COMPOSITIO MATHEMATICA

CLAUDE HAYAT-LEGRAND

Représentation des groupes d'extension. Applications

Compositio Mathematica, tome 90, nº 3 (1994), p. 351-366
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__90_3_351_0>

Compositio Mathematica **90**: 351–366, 1994.

Représentation des groupes d'extension. Applications.

CLAUDE HAYAT-LEGRAND

Laboratoire de Topologie et Geometrie, U.R.A. n° 1408, Université Paul Sabatier, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse-Cedex, France

Received 16 July 1992; accepted in final form 16 February 1993

Le type d'homotopie du classifiant des équivalences d'homotopie d'un espace X, simplement connexe ayant seulement deux groupes d'homotopie Π et Π' non nuls et en dimension consécutives, est un produit croisé si une certaine classe d'obstruction est nulle. Cette obstruction est une classe θ dans $\mathrm{Ext}^3_H(\Pi, \Pi')$, où H est donné par le type d'homotopie de X. Si Π et Π' sont des G-modules, G étant un groupe discret, la classe θ induit une classe θ_G dans $\mathrm{Ext}^3_G(\Pi, \Pi')$. Lorsque les données précédentes s'étendent en une G-opération sur X, l'obstruction θ_G est nulle. On peut alors classifier les G-actions sur X par une classe caractéristique différence prenant ces valeurs dans $\mathrm{Ext}^2_G(\Pi, \Pi')$. En particulier, ces résultats sont appliqués à la classification de certains types d'homotopie d'espaces Y, dont le groupe fondamental est isomorphe à G, ayant au plus $\Pi_2(Y) = \Pi$ et $\Pi_3(Y) = \Pi'$ non nuls, et possédant un revêtement universel de type d'homotopie donné [4]. Cette étude est basée sur une représentation du n-ième groupe de G-extensions $\mathrm{Ext}^n_G(\Pi; \Pi')$, pour deux G-modules Π et Π', comme espace des classes d'homotopie des sections d'un fibré construit à partir des G-modules Π et Π' qui a été énnoncée dans [10] et qui est complètement démontrée ici.

Les classes caractéristiques d'une G-opération ont déjà été utilisées, dans des cas particuliers, pour calculer des différentielles de suites spectrales, celle du revêtement par Legrand A. [14], celle d'extension de groupes par Huebschmann J. [12], et celle de Kasparov en KK-théorie par Fieux E. [10]. Dans les cas cités plus haut, et dans le dernier cas quand $A = \mathbb{C}$, les classes sont construites avec un espace X ayant le type d'homotopie d'un groupe abélien, donc d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Ici, nous allons supposer, plus généralement que X et du type d'homotopie d'un produit tordu de deux espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Il faut noter aussi les travaux de J. Rutter [17] et Dwyer W. G.-Kan D. M. Smith J. H. [9].

La représentation de $\mathrm{Ext}^n_G(\Pi, \Pi')$ pourrait s'établir à partir d'une suite spectrale d'Adams. Ici, on utilise les résultats de Shih W. [18], Didierjean G.

[7] sur le calcul des groupes d'homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie de X, et les constructions de Cooke G. [5].

1. Représentation de $\mathrm{Ext}^n_G(\Pi, \Pi')$, le n-ième groupe de G-extensions de deux G-modules Π et Π'

Si $\Pi = \mathbb{Z}$, on sait que $\mathrm{Ext}^n_G(\mathbb{Z}, \Pi')$ est égal à $H^n(G, \Pi')$, la cohomologie du groupe G à coefficients dans le G-module Π'. Cette cohomologie peut être représentée par des classes d'homotopie d'un foncteur sections. Plus précisément, si $G \to WG \to \bar{W}G$ est le fibré universel associé à G, et si le foncteur Γ est le foncteur sections pointées appliqué ici au fibré $K(\Pi', n) \to K(\Pi', n) \times_G WG \to \bar{W}G$, de fibre l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\Pi', n)$, on sait que, [3] et [14], $H^n(G, \Pi') = \pi_0\Gamma[K(\Pi', n) \times_G WG]$. Supposons, maintenant, que Π et Π' soient deux G-modules quelconques. Fixons un entier $p > 1$, (il sera, plus loin, l'indice du premier groupe d'homotopie non nul de l'espace sur lequel agira G). On demande que le groupe G opère, avec un point fixe, sur le groupe $\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 1))$, des homomorphismes *pointés* de $K(\Pi, p)$ dans $K(\Pi', p + 1)$, par une opération déduite, de façon classique, de l'opération de G sur Π et Π'. Le point fixe est l'application constante de $K(\Pi, p)$ sur le pointage de $K(\Pi', p + 1)$. Comme $\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 1))$ est un groupe abélien, on peut justifier l'itération $\bar{W}^n \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 1))$. Les résultats rappelés plus haut se prolongent par:

1.1 THÉORÈME. *Soient G un groupe discret, Π et Π' deux G-modules, on a, pour tout $n > 0$, un isomorphisme canonique de $\mathrm{Ext}^n_G(\Pi, \Pi')$ sur le groupe d'homotopie des sections du fibré $\bar{W}^{n-1} \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 1)) \times_G WG \to \bar{W}G$:*

$$\mathrm{Ext}^n_G(\Pi, \Pi') = \pi_0\Gamma[\bar{W}^{n-1} \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 1)) \times_G WG].$$

En particulier:

1.2 COROLLAIRE. *Si Π et Π' sont des G-modules triviaux, on a:*

$$\mathrm{Ext}^2_G(\Pi, \Pi') = [\bar{W}G, \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 2))].$$

Preuve du Corollaire 1.2. Si Π et Π' sont des G-modules triviaux, alors

$$\begin{aligned} &\bar{W} \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 1)) \times_G WG \\ &\quad = \bar{W} \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p + 1)) \times \bar{W}G \end{aligned}$$

Or, on sait [13] que $\bar{W}\,\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) = \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+2))_0$, où $\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+2))_0$ est la composante connexe de l'application constante sur le pointage de $K(\Pi', p+2)$. Comme $\bar{W}G$ est connexe, on trouve le résultat du corollaire 1.2.

Pour démontrer le théorème 1.1, on vérifie les trois propriétés caractéristiques à isomorphisme près du foncteur n-ième G-extension [4, p. 145]. On pose pour la démonstration:

$$\Gamma(n, \Pi, F) = \Gamma[\bar{W}^{n-1}\,\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p+1)) \times_G WG];$$
$$U_n(F) = \pi_0\Gamma(n, \Pi, F), \quad \text{si } n > 0;$$
$$U_0(F) = \pi_0\Gamma[\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p)) \times_G WG].$$

1.3 LEMME. *Une suite exacte courte de G-modules* $0 \to C \to A \to N \to 0$ *donne une suite exacte longue:*

$$U_0(C) \to U_0(A) \to U_0(N) \to U_1(C) \to \cdots U_n(C) \to U_n(A) \to U_n(N) \to U_{n+1}(C) \cdots$$

Preuve. (a) Pour $n \geqslant 1$. La suite exacte courte de G-modules $0 \to C \to A \to N \to 0$ donne une suite exacte de groupes simpliciaux abéliens:

$$0 \to K(C, p+1) \to K(A, p+1) \to K(N, p+1) \to 0,$$

que l'on peut considérer comme une fibration de base $K(N, p+1)$ et de fibre $K(C, p+1)$. Alors

$$\begin{array}{ccc}(*)\,\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(C, p+1)) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(A, p+1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ & & \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(N, p+1)),\end{array}$$

est un fibré sur l'image de j. Comme j a la propriété de relèvement des chemins, l'image d'une composante connexe par j est une composante connexe de la base. L'image de j est donc une union de composantes connexes. D'autre part, la suite exacte d'homotopie de $(*)$ donne la suite exacte

$$\mathrm{Ext}(\Pi, A) \xrightarrow{\pi_0(j)} \mathrm{Ext}(\Pi, N) \to \mathrm{Ext}^2(\Pi, C).$$

Comme $\mathrm{Ext}^2(\Pi, C)$ est nul, $\pi_0(j)$ est surjectif donc j est surjective, et $(*)$ est un fibré que l'on considère comme une suite exacte de groupes simpliciaux. Ces groupes simpliciaux sont abéliens, on peut leur appliquer le foncteur classifiant

$\bar{W}$, voir [14], et itérer $(n-1)$ fois. On obtient, dans la catégorie des $\bar{W}G$-fibrés [13] le diagramme suivant, où on note

$$\tilde{F} = \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p+1))$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}^{n-1}\tilde{C} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \bar{W}^{n-1}\tilde{A} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{W}^{n-1}\tilde{N} \arrow[d] \\
\bar{W}^{n-1}\tilde{C} \times_G WG \arrow[r, hook] \arrow[d] & \bar{W}^{n-1}\tilde{A} \times_G WG \arrow[r] \arrow[d] & \bar{W}^{n-1}\tilde{N} \times_G WG \arrow[d] \\
\bar{W}G \arrow[r, equal] & \bar{W}G \arrow[r, equal] & \bar{W}G.
\end{tikzcd}$$

On sait que les espaces de sections pointées au-dessus de $\bar{W}G$ forment une fibration, d'où avec les notations choisies:

$$(**) \quad \Gamma(n, \pi, C) \hookrightarrow \Gamma(n, \pi, A) \to \Gamma(n, \pi, N)$$

est un fibration. Les termes de la suite exacte d'homotopie de cette fibration sont de la forme $\pi_i\Gamma[\bar{W}^{n-1}\tilde{F} \times_G WG]$. Le groupe G opére sur $\tilde{F}$ en fixant un point, d'où on a:

$$\pi_i\Gamma[\bar{W}^{n-1}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0\Gamma[\Omega^i\bar{W}^{n-1}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0\Gamma[\bar{W}^{n-1-i}\tilde{F} \times_G WG],$$

Ω étant le foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux vers la catégorie des groupes simpliciaux [15], tel que $\Omega\bar{W}$ et $\bar{W}\Omega$ soient homotopes aux foncteurs identités de chaque catégorie. La suite exacte du fibré $(**)$ donne la suite exacte énoncée dans le lemme pour $n \geqslant 1$.

(b) Pour $n = 0$. Notons toujours $\tilde{F} = \mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p+1))$ et montrons d'abord que $\pi_0\Gamma[\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p)) \times_G WG)] = \pi_2\Gamma[\bar{W}\tilde{F} \times_G WG]$. En effet, comme dans la partie (a), on a

$$\pi_2\Gamma[\bar{W}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0\Gamma[\Omega^2\bar{W}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0\Gamma[\Omega\tilde{F} \times_G WG].$$

Or les groupes $\Omega\tilde{F}$ et $\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p))$ sont tous les deux égaux au groupe $K(\mathrm{Hom}(\Pi, F), 0)$, d'où l'égalité cherchée.

Comme dans (a), la suite exacte de groupes simpliciaux abéliens $0 \to \tilde{C} \to \tilde{A} \to \tilde{N} \to 0$, donne une suite exacte

$$\cdots \to \pi_2\Gamma[\bar{W}\tilde{C} \times_G WG] \to \pi_2\Gamma[\bar{W}\tilde{A} \times_G WG] \to \pi_2\Gamma[\bar{W}\tilde{N} \times_G WG]$$
$$\to \pi_1\Gamma[\bar{W}\tilde{C} \times_G WG] \to \pi_1\Gamma[\bar{W}\tilde{A} \times_G WG] \cdots$$

D'autre part, on a de façon évidente $\pi_1\Gamma[\bar{W}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0\Gamma[\tilde{F} \times_G WG]$.

Toutes les transformations utilisées étant fonctorielles, on obtient la suite exacte longue

$$U_0(C) \to U_0(A) \to U_0(N) \to U_1(C) \to U_1(C) \to U_1(A)\cdots. \qquad \square$$

Preuve de théorème 1.1. Comme il s'agit d'applications pointées, le terme $U_0(F)$ est égal à $\pi_0\Gamma[K(\mathrm{Hom}(\Pi, F), 0) \times_G WG]$, c'est-à-dire à $\mathrm{Hom}_G(\Pi, F)$.

La dernière propriété caractéristique à vérifier, est que $U_n(F) = 0$, pour $n > 0$, quand F est un module G-injectif. La formule d'associativité de [4, p. 165] permet d'écrire les égalités de foncteurs:

$$\mathrm{Hom}(-, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G]\otimes -, F) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, F)).$$

Puisque F est G-injectif, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, F)$ est exact. Le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], -)$ est exact car $\mathbb{Z}[G]$ est libre, donc $\mathrm{Hom}(-, F)$ est exact et F est injectif. Alors $\mathrm{Ext}(\Pi, F)$ est nul, ainsi que $\mathrm{Ext}^n_G(\Pi, F)$. La suite exacte longue [13]:

$$\begin{aligned} &\to H^{n-2}(G, \mathrm{Ext}(\Pi, F)) \to H^n(G, \mathrm{Hom}(\Pi, F)) \\ &\quad \to \mathrm{Ext}^n_G(\Pi, F) \to H^{n-1}(G, \mathrm{Ext}(\Pi, F)), \end{aligned}$$

donne que $H^n(G, \mathrm{Hom}(\Pi, F))$ est nul si F est un module G-injectif. Comme de plus, $\mathrm{Ext}(\Pi, F)$ est nul, l'espace $\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p+1))$ est un espace de type $K(\mathrm{Hom}(\Pi, F), 1)$ et pour $n > 0$, $U_n(F) = \pi_0\Gamma(n, \Pi, F) = H^n(G, \mathrm{Hom}(\Pi, F))$ est nul. $\square$

2. Structure sur le classifiant d'un espace d'équivalences d'homotopie

Dans ce paragraphe iterviennent les méthodes de B-fibrations en groupes, de B-groupes structuraux pour un B-fibré principal, B étant considéré comme un espace de paramêtres. On utilise les notations et les résultats de [13]. Soit donnée une suite exacte de groupes simpliciaux $0 \to A \to E \to H \to 0$, avec A abélien. On va montrer que $\bar{W}E \to \bar{W}H$ est $\bar{W}H$-principal. Dans ce cas la base du B-fibré coïncide avec B. La structure B-principale correspond à la donnée d'une famille de groupes isomorphes et d'une famille d'opérations indéxées par B qui opèrent sur les fibres de $\bar{W}E$ avec $B = \bar{W}H$.

2.1 PROPOSITION. *Etant donnée une suite exacte de groupes simpliciaux: $0 \to A \to E \to H \to 0$, avec A abélien, alors $\bar{W}E \to \bar{W}H$ est un $\bar{W}H$-fibré principal de $\bar{W}H$-fibré structural égal à $\bar{W}A \to \mathscr{H} = \bar{W}A \times_t WH \to \bar{W}H$.*

2.2 REMARQUE. Si on sait que $\bar{W}E \to \bar{W}H$ est $\bar{W}H$-principal, alors il est induit par un $\bar{W}H$-morphisme $\theta: \bar{W}H \to \bar{W}(\mathscr{H})$ du $\bar{W}H$-fibré universel, dont la $\bar{W}H$-fibre est $\bar{W}A \to \mathscr{H} \to \bar{W}H$.

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}E \arrow[r] \arrow[d] & W(\mathscr{H}) \arrow[d] \\
\bar{W}H \arrow[r, "\theta"] & \bar{W}(\mathscr{H}) \arrow[d, "p"] \\
& \bar{W}H.
\end{tikzcd}$$

Le $\bar{W}H$-fibré principal $\bar{W}E \to \bar{W}H$ est trivial si et seulement si la classe d'homotopie de θ est égale à la classe d'homotopie de la section nulle s du $\bar{W}H$-fibré en groupes $\bar{W}^2A \to \bar{W}\mathscr{H} \to \bar{W}H$. Dans ce cas, $\bar{W}E \to \bar{W}H$ est isomorphe à la $\bar{W}H$-fibre, c'est-à-dire au $\bar{W}H$- fibré $\bar{W}A \to \mathscr{H} \to \bar{W}H$. En particulier, cela signifie qu'alors $\bar{W}E$ est muni d'une structure de $\bar{W}H$-groupe isomorphe au $\bar{W}H$-groupe $\bar{W}A \times_t WH$.

Preuve de la proposition 2.1. A la suite exacte de groupes simpliciaux, $0 \to A \to E \to H \to 0$, avec A abélien, est associé une opération $H \to \operatorname{Aut} A$, qui fait de A un H-module et que l'on prolonge naturellement en une opération $u: H \to \operatorname{Aut} \bar{W}A$. D'autre part, au fibré universel $H \to WH \to \bar{W}H$ est associé une *fonction tordante* [13], $\tau: \bar{W}H \to H$ qui est une application de degré -1, permettant d'expliciter WH comme le produit *tordu* de H et de $\bar{W}H$. Soit $t = u\tau$. Il s'agit de construire une opération principale sur le produit fibré de $\bar{W}A \times_t \bar{W}H$ et de $\bar{W}E$, au-dessus de $\bar{W}H$, telle que l'ensemble des classes d'équivalences soit $\bar{W}H$. On sait [13] qu'il y a des isomorphismes naturels:

$$\bar{W}A \times_t \bar{W}H = \bar{W}(A \times_t \bar{W}H).$$

Soit un $(n+1)$-simplexe de $\bar{W}(A \times_t \bar{W}H)$ qui se projette sur $b \in \bar{W}_{n+1}H$. C'est un élément $\gamma = (g_n, g_{n-1}, \ldots, g_0, b)$, *où* $b \in \bar{W}_{n+1}H$, $g_i \in (A \times_t \bar{W}H)_i$ est un i-simplexe de $A \times_t \bar{W}H$, et $p_1(g_i) = d_0^{n-i+1}b$, où p_1 est la première projection de $A \times_t \bar{W}H$ sur $\bar{W}H$.

Un i-simplexe de $A \times_t \bar{W}H$ est un élément qui s'écrit $g_i = (a_i, h_i)$ avec $a_i \in A_i$, $h_i \in \bar{W}_iH$, et on a $d_jg_i = (d_ja_i, d_jh_i)$ pour $j \neq 0$ et $d_0g_i = (t(h_i)d_0a_i, d_0h_i)$. La relation $p_1(g_i) = d_0^{n-i+1}b$ signifie que $g_i = (a_i, d_0^{n-i+1}b)$, avec $b = (b_n, \ldots, b_0, h)$ et $h = (b_n, \ldots, b_0)$.

Soit un $(n+1)$-simplexe de $\bar{W}E$ qui se projette par p_2, (le morphisme définissant le $\bar{W}H$-fibré $\bar{W}E \to \bar{W}H$), sur le même élément $b \in \bar{W}_{n+1}H$. Il s'écrit

$\sigma = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0; b)$, où x_i est un i-simplexe de E et $p_2(x_i) = d_0^{n-i+1}b$. Posons

$$f(\gamma)(\sigma) = (t(b)a_n x_n, t(d_1 b)a_{n-1}x_{n-1}, \ldots, t(d_1^i b)a_{n-i}x_{n-i}, \ldots, t(d_1^n b)a_0 x_0, b).$$

Nous allons montrer que f est simpliciale, c'est-à-dire que $f(d_{i+1}\gamma)(d_{i+1}\sigma) = d_{i+1}f(\gamma)(\sigma)$. On a

$$\begin{aligned}
d_{i+1}\sigma &= (d_i x_n, \ldots, d_1 x_{n-i+1}, x_{n-i-1}d_0 x_{n-i}, x_{n-i-2}, \ldots, x_0; d_{i+1}b)\\
d_{i+1}\gamma &= (d_i g_n, \ldots, d_1 g_{n-i+1}, g_{n-i-1}d_0 g_{n-i}, g_{n-i-2}, \ldots, g_0, d_{i+1}b)\\
&= \big((d_i a_n, d_i d_0 b), (d_{i-1}a_{n-1}, d_{i-1}d_0^2 b), \ldots, (d_1 a_{n-i+1}, d_1 d_0^i b),\\
&\qquad (a_{n-i-1}, d_0^{i+2}b)(t(d_0^{i+1}b)d_0 a_{n-i}, d_0^{i+2}b), (a_{n-i-2}, d_0^{i+3}b), \ldots\ldots\big)\\
&= (\alpha_{n-1}, d_i d_0 b), (\alpha_{n-2}, d_{i-1}d_0^2 b) \ldots,\\
&\qquad (\alpha_{n-i}, d_1 d_0^i b), (\alpha_{n-i-1,}), (\alpha_{n-i-2,}) \ldots; d_{i+1}b),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\alpha_{n-1} = d_i a_n, \alpha_{n-2} = d_{i-1}a_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-i} = d_1 a_{n-i+1},\\
&\alpha_{n-i-1} = a_{n-i-1}t(d_0^{i+1}b)d_0 a_{n-i}, \alpha_{n-i-2} = a_{n-i-2}d_0^{i+3}b.
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
f(d_{i+1}\gamma)(d_{i+1}\sigma) = (t(d_{i+1}b\alpha_{n-1}\,.\,d_i x_n, t(d_1 d_{i+1}b)\alpha_{n-2}\,.\,d_{i-1}x_{n-1}, \ldots\\
t(d_1^i d_{i+1}b)^{-1}\alpha_{n-i-1}\,.\,x_{n-i-1}d_0 x_{n-i}, t(d_1^{i+1}d_{i+1}b)^{-1}\alpha_{n-i}\,.\,x_{n-i}, \ldots),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d_{i+1}f(\gamma)(\sigma) &= d_i(t(b)a_n\,.\,x_n), \ldots, d_1(t(d_1^{i-1}b)a_{n-i+1}\,.\,x_{n-i+1}),\\
&\qquad t(d_1^{i+1}b)a_{n-i-1}\,.\,x_{n-i-1}d_0(t(d_1^i b)a_{n-i}\,.\,x_{n-i}), \ldots).
\end{aligned}$$

En utilisant que

$$d_1^i d_{i+1} = d_1^{i-1}d_1 d_{i+1} = d_1^{i-1}d_i d_1 = d_1^{i-j}d_{i-j+1}d_1^j = d_1^{i+1}, \text{ et } d_0 d_1^i = d_0^{i+1},$$

on est amené à comparer $A_1 = t(d_1^{i+1}b)a_{n-i-1}t(d_0^{i+1}b)d_0 a_{n-i}\,.\,x_{n-i-1}d_0 x_{n-i}$ et

$$\begin{aligned}
A_2 &= t(d_1^{i+1}b)a_{n-i-1}x_{n-i-1}\,.\,t(d_0 d_1^i b)^{-1}t(d_1^{i+1}b)d_0 a_{n-i}d_0 x_{n-i}\\
&= t(d_1^{i+1}b)a_{n-i-1}\,.\,x_{n-i-1}t(d_0^{i+1}b)^{-1}t(d_1^{i+1}b)d_0 a_{n-i}d_0 x_{n-i}.
\end{aligned}$$

Comme

$$d_0^{i+1}b = (b_{n-i-1}, \dots) t(d_0^{i+1}b) = u(b_{n-i-1}) : a \mapsto \overline{b_{n-i-1}}\, a\, \overline{b_{n-i-1}}^{-1},$$

et comme $u(b_{n-i-1})$ est un automorphisme, on a

$$A_1 = t(d_1^{i+1}b)(a_{n-i-1} \cdot d_0 a_{n-i}) \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} A_2 &= t(d_1^{i+1}b) a_{n-i-1} \cdot x_{n-i-1}(x_{n-i-1})^{-1} t(d_1^{i+1}b) d_0 a_{n-i} x_{n-i-1} d_0 x_{n-i} \\ &= t(d_1^{i+1}b) a_{n-i-1} t(d_1^{i+1}b) d_0 a_{n-i} \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i} \\ &= t(d_1^{i+1}b)(a_{n-i-1} d_0 a_{n-i}) \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i} \end{aligned}$$

car $d_0^{i+1}b = (b_{n-i-1}, \dots)$, alors

$$t(d_0^{i+1}b) = u(b_{n-i-1}) \colon a \mapsto \overline{b_{n-i-1}}(\overline{b_{n-i-1}})^2(\overline{b_{n-i-1}})$$

est un relevé quelconque de $b_{n-i-1} \in H$, dans E_{n-i-1}. On peut donc prendre $\overline{b_{n-i-1}} = x_{n-i-1}$.

L'application f répond à la question, c'est-à-dire que c'est une opération principale sur le produit fibré de $\bar{W}A \times_t \bar{W}H$ et de $\bar{W}E$, au-dessus de $\bar{W}H$, telle que l'ensemble des classes d'équivalences soit $\bar{W}H$. □

Nous allons utiliser cette proposition pour déterminer une structure principale sur le classifiant d'un espace d'équivalences d'homotopie pointées. Dans ce qui suit X est un espace simplement connexe, ayant deux groupes d'homotopie non nuls Π et Π'. Il est l'espace total d'un fibré dont la base est de type $K(\Pi, p)$ et la fibre de type $K(\Pi', p+1)$, classifié par un invariant d'Eilenberg $\eta \in H^{p+2}(K(\Pi, p), \Pi')$. Alors on connait [15] le fibré:

$$(*) \quad \operatorname{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \to E(X) \to (\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta,$$

$E(X)$ étant l'espace de Hopf des *équivalences d'homotopie pointées* de l'espace pointé X et $(\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta$ étant le sous-groupe d'isotropie de η, pour l'opération évidente de $\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi'$ sur $H^{p+2}(K(\Pi, p), \Pi')$.

Remplaçons X par son complexe minimal associé que nous notons $M = K(\Pi', p+1) \times_\eta K(\Pi, p)$. Alors $E(X)$ est remplaçé, à homotopie près par $\operatorname{Aut} M$ et le fibré $(*)$ ci-dessus, donne une suite exacte

$$(**) \quad 0 \to A \to \operatorname{Aut} M \xrightarrow{j} H_\eta \to 0,$$

où A est le groupe simplicial abélien $\operatorname{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1))$, et H_η est le groupe simplicial $(\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta$. La suite exacte (**) ci-dessus détermine une opération $\varphi: H_\eta \to \operatorname{Aut} A$ définie par $\varphi(v, v') = (f \mapsto uofou^{-1})$, où u est défini par $j(u) = (v, v')$.

Considérons l'opération $\psi: H_\eta \to \operatorname{Aut} A$ donnée par $\psi(v, v') = (f \mapsto v'ofov^{-1})$, qui permet de définir le fibré associé au fibré universel déterminer par le groupe H_η.

2.3 LEMME. *Les opérations φ et ψ de H_η dans* Aut A *définies ci-dessus coincident.*

Preuve. L'élément (v, v') de H_η a un antécédent par j, que nous notons $u: K(\Pi', p+1) \times_\eta K(\Pi, p) \to K(\Pi', p+1) \times_\eta K(\Pi, p)$. Supposons montré que $u(x, x') = (v'(x') + g_u(x),\ v(x))$ (voir lemme 2.4). Comme $u^{-1}(y, y') = (v'^{-1}(y') + h_u^{-1}(y),\ v^{-1}(y))$, on doit avoir la relation $v'h_u^{-1}(y) + g_u v^{-1}(y) = 0$ pour que $uou^{-1} = id$. Soit $f \in A$, alors on vérifie que $uofou^{-1}(y, y') = (y' + v'ofov^{-1}(y), v^{-1}(y))$. □

2.4 LEMME. *Soit Y un espace* 1-*connexe pointé et soit $u: K(\Pi', n) \times_\eta Y \to K(\Pi', n) \times_\eta Y$ un isomorphisme. Notons $v: Y \to Y$ et $v' \in$* Aut Π', *les morphismes induits par u, respectivement, sur la base et sur* Aut Π'. *On suppose que v est un morphisme pointé, alors u vérifie $u(x, y) = (v'(x) + g(y),\ v(y))$, où g est une applicaton de Y dans $K(\Pi', n)$.*

Preuve. L'opération de $K(\Pi', n)$ sur lui-même par translation induit naturellement une opération de $K(\Pi', n) \times K(\Pi', n)$ sur $\operatorname{Hom}(K(\Pi', n), K(\Pi', n))$. Cette opération respecte l'isomorphisme des groupes simpliciaux: $\operatorname{Hom}(K(\Pi', n), K(\Pi', n)) = K(\Pi', n) \times \operatorname{Hom}(\Pi', \Pi')$ obtenu en identifiant $K(\Pi', n)$ aux translations et $\operatorname{Hom}(K(\Pi', n), K(\Pi', n))$ aux morphismes induits en homotopie. Les applications de $K(\Pi', n) \times_\eta Y$ dans lui-même au dessus de v s'identifient aux secions du produit tordu $\mathscr{E} = \operatorname{Hom}(K(\Pi', n),\ K(\Pi', n)) \times_{\eta \times \eta v} Y \to Y$ où $K(\Pi', n) \times_{\eta v} Y$ est induit de $K(\Pi', n) \times_\eta Y$ par v, ([16, p. 14]). Notons s_u la section déterminée par le morphisme u donné. s_u est à valeurs dans la composante connexe du morphisme induit par v' (ce morphisme est un élément des fibres de $\mathscr{E}$). La réunion de ces composantes définissent un sous-fibré $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}$ car Y est simplement connexe. La section s_u définit donc une application $g: Y \to K(\Pi', n)$ par $s_u(y) = ((x, y) \mapsto (v'(x) + g(y), y)$. Pour (x, y) dans $K(\Pi', n) \times_\eta Y$, on a alors $u(x, y) = s_u(y).x = (v'(x) + g(y),\ v(y))$. □

Le type d'homotopie du classifiant de l'espace des équivalences d'homotopie d'un tel espace X est connu:

2.5 THÉORÈME. *Soit X un espace simplement connexe, ayant deux groupes d'homotopie non nuls Π et Π' et d'invariant d'Eilenberg $\eta \in H^{p+2}(K(\Pi, p), \Pi')$. Alors $\bar{W}E(X) \to \bar{W}(\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta$ est classifié par un élément de* $\operatorname{Ext}^3_{(\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta}(\Pi, \Pi')$. *Si cette classe est nulle, alors $\bar{W}E(X)$*

est homotopiquement équivalent au fibré en groupes $\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), (K(\Pi', p+2))_0 \times_\psi K((\mathrm{Aut}\,\Pi \times \mathrm{Aut}\,\Pi')_\eta, 1)$, *où* ψ *est la fonction tordante qui permet de définir le fibré, de fibre* $\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+2))_0$, *associé au fibré universel déterminé par le groupe* $(\mathrm{Aut}\,\Pi \times \mathrm{Aut}\,\Pi')_\eta$.

Preuve. La suite exacte ci-dessus (**) donne une fibration:

$$(***) \quad 0 \to \bar{W}A \to \bar{W}\,\mathrm{Aut}\,M \xrightarrow{j} \bar{W}H_\eta \to 0.$$

D'après la proposition 2.1, $\bar{W}\,\mathrm{Aut}\,M$ a une structure de $\bar{W}H_\eta$-fibré principal classifié par la classe d'homotopie d'une application θ: $\bar{W}H_\eta \to \bar{W}(\bar{W}A \times_\varphi \bar{W}H_\eta)$ (notations du lemme 2.3). D'autre part, on a [13, p. 38] les isomorphismes suivant $\bar{W}(\bar{W}A \times_\varphi \bar{W}H_\eta) = \bar{W}^2 A \times_{\bar{W}\varphi} \bar{W}H_\eta$. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 2.3 pour conclure, d'après le théorème 1.1, que la classe d'homotopie de l'application classifiante θ détermine un élément de $\mathrm{Ext}^3_{H_\eta}(\Pi, \Pi')$. Les espaces $\bar{W}\,\mathrm{Aut}\,M$ et $\bar{W}E(X)$ sont du même type d'homotopie. D'autre part, il y a une inclusion $j: M \to X$ et une rétraction $r: X \to M$. Ceci définit un morphisme (pas seulement à homotopie près) $\mathrm{Aut}\,M \to E(X)$, qui donne un morphisme $\bar{W}\,\mathrm{Aut}\,M \to \bar{W}E(X)$. Il s'agit alors d'une équivalence d'homotopie et même d'une équivalence fibrée. □

3. Classification des G-opérations

Soient G un groupe discret et $E(X)$ l'espace des équivalences d'homotopie qui sont des applications pointées. Une *G-opération* est un morphisme $\phi: G \to E(X)$ qui est un morphisme entre espaces de Hopf de l'espace de Hopf G dans l'espace de Hopf $E(X)$ (on précise que ϕ n'est pas un morphisme à homotopie près). Par la projection donnée dans la suite exacte (*) du paragraphe 2, une G-opération donne un morphisme $\varphi: G \to (\mathrm{Aut}\,\Pi \times \mathrm{Aut}\,\Pi')_\eta$.

Considérons le $\bar{W}G$-fibré $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X))$ induit par $\bar{W}\varphi$ du $\bar{W}H$-fibré $\bar{W}E(X) \to \bar{W}H$:

$$\begin{array}{ccc}
\bar{W}\,\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) & = & \bar{W}\,\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X)) & \longrightarrow & \bar{W}E(X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bar{W}G & \xrightarrow{\bar{W}\varphi} & \bar{W}(\mathrm{Aut}\,\Pi \times \mathrm{Aut}\,\Pi')_\eta.
\end{array}$$

D'aprés le paragraphe 2 précédent, le $\bar{W}G$-fibré $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X)) \to \bar{W}G$ est

$\bar{W}G$-principal. L'opération $\bar{W}\phi$ détermine une section encore notée $\bar{W}\phi$ de ce fibré induit et la proposition suivante est un corollaire du théorème 2.5.

3.1 PROPOSITION. *Soit ϕ une G-opération pointée sur X espace pointé ayant deux groupes d'homotopie Π et Π' et d'invariant d'Eilenberg η. Si $\varphi: G \to (\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta$ est le morphisme déduit de ϕ, alors le fibré induit $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X))$ est équivalent au fibré $\bar{W}\operatorname{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG$, par une équivalence qui fait de la classe de $\bar{W}\phi$ la classe de la section nulle de $\Gamma[\bar{W}\operatorname{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$, l'espace des sections de ce fibré.* □

3.2 Définition des classes caractéristiques associées à une G-opération. *Soit X un espace pointé ayant deux groupes d'homotopie Π et Π' et d'invariant d'Eilenberg η, à deux G-opérations pointées $\phi_0: G \to E(X)$ et $\phi_1: G \to E(X)$, induisant, par projection, le même $\varphi: G \to (\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta$, on sait associer un élément $\theta(\phi_0, \phi_1)$, appartenant à $\operatorname{Ext}^2_G(\Pi, \Pi')$. Cette classe est caractéristique dans le sens suivant: $\theta(\phi_0, \phi_1) = 0$ si et seulement si $[\bar{W}\phi_0] = [\bar{W}\phi_1]$.* □

La question réciproque peut s'énnoncer de la façon suivante: soit une classe $\theta \in \operatorname{Ext}^2_G(\Pi, \Pi')$ et une G-opération pointeé $\phi_0: G \to E(X)$, existe-t-il une G-opération pointée ϕ_1 telle que $\theta(\phi_0, \phi_1) = \theta$? Notre construction permet seulement de trouver, par différence, la classe d'homotopie d'un morphisme $\beta: \bar{W}G \to \bar{W}E(X)$. On peut considérer β comme un morphisme de $\beta: \bar{W}G \to \bar{W}GH(X)$, où $H(X)$ est l'espace des équivalences d'homotopie de X (ne préservant pas forcément le pointage). Par la construction de G. Cooke [5], on obtient un espace Y, une équivalence d'homotopie $f: X \to Y$ et une G-opération $\gamma: G \to H(Y)$ telle que $[\beta] = [f] \circ [\gamma]$. En utilisant que ce sont des classifiants pour certaines familles de fibrés [1], [20], G. Cooke associe à $[f]$ un morphisme que nous allons noté $\bar{W}f: \bar{W}H(X) \to \bar{W}H(Y)$ tel que $\bar{W}f \circ \bar{W}\gamma = \bar{W}\beta$.

Savoir quand la dimension de l'espace Y est finie, est une question qui se rapproche d'un problème posé par Steenrod voir [2] et [21]. D'autre part, il reste à déterminer quand on peut imposer à β d'avoir pour but $\bar{W}E(Y)$ et non $\bar{W}H(Y)$. Une réponse est donnée dans le paragraphe suivant.

3.3 REMARQUES. 1. D'aprés les paragraphes précédents, si $\operatorname{Ext}^3_G(\Pi, \Pi')$ est nul, alors la donnée d'un morphisme $\varphi: G \to (\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta$ détermine la classe d'homotopie d'une application, $\bar{W}\phi: \bar{W}G \to \bar{W}E(X)$, telle que la projection de $\bar{W}\phi$ soit $\bar{W}\varphi$.

2. Les cas particuliers connus [9], [12], [13] sont de deux types: ou $\varphi: G \to (\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi')_\eta$ a pour image l'élément neutre, c'est-à-dire que Π et Π' sont de G-modules triviaux, ou l'invariant d'Eilenberg η est nul, alors $E(x)$ est homotope à $\operatorname{Hom}((K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times (\operatorname{Aut}\Pi \times \operatorname{Aut}\Pi'))$. Dans ces deux cas, il existe une section "canonique" de $\bar{W}G$ dans $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X))$, dont la classe est la classe de l'élément nul de $\Gamma[\bar{W}\operatorname{Hom}(K(\Pi, p),$

$K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$. Les classes associées à une G-opération (def. 3.2) sont alors des classes caractéristiques au sens classique, c'est-à-dire qu'elles sont nulles si et seulement si la G-opération est homotope à l'opération "canonique" sur X, déduite de la section "canonique" de $\bar{W}G$ dans $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X))$.

4. Application

G. Cooke [5, th. 1.3] définit une famille $\mathscr{F}$ constituée des types d'homotopie d'espaces, ayant un revêtement universel de type d'homotopie $\tilde{X}$ donné et de groupe fondamental isomorphisme à G. Il donne une classification mettant en bijection cette famille $\mathscr{F}$ avec un quotient de $[K(G,1), \bar{W}H(\tilde{X})]$ les classes d'homotopie pointées d'applications pointées de but $\bar{W}H(\tilde{X})$. L'espace $H(\tilde{X})$ est l'espace des équivalences d'homotopie de $\tilde{X}$ (ne préservant pas forcément le pointage). Les résultats précédents permettent de calculer un sous-groupe de $[K(G,1), \bar{W}H(\tilde{X})]$ comme un groupe d'extensions. Ce groupe d'extensions va être en bijection avec une sous famille de $\mathscr{F}$ que nous allons définir.

Une fois pour toute, on choisit ici des groupes Π_2 et Π_3 et leur structure de G-modules, de même qu'une opération cohomologique $\eta \in H^4(K(\Pi_2, 2), \Pi_3)$, et un morphisme $\theta: K(G,1) \to K((\mathrm{Aut}\,\Pi_2 \times \mathrm{Aut}\,\Pi_3)_\eta, 1)$. Ces données fixent en particulier, le type d'homotopie d'un espace $\tilde{X}$, simplement connexe, tel que $\pi_2(\tilde{X}) = \Pi_2$ et $\pi_3(\tilde{X}) = \Pi_3$, ayant η comme invariant de Postnikov. Pour simplifier, on va supposer que Π_2 est abélien libre, alors la suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Ext}(\Pi_2, \Pi_3) \to \pi_0 H(\tilde{X}) \to (\mathrm{Aut}\,\Pi_2 \times \mathrm{Aut}\,\Pi_3)_\eta \to 1$$

permet d'identifier $\pi_0 H(\tilde{X})$ à $(\mathrm{Aut}\,\Pi_2 \times \mathrm{Aut}\,\Pi_3)_\eta$, et on sait que $\pi_0 H(\tilde{X})$ est égal à $\pi_0 E(\tilde{X})$.

4.1 Définition des obstructions $[\theta_1]$ et $[\theta_2]$. $H(\tilde{X})$ étant une union de composantes connexes, la suite de morphismes $E(\tilde{X}) \to H(\tilde{X}) \to \tilde{X}$ est un fibré de Kan et la suite

$$\tilde{X} \to \bar{W}E(\tilde{X}) \to \bar{W}H(\tilde{X})$$

vérifie une suite exacte d'homotopie d'une fibration. Transformons le morphisme $\bar{W}E(\tilde{X}) \to \bar{W}H(\tilde{X})$ en une fibration $E \to \bar{W}H(\tilde{X})$ et soit F la fibre au dessus d'un point. Comme par construction, il existe un morphisme entre $\tilde{X}$ et F, ils sont du même type d'homotopie. On est ramené à un problème classique d'obstruction: les obstructions pour qu'un morphisme $\varphi: K(G,1) \to \bar{W}H(\tilde{X})$ se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$ sont dans $H^{i+1}(\bar{W}H(\tilde{X}); \pi_i(\tilde{X}))$.

En utilisant la théorie des B-fibrés [13], ces obstructions s'interprétent à l'aide des décompositions de Postnikov et des décompositions de Postnikov fibrées. On décide de noter en indice les indices des groupes d'homotopie, par exemple, on note $X_{2,3}$ pour $\tilde{X}$. Faisons une décomposition de Postnikov fibrée de $E \to \bar{W}H(\tilde{X})$, le fibré associé à l'application $\bar{W}E(\tilde{X}) \to \bar{W}H(\tilde{X})$.

$$\begin{tikzcd}
K(\Pi_3, 3) \arrow[r, hook] & E_{123} \arrow[d] & \\
K(\Pi_2, 2) \arrow[r, hook] & E_{12} \arrow[d] \arrow[r, "\xi_3"] & K(\Pi_3, 4) \times_{t'} K(\mathrm{Aut}\,\Pi_3, 1) \\
K(G, 1) \arrow[r, hook] \arrow[ur] & \bar{W}H(\tilde{X}) \arrow[r, "\xi_2"] & K(\Pi_2, 3) \times_t K(\mathrm{Aut}\,\Pi_2, 1)
\end{tikzcd}$$

Le premier étage est le fibré $K(\Pi_2, 2) \to E_{1,2} \to \bar{W}H(\tilde{X})$ classifié, en tant que $\bar{W}H(\tilde{X})$-fibré, par la classe d'homotopie d'une application $\xi_2 \colon \bar{W}H(\tilde{X}) \to K(\Pi_2, 3) \times_{t_2} K(\mathrm{Aut}\,\Pi_2, 1)$. La première obstruction pour que le morphisme $\varphi \colon K(G, 1) \to \bar{W}H(\tilde{X})$ se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$ est que la classe $[\theta_1]$ de $\xi_2 \circ \varphi$ soit nulle dans le 3-ième groupe de cohomologie tordue de $K(G, 1)$ à coèfficients dans le système de coéfficients déterminé par l'action de G sur Π_2 c'est-à-dire coïncide avec une section canonique du fibré induit, sur$K(G, 1)$, du fibré en groupes $K(\Pi_2, 3) \times_{t_2} K(\mathrm{Aut}\,\Pi_2, 1) \to K(\mathrm{Aut}\,\Pi_2, 1)$. Le morphisme de $K(G, 1)$ sur $K(\mathrm{Aut}\,\Pi_2, 1)$ est donné par l'opération de G sur Π_2.

Supposons que $[\theta_1]$ soit nulle. Le deuxième étage de Postnikov fibré de $E \to \bar{W}H(\tilde{X})$, est le fibré $E \to E_{1,2}$ qui est classifié, en tant que $E_{1,2}$-fibré, par la classe d'homotopie d'une application $\xi_3 \colon E_{1,2} \to K(\Pi_3, 4) \times_{t_3} K(\mathrm{Aut}\,\Pi_3, 1)$. Supposer que $[\theta_1]$ est nulle signifie que le fibré induit du fibré $E_{1,2} \to \bar{W}H(\tilde{X})$ par φ, est un fibré en groupes. Il admet donc une section canonique s. Si de plus la classe $[\theta_2]$ de $\xi_3 \circ s$ est nulle dans le 4-ième groupe de cohomologie tordue de $K(G, 1)$ à coefficients dans le système de coéfficients déterminé par l'action de G sur Π_3, alors le morphisme $\varphi \colon K(G, 1) \to \bar{W}H(\tilde{X})$ se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$.

4.2 Remarque. Par une démonstration classique dans les décompositions de Postnikov, que nous ne ferons pas ici, on peut donner une interprétation de ξ_2 et ξ_3 comme des invariants dans la décomposition de Postnikov d'un espace X dont le groupe fondamental est G, qui admet $\tilde{X}$ comme revêtement universel, avec les opérations données de G sur Π_2 et Π_3 tel que le fibré $X_{2,3} \to X \to K(G, 1)$ soit classifié par le morphisme $\varphi \colon K(G, 1) \to \bar{W}H(X_{2,3})$.

4.3 Définition de $\mathscr{F}_\theta$. Considérons l'ensemble des couples (Y, u) tel que l'espace Y ait un revêtement universel $\tilde{Y}$ de type d'homotopie $\tilde{X}$ et tel que u soit un triplet d'isomorphismes de $\pi_1(Y)$ sur G et de $\pi_i(Y)$ sur Π_i, $i = 1, 2$. Notons $\mathscr{F}$ le quotient de cet ensemble de (Y, u) par $(Y, u) \sim (Z, v)$ s'il existe une équivalence d'homotopie $f \colon Y \to Z$ vérifiant $v_i \circ \pi_i(f) = u_i$.

4.4 LEMME. *Si $(Y, u) \sim (Z, v)$ et si $\varphi_{\tilde{Y}}: K(G, 1) \to \bar{W}H(\tilde{X})$ est le morphisme classifiant du revêtement universel $\tilde{Y} \to Y$, alors la classe d'homotopie de $\varphi_{\tilde{Y}}$ est égale à la classe d'homotopie de $\varphi_{\tilde{Z}}$.*

Preuve. L'équivalence entre (Y, u) et (Z, v) est donnée par une équivalence d'homotopie $f: Y \to Z$. On est dans la situation où f se projette en une équivalence d'homotopie $\tilde{f}: \tilde{Y} \to \tilde{Z}$, d'où une équivalence d'homotopie $\tilde{\tilde{f}}$ de $\tilde{X}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{Y} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
\tilde{X} \arrow[loop below, "\tilde{\tilde{f}}"] & & Y \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & K(\pi_1(Y), 1) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "v_1^{-1} \circ u_1"'] & K(G, 1) \arrow[d, "id"'] \arrow[dr] & \\
 & & Z \arrow[r] & K(\pi_1(Z), 1) \arrow[r, "v_1"'] & K(G, 1) \arrow[dr] & \bar{W}H(\tilde{X}) \arrow[d, "\Gamma_{\tilde{\tilde{f}}}"] \\
 & \tilde{Z} \arrow[uul] \arrow[ur] & & & & \bar{W}H(\tilde{X})
\end{tikzcd}$$

La condition $v_i \circ \pi_i(f) = u_i$ impose à $\pi_i(\tilde{\tilde{f}})$ d'être l'identité sur Π_i. La classe d'homotopie de $\tilde{\tilde{f}}$ est donc un élément de $\pi_0 H\natural(\tilde{X})$, où $H\natural(\tilde{X})$ est l'espace des équivalences d'homotopie qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie de $\tilde{X}$. On voit ici intervenir une opération de $\pi_0 H\natural(\tilde{X})$ sur $\bar{W}H(\tilde{X})$, mais l'hypothèse Π_2 abélien libre implique que $\pi_0 H\natural(\tilde{X})$ est trivial car il est égal à $\mathrm{Ext}(\Pi_2, \Pi_3)$. □

Parmi les données choisies une fois pour toute, nous avons fixé un morphisme $\theta: K(G, 1) \to K((\mathrm{Aut}\ \Pi_2 \times \mathrm{Aut}\ \Pi_3)_\eta, 1)$. D'après la remarque 4.2, ces données determinent aussi les classes $[\theta_1]$ et $[\theta_2]$. *Notons $\mathscr{F}_\theta$ la restriction de l'ensemble $\mathscr{F}$, défini en* 4.3, *aux classes de (Y, u) tels que les classes d'obstructions $[\theta_1]$ et $[\theta_2]$, associées au type d'homotopie de Y, soient nulles et telles que le morphisme classifiant du fibré universel $\varphi_{\tilde{Y}}: K(G, 1) \to \bar{W}E(\tilde{X})$ vérifie $\pi_1 \varphi_{\tilde{Y}} = \theta$.*

4.5 THÉORÈME. *Soit $\tilde{X}$ un espace simplement connexe ayant deux groupes d'homotopie $\pi_2(\tilde{X}) = \Pi_2$, $\pi_3(\tilde{X}) = \Pi_3$, avec Π_2 libre, et une action d'un groupe discret G sur Π_2 et Π_3. Alors l'ensemble $\mathscr{F}_\theta$ des types d'homotopie défini ci-dessus ci-dessus est en bijection avec* $\mathrm{Ext}^2_G(\Pi_2, \Pi_3)$.

Preuve. Grâce aux paragraphes précédents, on sait comment une élément de $\mathrm{Ext}^2_G(\Pi_2, \Pi_3)$ détermine la classe d'homotopie d'un morphisme $\varphi: K(G, 1) \to \bar{W}E(\tilde{X})$ tel que $\pi_1 \varphi = \theta$, qui se prolonge en un morphisme $\varphi'': K(G, 1) \to \bar{W}H(\tilde{X})$. On sait par G. Cooke construire un espace Y dont le groupe fondamental est G, ayant un revêtement universel $\tilde{Y}$ tel que la classe d'homotopie de φ'' soit un morphisme classifiant pour (Y, h) où h est une équivalence d'homotopie entre $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$. Par construction φ'' se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$ et $(Y, (\pi_1(h), \pi_2(h), \pi_3(h))$ est un élément de $\mathscr{F}_\theta$.

La définition de $\mathscr{F}_\theta$ a été faite pour que la construction réciproque de G. Cooke associe, à un représentant (Y, u) d'un élément de $\mathscr{F}_\theta$, un élément de $\mathrm{Ext}^2_G(\Pi_2, \Pi_3)$. □

5. Annexe: Construction d'un morphisme entre $\mathrm{Ext}^n_G(\Pi, \Pi')$ et $\pi_0\Gamma[\bar{W}^{n-1}\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$

Pour $n = 0$, on a évidemment $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \Pi') = \pi_0\Gamma[\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p)) \times_G WG]$. Pour $n = 1$, soit une suite exacte de G-modules $0 \to \Pi' \to A \to \Pi \to 0$. Il lui est associé une suite exacte: $0 \to K(\Pi', p) \to K(A, p) \to K(\Pi, p) \to 0$, et une suite exacte de $\bar{W}G$-fibrés:

$$\bar{W}G \to K(\Pi', p) \times_G WG \to K(A, p) \times_G WG \to K(\Pi, p) \times_G WG \to \bar{W}G.$$

C'est une $\bar{W}G$-fibration principale. Elle est classifiée par un $\bar{W}G$-morphisme $K(\Pi, p) \times_G WG \to \bar{W}G \bowtie (K(\Pi', p) \times_G WG)$.

Notons $\xi: K(\Pi, p) \times_G WG \to K(\Pi', p+1) \times_G WG$ le morphisme obtenu en composant le morphisme précédent par l'isomorphisme canonique $\bar{W}G \bowtie (K(\Pi', p) \times_G WG) = K(\Pi', p+1) \times_G WG$. On sait qu'un tel morphisme ξ détermine un élément de $\pi_0\Gamma[\mathrm{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$.

Pour $n = 2$, soit une suite exacte de G-modules $0 \to \Pi' \to A \to B \to \Pi \to 0$. Il lui est associé deux suite exactes: $0 \to \Pi' \to A \to K \to 0$ et $0 \to K \to B \to \Pi \to 0$, d'où deux suites exactes $0 \to K(\Pi', p) \to K(A, p) \to K(K, p) \to 0$, et $0 \to K(K, p-1) \to K(B, p \to 1) \to K(\Pi, p \to 1) \to 0$, et deux suites exactes de $\bar{W}G$-fibrés:

$$\bar{W}G \to K(\Pi', p) \times_G WG \to K(A, p) \times_G WG \to K(K, p) \times_G WG \to \bar{W}G,$$

et

$$\bar{W}G \to K(K, p-1) \times_G WG \to K(B, p-1) \times_G WG$$
$$\to K(\Pi, p-1) \times_G WG \to \bar{W}G.$$

Ce sont des $\bar{W}G$-fibrations principales. Elles sont respectivement classifiées par un $\bar{W}G$-morphisme $K(K, p) \times_G WG \to \bar{W}G \bowtie (K(\Pi', p) \times_G WG)$, et $K(\Pi, p-1) \times_G WG \to \bar{W}G \bowtie (K(K, p-1) \times_G WG)$.

Notons $\xi: K(K, p) \times_G WG \to K(\Pi', p+1) \times_G WG$ obtenu en composant le morphisme précédent par l'isomorphisme canonique: $\bar{W}G \ltimes (K(\Pi', p) \times_G WG) = K(\Pi', p+1) \times_G WG$, et $\eta: K(\Pi, p-1) \times_G WG \to K(K, p-1) \times_G WG$ obtenu en composant le morphisme précédent par l'isomorphisme canonique $\bar{W}G \ltimes (K(K, p-1) \times {}_G WG) = K(K, p) \times_G WG$. On sait qu'un tel morphisme $\xi \circ \eta$ détermine un élément de $\pi_0 \Gamma[\mathrm{Hom}(K(\Pi, p-1), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$, qui est isomorphe à $\pi_0 \Gamma[\bar{W}(\mathrm{Hom}(K(\Pi, p-1), K(\Pi', p)) \times_G WG]$.

Références

1. Allaud, G., On the classification of fibre space. *Math. Z.* 92, 110–125, (1966).
2. Assadi, A., Homotopy actions and cohomologie of finite groups, *LNM 1217*, 26–57, (1986).
3. Baues, H. J., Algebraic Homotopy. *Cambridge Studies in Advanced Math.* 15, Cambridge University Press, (1990).
4. Cartan, H., and Eilenberg, S., *Homological Algebra.* Princeton University Press, (1973).
5. Cooke, G., Replacing homotopy actions by topological actions. *Trans. of A.M.S.*, 237, (1978).
6. Cuntz, J., A New Look at KK-theory, *K-Theory*, 31–51, (1987).
7. Didierjean, G., Homotopie de l'espace des équivalences fibrées. *Ann. Inst. Fourier*, 35(3), 33–47, (1985).
8. Dold, A., and Lashof, R., Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles. *Ill. J. Math.* 3, 285–305, (1959).
9. Dwyer, D. G., Kan, D. M. and Smith, J. H., Towers of fibrations and homotopical wreath products. *J. Pure and Applied Algebra.* 3, 285–305, (1989).
10. Fieux, E., Classes caractéristiques en *KK*-théorie des C*-algèbres avec opérateurs. Thèse, URA 1408 Top. et Géom., U.P.S. Toulouse, (1990).
11. Hayat-Legrand, C., Classes homotopiques associées à une *G*-opération. *LNM 1509*, 134–138, (1990).
12. Huebschmann, J., Change of rings and characteristic classes. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 106, 29, (1989).
13. Legrand, A., Homotopie des espaces de sections. *LNM 941*, (1982).
14. Legrand, A., Caractérisation des opérations d'algèbres sur les modules différentiels. *Compositio Math.*, 66, 23–36, (1988).
15. May, J. P., *Simplicial objects in algebraic topology.* Van Nostrand, (1963).
16. Mac Lane, S., *Homology*, Springer Verlag, (1979).
17. Rutter, J., The group of homotopy self-equivalences of non-simply-connected spaces using Postnikov decompositions, I.H.E.S. preprint, (1990).
18. Shih, W., On the group of equivalences maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 492, 361–365, (1964).
19. Smith, L., Lectures on the Eilenberg-Moore Spectral Sequence. *LNM 134*, (1970).
20. Stasheff, J. D., A classification theorem for fibre spaces. *Topology* 2, 239–246, (1963).
21. Vogel, P., On Steenrod's problem for non-abelian finite groups. *LNM 1051*, 660–665, (1984).