = u(m_0-n_0)g^{E(m/q^{h+1})+1}\quad,\ldots$$
$$u(n_0-1)g^{E(n/q^{h+1})+1} = u(m_0-1)g^{E(m/q^{h+1})+1}$$

soit les q^{h+1} relations:

$$u(0) = u(m_0-n_0)g^{\eta},$$
$$u(1) = u(m_0-n_0+1)g^{\eta},\ldots$$
$$u(n_0) = u(m_0)g^{\eta},\ldots$$
$$u(n_0+q^{h+1}-m_0-1) = u(q^{h+1}-1)g^{\eta},$$
$$u(n_0+q^{h+1}-m_0) = u(0)g^{\eta+1},\ldots$$
$$u(q^{h+1}-1) = u(m_0-n_0-1)g^{\eta+1},$$

en posant $\eta = E(m/q^{h+1}) - E(n/q^{h+1})$.

Quel que soit le signe de η, on déduit de ces dernières égalités, par substitution, une égalité de la forme $g^{\nu} = 1_G$, avec ν entier >0, ce qui est exclu.

Ainsi, un même bloc de u, s'il est de longueur supérieure à q^{h+1}, ne peut pas apparaître à des rangs distincts modulo $q^{h'+1}$, avec $0 \leqslant h' \leqslant h$. En remplaçant dans ce qui précède h par un entier $h' > h$ et g par $g^{q^{h'-h}}$, on conclut finalement que u est déterminée à tous les ordres.

Ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

2. Remarque à propos de l'ensemble des valeurs prises par une suite q-multiplicative

Soit u une q-multiplicative à valeurs dans $\mathbb{U}$. L'ensemble $u(\mathbb{N})$ n'a pas de structure algébrique particulière (il peut ne pas être stable pour la multiplication). Toutefois on a le résultat suivant:

PROPOSITION 1.5. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$u(\mathbb{N})$ est fini,*
(ii) *$u(\mathbb{N})$ contient un point isolé,*
(iii) *Il existe r et n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $t \geqslant 0$, $u(tq^n)$ est une racine r-ème de l'unité.*

Preuve. Les implications (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) sont triviales.
Il nous reste à prouver que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons que $e(a)$ est un point isolé de $u(\mathbb{N})$. Posons de plus $u(tq^n) = e(\theta_n^t)$, $\theta_n^t \in [0, 1[$.

La suite $(\theta_n^t)_{0 \leqslant t < q, n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence α dans $[0, 1]$. Les points de la forme $e(a + n\alpha)$ sont tous adhérents à $u(\mathbb{N})$. Le nombre α ne peut donc pas être irrationnel, $e(a)$ étant isolé dans $u(\mathbb{N})$. Pour une raison analogue, la suite $(e(\theta_n^t))_{0 \leqslant t < q, n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas avoir comme valeurs d'adhérence des racines r-èmes de l'unité pour des valeurs arbitrairement grandes de r.

Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\theta_n^t)_{0 \leqslant t < q, n \in \mathbb{N}}$ est fini. Soit $p/r\,(p, r \in \mathbb{N},\, p < r)$ une de ces valeurs.

Supposons que $e(p/r)$ ne soit pas isolé dans $\{e(\theta_n^t) : n \in \mathbb{N}\}$. Autrement dit, il existe une suite ε_n d'éléments de $]0, 1[$ telle que $\lim \varepsilon_n = 0 \bmod . 1$ et $p/r + \varepsilon_n \in \{\theta_n^t : 0 \leqslant t < q,\, n \in \mathbb{N}\}$. On peut supposer de plus par exemple que tous les ε_n sont dans $]0, 1/2[$. Les points de la forme

$$e(a + Mp/r + \varepsilon_{k_1} + \cdots + \varepsilon_{k_M})(M \in \mathbb{N},\, k_1 < \cdots < k_M)$$

appartiennent à $u(\mathbb{N})$ ce qui est contradictoire avec le fait que $e(a)$ est isolé dans $u(\mathbb{N})$.

On déduit de ceci que (iii) est vérifié □

Nous utiliserons par la suite le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.6. *Si $u(\mathbb{N})$ est fini, alors il existe n_0 et une suite q-multiplicative v à valeurs dans un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$ tels que pour tout $k < q^{n_0}$, $u(nq^{n_0} + k) = u(k)v(n)$.*

Preuve. Il suffit de considérer le n_0 de la proposition précédente et $v(n) = u(nq^{n_0})$. □

3. *Décomposition en produit d'une suite irréductible et d'une suite périodique.*

On considère à présent une suite q-multiplicative $u = (u(n))_{n \geqslant 0}$, à valeurs dans le groupe G des racines b-èmes de l'unité, où b est un entier $\geqslant 2$ fixé.

DEFINITION 1.7. La suite u est dite irréductible s'il n'existe pas d'entier a dans $]0, b[$ tel que la suite $(u(n)^a)_{n \geqslant 0}$ soit périodique.

PROPOSITION 1.8. *Si la suite u n'est pas irréductible alors elle est produit (terme à terme) d'une suite périodique et d'une suite q-multiplicative irréductible à valeurs dans un groupe de racines d-èmes de l'unité avec $d < b$.*

Preuve de la proposition 1.8. Soit a entier compris entre 1 et $b - 1$ tel que la suite $(u(n)^a)$ soit périodique. Cette suite étant encore q-multiplicative, il existe, d'après la proposition 1.3, un entier naturel h et un élément g de G

tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(n)^a = (u(\mathrm{mod}_{q^h}(n)))^a g^{E(n/q^h)}.$$

Soit g_1 une racine a-ème de g. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(n) = v(n) \,.\, w(n)$, où v est la suite q-multiplicative périodique définie par

$$v(n) = u(\mathrm{mod}_{q^h}(n)) g_1^{E(n/q^h)},$$

et w est une suite de racines a-èmes de l'unité.

Par division on montre que w est q-multiplicative. Comme $a < b$, il suffit pour conclure dans le cas où w n'est pas irréductible, d'itérer le procédé. □

4. *Propriétés de répartition*

On considère à présent une suite q-multiplicative $u = (u(n))_{n \geqslant 0}$ dans le groupe $\mathbb{U}$.

Pour tout entier $N > 0$ et tout réel x, on pose

$$V_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n)\, e(nx) \quad (\text{avec } e(x) = e^{2i\pi x}).$$

PROPOSITION 1.9. *Si la suite u est à valeurs dans une partie finie de* $\mathbb{U}$ *et n'est pas périodique alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} V_N(x) = 0,$$

autrement dit u est à spectre vide.

Preuve de la proposition 1.9. D'après la proposition 1.5, il existe $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$ tel que, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$ $u^r(tq^n) = 1$.

Etape 1: Posons $S_N(x) = V_{q^N}(x)$ et pour tout $(j, n) \in \{0, \dots, q-1\} \times \mathbb{N}$, $u(jq^n) = a_n^j$ avec $a_n^j = e(r_n^j/r)$, $r_n^j \in \{0, \dots, r-1\}$ si $n \geqslant n_0$.

On vérifie immédiatement que

$S_{N+1}(x) = A_N(x) S_N(x)$ avec $A_N(x) = \Sigma_{j<q}\ a_N^j e(jq^N x)$ et par induction que

$$S_N(x) = \prod_{n<N} A_n(x).$$

Pour montrer que $S_N(x) \in o(q^N)$ il suffit donc de vérifier que la suite $(A_n(x))_{n \geqslant 0}$ ne converge pas vers q.

Supposons que $\lim_{n \to +\infty} A_n(x) = q$, c'est-à-dire que $\lim_{n \to +\infty} a_n^j e(jq^n x) = 1$ pour tout $j \in \{0, \ldots, q-1\}$.

Cas 1: $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

L'hypothèse implique en particulier que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(q^n x + \frac{r_n^1}{r} \right) = 0 \text{ mod. } 1$$

et donc que la suite $(q^n x)_{n \geqslant 0}$ n'admet qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (cf. par exemple [Que], prop. V.18).

Cas 2: $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

L'hypothèse signifie que pour tout $j \in \{0, \ldots, q-1\}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(jq^n \frac{a}{b} + \frac{r_n^j}{r} \right) = 0 \text{ mod. } 1$$

c'est-à-dire, puisque l'ensemble des valeurs de $jq^n(a/b) + r_n^j/r$ est fini modulo 1, que $r_n^j/r = -jq^n(a/b)$ mod. 1 pour tout $n \geqslant n_0' \geqslant n_0$.

Posons

$$\alpha = e\left(-\frac{aq^{n_0'}}{b} \right) \in G \quad \left(\alpha^r = e\left(-\frac{arq^{n_0'}}{b} \right) = e(r_n^1) = 1 \right).$$

On a pour tout $j \in \{1, \ldots, q-1\}$ et pour tout $n \geqslant n_0'$

$$a_n^j = e\left(-jq^n \frac{a}{b} \right) = \alpha^{jq^{n-n_0'}}$$

ce qui d'après la proposition 1.3 contredit le fait que u n'est pas périodique.

Etape 2: Si $N = \sum_{k=1}^{K} c_k q^{n_k}$ (avec $n_1 > n_2 > \cdots > n_K$) alors on a

$$\begin{aligned} V_N(x) &= \sum_{n < c_1 q^{n_1}} u(n) e(nx) + \sum_{n = c_1 q^{n_1}}^{N} u(n) e(nx) \\ &= \left(\sum_{j < c_1} a_{n_1}^j e(jq^{n_1} x) \right) S_{n_1}(x) + a_{n_1}^{c_1} e(c_1 q^{n_1} x) V_{N_1}(x) \end{aligned}$$

où

$$N_1 = \sum_{k=2}^{K} c_k q^{n_k},$$

d'où

$$|V_N(x)| \leqslant (q-1) \sum_{k=1}^{K} |S_{n_k}(x)|$$

et

$$\frac{|V_N(x)|}{N} \leqslant (q-1)q^{-n_1} \sum_{i=0}^{n_1} q^i \frac{|S_i(x)|}{q^i},$$

ce qui prouve que

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} V_N(x) = 0. \qquad \square$$

PROPOSITION 1.10. *Toute suite q-multiplicative u vérifie: si N, m et t sont des entiers positifs,*

$$\left| \sum_{n<N} u(n+m) \right| \leqslant 2q^t + \frac{N}{q^t} \left| \sum_{n<q^t} u(n) \right|.$$

COROLLAIRE 1.11. *Si la suite q-multiplicative u est à spectre vide alors, pour tout réel x, la suite*

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{n<N} u(n+m) e(nx) \right)_{n>0}$$

tend vers zéro uniformément en m.

Preuve de la proposition 1.10. Posons

$$a = E\left[\frac{m}{q^t}\right] + 1 \quad \text{et} \quad b = E\left[\frac{m+N}{q^t}\right].$$

Si $N \leqslant 2q^t$, l'inégalité est évidente.

Sinon, on a

$$0 \leqslant b - a \leqslant \frac{N}{q^t}$$

et

$$\left|\sum_{n<N} u(n+m)\right| \leqslant 2q^t + \left|\sum_{n=aq^t}^{bq^t-1} u(n)\right| = 2q^t + \left|\sum_{j=a}^{b-1} u(jq^t)\right| \left|\sum_{k=0}^{q^t-1} u(k)\right|$$
$$\leqslant 2q^t + (b-a)\left|\sum_{k=0}^{q^t-1} u(k)\right| \qquad \square$$

II. Système dynamique associé à une suite q-multiplicative

1. Extension d'un odomètre

Soit $u = (u(n))_{n \geqslant 0}$ une suite q-multiplicative, dans un groupe $(G, .)$. On note $(\mathbb{Z}_q, +)$ le groupe des entiers q-adiques, c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1, \dots, q-1\}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition avec retenue. On note $\bar{1}$ l'élément $(1, 0, 0, 0, \dots)$ et ε l'élément $(q-1, q-1, q-1, \dots)$. Le groupe $\mathbb{Z}_q$ est muni de la topologie produit des topologies discrètes sur $\{0, 1, \dots, q-1\}$ qui lui confère une structure de groupe compact abélien métrisable. L'ensemble $T = \{n\bar{1} : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{Z}_q$.

On définit une application φ de T dans G par

$$\varphi(n\bar{1}) = u(n+1)(u(n))^{-1}.$$

En utilisant la propriété de q-multiplicativité on observe que cette application φ admet un unique prolongement continu sur $\mathbb{Z}_q \backslash \{\varepsilon\}$, noté encore φ et défini par

$$\varphi(x) = u\left(1 + \sum_{n=0}^{N} x_n q^n\right)\left(u\left(\sum_{n=0}^{N} x_n q^n\right)\right)^{-1}$$

si $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ et $N = \inf\{n : x_n \neq q-1\}$.

Remarquons qu'en fait on a

$$\varphi(x) = u\left(1 + \sum_{n=0}^{N} x_n q^n\right)\left(u\left(\sum_{n=0}^{N} x_n q^n\right)\right)^{-1}$$

pour tout $N \geqslant \inf\{n : x_n \neq q-1\}$.

On fixe arbitrairement la valeur de $\varphi(\varepsilon)$.

A l'aide de cette application on construit une G-extension de la translation $x \to x + \bar{1}$ sur $\mathbb{Z}_q$; l'application T_φ de $\mathbb{Z}_q \times G$ dans lui même est alors définie par

$$T_\varphi(x, g) = (x + \bar{1}, \varphi(x) \,.\, g).$$

On note m_X la probabilité de Haar du groupe $\mathbb{Z}_q$. Si le groupe G admet une mesure de Haar m_G, la mesure $m_X \times m_G$ est T_φ-invariante.

CONCLUSION. Nous avons construit un système dynamique mesuré $(\mathbb{Z}_q \times G, m_X \times m_G, T_\varphi)$ qui "produit" la suite q-multiplicative en ce sens que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_\varphi^n(0, u(0)) = (n\bar{1}, u(n)).$$

Plusieurs propriétés ergodiques de la suite u pourront se déduire des propriétés de ce système dynamique.

2. Lien avec le sous-shift associé à u

Supposons à présent que le groupe G est compact. On munit $G^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit et du décalage $D : G^{\mathbb{N}} \to G^{\mathbb{N}}$

$$(g_0, g_1, g_2, \ldots) \to (g_1, g_2, g_3, \ldots)$$

On note K_u la plus petite partie fermée de $G^{\mathbb{N}}$, contenant u et stable sous D.

Nous allons préciser le lien entre le "produit gauche" $(\mathbb{Z}_q \times G, T_\varphi)$ et le "sous-shift" (K_u, D). Ceci ne sera pas utilisé dans la suite de l'article.

Notons K_u^* l'ensemble des éléments de K_u qui ne sont pas de la forme $(g_0, g_1, g_1 u(1), g_1 u(2), g_1 u(3), \ldots)$ avec $g_0, g_1 \in G$.

Notons M la plus petite partie fermée de $\mathbb{Z}_q \times G$, contenant $(0, u(0))$ et stable sous T_φ. Notons enfin M^* l'ensemble des éléments de M qui ne sont pas de la forme (ε, g) avec $g \in G$, et $\mathbb{Z}_q^* = \mathbb{Z}_q \backslash \{\varepsilon\}$.

On définit une application F de $\mathbb{Z}_q \times G$ dans $G^{\mathbb{N}}$ par

$$F(x, g) = (g, \varphi(x)g, \varphi(x + \bar{1})\varphi(x)g, \ldots).$$

PROPOSITION 2.1. (a) *L'application F est continue sur $\mathbb{Z}_q^* \times G$.*

(b) $K_u^* \subset F(M^*) \subset K_u$.

(c) $F \circ T_\varphi = D \circ F$.

(d) *Si le groupe G est fini et si la suite u est déterminée à tous les ordres,* *alors la restriction de F à M^* est injective.*

Preuve de la proposition 2.1. F est continue sur $\mathbb{Z}_q^* \times G$ car φ l'est sur $\mathbb{Z}_q^*$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(n\bar{1}, u(n)) = D^n u$.

Si $(x, g) \in M^*$, il existe une suite (n_k) dans $\mathbb{N}$ telle que

$\lim_{k\to\infty} (n_k\bar{1}, u(n_k)) = (x, g)$, et on a

$$\lim_{k\to\infty} D^{n_k}u = F(x, g).$$

Nous avons démontré que $F(M^*) \subset K_u$.

Soit $g = (g_n)_{n\geqslant 0} \in K_u^*$.

Il existe une suite (n_k) dans $\mathbb{N}$ telle que $g = \lim_{k\to+\infty} D^{n_k}u$, c'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g_p = \lim_{k\to+\infty} u(p + n_k)$.

Montrons que, dans $\mathbb{Z}_q$, la suite $(n_k\bar{1})$ ne converge pas vers ε. Supposons que ce soit le cas: si $n_k\bar{1} \to \varepsilon$ alors $(n_k + 1)\bar{1} \to 0^\infty$ et donc, pour tout $p \geqslant 2$, $g_p = u(p - 1)g_1$. Or ceci est exclu par $g \in K_u^*$.

La suite $(n_k\bar{1})$ n'étant pas convergente vers ε, on peut en extraire une sous-suite $(n'_k\bar{1})$ qui converge vers un élément x de $\mathbb{Z}_q^*$.

Dans $\mathbb{Z}_q \times G$, la suite $(n'_k\bar{1}, u(n'_k))$ converge vers (x, g_0) et on a

$$F(x, g_0) = \lim_{k\to\infty} F(n'_k\bar{1}, u(n'_k)) = \lim_{k\to\infty} D^{n'_k}u = g.$$

Nous avons démontré que $K_u^* \subset F(M^*)$.

La relation $F \circ T_\varphi = D \circ F$ découle directement de la construction. Il nous reste à prouver (d).

Soit $(x, g) \in M^*$ et $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} = F(x, g)$. Il existe une suite (n_k) dans $\mathbb{N}$ telle que $(x, q) = \lim_{k\to\infty} (n_k\bar{1}, u(n_k))$ et, F étant continue au point (x, g), on a:

$$h = \lim_{k\to\infty} D^{n_k}u.$$

Or le fait que u soit déterminée à l'ordre t entraîne que, si la suite $D^{n_k}u$ converge dans $G^{\mathbb{N}}$, alors la suite $(\text{mod}\,_{q^t}(n_k))_{k\geqslant 0}$ est constante à partir d'un certain rang. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{N}$, on a précisément démontré que la suite $(n_k\bar{1})$ converge dans $\mathbb{Z}_q$ vers une limite déterminée de façon unique par h. On a évidemment $h_0 = g$.

La donnée de h détermine bien de façon unique le couple (x, g). □

III. Propriétés ergodiques des suites q-multiplicatives

1. Quelques rappels sur les produits gauches

Plaçons nous dans le cadre suivant:

$(X, +)$ et $(G, .)$ désignent deux groupes compacts abéliens métrisables, munis de leurs tribus boréliennes et de leurs mesures de Haar normalisées, notées respectivement m_X et m_G. Une translation $x \to x + \alpha$ est donnée sur X ainsi qu'une application mesurable φ de X dans G; on suppose que l'ensemble des points de discontinuité de φ est négligeable dans X. (H_1)

On définit la transformation T_φ de $X \times G$ par $T_\varphi(x, g) = (x + \alpha, g\varphi(x))$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\varphi^{(n)}(x) = \Pi_{k=0}^{n-1} \varphi(x + k\alpha)$. Nous allons caractériser par des conditions sur φ, l'ergodicité et certaines propriétés spectrales du système dynamique $(X \times G, T_\varphi)$.

PROPOSITION 3.1. *Il y a équivalence entre*

1(a) *Le système* $(X \times G, m_X \times m_G, T_\varphi)$ *est ergodique.*

1(b) *Le système* $(X \times G, T_\varphi)$ *est uniquement ergodique.*

1(c) *Pour toute fonction continue w sur* $X \times G$, *la suite*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w \circ T_\varphi^k\right)_{n>0}$$

converge en tout point vers $\int_{X \times G} w(x, g)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}g$.

1(d) *Pour toute fonction bornée w sur* $X \times G$, *dont l'ensemble des points de discontinuité est* $m_X \times m_G$ – *négligeable, la suite*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w \circ T_\varphi^k\right)_{n>0}$$

converge uniformément vers $\int_{X \times G} w(x, g)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}g$.

1(e) *Pour aucun caractère non trivial* γ *de* G, *il n'existe d'application mesurable* ψ *de* X *dans* $\mathbb{U}$ *telle que*

$$\gamma\varphi(x) = \psi(x + \alpha)/\psi(x) \text{ (p.p.).}$$

1(f) *Pour tout caractère non trivial* γ *de* G, *pour tout caractère* σ *de* X,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\alpha)^k (\gamma\varphi)^{(k)}(x) = 0 \text{ (p.p.).}$$

DEFINITION 3.2. L'application φ sera appelée un cocycle ergodique si elle vérifie les propriétés équivalentes précédentes (l'élément α de X étant considéré comme fixé une fois pour toutes).

Preuve de la proposition 3.1. L'équivalence entre 1(a), 1(b) et 1(e) est bien connue ([Fur1]). L'équivalence entre 1(b) et 1(c) est bien connue quand le cocycle φ est continu. Les implications 1(d) $\Rightarrow$ 1(c) $\Rightarrow$ 1(b) sont évidentes. Il nous reste à montrer 1(b) $\Rightarrow$ 1(c) $\Rightarrow$ 1(d) et 1(e) $\Leftrightarrow$ 1(f).

Montrons que si $(X \times G, T_\varphi)$ est uniquement ergodique, alors pour toute fonction continue w, la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w \circ T_\varphi^k\right)_{n>0}$$

converge uniformément vers $\int_{X \times G} w(x, g)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}g$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fonction continue w_0, une suite (y_j) dans $X \times G$ et une suite croissante d'entiers $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telles que la suite

$$\left(\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1} w_0(T_\varphi^k y_j)\right)_{j \in \mathbb{N}}$$

ne converge pas vers $\int_{X \times G} w_0(x, g)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}g$.

Quitte à extraire de (n_j, y_j) une sous-suite, on peut supposer que, pour toute fonction continue w, la suite

$$\left(\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1} w(T_\varphi^k y_j)\right)_{j \in \mathbb{N}}$$

converge vers une limite notée $v(w)$.

Ceci définit, sur $X \times G$, une mesure de probabilité v.

Si nous montrons que v est T_φ-invariante, nous aurons prouvé 1(b) $\Rightarrow$ 1(c).

Du fait que la translation $x \to x + \alpha$ est uniquement ergodique, on déduit que la projection de v sur X coïncide avec m_X. Si w est une fonction continue sur $X \times G$, la fonction $w \circ T_\varphi$ est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est inclus dans $N \times G$, où N est l'ensemble des points de discontinuité de φ. On a $v(N \times G) = m_X(N) = 0$. *Si* w est une fonction continue sur $X \times G$, la fonction $w \circ T_\varphi$ est donc v-Riemann-intégrable et, par des arguments d'encadrement standards, on obtient:

$$v(w \circ T_\varphi) = \lim_{j \to +\infty} \frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1} w \circ T_\varphi(T_\varphi^k y_j)$$

Ceci nous montre que $\nu(w \circ T_\varphi) = \nu(w)$.

Pour démontrer 1(c) ⇒ 1(d), on utilise les mêmes arguments d'encadrement. Si la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w \circ T_\varphi^k\right)_{n>0}$$

converge uniformément vers $\int_{X\times G} w(x, g)\, dx\, dg$ pour toute fonction continue w, alors ce sera encore vrai pour toute fonction $m_X \times m_G$-Riemann intégrable.

Démontrons à présent l'équivalence entre 1(e) et 1(f).

Si $\gamma\varphi(x) = \psi(x+\alpha)/\psi(x)$, on fixe σ dans $\hat{X}$ tel que $\int_X \psi(x)\sigma(x)\, dx \neq 0$. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\alpha)^k(\gamma\varphi)^{(k)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\alpha)^k\psi(x+k\alpha)/\psi(x),$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\alpha)^k(\gamma\varphi)^{(k)}(x)\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(x+k\alpha)\psi(x+k\alpha)\right| = \int_X \psi\sigma$$

d'après le théorème ergodique ponctuel.

Ceci prouve que 1(f) ⇒ 1(e). Si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\alpha)^k(\gamma\varphi)^{(k)}(x) = b(x) \neq 0$$

alors

$$\begin{aligned} b(x+\alpha) &= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\alpha)^k(\gamma\varphi)^{(k+1)}(x)/(\gamma\varphi)(x) \\ &= b(x)/\sigma(\alpha)(\gamma\varphi)(x). \end{aligned}$$

On en déduit que le module de b est constant et en posant

$\psi = |b|/(b\,.\,\sigma)$ on obtient $(\gamma\varphi)(x) = \psi(x+\alpha)/\psi(x)$.

Ceci prouve que 1(e) ⇒ 1(f).

PROPOSITION 3.3. *Il y a équivalence entre:*

2(a) *Le système dynamique* $(X \times G, T_\varphi)$ *est uniquement ergodique et les* *seules valeurs propres de ce système sont celles de la translation par α sur X.*

2(b) *Les seules fonctions T_φ-propres définies sur $X \times G$ sont les produits d'une constante et d'un caractère de X.*

2(c) *Pour aucun caractère non trivial γ de G, il n'existe une application mesurable ψ de X dans $\mathbb{U}$ et une constante λ dans $\mathbb{U}$ telles que $\gamma\varphi(x) = \lambda\psi(x+\alpha)/\psi(x)$.*

2(d) *Pour tout caractère non trivial γ de G, pour tout λ dans $\mathbb{U}$,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (\gamma\varphi)^{(k)}(x) = 0 \text{ (p.p.)}$$

DEFINITION 3.4. L'application φ sera appelée un cocycle faiblement mélangeant si elle vérifie les propriétés équivalentes précédentes.

Preuve de la proposition 3.3. L'équivalence entre 2(a) et 2(b) est une conséquence immédiate de l'équivalence entre 1(a) et 1(b). L'équivalence entre 2(a) et 2(c) est bien connue. L'équivalence entre 2(c) et 2(d) se déduit de l'équivalence entre 1(f) et 1(e).

Note bibliographique

Les résultats des deux propositions précédentes sont classiques dans le cas où le cocycle φ est continu ([Fur1]. Le fait que cette hypothèse de continuité puisse être affaiblie avait été remarqué par J. P. Conze ([Con]), puis P. Liardet, qui avait noté dans [Lia3] qu'une hypothèse de Riemann – intégralité sur φ était suffisante.

2. Propriétés ergodiques du produit gauche associé à une suite q-multiplicative

Soit $u = (u(n))_{n \geq 0}$ une suite q-multiplicative dans G sous-groupe fermé de $\mathbb{U}$.

DEFINITION 3.5. Supposons G fini. On dira que la suite u est irréductible si, pour aucun caractère non trivial γ de G, la suite γu n'est périodique.

A la suite u on associe, suivant la méthode présentée en II, un cocycle φ de $\mathbb{Z}_q$ dans G, qui est continu sur $\mathbb{Z}_q$ privé d'un point. La transformation T_φ est définie sur $\mathbb{Z}_q \times G$ par

$$T_\varphi(x, g) = (x + \bar{1}, g\varphi(x)).$$

THEOREME 3.6. *Si pour tout caractère non trivial γ de G, la suite γu est à spectre vide, et en particulier si G est fini et u irréductible, alors le système* *dynamique* ($\mathbb{Z}_q \times G, T_\varphi$) *est uniquement ergodique et les seules valeurs propres de ce système sont celles de la translation par* $\bar{1}$ *sur* $\mathbb{Z}_q$.

Preuve de théorème 3.6. La proposition 1.9 justifie le "en particulier" de l'énoncé. Démontrons que sous les hypothèses du théorème, le cocycle φ satisfait la condition 2(d) de la proposition 3.3.

Si $x = (x_j)_{j \geqslant 0} \in \mathbb{Z}_q$ et si tous les x_j ne sont pas égaux à $q-1$ à partir d'un certain rang, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$m \geqslant m_0 \Rightarrow \varphi(x+k) = u\left(k+1+\sum_{j=0}^{m} x_j q^j\right)\Big/ u\left(k+\sum_{j=0}^{m} x_j q^j\right).$$

Soient $\lambda \in \mathbb{U}$ et $\gamma \in \hat{G}$, $\gamma \neq 1$.

Notons $u'_n = \gamma u_n$. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{k<n} \lambda^k (\gamma\varphi)^{(k)}(x)$$

est égale à

$$\frac{1}{n}\sum_{k<n} \lambda^k u'(m+k)/u'(m),$$

pour un entier m qui est fonction de x et de n.

La suite $(u'(n))$ étant supposée à spectre vide, le corollaire 1.11 nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k<n} \lambda^k (\gamma\varphi)^{(k)}(x) = 0 \text{ (p.p.)}.$$

Le théorème 3.6 est démontré. □

3. Stricte ergodicité des suites q-multiplicatives

A une suite $u = (u(n))_{n \geqslant 0}$ prenant ses valeurs dans un compact K on associe un sous-shift K_u; c'est la plus petite partie fermée de $K^{\mathbb{N}}$ contenant u et toutes ses images par le décalage D. La suite u est dite strictement ergodique si le système dynamique (K_u, D) l'est.

La proposition suivante est bien connue.

PROPOSITION 3.7. *La suite u, élément de* $K^{\mathbb{N}}$, *est strictement ergodique si et seulement si pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *pour toute fonction continue positive f sur* K^{m+1}, *s'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $f(u(k), u(k+1), \ldots, u(k+m)) > 0$ *alors la* *suite*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u(k+p), u(k+p+1), \ldots, u(k+p+m))$$

converge uniformément en p vers une limite non nulle.

L'étude du III.2 permet de retrouver le résultat suivant, qui apparaît dans [Lia2] quand $G = \mathbb{U}$, ainsi que dans [Kea] quand $G = \{-1, 1\}$.

THEOREME 3.8. *Si u est une suite q-multiplicative à valeurs dans un sous-groupe fermé G de $\mathbb{U}$, telle que, pour tout caractère non trivial γ de G, la suite $\gamma u = (\gamma(u(n)))_{n\geqslant 0}$ est à spectre vide, alors la suite u est strictement ergodique.*

THEOREME 3.9. *Toute suite q-multiplicative à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{U}$ est strictement ergodique.*

Preuve du théorème 3.8. Notons $(\mathbb{Z}_q \times G, T_\varphi)$ le produit gauche associé à la suite u. Sous les hypothèses du théorème 3.8, on sait, grâce au théorème 3.6, que ce système dynamique est uniquement ergodique (et même strictement ergodique car la mesure T_φ-invariante charge tous les ouverts de $\mathbb{Z}_q \times G$). Soit $m \in \mathbb{N}$, et f une fonction continue positive sur K^{m+1} telle qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+m}) > 0$. On définit une fonction F sur $\mathbb{Z}_q \times G$ par

$$F(x, g) = f(g, g\varphi(x), g\varphi(x)\varphi(x+\bar{1}), \ldots, g\varphi^{(m)}(x)).$$

Cette fonction est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. La proposition 3.1 nous permet d'affirmer que la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F \circ T_\varphi^k\right)_{n>0}$$

converge uniformément vers $\int_{\mathbb{Z}_q \times G} F(x, g)\, dx\, dg$. En particulier la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(T_\varphi^{k+p}(0, 1))\right)_{n>0}$$

converge, uniformément en p, vers cette intégrale. Or

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(T_\varphi^{k+p}(0, 1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u(k+p), u(k+p+1), \ldots, u(k+p+n)).$$

De plus $F(T_\varphi^j(0,1)) > 0$ et F continue au point $T_\varphi^j(0,1)$ entraînent que $\int_{\mathbb{Z}_q \times G} F(x, g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}g > 0$.

La proposition 3.7 permet de conclure. □

Preuve du théorème 3.9. D'après le corollaire 1.6, il suffit de montrer le théorème 3.9 dans le cas où $u(\mathbb{N})$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$. En effet, si n_0 est l'entier défini dans le corollaire 1.6 et $v(n) = u(nq^{n_0})$, on a pour tout bloc $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}) \in u(\mathbb{N})^l$:

$$\begin{aligned}
&\{n, (u(u), u(n+1), \ldots, u(n+l-1)) = B\}\\
&= \bigcup_{k<q^{n_0}} \{nq^{n_0}+k, (u(nq^{n_0}+k), u(nq^{n_0}+k+1), \ldots, u(nq^{n_0}+k+l-1)) = B\}\\
&= \bigcup_{k<q^{n_0}} \{nq^{n_0}+k, (v(n), v(n+1), \ldots, v(n+l_k-1)) = B_k\}
\end{aligned}$$

où B_k est le bloc de longueur $l_k = \left[\frac{q^{n_0}}{l}\right]$ ou $\left[\frac{q^{n_0}}{l}\right] + 1$ défini par

$$(u(nq^{n_0}+k), u(nq^{n_0}+k+1), \ldots, u(nq^{n_0}+k+l-1)) = B$$

si

$$(v(n), \ldots, v(n+l_k-1)) = B_k.$$

Il suffit donc de montrer la stricte ergodicité de la suite v, qui est à valeurs dans un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$, pour obtenir la stricte ergodicité de la suite u.

Soit donc u une suite q-multiplicative prenant ses valeurs dans un sous-groupe fini G de $\mathbb{U}$. Si u est irréductible, le théorème 3.8 s'applique et on sait que u est strictement ergodique. Dans le cas où u n'est pas irréductible on sait, grâce à la proposition 1.8, qu'il existe une suite périodique $v = (v(n))$ et une suite q-multiplicative $w = (w(n))$ irréductible telles que $u(n) = v(n) \,.\, w(n)$.

Nous voulons démontrer que, pour tout $k \geqslant 0$, pour tout $B = (b_0, b_1, \ldots, b_k) \in G^{k+1}$, s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $(u(n), u(n+1), \ldots, u(n+k)) = B$ alors

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=m}^{N+m-1} \mathbb{1}_B(u(n), u(n+1), \ldots, u(n+k))$$

existe uniformément en m et est non nul.

Notons p une période de la suite v. On a:

$$\{n\in\mathbb{N}:(u(n),\ u(n+1),\dots,u(n+k))=B\}$$
$$=\bigcup_{j=0}^{p-1}\{j+np:n\in\mathbb{N}\ \text{et}\ (w(j+np),\ w(j+np+1),\dots,w(j+np+k))$$
$$=(b_0v(j)^{-1},\ b_1v(j+1)^{-1},\dots,b_kv(j+k)^{-1})\}.$$

Il nous suffit donc de démontrer que

pour tout $k\geqslant 0$, pour tout $j\geqslant 0$, pour tout $B\in G^k$,

s'il existe $n\geqslant 0$ tel que $(w(np+j),\ w(np+j+1),\dots,w(np+j+k))=B$, alors

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=m}^{N+m-1}\mathbb{1}_B(w(np+j),\ w(np+j+1),\dots,w(np+j+k))\qquad(*)$$

existe uniformément en m et est non nul.

On considère le produit gauche strictement ergodique $(\mathbb{Z}_q\times G,\ T_\varphi)$ associé à la suite q-multiplicative irréductible w. Grâce aux mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.8, le résultat $(*)$ est une conséquence du fait suivant: $\mathbb{Z}_q\times G$ est réunion d'une famille finie de compacts K_i, qui sont T_φ^p-invariants et tels que chaque système dynamique $(K_i,\ T_\varphi^p)$ soit strictement ergodique.

Résumons la preuve de cette dernière affirmation. Si p n'est pas multiple de q, la transformation T_φ n'a pas de valeur propre racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité (sauf 1), la transformation T_φ^p est ergodique sur $(\mathbb{Z}_q\times G,\ m_X\times m_G)$, et le système $(\mathbb{Z}_q\times G,\ T_\varphi^p)$ est strictement ergodique. Si p est un multiple de q, la transformation T_φ^p n'est pas ergodique sur $(\mathbb{Z}_q\times G,\ m_X\times m_G)$ mais chaque fonction T_φ^p-invariante sur $\mathbb{Z}_q\times G$ est continue et ne prend qu'un nombre fini de valeurs; on en déduit sans peine la décomposition du système $(\mathbb{Z}_q\times G,\ T_\varphi^p)$ en composantes strictement ergodiques.

Ceci achève la preuve du théorème 3.9.

IV. Théorème ergodique pondéré – méthode des temps de retour

1. Remarque sur le théorème ergodique en moyenne

Soit $(u(n))_{n\geqslant\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes.

Avec des arguments simples de théorie spectrale, on peut démontrer qu'il y a équivalence entre:

(a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} u(k) e^{ikx} = 0$,

(b) si $(\Omega, \mathscr{J}, \mu, S)$ est un système dynamique mesuré et si $f \in L^1(\mu)$, alors la suite $\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} u(k)\ f \circ T^k \right)_{n>0}$ converge vers zéro dans $L^1(\mu)$.

Le résultat de convergence en moyenne énoncé dans le théorème B est donc évident. De la même façon, grâce aux propositions 1.8 et 1.9, la preuve du résultat de convergence en moyenne énoncé dans le théorème A ne présente pas de difficulté.

2. Un théorème ergodique pour une suite de temps de retour

Revenons à la situation générale décrite dans le paragraphe III.1. X, G, α et φ sont donnés et satisfont les hypothèses (H1).

Nous allons énoncer un théorème ergodique pondéré pour les suites de poids "produites" par le produit gauche $(X \times G, T_\varphi)$.

THEOREME C. *Si φ est un cocycle faiblement mélangeant, alors pour toute fonction continue w sur $X \times G$ et pour tout $(x, g) \in X \times G$, on a*:

(a) *si $(\Omega, \mathscr{J}, \mu, S)$ est un système dynamique mesuré et $f \in L^1(\mu)$, alors la suite $\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} w(T_\varphi^k(x, g)) f(S^k\omega) \right)_{n>0}$ converge pour μ-presque tout ω.*

(b) *si de plus $\int_G w(x, g)\, \mathrm{d}g \equiv 0$, alors la suite précédente tend vers zéro.*

REMARQUES. (1) Une conclusion équivalente à la précédente est: Pour tout borélien A de frontière négligeable dans $X \times G$, pour tout $(x, g) \in X \times G$, en notant $(n_k)_{k \geq 0}$ la suite croissante des entiers naturels tels que $T_\varphi^{n_k}(x, g) \in A$, on a:

(a)′ si $(\Omega, \mathscr{J}, \mu, S)$ est un système dynamique mesuré et $f \in L^1(\mu)$, alors la suite $\left(\frac{1}{K} \sum\limits_{k=0}^{K-1} f(S^{n_k}\omega) \right)_{k>0}$ converge pour presque tout ω.

(b)′ si de plus le système $(\Omega, \mathscr{J}, \mu, S)$ est ergodique et si $\int_G \mathbb{1}_A(x, g)\, \mathrm{d}g = m_X \times m_G(A)$, alors la suite précédente tend vers $\int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu$.

(2) Le théorème C dans le cas d'une translation, c'est-à-dire quand G est réduit à un point, est une conséquence d'un résultat de Brunel et Keane ([B-K]).

(3) Le théorème de Bourgain sur le temps de retour ([Bou]) permet d'obtenir le résultat dont l'énoncé est identique sauf que le "pour tout (x, g)" est remplacé par "pour presque-tout (x, g)".

(4) Dans le théorème C, l'hypothèse de mélange faible du cocycle ne peut pas être otée. En utilisant le célèbre exemple donné par Furstenberg dans [Fur1] de système dynamique minimal non uniquement ergodique, on peut construire un produit gauche $(X \times G, T_\varphi)$ strictement ergodique qui ne satisfait pas la conclusion du théorème.

La démonstration du théorème C est basée sur la preuve, donnée par Bourgain, Furstenberg, Katznelson et Ornstein dans [B-F-K-O], du théorème ergodique le long de la suite des temps de retour. Cette preuve est courte mais très dense. Leur argument peut être scindé en deux étapes et présenté comme suit.

THEOREME 4.1 ([B-F-K-O]). (1) *Soit (u_n) une suite bornée de nombres complexes telle que*

$$\forall \delta > 0,\ \exists L_\delta > 0,\ \forall L > L_\delta,\ \exists M_{\delta,L} > 0,\ \forall M > M_{\delta,L},$$

$$\frac{1}{M}\operatorname{card}\left\{m \in [0, M[\ \middle|\ \forall n \in [L_\delta, L[,\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{m+k}\overline{u_k}\right| < \delta\right\} > 1 - \delta.$$

On a alors:

si (Ω, μ, T) est un système dynamique probabilisé, alors, pour tout $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k . f(T^k\omega) = 0 \text{ pour } \mu\text{-presque tout } \omega. \tag{1}$$

(2) *Soient (Y, ν, S) un système dynamique probabilisé et u une fonction mesurable bornée sur Y, orthogonale, dans $L^2(\mu)$, à toutes les fonctions propres pour l'action de S. On a alors, pour ν-presque tout y, le point y est générique pour la fonction u dans le système dynamique (Y, ν, S) et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u(S^k y) . \overline{u(S^k y')} = 0 \text{ pour } \nu\text{-presque tout } y'. \tag{2}$$

Enfin, si le point y vérifie (2), *alors la suite $u_n := u(S^n y)$ vérifie* (1).

De ce résultat on déduit facilement le corollaire suivant, connu sous le nom de théorème des temps de retour de Bourgain.

COROLLAIRE 4.2 ([Bou1]). *Soient (Y, ν, S) un système dynamique probabilisé et u une fonction mesurable bornée sur Y. Pour ν-presque tout y, si (Ω, μ, T) est un système dynamique probabilisé et si $f \in L^1(\mu)$, alors la suite*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u(S^k y)\,.\,f(T^k\omega)\right)_{n>0}$$

converge pour μ-presque tout ω.

Remarquons que, sous cette forme, le théorème des temps de retour ne peut être d'aucune utilité pour vérifier si une suite numérique donnée est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique ponctuel. Pour démontrer le théorème C nous utiliserons le théorème 4.1 en vérifiant, pour des points y fixés dans Y, la condition (2). Plus précisément nous utiliserons le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.3. *Soit Y un espace compact métrisable muni de sa tribu borélienne et d'une probabilité régulière ν. Soit S une transformation mesurable de cet espace, préservant la mesure ν et dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable.*

On suppose que, pour toute fonction continue w sur Y et pour tout y dans Y,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w(S^k y) = \int_Y w\, d\nu.$$

Soient w_0 une fonction continue sur Y et y_0 un point de Y.

On suppose que, pour ν-presque tout y,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_0(S^k y_0)\,.\,\overline{w_0(S^k y)} = 0.$$

On a alors, si (Ω, μ, T) est un système dynamique probabilisé et si $f \in L^1(\mu)$, pour μ-presque tout ω,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_0(S^k y_0)\,.\,f(T^k\omega) = 0.$$

Pour démontrer le théorème C nous utiliserons également la proposition suivante. Nous utilisons pour l'énoncer les notations du théorème 4.1.

PROPOSITION 4.4. *Si φ est un cocycle faiblement mélangeant de X dans G, alors, pour presque tout t dans X, l'application $x \to \varphi(x+t)\varphi(x)^{-1}$ est un cocycle ergodique de X dans G.*

Preuve de la proposition 4.4. Soit t un élément de X tel que le cocycle $\varphi(x+t)\varphi(x)^{-1}$ ne soit pas ergodique. Il existe un caractère non trivial γ_t de G, et une application mesurable ϕ_t de X dans U tels que

$$\gamma_t(\varphi(x+t))/\gamma_t(\varphi(x)) = \phi_t(x+\alpha)/\phi_t(x).$$

Supposons ceci satisfait par un ensemble non négligeable d'éléments t de X. Le dual $\hat{G}$ étant dénombrable, il existe un caractère non trivial γ de G tel que, pour un ensemble non négligeable d'éléments t de X,

$$\text{il existe } \phi_t \text{ tel que } \gamma(\varphi(x+t))/\gamma(\varphi(x)) = \phi_t(x+\alpha)/\phi_t(x). \tag{3}$$

Or l'ensemble des éléments t de X satisfaisant (3) est un sous-groupe de X, stable par translation par α. S'il n'est pas négligeable, il est égal à X. Il existe donc un caractère non trivial γ de G tel que,

$$\text{pour tout } t \text{ dans } X, \text{ il existe } \phi_t \text{ tel que } \gamma(\varphi(x+t))/\gamma(\varphi(x)) = \phi_t(x+\alpha)/\phi_t(x). \tag{4}$$

Il est toujours possible de choisir la famille $\{\psi_t, t \in X\}$ de façon à ce que l'application $(x, t) \to \psi_t(x)$ soit mesurable sur $X \times X$ (ceci est démontré dans [Les]).

Considérons les opérateurs unitaires U_1 et U_2 de $L^2(X)$ définis par

$$U_1 f(x) = \gamma(\varphi(x)) f(x+\alpha) \quad \text{et} \quad U_2 f(x) = \gamma(\varphi(x))^{-1} f(x+\alpha).$$

L'opérateur unitaire $U_1 \otimes U_2$ agit dans $L^2(X \times X)$. On définit une fonction F sur $X \times X$ par $F(x, x') = \psi_{x'-x}(x)$. On a

$$((U_1 \otimes U_2)F)(x, x') = \psi_{x'-x}(x+\alpha)\gamma(\varphi(x))/\gamma(\varphi(x')).$$

De (4) on déduit alors que $(U_1 \otimes U_2)F = F$.

Le fait que l'opérateur $U_1 \otimes U_2$ admette un vecteur invariant non nul entraîne que l'opérateur U_1 admet un vecteur propre (ceci est classique; cf. par exemple [Fur2] lem. 4.16).

Si $\gamma(\varphi(x)) f(x+\alpha) = \lambda f(x)$ avec $f \in L^2(X)$, $f \not\equiv 0$ et $\lambda \in U$, alors la fonction $(x, g) \to f(x)\gamma(g)$ est une fonction propre pour la transformation T_φ de $X \times G$. D'après la proposition 3.3 ceci prouve que le cocycle φ n'est pas faiblement mélangeant. La proposition 4.3 est démontrée. □

Preuve du théorème C. Remarquons tout d'abord, grâce à l'inégalité maximale ergodique

$$\mu\left(\left\{\omega : \sup_n \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w(T_\varphi^k(x, g)) f(S^k\omega)\right| > \varepsilon\right\}\right) \leqslant \frac{\|f\|_1 \|w\|_\infty}{\varepsilon},$$

que l'ensemble des éléments f de $L^1(\mu)$ vérifiant la conclusion du théorème est fermé dans $L^1(\mu)$. Il nous suffit donc de considérer les fonctions f bornées.

On peut vérifier sans difficulté que l'ensemble des fonctions continues w, pour lesquelles la conclusion du théorème est vraie, est fermé pour la topologie de la convergence uniforme. Si w est un caractère de X, cette conclusion se déduit immédiatement du théorème de Birkhoff. Nous allons démontrer que cette conclusion est vraie pour toutes les fonctions de la forme $\gamma \otimes \sigma$ avec $\gamma \in \hat{X}$, $\sigma \in \hat{G}$. Ceci établira le résultat complet. Pour les fonctions de la forme $\gamma \otimes \sigma$, avec $\gamma \in \hat{X}$, $\sigma \in \hat{G}$ et $\sigma \not\equiv 1$, nous allons appliquer le corollaire 4.3.

Grâce aux hypothèses du théorème C et à la proposition 3.3, les données $Y = X \times G$, $v = m_X \times m_G$ et $S = T_\varphi$ satisfont les hypothèses du corollaire 4.3. Soient $\gamma \in \hat{X}$, $\sigma \in \hat{G}$ et $\sigma \not\equiv 1$.

Fixons (x_0, g_0) dans $X \times G$ et démontrons que, pour presque tout (x, g),

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma \otimes \sigma(T_\varphi^k(x_0, g_0)) \overline{\gamma \otimes \sigma}(T_\varphi^k(x, g)) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma \otimes \sigma(T_\varphi^k(x_0, g_0)) \overline{\gamma \otimes \sigma}(T_\varphi^k(x, g)) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma \otimes \sigma \left(x_0 + k\alpha, g_0 \prod_{j=0}^{k-1} \varphi(x_0 + j\alpha) \right) \overline{\gamma \otimes \sigma} \left(x + k\alpha, g \prod_{j=0}^{k-1} \varphi(x + j\alpha) \right) \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma \left(\prod_{j=0}^{k-1} \varphi(x_0 + j\alpha)/\varphi(x + j\alpha) \right) \right) \gamma(x_0 - x) \sigma(g_0 g^{-1}).
\end{aligned}$$

En posant $x = x_0 + t$ et $\varphi_t(x) = \varphi(x)/\varphi(x + t)$ on obtient:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma \otimes \sigma(T_\varphi^k(x_0, g_0)) \overline{\gamma \otimes \sigma}(T_\varphi^k(x, g)) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \sigma(\varphi_t(x_0 + j\alpha)) \right) \right|.$$

Or d'après les propositions 4.4 et 3.1, on a, pour presque tout t dans X,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{k-1} \sigma(\varphi_t(x_0 + j\alpha)) = 0.$$

Ceci achève la preuve du théorème C.

3. Etude des suites q-multiplicatives comme suites de poids pour le théorème ergodique (preuve des théorèmes A et B)

Soit $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite q-multiplicative dans G, sous-groupe fermé de U. On lui associe (cf. II) un système dynamique $(\mathbb{Z}_q \times G, T_\varphi)$.

Si la suite u est telle que, pour tout caractère non trivial de G, la suite γu est à spectre vide, alors, d'après le théorème 3.6, le cocycle φ est faiblement mélangeant et on peut donc appliquer le théorème C. En appliquant ce théorème aux fonctions continues sur $\mathbb{Z}_q \times G$ de la forme $(x, g) \to w(g)$ et au point $(0, 1)$ on obtient le théorème B:

si $(\Omega, \mathscr{J}, \mu, T)$ est un système dynamique mesuré et $f \in L^1(\mu)$,
si w est une fonction continue sur G,
la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w(u(k))\, f(T^k\omega)\right)_{n>0}$ converge pour μ-presque tout ω;
si de plus $\int_G w(g)\,\mathrm{d}g = 0$, alors cette suite tend vers zéro. (5)

Supposons à présent G fini. Soit λ une valeur prise par la suite u et

$$\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\} = \{n \in N,\ u_n = \lambda\}$$

(cet ensemble est infini d'après le théorème 3.9). Si la suite u est irréductible, on a, en appliquant (5) à la fonction w indicatrice de $\{\lambda\}$: la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{n_1,n_2,n_3,\ldots\}}(k)\, f(T^k\omega)\right)_{n>0}$$

converge (p.p.).

D'autre part, le théorème 3.9 permet d'affirmer que la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{n_1,n_2,n_3,\ldots\}}(k)\right)_{n>0}$$

converge vers une limite non nulle.

On en déduit que la suite

$$\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} f(T^{n_k}\omega)$$

converge (p.p.).

Si la suite u n'est pas irréductible, on peut l'écrire (proposition 1.8) comme produit d'une suite irréductible u' dans un groupe fini G' et d'une suite périodique $(\theta^n)_{n\geqslant 0}$ où, dans $\mathbb{U}$, θ est un élément d'ordre fini d. On note U_d le groupe des racines $d^{\text{ièmes}}$ de l'unité, m_d la probabilité uniforme sur U_d et T_θ la rotation par θ sur U_d. Soit $(\Omega, \mathscr{J}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré; on peut appliquer (5) à la suite irréductible u' et au système dynamique $(\Omega \times U_d, \mu \otimes m_d, T \times T_\theta)$.

On en déduit en particulier que: si $f \in L^1(\mu)$, si $p \in \mathbb{N}$ et si w est une fonction continue sur G', alors la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w(u'(k))\theta^{pk} f\,(T^k\omega)\right)_{n>0}$$

converge pour μ-presque tout ω.

En faisant des combinaisons linéaires de ces expressions, on peut montrer que: si $f \in L^1(\mu)$, si $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ et si w est une fonction continue sur G', alors la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w(u'(kd+j))\, f(T^{kd+j}\omega)\right)_{n>0}$$

converge (p.p.).

En appliquant ceci à des fonctions w indicatrices de points de G', on obtient ensuite: si $f \in L^1(\mu)$ et si λ appartient à l'image de u, alors la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\lambda\}}(u(k))\, f(T^k\omega)\right)_{n>0}$$

converge (p.p.).

On conclut de la même façon que dans le cas où u était irréductible.

Ceci achève la démonstration du théorème A quand u est à valeurs dans un groupe fini.

Le corollaire 1.6 permet de conclure dans le cas général. $\square$

References

[B-S] R. Bellman et H. N. Shapiro: A problem in additive number theory. *Ann. of Math.* 49 (1948) 333–340.

[B-L] A. Bellow et V. Losert: The weighted pointwise ergodic theorem and the individual ergodic theorem along subsequences. *Trans. Amer. Math. Soc.* 288 (1985) 307–345.

[Bes] J. Besineau: Indépendance statistique d'ensembles liés à la somme des chiffres. *Acta. Arith.* 20 (1972) 401–416.

[Bou1] J. Bourgain: Temps de retour pour les systèmes dynamiques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, série I (1988) 483–485.

[Bou2] J. Bourgain: Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. *Publ. Math. IHES* 69 (1989) 5–45.

[B-F-K-O] J. Bourgain, H. Furstenberg, Y. Katznelson et D. Ornstein: Return times of dynamical systems, en appendice à [Bou2].

[B-K] A. Brunel et M. Keane: Ergodic theorems for operator sequences. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 12 (1969) 231–240.

[Con] J. P. Conze: Equirépartition et ergodicité de transformations cylindriques. Séminaire de probabilité. Université de Rennes, 1976.

[Coq] J. Coquet: Contribution à l'étude harmonique des suites arithmétiques. Thèse d'Etat, Orsay, 1978.

[C-K-M] J. Coquet, T. Kamae et M. Mendès-France: Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France* 105 (1977) 369–384.

[Del] H. Delange: Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives. *Acta Arith.* 21 (1972) 285–298.

[Fur1] H. Furstenberg: Strict ergodicity and transformations of the torus. *Amer. J. Math.* 83 (1961) 573–601.

[Fur2] H. Furstenberg: *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* Princeton University Press (1981).

[Gue] A. O. Guelfond: Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. *Acta Arith.* 13 (1968) 259–265.

[Kea] M. Keane: Generalized Morse sequences. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 10 (1968) 335–353.

[Kre] U. Krengel: *Ergodic Theorems.* De Gruyter Studies in Mathematics 6 (1985).

[Les] E. Lesigne: Résolution d'une équation fonctionnelle. *Bull. Soc. Math. France* 112 (1984) 177–196.

[Lia1] P. Liardet: Regularities of distribution. *Compositio Math.* 61 (1987) 267–293.

[Lia2] P. Liardet: Propriétés harmoniques de la numération, suivant Jean Coquet. *Colloque de Théorie Analytique des Nombres "Jean Coquet".* Publications Mathématiques d'Orsay, Orsay (1988).

[Lia3] P. Liardet: Répartition et ergodicité. Séminaire Delange-Pisot-Poitou (théorie des nombres) 19e année. 1977/78. n° 10.

[Mar] J. C. Martin: Generalized Morse sequences on n symbols. *Proc. Amer. Math. Soc.* 54 (1976) 379–383.

[Men] M. Mendes-France: Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1. *J. Number Th.* 5 (1973) 1–15.

[Mos] B. Mossé: q-Adic spectral analysis of some arithmetic sequences. *Theo. Comp. Sci.* 65 (1989) 249–263.

[Que] M. Queffélec: Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France* 107 (1979) 385–421.

[Tho] J. P. Thouvenot: La convergence presque sûre des moyennes ergodiques suivant certaines sous-suites d'entiers. Sém. Bourbaki, 1989–90 n° 719.