COMPOSITIO MATHEMATICA

MOHAMED AKKOUCHI

ALLAL BAKALI

Fonctions sphériques associées à une mesure bornée, hermitienne et idempotente

Compositio Mathematica, tome 90, n° 3 (1994), p. 245-266

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__90_3_245_0>

Compositio Mathematica **90**: 245–266, 1994.

Fonctions sphériques associées à une mesure bornée, hermitienne et idempotente

MOHAMED AKKOUCHI* and ALLAL BAKALI†

**Dept. de Mathématiques, Fac. des Sciences-Semlalia, Université Cadi Ayyad, Av. du Prince My. Abdellah, B.P. S15, Marakech, Maroc*

†Dept. de Mathématiques, Faculté des Sciences de Kenitra, Université Ibn Tofail, Kenitra, Maroc

Received December 1991; accepted in final form 26 January, 1993

Abstract. Let G be a locally compact group. Let μ be a complex, bounded, hermitian and idempotent measure on G. We introduce the concept of *μ-biinvariant function* and *μ-spherical function* valued in a complex finite dimensional Hilbert space. We establish a theory for the μ-spherical functions and characterize them by the theorem 3.10. When G is unimodular, let K be a compact subgroup of G and let τ be a continuous, unitary and irreducible representation of K. Let $\mu_\tau = \chi_\tau\, dk$, where χ_τ and dk is the normalized character of τ such that $\chi_\tau = \chi_\tau * \chi_\tau$ and dk is the normalized Haar measure of the group K. Then the K-spherical functions of type τ are the μ_τ-spherical functions. The theorem 3.10 may be considered as a generalization of a Godement's theorem in the classical theory of K-spherical functions.

Résumé. Soit G un groupe topologique localement compact. Soit μ une mesure bornée, hermitienne et idempotente sur G. Nous introduisons la notion de fonction *μ-biinvariante* et la notion de *fonction μ-sphérique* sur G à valeurs dans un espace de Hilbert complexe de dimension finie. Nous étudions les propriétés des fonctions μ-sphériques et etablissons le théorème 3.10 qui les caractèrise. Dans le cas particulier, où G est unimodulaire, soit K un sous-groupe compact de G, soit τ une représentation continue, unitaire et irréductible de K. Soit $\mu_\tau = \chi_\tau dk$; où χ_τ est le caractère normalisé de τ de façon que: $\chi_\tau * \chi_\tau = \chi_\tau$ et dk est la mesure de Haar normalisée du groupe K; alors les fonctions μ_τ-sphériques sont les fonctions K-sphériques usuelles du type τ. Nous retrouvons donc la théorie classique des fonctions K-sphériques et notre théorème 3.10 généralise le théorème de Godement caractèrisant les fonctions K-spheriques.

Introduction

Soit G un groupe topologique localement compact. Notons $M_1(G)$ l'algèbre des mesures complexes bornées sur G. Soit $\mu \in M_1(G)$ une mesure telle que $\mu = \mu^* = \mu * \mu$. On lui associe l'algèbre

$$L_1^\mu(G) := \{ f \in L_1(G) / f = f * \mu = \mu * f \}$$

C'est une algèbre de Banach involutive et on a

$$L_1^\mu(G) = \mu * L_1(G) * \mu$$

Soit H un espace de Hilbert de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Notons $\mathscr{L}(H)$ l'algèbre des endomorphismes de H. On appelle fonction μ-sphérique sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$, toute fonction Ψ continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ μ-biinvariante c'est à dire que pour tout $x \in G$, on a

$$\Psi(x) = \Psi\mu(x) := \iint \Psi(sxt)d\mu(s)d\mu(t)$$

et telle que l'application

$$f \mapsto \gamma_\psi(f) = \langle f, \Psi \rangle := \int f(x)\Psi(x)dx$$

est une $*$-représentation de l'algèbre $L_1^\mu(G)$. Si en plus γ_ψ est irréductible on dit que Ψ est élémentaire.

Aprés avoir fixé les notations dans la section 0, nous introduisons dans la section 1 la notion de fonction μ-biinvariante sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ et nous donnons des exemples de mesures bornées hermitiennes et idempotentes. Dans la section 2, on étudie les propriétés des fonctions μ-sphériques. Nous établissons au théorème 2.2 l'équation fonctionnelle de ces fonctions. De manière précise, on montre que: Si Ψ est une fonction continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ vérifiant $\Psi(e) = \mathrm{Id}_H$; alors Ψ est μ-sphérique, si et seulement si, pour tous $x, y \in G$, on a:

$$\iint \Psi(sxty)\, d\mu(s)d\mu(t) = \Psi(x)\Psi(y).$$

La proposition 2.6, précise le lien entre les fonctions μ-sphériques et les $*$-représentations de dimensions finies de l'algèbre $L_1^\mu(G)$. On montre que si γ est une $*$-représentation de dimension finie de $L_1^\mu(G)$ dans H vérifiant: $\mathrm{Id}_H \in \gamma(L_1^\mu(G))$; alors il existe une unique fonction μ-sphérique sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ telle que, pour toute $f \in L_1^\mu(G)$: $\gamma(f) = \langle f, \Psi \rangle$.

On dira que deux fonctions μ-sphériques Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes si les deux $*$-représentations γ_{ψ_1} et γ_{ψ_2} de $L_1^\mu(G)$ sont équivalentes.

Soit $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ une r.u.c.* du groupe G dans l'espace $\mathscr{H}_\eta$. Supposons que π soit μ-finie (c'est à dire que le rang de l'opérateur $\pi(\mu)$ soit fini) et notons $\mathscr{H}_\pi^\mu$ l'image de $\pi(\mu)$. Posons pour tout $x \in G$

$$\Psi_\pi(x) = \pi(\mu)\pi(x)\pi(\mu).$$

* r.u.c.: veut dire représentation unitaire continue.

Ψ_π est une fonction μ-sphérique sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi^\mu)$ (dite associée à π) vérifiant:

(i) $\Psi_\pi(e) = \mathrm{Id}$
(ii) $\|\Psi_\pi(x)\| \leqslant 1$ pour tout $x \in G$ et
(iii) $\langle f^* * f, \Psi_\pi \rangle$ est un opérateur positif pour toute fonction $f \in L_1(G)$.

Reciproquement, dans la section 3, nous prouvons (par le théorème 3.10) que pour toute fonction μ-sphérique Ψ sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ (où H est un espace de Hilbert complexe (non réduit à $\{0\}$), de dimension finie) vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) précédentes; il existe une unique (classe d'équivalence unitaire de), r.u.c. $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ du groupe G μ-finie et telle que Ψ soit équivalente à Ψ_π. De plus si Ψ est élémentaire, alors π peut être choisie irréductible.

Cet article est une suite naturelle de notre article [A, B] où on a considéré le cas particulier où μ est une *mesure de Guelfand* (i.e. l'algèbre $L_1^\mu(G)$ est commutative). Dans ce cas (c.f. [A, B]) le spectre $\Sigma\mu$ de $L_1^\mu(G)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions μ-sphériques sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Nous y avons également étudié la transformation de Fourier-Guelfand associée (transformation de Fourier μ-sphérique).

Nos plus vifs remerciements vont aux referees: leurs commentaire, suggestions et questions one été très benéfiques; ils nous ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

0. Notations et rappels

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe topologique localement compact, muni d'une mesure de Haar invariante à gauche notée dx, celle-ci sera normalisée si le groupe G est compact. On note Δ la fonction module du groupe G. L'ensemble des fonctions continues sur G à support compact est noté $\mathscr{K}(G)$. On note $L_1(G)$ l'espace des fonctions (complexes) dx-intégrables sur G. L'ensemble de toutes les (classes des) representations unitaires continues et irréductibles du groupe G est noté $\hat{G}$.

0.1. Pour une fonction complexe f sur G, on utilise les notations suivantes:

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}; \qquad \check{f}(x) = f(x^{-1}); \qquad \tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})};$$
$$f^*(x) = \Delta^{-1}(x)\tilde{f}(x); \qquad {}_af(x) = f(a^{-1}x) \quad \text{et} \quad f_a(x) = f(xa), \quad \text{où } a, x \in G.$$

Si $f \in L_1(G)$ et $a \in G$, on rappelle les formules:

$$\int f(x)dx = \int \Delta^{-1}(x) f(x^{-1})dx \quad \text{et} \quad \int f(xa)dx = \Delta^{-1}(a)\int f(x)dx.$$

Si f et g sont dans $L_1(G)$, alors le produit de convolution de f par g est donné par:

$$f * g(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)dy = \int f(xy)g(y^{-1})dy$$

0.2. Pour tout espace de Hilbert H (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{L}(H)$ l'espace de tous les endomorphismes de H. On munit $\mathscr{L}(H)$ de la norme définie pour tout $A \in \mathscr{L}(H)$ par:

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)};$$

où A^* est l'opérateur adjoint de A relativement au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de H et $\mathrm{Tr}(B)$ désigne trace de B pour tout $B \in \mathscr{L}(H)$.

0.3. On note $M_1(G)$ l'algèbre de Banach des mesures complexes bornées sur G. Sit $\nu \in M_1(G)$. Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour toute fonction Ψ continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$, on pose:

$$\langle \nu, \Psi \rangle := \int \Psi(x)d\nu(x)$$

C'est à dire que l'opérateur $\langle \nu, \Psi \rangle$ est defini pour tous ξ et η dans H par:

$$\langle \langle \nu, \Psi \rangle \xi | \eta \rangle := \int \langle \Psi(x)\xi | \eta \rangle d\nu(x).$$

Les mesures $\check{\nu}$; $\bar{\nu}$; ν^* et ${}_a\nu$ (où $a \in G$) sont définies pour toute fonction complexe $\varphi \in \mathscr{K}(G)$, par:

$$\langle \check{\nu}, \varphi \rangle := \langle \nu, \check{\varphi} \rangle; \quad \langle \nu, \check{\varphi} \rangle; \quad \langle \bar{\nu}, \varphi \rangle := \overline{\langle \nu, \bar{\varphi} \rangle};$$

$$\langle \nu^*, \varphi \rangle := \overline{\langle \nu, \tilde{\varphi} \rangle} = \langle \bar{\nu}, \check{\varphi} \rangle \quad \text{et} \quad \langle {}_a\nu, \varphi \rangle := \langle \nu, {}_{a^{-1}}\varphi \rangle.$$

0.4. Soient $\mu \in M_1(G)$ et $f \in L_1(G)$. Alors presque partout dans G, on a:

$$\mu * f(x) = \int f(t^{-1}x)d\mu(t);$$

$$f * \mu(x) = \int f(xs^{-1})\Delta^{-1}(s)d\mu(s)$$

et

$$\mu * f * \mu(x) = \iint f(t^{-1}xs^{-1})\Delta^{-1}(s)d\mu(t)d\mu(s).$$

Dans la suite on notera $f^{\mu} := \mu * f * \mu$. Pour toute $f \in L_1(G)$, on a $f^{\mu} \in L_1(G)$.

0.5. Soit H un sous-groupe fermé de G. Pour toute mesure $\mu \in \mathrm{M}_1(H)$ notons $\mu^{\#}$ la mesure bornée sur G définie pour toute φ continue et bornée sur G, par:

$$\langle \mu^{\#}, \varphi \rangle := \langle \mu, \varphi_{|H} \rangle'$$

où $\varphi_{|H}$ désigne la restriction de φ à H.

L'Application $\mu \mapsto \mu^{\#}$ est un homomorphisme involutif isométrique de l'algèbre $M_1(H)($ dans $M_1(G)$. On identifiera μ à $\mu^{\#}$ et écrira μ au lieu de $\mu^{\#}$

1. Notion de μ-biinvariance

1.1. Dans tout cet article, on considère sur G une mesure (non nulle) $\mu \in M_1(G)$ telle que $\mu = \mu^* = \mu * \mu$. On associe à μ (cf. [A, B]) l'algèbre de Banach involutive $L_1^{\mu}(G)$ définie par:

$$L_1^{\mu}(G) := \{ f \in L_1(G) / f = f^{\mu} \}.$$

L'application: $f \mapsto f^{\mu} = \mu * f * \mu$ est un projecteur continu de l'algèbre $L_1(G)$ sur la sous-algèbre $L_1^{\mu}(G)$, de norme $\leqslant \|\mu\|^2$; où $\|\mu\|$ désigne la norme de μ.

On notera $\mathscr{K}^{\mu}(G) := \mu * \mathscr{K}(G) * \mu$.

1.2. Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ une fonction continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$. Posons pour tout $x \in G$:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mu}(x) &:= \langle \mu *_x \mu, \Psi \rangle \\ &= \iint \Psi(sxt)d\mu(s)d\mu(t).\end{aligned}$$

Ψ_{μ} est alors une fonction continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ et il est facile d'établir la proposition suivante:

1.2.1. PROPOSITION. *Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ une fonction continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$. Alors:*

(i) $\Psi_\mu(x) = \int \Psi_\mu(sx)d\mu(s) = \int \Psi_\mu(xt)d\mu(t)$; $\forall x \in G$.
(ii) $[\Psi_\mu]_\mu = \Psi_\mu$.
(iii) $[_x(\Psi_\mu)]_\mu(y) = \int \Psi_\mu(x^{-1}ty)d\mu(t)$; $\forall x, y \in G$; *où* $_x\Psi(y) = \Psi(x^{-1}y)$.
(iv) *Pour toute fonction* $f \in L_1(G)$, *on a:* $\langle f, \Psi_\mu \rangle = \langle f^\mu, \Psi \rangle$.

1.2.2. DÉFINITION. Soit Ψ une fonction continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$. On dira que Ψ est μ-biinvariante si $\Psi = \Psi_\mu$.

*1.3. Exemples de mesures born*ées **hermitiennes et idempotentes**

1.3.1. Remarquons tout d'abord que si $\mu \in M_1(G)$ est hermitienne et idempotente, alors $\delta_e - \mu$ (la measure complémentaire de μ) l'est aussi où δ_e est la mesure de Dirac au point e l'élement neutre de G; et que si ν est une autre mesure bornée hermitienne et idempotente sur G qui commute avec μ, alors $\mu * \nu$ et $\mu \vee \nu := \mu + \nu - \mu * \nu$ sont (bornées) hermitiennes et idempotentes; en particulier $\mu + \nu$ est hermitienne et idempotente lorsque $\mu * \nu = 0$. Notons enfin que $\mu \in M_1(G)$ est hermitienne et idempotente, si et seulement si, $\bar{\mu}$ est hermitienne et idempotente.

1.3.2. Soit G un groupe topologique localement compact. Soit K un sous-groupe compact de G. Soit $\tau \in \hat{K}$. Notons χ_τ le caractére normalisé de τ de façon que $\chi_\tau * \chi_\tau = \chi_\tau$. Posons $\mu_\tau = \chi_\tau dk$. Alors μ_τ est hermitienne et idempotente. Plus généralement soient $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des éléments de $\hat{K}$ deux à deux inéquivalentes. Alors (en vertu des relations d'orthogonalité de Schur) la mesure bornée $\mu = (\chi_{\tau_1} + \cdots + \chi_{\tau_n})dk$ est hermitienne et idempotente sur G.

Soit χ un caractère unitaire du groupe G (ou de K). Alor la mesure $\mu_\chi = \chi\, dk$ est bornée, hermitienne et idempotente sur G. Plus géneralement; soient $\chi_1, \ldots, \chi_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des caractères unitaires de G (ou de K) tels que leurs restrictions à K soient deux à deux distincts. Alors la mesure $\mu = (\chi_1 + \cdots + \chi_n)dk$ est hermitienne et idempotente. Par exemple, si $G = \mathbb{T}$ est le tore à une dimension alors la mesure

$$\mu = \left(\sum_{j=1}^{n} e^{im_j t} \right) dt;$$

(où $m_1, \ldots, m_n$ sont des entiers relatifs distincts et dt est la mesure de Haar normalisée de $\mathbb{T}$) est bornée, hermitienne et idempotente.

1.3.3. Soit G un groupe topologique localement compact et abélien. Notons $\hat{G}$ son dual et notons $J(G)$ (comme dans [Ru]) l'ensemble des mesures $\mu \in M_1(G)$ telles que $\mu = \mu * \mu$. Si $\mu \in \mu$ et ν sont dans $J(G)$, alors les mesures $\mu * \nu$; $\mu \vee \nu$ et $\delta_e - \mu$ sont aussi dans $J(G)$. Appelons mesure élémentaire idempotente (cf [Ru]) toute mesure μ du type: $d\mu(x) = \gamma(x)dm_H(x)$; où $\gamma \in \hat{G}$ et H un sous-groupe compact de G. D'après le théorème 3.1.3. de [Ru], $J(G)$ est exactement l'ensemble des mesures obtenues des mesures élémentaires par application en nombre fini des opérations binaires $*$; $\vee$ et de "complementation". D'après cette caractèrisation on constate que toute $\mu \in J(G)$ est aussi hermitienne.

1.3.4. Soit G un groupe compact. $\hat{G}$ désigne toujours l'ensemble de toutes les classes de r.u.c. irréductibles de G. Soit H un sous-groupe fermé distingué de G de mesure de Haar m_H. Soit $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ un élément de $\hat{G}$. Posons:

$$\frac{1}{c} = \int_H |\chi_n(h)|^2 dm_H(h);$$

où χ_π est le caractère de π. Notons d_π la dimension de $\mathscr{H}_\pi$. Posons:

$$d\mu(x) = cd_\pi \chi_\pi(x) dm_H(x).$$

μ est alors une mesure bornée hermitienne et idempotente de G (elle est même centrale). Ceci est le théorème 1 de [Ri].

1.3.5. REMARQUES. (i) Dans les numéros 3.3.3. et 3.3.4 à venir; on donnera des exemples de mesures bornées hermitiennes et idempotentes dans le cas de groupe non unimodulaire.

(ii) Tenant compte des remarques 1.3.1 et des exemples donnés précédemment, on voit qu'il existe dans un groupe topologique (même unimodulaire) d'autres mesures bornées, hermitiennes et idempotentes autres que celles du type classique figurant dans 1.3.2. Ceci nous permet de répondre à une question du referee.

2. Fonctions μ-sphériques

2.1. DÉFINITION. Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ une fonction continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ vérifiant:

(i) $\Psi = \Psi_\mu$ et
(ii) L'application $\gamma_\psi : f \mapsto \langle f, \psi \rangle := \int f(x)\Psi(x)dx$ est une $*$-représentation de l'algèbre de Banach involutive $L_1^\mu(G)$.

On dit alors que Ψ est une fonction μ-sphérique de G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$. Si en plus γ_ψ est irréductible, on dira que Ψ est une fonction μ-sphérique élémentaire.

REMARQUE. Si Ψ est une fonction μ-sphérique de G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$, alors $\|\Psi(x)\| \leqslant \|\mu\|^2$ pour tout $x \in G$.

2.2. THÉORÉME. *Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ une fonction continue bornée et μ-biinvariante sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$. Alors Ψ est μ-sphérique, si et seulement si, pour tous x et $y \in G$, on a:*

$$\int \Psi(xty)d\mu(t) = \Psi(x)\Psi(y).$$

Dèmonstration. Pour toutes fonctions f, $g \in \mathscr{K}(G)$, on a:

$$\begin{aligned}\langle f^\mu * g^\mu, \Psi\rangle &= \langle f * \mu * g, \Psi\rangle \\ &= \iiint f(xy^{-1}t^{-1})g(y)\Delta^{-1}(t)\Delta^{-1}(y)\Psi(x)dxdy\, d\mu(t) \\ &= \iint f(x)g(y)\left[\int \Psi(xty)d\mu(t)\right]dx\, dy.\end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\langle f^\mu, \Psi\rangle\langle g^\mu, \Psi\rangle = \langle f, \Psi\rangle\langle g, \Psi\rangle = \iint f(x)g(y)\Psi(x)\Psi(y)dx\, dy.$$

Le théorème 2.2 résulte alors des formules précédentes.

2.3. COROLLAIRE. *Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ une fonction continue et bornée de G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$, telle que $\Psi(e) = \mathrm{Id}_H$. Alors Ψ est μ-sphérique sur G, si et seulement si, pour tous x* et *$y \in G$, on a:*

$$\iint \Psi(sxty)d\mu(s)d\mu(t) = \Psi(x)\Psi(y).$$

2.4. Remarques et exemples

2.4.1. Supposons que G est unimodulaire et prenons K un sousgroupe compact de G. Soit $\tau \in \hat{K}$. Notons χ_τ le caractère normalisé de τ de façon que: $\chi_\tau = \chi_\tau * \chi_\tau$ et posons $\mu_\tau = \chi_\tau dk$; où dk est la mesure de Haar de K. Alors les fonctions μ_τ-sphériques sont les fonctions K-sphériques usuelles du type τ. (cf. par exemple [Go], [Ga-Va], [Wa], etc.).

2.4.2. Soit G un groupe topologique localement compact. Soit $\mu \in M_1(G)$ une mesure telle que $\mu = \mu^* = \mu * \mu$. Soit π une r.u.c. de dimension finie du groupe

G dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$. Posons:

$$\Psi_\pi(x) = \pi(\mu)\pi(x)\pi(\mu).$$

Alors Ψ_π est une fonction μ-sphérique sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi)$; et si π est irréductible, alors Ψ_π est élémentaire. De plus: pour tous f, $g \in L_1(G)$, on a:

$$\langle f * g, \Psi_\pi \rangle = \pi(\mu)\pi(f)\pi(g)\pi(\mu).$$

En particulier l'opérateur $\langle f^* * f, \Psi_\pi \rangle$ est positif. Notons

$$\mathscr{H}_\pi^\mu = \{\xi \in \mathscr{H}_\pi : \pi(\mu)\xi = \xi\}.$$

Si $\mathscr{H}_\pi^\mu$ n'est pas nul, alors Ψ_π est une fonction μ-sphérique sur G à valeur dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi^\mu)$ vérifiant en outre: $\Psi_\pi(e) = \mathrm{Id}$.

2.4.3. Si μ est une mesure de Guelfand sur G, c'est à dire que l'algèbre de Banach $L_1^\mu(G)$ est commutative (cf. [A, B]), alors les fonctions μ-sphériques à valeurs dans $\mathbb{C}$ ne sont autres que les caractères hermitiens de l'algèbre $L_1^\mu(G)$.

2.5. PROPOSITION. *Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ une fonction μ-sphérique de G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$. Alors:*

(i) $\Psi(x)^* = \Psi(x^{-1})$, *pour tout $x \in G$; et:*
(ii) $\langle f^* * \mu * f, \Psi \rangle$ *est un opérateur positif dans H pour tout $f \in L_1(G)$.*

Démonstration. (i) Pour tout $f \in \mathscr{K}(G)$ et tous ξ et η dans H, on a:

$$\int f(x)\langle \Psi(x)\xi \mid \eta \rangle dx = \langle \gamma_\Psi(f)\xi \mid \eta \rangle = \langle \xi \mid \gamma_\Psi(f^*)\eta \rangle$$

$$= \overline{\langle \gamma_\Psi(f^*)\eta \mid \xi \rangle} = \overline{\int \bar{f}(x^{-1})\Delta(x^{-1})\langle \Psi(x)\eta \mid \xi \rangle dx}$$

$$= \overline{\int \bar{f}(x)\langle \Psi(x^{-1})\eta \mid \xi \rangle dx} = \int f(x)\langle \xi \mid \Psi(x^{-1})\eta \rangle dx.$$

Il resulte que $\Psi(x)^* = \Psi(x^{-1})$, pour tout $x \in G$.
(ii) est évident.

2.6. PROPOSITION. *Soit H un espae de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit γ une $*$-representation de l'algèbre $L_1^\mu(G)$ dans H. On suppose qu'il existe $g \in \mathscr{K}^\mu(G)$, telle que $\gamma(g) = \mathrm{Id}_H$. Alors, il existe une unique fonction μ-sphérique Ψ sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ telle que: $\gamma(f) = \gamma_\Psi(f) := \langle f, \Psi \rangle$ pour* *toute fonction* $f \in L_1^\mu(G)$. *De plus* $\Psi(e) = \mathrm{Id}_H$ *et les ensembles:* $\{\Psi(x)/x \in G\}$ *et* $\{\gamma(f)/f \in \mathscr{K}^\mu(G)\}$ *engendrent le même sous-espace vectoriel dans* $\mathscr{L}(H)$.

Démonstration. (a) L'application linéaire $f \mapsto \Gamma(f) = \gamma(f^\mu)$ de $\mathscr{K}(G)$ dans $\mathscr{L}(H)$ est continue. Il existe alors une unique fonction Ψ de G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ bornée presque partout sur G telle que pour tout $f \in \mathscr{K}(G)$, on a:

$$\Gamma(f) = \langle f, \Psi \rangle := \int f(x)\Psi(x)dx.$$

Choisissons $g \in \mathscr{K}^\mu(G)$, telle que $\gamma(g) = \mathrm{Id}_H$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(G)$, on a:

$$\begin{aligned}\Gamma(f) &= \gamma(f^\mu) = \gamma(g)\gamma(f^\mu) = \Gamma(g * f)\\ &= \langle g * f, \Psi \rangle = \iint g(y)f(y^{-1}x)\Psi(x)dxdy\\ &= \iint g(y)f(x)\Psi(yx)dxdy = \int f(x)\left[\int g(y)\Psi(yx)dy\right]dx\\ &\langle f, \varphi \rangle;\end{aligned}$$

où $\varphi(x) = \int g(y)\Psi(yx)dy$, pour tout $x \in G$.

La fonction φ est bornée car $\|\varphi(x)\| \leqslant \|g\|_1 \|\Psi\|_\infty$, pour tout $x \in G$. Comme $\varphi(x) = \Delta(x^{-1})\int g(yx^{-1})\Psi(y)dy$; pour voir que φ est continue, il suffit de voir que la fonction:

$$\theta(x) = \int g(yx^{-1})\Psi(y)dy,$$

est continue sur G.

Or, pour tous s et $t \in G$, on a:

$$\|\theta(s) - \theta(t)\| \leqslant \|\Psi\|_\infty \|\rho_{s^{-1}}(g) - \rho_{t^{-1}}(g)\|_1.$$

Comme l'application: $t \mapsto \rho_t(g) := g_t$ est continue de G dans $L_1(G)$ (cf. par exemple [He-Ro] p. 285, Tome I); on en déduit que θ est continue. Ainsi, on peut supposer que Ψ est une fonction continue et bornée sur G.

Comme $\Gamma(f^\mu) = \Gamma(f)$ pour tout $f \in \mathscr{K}(G)$; il en résulte que $\Psi = \Psi_\mu$. Par conséquent Ψ est l'unique fonction μ-sphérique à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ telle que $\gamma(f) = \gamma_\Psi(f)$ pour tout $f \in \mathscr{K}^\mu(G)$.

(b) Montrons que $\Psi(e) = \mathrm{Id}_H$. Pour cela, considérons une unité approchée

$(\varepsilon_i)_{i\in I}$ et posons $\delta_i = \mu * \varepsilon_i * \mu$. Alors

$$\gamma(\delta_i) = \langle \delta_i, \Psi \rangle = \langle \varepsilon_i, \Psi \rangle \to \Psi(e).$$

Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}^\mu(G)$, on a d'une part:

$$\gamma(\delta_i * f) = \gamma(\delta_i)\gamma(f) \to \Psi(e)\gamma(f);$$

et d'autre part, on a:

$$\gamma(\delta_i * f) = \langle \varepsilon_i * f, \Psi \rangle \to \langle f, \Psi \rangle = \gamma(f).$$

En prenant $g \in \mathscr{K}^\mu(G)$ tel que $\gamma(g) = \mathrm{Id}_H$, on obtient $\Psi(e) = \mathrm{Id}_H$.

(c) Pour montrer la dernière assertion, notons $E(\gamma)$ (resp. $E(\Psi)$) le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(H)$ engendré par l'ensemble:

$$\{\gamma(f)/f \in \mathscr{K}^\mu(G)\} \text{ (resp. } \{\Psi(x)/x \in G\}).$$

Il est clair que $E(\gamma) \subset E(\Psi)$. Pour avoir l'égalité, il est suffisant de prouver que si $L \in \mathscr{L}(H)$ est tel que: $\mathrm{Tr}(L\gamma(f)) = 0$ pour toute fonction $f \in \mathscr{K}^\mu(G)$; alors $\mathrm{Tr}(L\Psi(x)) = 0$ pour tout $x \in G$.

Notons $\lambda(x) = \mathrm{Tr}(L\Psi(x))$ pour tout $x \in G$. La fonction λ est continue bornée sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant $\lambda_\mu = \lambda$ et de plus, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(G)$, on a:

$$\int f(x)\lambda(x)dx = \int f^\mu(x)\lambda(x)dx = \langle f^\mu, \lambda \rangle = \mathrm{Tr}(L\gamma(f^\mu)) = 0.$$

D'où pour tout $x \in G$, on a:

$$0 = \lambda(x) = \mathrm{Tr}(L\Psi(x)).$$

2.7. REMARQUE. Soit γ une $*$-représentation de $L_1^\mu(G)$ dans H vérifiant les hypothèses de 2.6. Soit Ψ la fonction μ-sphérique sur G telle que $\gamma = \gamma_\Psi$. Alors pour tout $x \in G$ et tout $f \in L_1^\mu(G)$, on a:

$$\gamma(({}_xf)^\mu) = \Psi(x)\gamma(f).$$

2.8. PROPOSITION. *Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ une fonction continue et bornée sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$ telle que: $\Psi(e) = \mathrm{Id}_H$ et $\Psi_\mu = \Psi$.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Ψ *est* μ*-sphérique.*
(ii) *Pour tout* $f \in L_1^\mu(G)$ *on a:* $(\check{f}\check{\Delta}) * \Psi = \rho(f)\Psi$; où ρ est une $*$-représentation e l'algèbre $L_1^\mu(G)$ dans .
(iii) *Pour tout* $f \in L_1^\mu(G)$ *on a*: $f * \check{\Psi} = \check{\Psi}\sigma(f)$; *où* σ est une $*$*-représentation de l'algèbre* $L_1^\mu(G)$ *dans H.*

Si ces conditions sont replies, alors pour tout $f \in L_1^\mu(G)$, *on a*: $\rho(f) = \sigma(f) = \gamma_\Psi(f) := \langle f, \Psi \rangle$; *et il existe g un élément de* $\mathscr{K}^\mu(G)$ *tel que* $\langle g, \Psi \rangle = \mathrm{Id}_H$.

Démonstration. (a) Supposons que Ψ soit μ-sphérique. Alors en utilisant le théorème de Fubini, des changements de variables convenables et le corollaire 2.3; on obtient que pour tout $f \in \mathscr{K}^\mu(G)$, on a:

$$
\begin{aligned}
(\check{f}\check{\Delta}) * \Psi(y) &= \int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\Psi(x^{-1}y)dx \\
&= \int f(x)\Psi(xy)dx \\
&= \iiint f(s^{-1}xt^{-1})\Delta(t^{-1})\Psi(xy)dx d\mu(s)d\mu(t) \\
&= \int f(x)\left[\iint \Psi(sxty)d\mu(s)d\mu(t)\right]dx \\
&= \int f(x)\Psi(x)\Psi(y)dx = \langle f, \Psi \rangle \Psi(y).
\end{aligned}
$$

D'où: $(\check{f}\check{\Delta}) * \Psi = \gamma_\Psi(f)\Psi$. Ainsi (i) implique (ii).

(b) Supposons que Ψ soit μ-sphérique. Alors pour toute fonction $f \in \mathscr{K}^\mu(G)$, on a:

$$
f * \check{\Psi}(y) = \int f(x)\Psi(y^{-1}x)dx = \langle f, ({}_y\Psi)_\mu \rangle.
$$

Comme Ψ est μ-sphérique, alors: $({}_y\Psi)_\mu = \check{\Psi}(y)\Psi$. Il résulte que: $f * \check{\Psi}(y) = \check{\Psi}(y)\langle f, \Psi \rangle = \check{\Psi}(y)\gamma_\Psi(f)$. D'où: $f * \check{\Psi} = \check{\Psi}\gamma_\Psi(f)$. Ainsi (i) implique (iii).

(c) Supposons que la condition (ii) soit vérifiée.

Alors pour toute fonction $f \in L_1^\mu(G)$, on a:

$$
(\check{f}\check{\Delta}) * \Psi(e) = \rho(f)\Psi(e) = \rho(f)
$$

Ainsi $\gamma_\Psi(f) := \langle f, \Psi \rangle = \rho(f)$ est une $*$-représentation de $L_1^\mu(G)$ dans H. Ceci prouve que Ψ est μ-sphérique. La condition (i) est alors vérifiée. De manière identique, on montre que (iii) implique (i). Par conséquent (i); (ii) et (iii) sont équivalentes.

(d) Il reste à prouver la dernière assertion. Soit $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une unité approchée dans $\mathscr{K}(G)$. Notons $\delta_i = \mu * \varepsilon_i * \mu$. Alors:

$$\gamma_\Psi(\delta_i) := \langle \delta_i, \Psi \rangle = \langle \varepsilon_i, \Psi \rangle \to \Psi(e) = \mathrm{Id}_H.$$

Ainsi Id_H appartient à la fermeture de $\gamma_\Psi(\mathscr{K}^\mu(G))$ dans l'espace $\mathscr{L}(H)$. Comme $\mathscr{L}(H)$ est de dimension finie, le sous-espace vectoriel $\gamma_\Psi(\mathscr{K}^\mu(G))$ est fermé dans $\mathscr{L}(H)$. Il en résulte qu'il existe $g \in \mathscr{K}^\mu(G)$ tel que $\gamma_\Psi(g) = \mathrm{Id}_H$.

2.9. Définition

Soit H_1 et soit H_2 deux espaces de Hilbert de dimensions finies (non nulles) sur $\mathbb{C}$. Soit Ψ_1(resp. Ψ_2) une fonction μ-sphérique sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H_1)$ (resp. $\mathscr{L}(H_2)$). On dira que Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes s'il existe Q un isomorphisme isométrique de H_1 sur H_2, tel que:

$$\Psi_2(x) = Q\Psi_1(x)Q^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

On remarque que Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes, si et seulement si, les $*$-représentations γ_{Ψ_1} et γ_{Ψ_2} sont équivalentes.

3. Fonctions μ-sphériques et représentations unitaires μ-finies

3.1. Comme dans la section 1; on se donne G un groupe topologique localement compact. Soit $\mu \in M_1(G)$ une mesure telle que $\mu = \mu^* = \mu * \mu$.

Pour toute r.u.c. $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ du groupe G dans $\mathscr{H}_\pi$, on notera:

$$\mathscr{H}_\pi^\mu = \{\xi \in \mathscr{H}_\pi / \pi(\mu)\xi = \xi\}.$$

L'espace $\mathscr{H}_\pi^\mu$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}_\pi$ et $\pi(\mu)$ est le projecteur orthogonal de $\mathscr{H}_\pi$ sur $\mathscr{H}_\pi^\mu$. Un vecteur $\xi \in \mathscr{H}_\pi^\mu$ est dit μ-invariant (cf [A, B]).

Notons encore π la $*$-représentation (non dégénerée) de $L_1(G)$ dans l'espace $\mathscr{H}_\pi$. Pour tout $f \in L_1^\mu(G)$ et tout $\xi \in \mathscr{H}_\pi^\mu$, on a:

$$\pi(\mu)\pi(f)\xi = \pi(f)\xi.$$

Ainsi $\mathscr{H}_\pi^\mu$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}_\pi$ invariant par $\pi(L_1^\mu(G))$. L'application: $f \longmapsto \pi^\mu(f)$; où $\pi^\pi(f)$ est la restriction de $\pi(f)$ au sous-espace $\mathscr{H}_\pi^\mu$; définit une $*$-représentation de l'algébre $L_1^\pi(G)$ dans l'espace de Hilbert π_π^μ.

3.2. Définition

Une r.u.c. $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ du groupe G dans $\mathscr{H}_\pi$ est dite μ-finie, si le sous-espace $\mathscr{H}_\pi^\mu$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$; c'est à dire que l'opérateur $\pi(\mu)$ est de rang fini.

3.3. Remarques et exemples

3.3.1. (a) Si $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ est de degré fini, alors elle est μ-finie.

(b) Soit $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ une r.u.c. μ-finie du groupe G. On suppose que $\mathscr{H}_\pi^\mu$ n'est pas réduit à $\{0\}$. En vertu de 3.1, on obtient une $*$-représentation π^μ de l'algèbre $L_1^\mu(G)$ dans $\mathscr{H}_\pi^\mu$. La fonction μ-sphérique associée à π^μ est donnée par:

$$\Psi_\pi(x) = \pi(\mu)\pi(x)\pi(\mu); \quad \text{pour tout } x \in G.$$

La fonction Ψ_n est continue et vérifie:

(i) $\Psi_\pi(e) = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\pi^\mu}$;
(ii) $\|\Psi_\pi(x)\| \leqslant 1$ pour tout $x \in G$ et
(iii) L'opérateur $\langle f^* * f, \Psi_\pi \rangle$, est positif pour tout $f \in L_1(G)$.

Inversement, on verra au théorème 3.10 que si Ψ est une fonction μ-sphérique sur G à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$; où H est un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur $\mathbb{C}$; vérifient en plus les propriétés (i); (ii) et (iii) ci-dessus; alors il existe $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ une r.u.c. de G dans $\mathscr{H}_\pi$, μ-finie telle que Ψ soit équivalente à Ψ_π. Ce théorème peut être considéré comme l'analogue du théorème de Godement (cf. [Go], (Ga, Va], [Wa]) pour caractèriser les fonctions μ-sphériques.

3.3.2. Soit G un groupe topologique localement compact et unimodulaire. Soit K un sous-groupe compact de G. Notons de la mesure de Haar normalisée du groupe K. Soit $(\sigma, \mathscr{H}_\sigma)$ une r.u.c. et irréductible de K. Notons $d_\sigma = \dim \mathscr{H}_\sigma$. Pour toute r.u.c. $\pi \in \hat{G}$, notons $n(\sigma, \pi)$ la multiplicité (finie ou infinie) de σ dans $\pi|_K$ (la restriction de π au sous-groupe K). Soit $v \in \mathscr{H}_\sigma$ un vecteur unitaire. Notons φ_v^σ la fonction définie sur K par:

$$\varphi_v^\sigma(k) = d_\sigma \langle v \mid \sigma(k)v \rangle_\sigma \quad \text{pour tout } k \in K;$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\sigma$ désigne le produit scalaire de l'espace $\mathscr{H}_\sigma$.

Considérons la mesure $\mu_v^\sigma = \varphi_v^\sigma(k)dk$. C'est une mesure bornée sur G qui vérifie: $\mu_v^\sigma = (\mu_v^\sigma)^*$ et (en vertu des relations d'orthogonalité de Schur): $\mu_v^\sigma = \mu_v^\sigma * \mu_v^\sigma$.

Pour toute r.u.c. π du groupe G dans l'espace $\mathscr{H}_\pi$; il est facile de voir—en utilitisant la complète rèductibilité de $\pi|_k$ et les relations d'orthogonalité de Schur—que le rang de l'operateur $\pi(\mu_v^\sigma)$ estègal à $n(\sigma, \pi)$.

Supposons maintenant que G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini et que K est un sous-groupe compact maximal de G. D'après le théorème de Harish-Chandra (cf [Wa], Tome I, p. 319), on a: pour toute r.u.c. $\pi \in \hat{G}$ et toute r.u.c. $\sigma \in \hat{K}: n(\sigma, \pi) \leqslant d_\sigma$.

Ainsi, dans ce cas, pour tout $\pi \in \hat{G}$ et tout $\sigma \in \hat{K}$ la représentation π est μ_v^σ-finie pour tout vecteur unitaire $v \in \mathscr{H}_\sigma$. Plus généralement, soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des classes de r.u.c. et irréductibles deux à deux distinctes du groupe K dans $\mathscr{H}_{\sigma_1}, \ldots, \mathscr{H}_{\sigma_n}$ respectivement. Soit $v_i \in \mathscr{H}_{\sigma_i}$ un vecteur unitaire pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Posons $\mu = \mu_{v_1}^{\sigma_1} + \cdots + \mu_{v_n}^{\sigma_n}$. Alors μ est une measure bornée hermitienne et idempotente sur G pour laquelle toute r.u.c. irréductible de G est μ-finie.

Les deux exemples suivants nous permettent de sortir du cas de groupe unimodulaire.

3.3.3. Soit $n \geqslant 1$. Soit $G_{1,n}$ le groupe des dilatations de $\mathbb{R}^n$ ([Ba]). Les éléments de $G_{1,n}$ sont notés (b, a) où $b \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^*$. La loi du groupe $G_{1,n}$ etant:

$$(b, a)\cdot(b', a') = (b + ab', aa').$$

Il est connu que la liste des (classes des) représentations continues unitaires et irréductibles de $G_{1,n}$ est donnée par:

(i) Les représentations unitaires π_ω^n de dimension un, définies par: $\pi_\omega^n(b, a) = \omega(a)$; où ω est un caractère unitaire de $\mathbb{R}^*$.
(ii) Les représentations $(\pi_\lambda^n, \mathscr{H})$; où $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R}^*, (dt/|t|))$ *et*

$$\lambda \in S_{n-1}^+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S_{n-1}: \lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n\};$$

où S_{n-1} est la sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^n$; l'opérateur $\pi_\lambda^n(b, a)$ agissant sur $\mathscr{H}$ par:

$$[\pi_\lambda^n(b, a)\xi](t) = \exp(-2\pi i\langle b, \lambda\rangle t)\xi(at).$$

La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est utilisée ici pour désigner le produit scalaire usuel de l'espace $\mathbb{R}^n$ et $i^2 = -1$.

Supposons que $n \geqslant 2$ et notons $H = G_{1,1}$. H s'identifie à un sous-groupe fermé de $G_{1,n}$, par exemple, moyennant l'isomorphisme:

$$(b, a) \mapsto ((b, 0, \ldots, 0), a).$$

(1) Soit ξ un "bon vecteur" de $\mathscr{H}$ normalisé (cf. [E, T] ou [E]). On a: $\pi_1^1(f_\xi) = E_{\xi,\xi}$; où f_ξ est la fonction définie sur H par:

$$f_\xi(b, a) = |a| \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi i b x)\xi(x)\bar{\xi}(ax)\, dx;$$

et $E_{\xi,\xi}$ est l'opérateur de rang un sur $\mathscr{H}$ défini par:

$$E_{\xi,\xi}(\eta) = \langle \eta \mid \xi \rangle \xi,$$

pour tout $\eta \in \mathscr{H}$, avec $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ etant le produit scalaire dans $\mathscr{H}$.

Considérons la mesure $\mu_\xi = f_\xi(h)dh$; où dh est la mesure de Haar du groupe H. La mesure μ_ξ est bornée sur $G_{1,n}$ et vérifie: $\mu_\xi = \mu_\xi^* = \mu_\xi * \mu_\xi$; car $f_\xi = f_\xi^* = f_\xi * f_\xi$. (cf [E, T] ou [E]). On montre (cf [A, B]) que μ_ξ est une mesure de Guelfand, c'est à dire que pour toute r.u.c. $\pi \in \hat{G}_{1,n}$, l'opérateur $\pi(\mu_\xi)$ est de rang $\leqslant 1$.

(2) Plus généralement, soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des bons vecteurs deux à deux orthogonaux dans $\mathscr{H}$, alors (cf [E, T] ou [E]) on a: $f_{\xi_i} * f_{\xi_j} = 0$ si $i \neq j$. Posons $\mu = (f_{\xi_1}(h) + \cdots + f_{\xi_n}(h))dh$. La mesure μ est bornée sur $G_{1,n}$, hermitienne et idempotente pour laquelle toute r.u.c. et irréductible de $G_{1,n}$ est μ-finie.

3.3.4. Soit G un groupe topologique localement compact non unimodulaire. Soit $(\pi, \mathscr{H})$ une r.u.c. irréductible et intégrable du groupe G. Pour tous vecteurs ξ et η de $\mathscr{H}$, notons:

$$C_{\xi,\eta}^\pi(x) = \langle \xi \mid \pi(x)\eta \rangle,$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathscr{H}$. La fonction $C_{\xi,\eta}^\pi$ est le coéfficient de π associé aux vecteurs ξ et η. Puisque π est aussi de carré intégrable, il existe (cf [D, M]) un unique opérateur δ auto-adjoint, positif et semi-invariant de poids Δ^{-1} tel que pour tout $\xi \in \mathscr{H}$:

$$C_{\xi,\eta}^\pi \in L_2(G, dx) \Leftrightarrow \eta \in \mathrm{Dom}(\delta^{-1/2}).$$

Soit $C_{\xi,\eta}^\pi$ un coefficient de π, non nul et intégrable. Alors:

$$\eta \in \mathrm{Dom}(\delta^{-1}) \quad \text{et} \quad \pi(C_{\xi,\eta}^\pi) = E_{\xi,\delta^{-1}\eta}.$$

On déduit que:

$$(C_{\xi,\eta}^\pi)^* * C_{\xi,\eta}^\pi = \|\xi\|^2 C_{\delta^{-1}\eta,\eta}^\pi.$$

(1) Choisissons $\eta \in \mathrm{Dom}(\delta^{-1})$ tel que $\|\delta^{-1}\eta\| = 1$ et prenons $\xi = \delta^{-1}\eta$. La fonction $C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta}$ est alors intégrable sur G et vérifie:

$$C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta} * C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta} = C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta} = (C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta})^*.$$

Etant donné que π est intégrable, pour toute $\rho \in \hat{G}\backslash\{\pi\}$, l'opérateur $\rho(C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta})$ est nul (cf. [D, M]).

Notons $\mu_\eta = C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta}(x)dx$. La mesure μ_η est bornée sur G, hermitienne et idempotente pour laquelle $\rho(\mu_\eta)$ est un opérateur de rang $\leqslant 1$ pour toute $\rho \in \hat{G}$.

Donnons nous ζ un autre vecteur de $\mathscr{H}$ tel que $C^{\pi}_{\delta^{-1}\zeta,\zeta}$ soit intégrable avec $\|\delta^{-1}\zeta\| = 1$. En utilisant le théorème 3 de [D, M], on obtient:

$$C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta,\eta} * C^{\pi}_{\delta^{-1}\zeta,\zeta}(x) = \langle \delta^{-1}\eta \mid \pi(x)\zeta\rangle\langle \delta^{-1}\zeta \mid \delta^{-1}\eta\rangle.$$

En particulier, si $\langle \delta^{-1}\eta \mid \delta^{-1}\zeta\rangle = 0$, alors: $\mu_\eta * \mu_\zeta = 0$.

(2) Prenons $\eta_1, \ldots, \eta_n$ des vecteurs de $\mathscr{H}$ tels que $\|\delta^{-1}\eta_i\| = 1$ et $\langle \delta^{-1}\eta_i \mid \delta^{-1}\eta_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$ en supposant que $C^{\pi}_{\delta^{-1}\eta_i,\eta_i}$ sont des coefficients intégrables pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Posons $\mu = \mu_{\eta_1} + \cdots + \mu_{\eta_n}$. La mesure μ est bornée sur G, hermitienne et idempotente pour laquelle toute r.u.c. irréductible du groupe G est μ-finie.

3.4. PROPOSITION. *Soit $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$, une r.u.c. du groupe G. Soit $F \subset \mathscr{H}^{\mu}_{\pi}$ un sous-espace fermé invariant par π^{μ}. Soit F_1 le plus petit sous-espace fermé de $\mathscr{H}_\pi$ invariant par π contenant F. Alors $F = F_1 \cap \mathscr{H}^{\mu}_{\pi}$.*

Démonstration. Soit V un voisinage de 0 dans $\mathscr{H}_\pi$. Choisissons W un voisinage de 0 dans $\mathscr{H}_\pi$ tel que $\pi(\mu)W \subset V$. Si $\xi \in F_1 \cap \mathscr{H}^{\mu}_{\pi}$, alors il existe $\eta_i \in F$; $f_i \in \mathscr{K}(G)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que $\xi - \sum_{i=1}^{n} \pi(f_i)\eta_i \in W$. Posons $g_i = \mu * f_i * \mu$. Alors $g_i \in \mathscr{K}^{\mu}(G)$ et $\xi - \sum_{i=1}^{n} \pi(g_i)\eta_i \in \pi(\mu)W \subset V$. Comme V est un voisinage quelconque de 0; on déduit que ξ appartient à la fermeture de F dans $\mathscr{H}_\pi$ et donc ξ appartient à F.

3.4.1. COROLLAIRE. *Soit $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ une r.u.c. du groupe G. Si π est irréductible, alors la $*$-représentation π^{μ} de l'algèbre $L^{\mu}_1(G)$ dans l'espace $\mathscr{H}^{\mu}_{\pi}$ est irréductible.*

3.5. PROPOSITION. *Soit $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ une r.u.c. du groupe G; ayant un vecteur cyclique ξ non nul et μ-invariant. Si la $*$-representation π^{μ} de l'algèbre $L^{\mu}_1(G)$ dans $\mathscr{H}^{\mu}_{\pi}$ est irréductible; alors $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ est irréductible.*

Démonstration. Soit F_1 un sous-espace fermé de $\mathscr{H}_\pi$ invariant par π. Notons P_1 le projecteur orthogonal de $\mathscr{H}_\pi$ sur F_1 et Q_1 le projecteur orthogonal de $\mathscr{H}_\pi$ sur l'espace $F_1^{\perp}$ (l'orthogonal de F_1). Les projecteurs P_1 et Q_1 commutent avec

$\pi(x)$ pour tout $x \in G$; ils commutent donc avec $\pi(\mu)$. On a donc:

$$\pi(\mu)P_1(\xi) = P_1(\xi) \qquad \text{et} \qquad \pi(\mu)Q_1(\xi) = Q_1(\xi).$$

Supposons que $P_1(\xi) \neq 0$. Alors $F_1 \cap \mathscr{H}_\pi^\mu \neq \{0\}$ et $F_1 \cap \mathscr{H}_\pi^\mu$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}_\pi^\mu$ invariant par π^μ. Par conséquent: $F_1 \cap \mathscr{H}_\pi^\mu = \mathscr{H}_\pi^\mu$. Ce qui implique que $\xi \in F_1$ et donc que $F_1 = \mathscr{H}_\pi$. De la même façon; si $P_1(\xi) = 0$; alors $\xi \in F_1^\perp$ et par suite $F_1 = \{0\}$.

3.6. PROPOSITION. *Soit $\mu \in M_1(G)$ une mesure telle que $\mu = \mu^* = \mu * \mu$. Soit $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ une r.u.c. du groupe G dans l'espace $\mathscr{H}_\pi$. Pour tout $\xi \in \mathscr{H}_\pi$, notons φ_ξ^π la fonction définie pour tout $x \in G$, par:*

$$\varphi_\xi^\pi(x) = \langle \pi(x)\xi \mid \xi \rangle.$$

Alors:

(i) $(\varphi_\xi^\pi)_\mu = \varphi_{\pi(\mu)\xi}^\pi$;
(ii) *φ_ξ^π est μ-biinvariante, si et seulement si, $\pi(\mu)\xi = \xi$.*

Démonstration. (i) Se fait par un simple calcul. (ii) Si φ_ξ^π est μ-biinvariante; alors:

$$\|\xi\|^2 = \varphi_\xi^\pi(e) = \varphi_{\pi(\mu)\xi}^\pi(e) = \|\pi(\mu)\xi\|^2.$$

Comme $\pi(\mu)$ est un projecteur orthogonal, alors $\pi(\mu)\xi = \xi$.

3.6.1. COROLLAIRE. *Si φ est une fonction continue de type positif sur le groupe G; alors φ_μ est continue de type positif sur G.*

3.7. PROPOSITION. *Soit $\mu \in M_1(G)$ une mesure telle que $\mu = \mu^* = \mu * \mu$. Soit λ une forme linéaire positive sur $L_1(G)$ telle que:*

$$\lambda(f) = \lambda(f^\mu) \quad \textit{pour tout } f \in L_1(G).$$

Alors, il existe une fonction continue de type positif φ unique sur G, telle que:

(i) *φ est μ-biinvariante;*
(ii) *$\lambda(f) = \langle f, \varphi \rangle := \int f(x)\varphi(x)dx$, pour tout $f \in L_1(G)$; et*
(iii) $\|\lambda\| = \varphi(e)$.

La démonstration de 3.7. est classique. (cf. par exemple [Fa]).

3.8. PROPOSITION. *Soit π* (resp. *γ*) *une $*$-représentation irréductible de dimension finie de l'algèbre $L_1^\mu(G)$ dans l'espace de Hilbert V* (resp. *W*). *Soit T*

un opérateur non nul de V dans W, tel que: $T \circ \pi = \gamma \circ T$. *Alors, il existe une constante* $c > 0$ *et S une isométrie de V dans W, tels que:* $T = cS$. *Si en plus V et W ont la même dimension (sur* $\mathbb{C}$*); alors S est un isomorphisme isometrique de V sur W.*

La démonstration de 3.8 est classique. (voir par exemple [Gaa], p. 160.).

3.9 PROPOSITION. *Soit G un groupe topologique localement compact. Soit* $\mu \in M_1(G)$ *une mesure telle que* $\mu = \mu^* = \mu * \mu$. *Soit* $(\pi, \mathscr{H})$ *une r.u.c. de G. On suppose que* π *est* μ*-finie. Alors il existe une fonction* $f \in L_1^\mu(G)$ *telle que* $\pi(f) = \pi(\mu)$.

Démonstration. On peut supposer que $\mathscr{H}^\mu$ n'est pas réduit à $\{0\}$. (a) Soit $\xi \in \mathscr{H}^\mu$. Soit (ε_i) une unité approchée dans $\mathscr{K}(G)$. Alors $\pi(\varepsilon_i)\xi \to \xi$ dans $\mathscr{H}$. Soit $\delta_i = \mu * \varepsilon_i * \mu$. Alors $\delta_i \in L_1^\mu(G)$ et $\pi(\delta_i)\xi \to \pi(\mu)\xi = \xi$ dans $\mathscr{H}^\mu$. Comme l'espace $\pi(L_1^\mu(G))\xi$ est de dimension finie; alors il est fermé, par conséquent il existe $f \in L_1^\mu(G)$ tel que $\xi = \pi(f)\xi$.

(b) Soit $n = \dim \mathscr{H}^\mu$. Soit $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ une base de $\mathscr{H}^\mu$. On applique ce qui précède à $\rho = \pi \oplus \cdots \oplus \pi$ et $\mathscr{R} = \mathscr{H} \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}$ (n-termes). Alors $\mathscr{R}^\mu = \mathscr{H}^\mu \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}^\mu$. Prenons: $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathscr{R}^\mu$, alors il existe $f \in L_1^\mu(G)$ tel que: $\pi(f)\xi_i = \xi_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors $\pi(\mu) = \pi(f)$.

3.10. THÉORÈME. *Soit G un groupe topologique localement compact. Soit* $\mu \in M_1(G)$ *une mesure telle que* $\mu = \mu^* * \mu$. *Soit H un espace de Hilbert (non nul) de dimension finie sur* $\mathbb{C}$. *Soit* Ψ *une fonction* μ*-sphérique sur G à valeurs dans* $\mathscr{L}(H)$ *vérifiant:*

(i) $\Psi(e) = \mathrm{Id}_H$,
(ii) $\|\Psi(x)\| \leqslant 1$, *pour tout* $x \in G$ *et*
(iii) $\langle f^* * f, \Psi \rangle$ *est un opérateur positif pour tout* $f \in L_1(G)$.

Alors, il existe une unique (classe d'équivalence unitaire de) représentation continue unitaire $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ μ*-finie du groupe G, telle que la fonction* μ*-sphérique* Ψ_π *(associée à* π*) soit équivalente à* Ψ. *De plus; si* Ψ *est élémentaire, alors* π *peut être choisie irréductible.*

Démonstration. Pour tout $f \in L_1^\mu(G)$, posons $\gamma(f) = \langle f, \Psi \rangle$. Par définition, γ est une $*$-représentation de l'algèbre $L_1^\mu(G)$ dans H. Ainsi γ se décompose en une somme Hilbertienne (finie) de composantes irréductibles. Ceci nous ramene à ne considérer que le cas où γ est irréductible.

Supposons donc que γ est irréductible. Posons dans ce cas, pour toute fonction $f \in L_1(G)$:

$$\lambda(f) = \mathrm{Tr}\langle f, \Psi \rangle = \mathrm{Tr}\langle f^\mu, \Psi \rangle = \mathrm{Tr}\,\gamma(f^\mu).$$

λ est alors une forme linéaire continue sur $L_1(G)$, positive et vérifiant: $\lambda(f^\mu) = \lambda(f)$ pour tout $f \in L_1(G)$. D'Après la proposition 3.7. il existe une r.u.c.

$(\pi_1, \mathscr{H}_{\pi_1})$ et un vecteur cyclique (non nul) $\xi_1 \in \mathscr{H}_{\pi_1}$, tel que,

$$\pi_1(\mu)\xi_1 = \xi_1 \quad \text{et} \quad \lambda(f) = \langle \pi_1(f)\xi_1 \mid \xi_1 \rangle \quad \text{pour tout } f \in L_1(G).$$

Notons J le noyau de γ regardé comme représentation de $L_1^\mu(G)$. $J = \{f \in L_1^\mu(G)\colon \gamma(f) = 0\}$. C'est un idéal bilatère de $L_1^\mu(G)$. Montrons que $\pi_1(J)\xi_1 = \{0\}$. Pour cela, soit $f \in J$. Sachant que ξ_1 est cyclique pour π_1; il suffit de voir que pour tout $g \in L_1(G)$, on a: $\langle \pi_1(f)\xi_1 \mid \pi_1(g)\xi_1 \rangle = 0$, ou ce qui est équivalent, que $\langle \pi_1(g * f)\xi_1 \mid \xi_1 \rangle = 0$, pour tout $g \in L_1(G)$. Or, pour tout $g \in L_1(G)$, on a:

$$\begin{aligned}\langle \pi_1(g * f)\xi_1 \mid \xi_1 \rangle &= \lambda(g * f) = \lambda(g^\mu * f)\\ &= \mathrm{Tr}(\gamma(g^\mu * f)) = \mathrm{Tr}(\gamma(g^\mu)\gamma(f)) = 0.\end{aligned}$$

Notons $J' = \{f \in L_1^\mu(G)\colon \pi_1(f)\xi_1 = 0\}$. Vu ce qui précéde, on a: $J \subset J'$. Reciproquement, soit $f \in J'$. Alors:

$$\begin{aligned}0 &= \langle \pi_1 f)\xi_1 \mid \pi_1(f)\xi_1 \rangle = \langle \pi_1(f^* * f)\xi_1 \mid \xi_1 \rangle\\ &= \lambda(f^* * f) = \mathrm{Tr}(\gamma(f)^*\gamma(f))\end{aligned}$$

D'où $\gamma(f) = 0$; c'est à dire que $f \in J$. Par suite $J = J'$.

Notons $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}_{\pi_1}$ engendré par $\{\pi_1(f)\colon f \in L_1^\mu(G)\}$. $\mathscr{F}$ est un sous-espace dense dans $\mathscr{H}_{\pi_1}^\mu$. Comme J est de codimension finie dans $L_1^\mu(G)$, alors $\mathscr{F}$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Par conséquent $\mathscr{H}_{\pi_1}^\mu$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et non réduit à $\{0\}$.

Soit $u \in H$ un vecteur non nul. Comme γ est supposé irréductible, alors u est cyclique pour γ et donc $H = \{\gamma(f)u\colon f \in L_1^\mu(G)\}$. Considérons $I = \{f \in L_1^\mu(G)\colon \gamma(f)u = 0\}$. L'ensemble I est un idéal à gauche de $L_1^\mu(G)$ qui contient J. Il existe alors Q une application linéaire de $\mathscr{H}_{\pi_1}^\mu$ dans l'espace H, tel que:

$$Q \circ \pi_1(f) = \gamma(f) \circ Q, \quad \text{pour tout } f \in L_1^\mu(G).$$

Notons $N = \mathrm{Ker}(Q)$ et soit $\mathscr{N}$ le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}_{\pi_1}$ invariant par π_1 et contenant N. D'après la proposition 3.4 on a: $N = \mathscr{N} \cap \mathscr{H}_{\pi_1}^\mu$.

Notons $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ la représentation unitaire continue de G obtenue de la représentation $(\pi_1, \mathscr{H}_{\pi_1})$ par passage au quotient par $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{H}_{\pi_1}$.

On a: $\mathscr{H}_\pi^\mu = \mathscr{H}_{\pi_1}^\mu/N$ et Q passe au quotient et nous permet d'obtenir un isomorphisme T de l'espace $\mathscr{H}_\pi^\mu$ sur l'espace H, vérifiant:

$$\gamma(f) = T \circ \pi^\mu(f) \circ T^{-1}, \quad \text{pour tout } f \in L_1^\mu(G).$$

Il résulte en vertu de la proposition 3.5, que la représentation $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ est irréductible. De plus, pour tout $x \in G$, on a:

$$\Psi(x) = T \circ \Psi_\pi(x) \circ T^{-1}.$$

Etant donné que π^μ et γ sont deux $*$-représentations irréductibles de $L_1^\mu(G)$, il résulte en vertu de la proposition 3.8, qu'il existe une constante, $c > 0$ telle que $c \cdot T$ soit un isomorphisme unitaire de l'espace $\mathscr{H}_\pi^\mu$ sur l'espace H. Ainsi Ψ et Ψ_π sont deux fonctions μ-sphériques équivalentes.

Pour l'unicité de la classe de π, il suffit de voir que si $(\sigma_i, \mathscr{H}_{\sigma_i})$ où $i = 1, 2$ sont des r.u.c. de G irréductibles telles que pour chaque $i = 1, 2$, il existe S_i un isomorphisme unitaire de H sur $\mathscr{H}_{\sigma_i}^\mu$, vérifiant:

$$\gamma(f) = S_i^{-1} \circ \sigma_i^\mu \circ S_i, \quad \text{pour tout } f \in L_1^\mu(G);$$

alors, pour toute fonction $f \in L_1(G)$, on a:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1(f) S_1 u \mid S_1 u \rangle &= \langle \sigma_1^\mu(f^\mu) S_1 u \mid S_1 u \rangle \\ &= \langle \gamma(f^\mu) u \mid u \rangle \\ &= \langle \sigma_2(f) S_2 u \mid S_2 u \rangle. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $x \in G$, on a: $\langle \sigma_1(x) S_1 u \mid S_1 u \rangle = \langle \sigma_2(x) S_2 u \mid S_2 u \rangle$. Il en résulte que $(\sigma_1, \mathscr{H}_{\sigma_1})$ et $(\sigma_2, \mathscr{H}_{\sigma_2})$ sont deux représentations de G, unitairement équivalentes.

REMARQUE. Le theorème 3.10 reste vrai si on remplace l'hypothèse (iii) par l'hypothèse (iii)′ suivante:
(iii)′ $\mathrm{Tr}(\langle f^* * f, \Psi \rangle) \geqslant 0$ pour tout $f \in L_1(G)$.

References

[A, B] Mohamed Akkouchi et Allal Bakali, *Une généralisation des pairs de Guelfand*, dans le B.U.M.I. (7) 6-B (1992), 795–822.

[Ba] A. Bakali, *Analyse harmonique sur les groupes ax + b matriciels*. Thèse d'etat. Université deNancy I. 1984.

[D, M] M. Duflo et C. C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group. *Journal of functional analysis*, 21, 209–243 (1976).

[E] P. Eymard, *On the Fourier transform for the ax + b group*. Proceed. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. XXXV, Part 2, 379–386 (1979).

[E, T] P. Eymard et M. Terp, *La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe ax + b d'un corps local*. L.N.M. no. 739.

[Fa] J. Faraut, Analyse harmonique sur les espaces Riemanniens symétriques de rang un. *Cours C.I.M.P.A.*, Univ. de Nancy I (1980).

[Gaa] S. A. Gaal, *Linear analysis and representation theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Ga-Va] R. Gangolli et V. S. Varadarajan, *Harmonic Analysis of Spherical functions on real Reductive Groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Go] R. Godement, A Theory of Spherical Functions I. *Trans. Am. Math. Soc.* 73, 496–536 (1952).

[He-Ro] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*. Vol. I. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[Ri] D. Rider, Central idempotent measures on unitary groups. *Can. J. Math.*, Vol. XXII, No. 4, 1970, pp. 719–725.

[Ru] W. Rudin, *Fourier analysis on groups* (Interscience, New York, 1962).

[Wa] G. Warner, *Harmonic analysis on Semi-simple Lie Groups I–II*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.