

# COMPOSITIO MATHEMATICA

JOACHIM YAMÉOGO

**Décomposition cellulaire de variétés paramétrant des idéaux homogènes de  $\mathbb{C}[[x, y]]$ . Incidence des cellules I**

*Compositio Mathematica*, tome 90, n° 1 (1994), p. 81-98

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1994\\_\\_90\\_1\\_81\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__90_1_81_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Décomposition cellulaire de variétés paramétrant des idéaux homogènes de $\mathbb{C}[[x, y]]$ . Incidence des cellules I

JOACHIM YAMÉOGO

*Université de Nice-Sophia Antipolis, Mathématiques, Parc Valrose 06034 Nice, France*

Received 24 February 1992; accepted in final form 8 December 1992

### Introduction

Une fonction de Hilbert  $T = (1, 2, \dots, t_i, \dots, t_j, 0, 0, \dots)$  étant donnée, la famille  $G_T$  des idéaux homogènes de  $\mathbb{C}[[x, y]]$  ayant pour fonction de Hilbert  $T$ , a une structure de variété irréductible, lisse et compacte ([I]). Pour  $n = \sum t_i$ ,  $G_T$  est un sous-schéma fermé de  $\text{Hilb}^n \mathbb{C}[[x, y]]$ , le schéma de Hilbert paramétrant les “ $n$ -points” du plan  $\mathbb{C}^2$ , ayant pour support l’origine. Ces variétés  $G_T$  ont été étudiées par A. Iarrobino ([I]) dans le cadre de la description de  $\text{Hilb}^n \mathbb{C}[[x, y]]$ .

Dans [Gö], L. Göttsche, à l’aide de méthodes de Ellingsrud-Strømme et notamment du théorème de Bialynicki-Birula, décrit une décomposition cellulaire de  $G_T$ , lui permettant de calculer ses nombres de Betti. Dans ce travail, nous nous intéressons à l’incidence des cellules de la décomposition cellulaire de Göttsche. Plus précisément, on voudrait répondre aux questions suivantes:

1. La décomposition cellulaire vérifie-t-elle la condition de frontière?
2. Trouver des conditions numériques nécessaires et/ou suffisantes pour qu’étant données deux cellules  $U$  et  $U'$ , on ait:

$$\begin{aligned} i_1: U' &\subset \bar{U} \text{ (incidence forte)} \\ i_2: U' \cap \bar{U} &\neq \emptyset \text{ (incidence faible)}. \end{aligned}$$

A la première question nous répondons par la négative en donnant un exemple (§ 4.1) où la condition de frontière n’est pas satisfaite. Ceci explique que l’on s’intéresse à trouver aussi des conditions pour l’incidence faible  $i_2$ .

Pour la deuxième question, nous donnons une première condition nécessaire.

Notre idée est de réinterpréter la décomposition cellulaire de Göttsche. En effet, on montre que les cellules décrites par Göttsche ne sont autres que les images inverses des produits de cellules de Schubert par le plongement naturel de  $G_T$  dans un produit de variétés Grassmanniennes (Proposition 2.8). Ces cellules de  $G_T$  sont également les strates de la stratification par l’escalier, dont

on peut voir (Proposition 2.6), sans recourir au théorème de Bialynicki-Birula, qu'elles sont isomorphes à des espaces affines (pour la technique des escaliers, voir par exemple [Br-2] ou [Br-Ga]); on observe au passage que cette stratification dépend uniquement du choix d'une direction dans  $\mathbb{C}^2$  (Proposition 1.2.7).

Il s'ensuit notre première condition numérique nécessaire (Théorème 3.2) pour les incidences  $i_1$  et  $i_2$ , qui exprime simplement que, par continuité, si deux strates sont incidentes, les produits de cellules de Schubert contenant leurs images sont aussi incidentes.

Pour compléter la description de cette première condition nécessaire à l'incidence, nous donnons des exemples (§ 4) montrant que cette condition n'est ni suffisante pour l'incidence forte  $i_1^-$ , ni même pour l'incidence faible  $i_2$ .

En fait (§ 1), on interprète l'escalier d'un sous-schéma ponctuel comme la suite des colongueurs de ses intersections avec une famille de sous-schémas ponctuels fixes. Et pour terminer, on montre (Prop. 5.5) qu'en élargissant cette famille, on ne parvient pas à raffiner la condition nécessaire ci-dessus.

La condition numérique du Théorème 3.2 ne suffisant pas à garantir les incidences  $i_1$  ou  $i_2$ , on est amené à chercher des conditions suffisantes pour l'incidence.

Ceci fait l'objet d'un autre travail ([Y-2]). Dans [Y-2], nous décrivons une condition suffisante (testable sur les escaliers associés aux cellules) pour l'incidence forte, lorsque les codimensions des deux cellules  $U$  et  $U'$  diffèrent de 1.

Plan du travail:

§1 Rappels

§1 Fonctions-escaliers

§2 Stratification par l'escalier

§3 Les cellules de Göttsche en termes d'escaliers. Condition nécessaire à l'incidence

§4 Exemples

§5 Fonctions-escaliers généralisés.

## 0. Rappels

Soit  $\mathcal{R} = \mathbb{C}[[x, y]]$ , l'anneau des séries formelles à deux variables à coefficients dans le corps des complexes, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ . Pour un entier naturel  $n$  fixé, on note  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$ , le schéma de Hilbert paramétrant les " $n$ -points" du plan ayant pour support l'origine. Muni de sa structure réduite,  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$  s'identifie à l'ensemble des idéaux de colongueur  $n$  de  $\mathcal{R}$ :  $\{I \subset \mathcal{R} / \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/I) = n\}$ .

Le schéma  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$  a été étudié par J. Briançon [Br-1], M. Granger [Gr], A. Iarrobino [I], à l'aide de la stratification par la fonction de Hilbert.

**DÉFINITIONS 0.1.** (i) *Etant donné un idéal  $I$  de  $\mathcal{R}$ , on appelle fonction de Hilbert de  $I$  (on dit aussi fonction de Hilbert de  $(\mathcal{R}/I)$ ) la suite d'entiers naturels  $T = T(I) = (t_0, t_1, \dots, t_i, \dots)$ , où  $t_i = \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{m}^i/(\mathfrak{m}^i \cap I + \mathfrak{m}^{i+1})]$ .*

(ii) *On appelle ordre de la fonction de Hilbert  $T$ , l'entier  $v(T) = \inf\{i/t_i \neq i + 1\}$ .*

(iii) *On appelle colongueur de l'idéal  $I$ , la dimension, lorsqu'elle est finie, de  $(\mathcal{R}/I)$ , considéré comme  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.*

**REMARQUE 0.2** (voir par exemple [Br-1] Cor. I.1.1). Pour un idéal  $I$  de colongueur finie  $n = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/I)$ , on a  $t_i = 0$  pour  $i \geq n$ , et  $\sum_{i=0}^n t_i = n$ .

La stratification de  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$  par la fonction de Hilbert (étudiée dans [Br-1], [Gr], [I]), consiste à décrire, pour une fonction de Hilbert  $T$  fixée, l'ensemble  $Z_T = \{I \subset \mathcal{R}/T(I) = T\}$ . On montre ([Br-1] Th. III.3.1 ou [I]) que  $Z_T$  est un sous-schéma localement fermé, lisse, irréductible de dimension  $\dim Z_T = n - \sum_{i \geq v(T)} (t_{i-1} - t_i)(t_i - t_{i+1})/2$  dans  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$ .

Dans son étude des schémas  $Z_T$ , A. Iarrobino introduit dans [I] les schémas  $G_T$  paramétrant les idéaux homogènes ayant pour fonction de Hilbert  $T$ :  $G_T = \{I \text{ homogène}/T(I) = T\}$ . Il montre ([I]), que  $G_T$  est un sous-schéma fermé de  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$ , irréductible, lisse, compact, de dimension

$$\dim G_T = \sum_{i \geq v(T)} (t_{i-1} - t_i + 1)(t_i - t_{i+1}).$$

*Décomposition cellulaire de  $Z_T$  (resp.  $G_T$ ) d'après L. Götsche*

Dans un papier récent ([Gö]), L. Götsche décrit une décomposition cellulaire des schémas  $Z_T$  et  $G_T$ , lui permettant de calculer explicitement leurs nombres de Betti. Nous rappelons ici les grandes lignes de cette description. Nous montrerons par la suite, que ces cellules s'identifient aux strates associées à une fonction semi-continue supérieure: la fonction-escalier, dont nous nous servirons pour étudier l'incidence des cellules.

L'outil essentiel dans la décomposition cellulaire décrite par L. Götsche est le théorème suivant, de Bialynicki-Birula ([BB]):

Soit  $X$  une variété projective lisse sur un corps  $k$ , munie d'une  $k^*$ -action. Si  $x \in X$  est un point fixe sous cette action, on a alors une  $k^*$ -action induite sur l'espace tangent  $T_{X,x}$  en  $x$ . Soit  $(T_{X,x})^+$  la partie de  $T_{X,x}$  où les poids de la  $k^*$ -action sont positifs, on a:

**THÉORÈME 0.3:** (Bialynicki-Birula, [BB]). *Soit  $X$  une variété projective lisse sur un corps  $k$ , munie d'une  $k^*$ -action dont l'ensemble des points fixes  $\{x_1, \dots, x_n\}$*

est fini. Soit  $X_i := \{x \in X / \lim_{t \rightarrow 0}(tx) = x_i\}$ . Alors

(1)  $X$  admet une décomposition cellulaire dont les cellules sont les  $X_i$ .

(2)  $T_{X_i, x_i} = (T_{X, x_i})^+$ .

On a une  $\mathbb{C}^*$ -action sur  $Z_T$  (resp.  $G_T$ ) induite par l'action sur  $\mathcal{R} = \mathbb{C}[[x, y]]$  définie par:  $t.y = t^{w_1}y$ ,  $t.x = t^{w_2}x$ , avec  $w_2 > w_1$  et  $nw_2 < (n + 1)w_1$  (par exemple  $w_2 = 3n + 2$ ,  $w_1 = 3n + 1$ ,  $n$  désignant la colongueur des idéaux paramétrés par ces schémas). On montre alors:

LEMME 0.4. *Les points fixes de  $Z_T$  (resp.  $G_T$ ) sous la  $\mathbb{C}^*$ -action décrite plus haut sont les idéaux monômiaux ayant pour fonction de Hilbert  $T$ . L'ensemble de ces points fixes est fini.*

Dans sa décomposition cellulaire, L. Göttsche associe à tout idéal monomial  $M$  ayant pour fonction de Hilbert  $T$ , une partition  $b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{r-1} > b_r = 0$  telle que  $\sum_{i=0}^{r-1} b_i = n$ . De même à une partition  $P \equiv (b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{r-1} > b_r = 0)$  telle que  $\sum_{i=0}^{r-1} b_i = n$  est associée l'idéal monomial  $M_P = (y^{b_0}, y^{b_1}x, \dots, y^{b_i}x^i, \dots, x^r)$ .

THÉORÈME 0.5: (L. Göttsche [Gö] Th. 2.1). *Les schémas  $Z_T$  et  $G_T$  admettent une décomposition cellulaire dans laquelle les cellules sont les sous-espaces  $U_P = \{I \in Z_T \text{ (resp. } G_T) / \lim_{t \rightarrow 0}(t.I) = M_P\}$ .*

Pour les formules explicites donnant les nombres de Betti  $b_{2,d}$  en fonction des partitions  $P \equiv (b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{r-1} > b_r = 0)$ , voir [Gö] Th.2.1.

### 1. Fonctions-escaliers

On décrit dans ce paragraphe, des fonctions semi-continues supérieurement sur  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$ : les fonctions-escaliers. Ces fonctions permettent d'interpréter l'escalier d'un sous-schéma ponctuel comme la suite des colongueurs de ses intersections avec une famille de sous-schémas ponctuels fixes.

#### 1.1. Rappels sur les escaliers en dimension 2

DÉFINITION 1.1.1. *On appelle escalier en dimension 2, un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}^2$ ,  $E = \{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s)\}$  tel que  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s$  et  $\beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_s$ .*

*Escalier canonique d'un idéal de  $\mathbb{C}[[x, y]]$*

On définit un ordre total sur  $\mathbb{N}^2$  en posant:

$$(i, j) \leq (i', j') \Leftrightarrow \begin{cases} i + j < i' + j & \text{ou} \\ [i + j = i' + j'] \Rightarrow [i \leq i'] \end{cases}$$

**DÉFINITION 1.1.2.** Soit  $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ ,  $f = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} x^i y^j$ , on appelle *exposant privilégié* de  $f$ , noté  $\exp(f)$ , le plus petit élément de son diagramme de Newton suivant l'ordre ci-dessus.

Autrement dit  $\exp(f) = \inf\{(i, j) / a_{ij} \neq 0\}$ .

*Propriétés:* pour  $f$  et  $g \in \mathbb{C}[[x, y]]$ , on a:

$$- \exp(f + g) \geq \inf\{\exp(f), \exp(g)\}$$

$$- \exp(fg) = \exp(f) + \exp(g).$$

Soit  $I \subset \mathbb{C}[[x, y]]$  un idéal, on peut considérer  $\text{Exp}(I)$ , l'ensemble des exposants privilégiés des éléments de  $I$ . On montre qu'il existe un sous-ensemble fini  $E(I) \subset \mathbb{N}^2$  minimum (pour l'inclusion) parmi les sous-ensembles  $E$  de  $\mathbb{N}^2$  vérifiant  $E + \mathbb{N}^2 = \text{Exp}(I)$ .

On a  $E(I) = \{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s)\}$ ,  $(\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s, \beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_s)$ .  $E(I)$  est appelé *escalier canonique* (ou *escalier diagonal*) de l'idéal  $I$ .

On montre (voir par exemple [Br-2], Th.II, p. 73) que si un idéal  $I$  admet pour escalier canonique  $E(I) = \{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s)\}$ , il existe et il est unique, un système de générateurs  $(f_0, f_1, \dots, f_s)$  appelé *base standard* de  $I$ , telle que

$$f_p = x^{\alpha_p} y^{\beta_p} + \left( \sum_{i+j=\alpha_p+\beta_p, i/\alpha_p} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i+j<\alpha_p+\beta_p} a_{ij} x^i y^j \right)_{(i,j) \in \Delta(I)}$$

(où  $\Delta(I) = \mathbb{N}^2 - \text{Exp}(I)$ ).

### 1.2. Fonctions-escaliers

**DÉFINITION 1.2.1.** On dit que  $L \in \mathbb{C}[[x, y]]$  est *curvilinéaire* si  $L = ax + by + g$ , avec  $(ax + by) \neq 0$  et  $g \in m^2$ .

Pour deux entiers naturels  $i$  et  $j$ , on pose  $M_{ij}(L) = m^{i+j+1} + L^i m^j$  où  $L$  désigne un curvilinéaire fixé et  $m$  l'idéal maximal de  $\mathcal{R}$ . L'idéal  $M_{ij}(L)$  définit un sous-schéma  $X_{ij}(L)$  ayant pour support l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , de longueur  $n_{ij} = (i + j)(i + j + 1)/2 + i$ .

**REMARQUE 1.2.3.** Lorsque  $(i, j)$  parcourt  $\mathbb{N}^2$ , les sous-schémas  $X_{ij}(L)$  définis par les idéaux  $M_{ij}(L)$ , forment une famille filtrante croissante (suivant l'ordre diagonal sur  $\mathbb{N}^2$  défini au §1.1). De plus, si  $(i, j)$  et  $(i', j')$ , sont deux couples d'entiers consécutifs avec  $(i, j) < (i', j')$ , on a longueur  $(X_{i'j'}(L)) = \text{longueur}(X_{ij}(L)) + 1$ .

**DÉFINITION 1.2.4.** Si  $I$  désigne un idéal de  $\mathcal{R}$ , définissant un sous-schéma  $X$

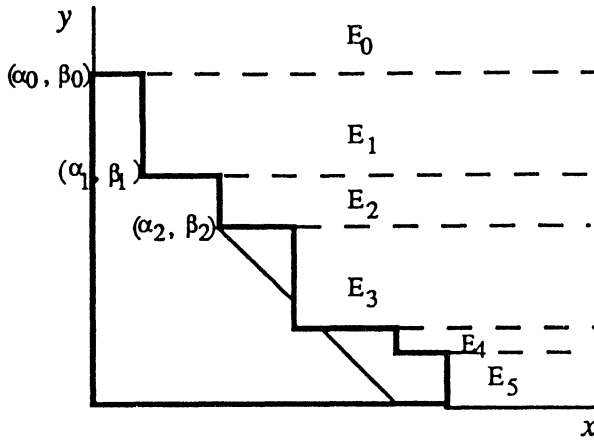


Fig. 1.1.3. Les monômes apparaissant dans l'expression de  $f_2$ , sont, d'une part ceux situés sur la diagonale  $\alpha_2 + \beta_2$ , en dessous de  $x^2 y^{\beta_2}$ , et en dehors du cadran  $E_3$ , et d'autre part les monômes de degré strictement supérieur à  $\alpha_2 + \beta_2$ , situés en dehors des cadrans  $E_0, E_1, \dots, E_5$ .

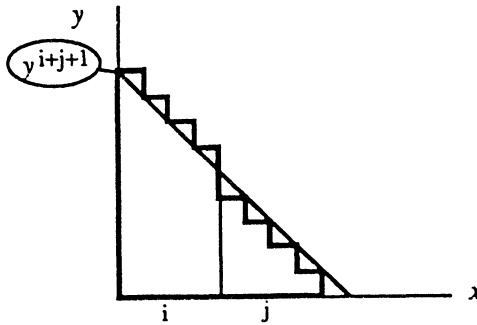


Fig. 1.2.2. Escalier canonique de  $M_{ij}(x) = m^{i-j-1} + x^i m^j$ .

de longueur  $n$ , à support l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , on appelle fonction-escalier dans la direction de  $L$ , la suite (suivant l'ordre diagonal sur  $\mathbb{N}^2$  défini au §1.1)  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  des applications

$$\mathcal{F}_{ij}: \text{Hilb}^n \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$I \mapsto \text{longueur}(X \cap X_{ij}(L)).$$

EXEMPLE 1.2.5. Si l'on considère la famille des idéaux  $I = (y^2 + ax^2, xy + bx^2, x^3)$ ,  $a$  et  $b \in \mathbb{C}$ , les idéaux  $I$  sont de colongueur 4, et suivant les directions  $L = x$  ou  $L = y$ , on obtient les fonctions-escaliers suivantes pour ces idéaux:

$(i, j)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)	(0, 3)	(1, 2)	...
$L = x, \forall I, \mathcal{F}(I) =$	0	1	2	3	3	3	4	4	...
$L = y, a \neq 0, \mathcal{F}(I) =$	0	1	2	3	3	3	4	4	...
$L = y, a = 0, \mathcal{F}(I) =$	0	1	2	3	3	4	4	4	...
$L = y, a = b = 0, \mathcal{F}(I) =$	0	1	2	3	4	4	4	4	...

**PROPOSITION 1.2.6.** *La fonction-escalier dans la direction d'un curvilinéaire fixé, est semi-continue supérieurement sur  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$ .*

*Preuve.* Il suffit de montrer que l'application, qui à  $X \in \text{Hilb}^n \mathcal{R}$  associe  $\text{longueur}(X \cap X_{ij}(L))$  est semi-continue supérieurement.

Soit  $I$  l'idéal définissant  $X$ , on a

$$\text{longueur}(X \cap X_{ij}(L)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/I + M_{ij}(L))$$

Pour un idéal  $I$  de colongueur  $n$ , on peut considérer  $(I + M_{ij}(L)/\mathfrak{m}^n)$  comme un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{R}/\mathfrak{m}^n)$ .

La condition  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/[I + M_{ij}(L)]) \geq m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) est équivalente à

$$\dim_{\mathbb{C}}(I + M_{ij}(L)/\mathfrak{m}^n) \leq n(n + 1)/2 - m,$$

ce qui est une condition fermée. □

**PROPOSITION 1.2.7.** *L'espace des fonctions-escaliers est isomorphe à  $\mathbb{P}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .*

*Preuve.* Il nous suffit de montrer que deux curvilinéaires tangents  $L$  et  $K$  définissent la même fonction-escalier. Soient donc  $L$  et  $K$  deux curvilinéaires tangents, il s'agit de vérifier que l'on a  $M_{ij}(L) = M_{ij}(K)$ .  $L$  et  $K$  étant tangents, on a  $L \equiv K$  (modulo  $\mathfrak{m}^2$ ) c'est-à-dire  $L = u + f$ ;  $K = u + g$ , où  $u$  est une forme linéaire,  $f$  et  $g \in \mathfrak{m}^2$ .

Par définition,  $M_{ij}(L) = \mathfrak{m}^{i+j+1} + L^i \mathfrak{m}^j$ ;  $M_{ij}(K) = \mathfrak{m}^{i+j+1} + K^i \mathfrak{m}^j$ .

De ces conditions on voit que  $M_{ij}(L) \subset \mathfrak{m}^{i+j+1} + u^i \mathfrak{m}^j \subset \mathfrak{m}^{i+j+1} + L^i \mathfrak{m}^j = M_{ij}(L)$ ,  $M_{ij}(K) \subset \mathfrak{m}^{i+j+1} + u^i \mathfrak{m}^j \subset \mathfrak{m}^{i+j+1} + K^i \mathfrak{m}^j = M_{ij}(K)$ . On a donc  $M_{ij}(L) = M_{ij}(K)$ . D'où, deux curvilinéaires tangents  $L$  et  $K$  définissent la même fonction-escalier. □

## 2. Strates de $G_T$ associées aux escaliers

Nous supposons toujours  $\mathbb{N}^2$  muni de l'ordre total défini au §1.1.

La fonction-escalier  $\mathcal{F}$  dans la direction de  $L$  définit naturellement une stratification de  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$ .



Il suffit, pour une suite indexée par  $\mathbb{N}^2$ ,  $\mathcal{S} = (s_{ij})$  de valeurs possibles de  $\mathcal{F}$  fixée, de considérer le sous-schéma localement fermé  $V(\mathcal{S}, L)$  de  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$  paramétrant les idéaux  $I$  tels que  $\mathcal{F}(I) = \mathcal{S}$ . Nous supposons le schéma  $V(\mathcal{S}, L)$  muni de sa structure réduite.

$\text{Hilb}^n \mathcal{R}$  est alors réunion disjointe de tels schémas. On identifie ici, les strates associées à l'escalier, comme les sous-schémas localement fermés  $V(\mathcal{S}, L)$ , et aussi comme les images inverses des produits de cellules de Schubert par le plongement naturel de  $G_T$  dans un produit de variétés Grassmanniennes.

Au §3, nous identifierons les strates  $V(\mathcal{S}, L)$  aux cellules décrites par Göttsche.

**DÉFINITION 2.1.** *Etant donné un escalier  $E = \{(0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p), \dots, (\alpha_s, 0)\}$ , on dit que  $E$  a pour fonction de Hilbert  $T$  si l'idéal monômial  $M_E = (x^{\alpha_p} y^{\beta_p})_{0 \leq p \leq s}$  a pour fonction de Hilbert  $T$ .*

**REMARQUE 2.2.** *L'idéal monômial  $M_E = (x^{\alpha_p} y^{\beta_p})_{0 \leq p \leq s}$  a pour escalier canonique  $E$ . Ce qui n'aurait pas été le cas si nous remplacions dans la définition,  $M_E$  par l'idéal  $(u^{\alpha_p} v^{\beta_p})_{0 \leq p \leq s}$  où  $(u, v)$  est un système de coordonnées quelconque de  $\mathbb{C}[[x, y]]$ .*

Pour un escalier  $E$  fixé ayant pour fonction de Hilbert  $T$ , on note  $V(E)$  le sous-schéma localement fermé de  $G_T$ , paramétrant les idéaux homogènes de  $\mathbb{C}[[x, y]]$ , ayant pour escalier canonique  $E$ .  $V(E)$  étant supposé muni de sa structure réduite.

**LEMME 2.3.** *Pour un idéal  $I$  de  $\mathcal{R}$ , soit  $E_c(I)$  son escalier canonique et  $\mathcal{F}(I)$  sa fonction-escalier dans la direction de  $x$ .*

*Alors on a  $\text{Exp}(I) = \{(i, j) / \mathcal{F}(I)_{(i+1, j-1)} - \mathcal{F}(I)_{(i, j)} = 0\} \cup \{(i, 0) / \mathcal{F}(I)_{(0, i+1)} - \mathcal{F}(I)_{(i, 0)} = 0\}$ .*

*Preuve.* Rappelons que  $E_c(I)$  est minimum parmi les sous-ensembles  $E \subset \mathbb{N}^2$  vérifiant  $E + \mathbb{N}^2 = \text{Exp}(I)$ .

Soit  $e(I) = \{(i, j) / \mathcal{F}(I)_{(i+1, j-1)} - \mathcal{F}(I)_{(i, j)} = 0\} \cup \{(i, 0) / \mathcal{F}(I)_{(0, i+1)} - \mathcal{F}(I)_{(i, 0)} = 0\}$ .

(a) Supposons  $j \geq 1$  et  $\mathcal{F}(I)_{(i+1, j-1)} - \mathcal{F}(I)_{(i, j)} = 0$ . Alors  $m^{i+j+1} + x^{i+1}m^{j-1} + I = m^{i+j+1} + x^i m^j + I$ , donc  $x^i y^j \equiv I + x^{i+1}m^{j-1}$ , (modulo  $m^{i+j+1}$ ), d'où  $(i, j) \in \text{Exp}(I)$ .

(b) Lorsque  $j = 0$ , on prouve de façon analogue à (a) que  $(i, 0) \in \text{Exp}(I)$ . En conclusion, nous avons  $e(I) \subset \text{Exp}(I)$ .

Réciproquement supposons  $(\alpha, \beta) \in \text{Exp}(I)$  et  $\beta \neq 0$ , alors  $\mathcal{F}(I)_{(\alpha+1, \beta-1)} - \mathcal{F}(I)_{(\alpha, \beta)} = 0$ , puisque  $m^{\alpha+\beta+1} + I + x^{\alpha+1}m^{\beta-1} = m^{\alpha+\beta+1} + I + x^\alpha m^\beta$  du fait que par hypothèse il existe  $f \in I$  tel que  $(f - x^\alpha y^\beta) \in (x^{\alpha+1}m^{\beta-1} + m^{\alpha+\beta+1})$ . De façon analogue, si  $(\alpha, 0) \in \text{Exp}(I)$ , alors  $\mathcal{F}(I)_{(0, \alpha+1)} - \mathcal{F}(I)_{(\alpha, 0)} = 0$ . Finalement nous avons  $e(I) = \text{Exp}(I)$ .

**PROPOSITION 2.4.** *Soit  $E$  un escalier ayant pour fonction de Hilbert  $T$ ,  $M_E$  l'idéal monômial associé; soit  $\mathcal{F}_E$  la fonction-escalier de l'idéal  $M_E$  dans la direction  $x$ , on a alors  $V(E) = V(\mathcal{F}_E, x)$ .*

*Preuve.* D'après le Lemme 2.3, si un idéal  $I$  a pour fonction-escalier  $\mathcal{F}_E$  dans la direction de  $x$ , on a  $\text{Exp}(I) = \text{Exp}(M_E)$ , d'où  $V(\mathcal{F}_E, x) \subset V(E)$ . De même, si  $J$  a pour escalier canonique  $E$ , on sait que  $\text{Exp}(J) = E + \mathbb{N}^2$ , et toujours d'après le Lemme 2.3.

$$\text{Exp}(J) = \{(i,j)/\mathcal{F}(J)_{(i+1,j-1)} - \mathcal{F}(J)_{(i,j)} = 0\} \cup \{(i,0)/\mathcal{F}(J)_{(0,i+1)} - \mathcal{F}(J)_{(i,0)} = 0\},$$

ce qui nous donne de façon unique la fonction-escalier  $\mathcal{F}_E$  de  $J$ . D'où  $V(E) \subset V(\mathcal{F}_E, x)$ . □

On peut alors définir:

**DÉFINITION 2.5.**  $\mathbb{N}^2$  étant muni de l'ordre total ci-dessus (§1.1), soit  $E$  un escalier, d'idéal monômial associé  $M_E$ , on appelle suite caractéristique de la strate  $V(E)$ , notée  $\mathcal{L}_E$ , la suite des entiers naturels donnée par la fonction escalier, dans la direction de  $x$ , de l'idéal  $M_E$ .

**PROPOSITION 2.6.** *Soit  $E$  un escalier ayant pour fonction de Hilbert  $T$ , alors le sous-schéma localement fermé de  $G_T$ ,  $V(E) = \{I/\text{l'escalier canonique de } I \text{ est } E\}$  est isomorphe à un espace affine.*

Avant de donner la preuve de la proposition, remarquons que si un idéal homogène  $I$  a pour escalier canonique  $E = \{(0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p), \dots, (\alpha_s, 0)\}$  alors l'escalier canonique de l'idéal  $(I : x)$  est de la forme  $E_1 = \{(0, \beta_0), (\alpha_1 - 1, \beta_1), \dots, (\alpha_p - 1, \beta_p), \dots, (\alpha_s - 1, 0)\}$  où on omet le terme  $(0, \beta_0)$  lorsque  $\alpha_1 = 1$  (voir par exemple [Y-1], lemme 1.5).

De plus, on a un morphisme  $\tau: V(E) \rightarrow V(E_1)$ , défini par:  $I \mapsto (I : x)$ .

*Preuve de la proposition.* A l'aide du théorème de division ([Br-2], Th. II, p. 73), on montre que le morphisme  $\tau$  ci-dessus est une fibration triviale à fibre isomorphe à un espace affine (voir [Y-1], Prop. 1.7).

La dimension de la fibre de  $\tau$  est égale à  $\#\{p/\alpha_p + \beta_p \leq \beta_0 + 1, \alpha_p + \beta_{p-1} > \beta_0 + 1\}$ .

En effet, supposons  $\alpha_1 > 1$  (le cas  $\alpha_1 = 1$  se traite de façon analogue): soit alors  $(g_0, g_1, \dots, g_s)$  la base standard d'un idéal  $J \in V(E_1)$ .

Les idéaux  $I$  dans la fibre  $\tau^{-1}(J)$  sont de la forme  $I = (g_0 + q_1(y)g_1 + \dots + q_s(y)g_s, xg_1, \dots, xg_s)$ , les  $q_p$  étant des polynômes en  $y$  de degré inférieur à  $\beta_{p-1} - \beta_p$  (voir [Y-1], Prop 1.7.).  $I$  étant homogène, on doit avoir  $\text{degré}(q_p) + \text{degré}(g_p) = \beta_0$  (le degré de  $g_0$ ). En fait,  $q_p(y) = ay^{\beta_0 - \alpha_p - \beta_p - 1} (a \in \mathbb{C})$ .

Après éventuellement division de  $g_0 + q_1(y)g_1 + \dots + q_s(y)g_s$  par  $xg_1, \dots, xg_s$ , on vérifie que l'ensemble des indices  $p$  qui satisfont à l'égalité  $\text{degré}(q_p) + \text{degré}(g_p) = \beta_0$  est décrit par  $\{p/\alpha_p + \beta_p \leq \beta_0 + 1, \alpha_p + \beta_{p-1} > \beta_0 + 1\}$ .

Pour conclure, on montre que  $V(E)$  est isomorphe à un espace affine en raisonnant par récurrence sur les morphismes  $\tau_l: (i: x^{l-1}) \mapsto (I: x^l)$  ( $1 \leq l \leq \alpha_s - 1, \tau_1 = \tau$ ).

**COROLLAIRE 2.7.** (i) *La variété  $G_T$  admet une décomposition cellulaire dans laquelle les cellules sont les strates  $V(E)$ .*

(ii) *La stratification par la fonction-escalier définit sur  $G_T$ , une famille de décomposition cellulaires paramétrée par  $P_C^1$ .*

(iii) *L'ensemble des classes d'équivalence rationnelle  $[\overline{V(E)}]$  forme une  $\mathbb{Z}$ -base canonique du groupe de Chow  $\text{CH}(G_T)$ .*

*Preuve.* (i) est une conséquence directe de la Proposition 2.6.

(ii) La stratification de  $G_T$  par la fonction-escalier dans la direction d'un curvilinéaire  $L$  donnée définit une décomposition cellulaire de  $G_T$  (Proposition 2.4 et Proposition 2.6). (ii) Découle alors du fait que l'espace des fonctions-escaliers est isomorphe à  $P_C^1$  (Proposition 1.2.7).

Enfin, lorsque  $X$  est une variété algébrique complexe admettant une décomposition cellulaire, on sait que l'ensemble des classes d'équivalence rationnelle des adhérences des cellules forment une  $\mathbb{Z}$ -base du groupe de Chow,  $\text{CH}(X)$  (voir [Fu], Exemple 1.9.1 et chap. 19). (iii) est donc une conséquence de (i) et (ii).

*$G_T$  vu comme sous-schéma fermé d'un produit de grassmanniennes*

Rappelons que si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $m + 1$ ,  $d$  un entier,  $0 \leq d \leq m$ , on note  $G(d + 1, m + 1)$  la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension  $d + 1$ .

Pour les questions géométriques il est préférable de voir  $G(d + 1, m + 1)$  comme la variété  $G_d(\mathbb{P}^m)$  des  $d$ -plans de  $\mathbb{P}^m$ .

On se fixe un drapeau de sous-espaces linéaires de  $\mathbb{P}^m$ ,  $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_m = \mathbb{P}^m$ .

Ce drapeau définit bien sûr une décomposition cellulaire de  $\mathbb{P}^m$ .

Etant donnée une suite d'entiers naturels  $a_0 < a_1 < \dots < a_d$  tels que  $a_d \leq m$ , on montre (voir [G-H]) que  $W(a_0, a_1, \dots, a_d) = \{L \in G_d(\mathbb{P}^m) / \dim(L \cap V_{a_i}) \geq i\}$  est une sous-variété fermée de  $G_d(\mathbb{P}^m)$  de dimension  $\sum_{i=0}^d a_i - i$  appelée variété de Schubert. La cellule de Schubert associée à la suite d'entiers naturels  $a_0 < a_1 < \dots < a_d$  étant  $W^0(a_0, a_1, \dots, a_d) = \{L \in G_d(\mathbb{P}^m) / \dim(L \cap V_{a_i}) = i\}$ .

Soit  $T = (t_0, t_1, \dots, t_v, t_{v+1}, \dots, t_q, 0)$ ,  $t_q \neq 0$ , une fonction de Hilbert d'ordre  $v$  ( $v = \inf\{i/t_i \neq i + 1\}$ ).

Etant donné un idéal  $I \subset \mathcal{R} = \mathbb{C}[[x, y]]$ , homogène, notons  $I_i$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $i$  contenu dans  $I$ ,  $\mathcal{R}_i$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $i$  de  $\mathcal{R}$ . On a  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_i = i + 1$  si  $I$  a pour fonction de Hilbert  $T$ ,  $\dim_{\mathbb{C}}(I_i) = i + 1 - t_i$ .

Considérons  $G(i + 1 - t_i, i + 1)$  la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $(i + 1 - t_i)$  de  $\mathcal{R}_i$ . On a un plongement naturel de  $G_T$  dans le produit de grassmanniennes  $\prod_{i=0}^q G_{(i+1-t_i, i+1)}$ , qui consiste tout simplement à associer à l'idéal  $I$ , la suite d'espaces vectoriels  $(I_i)_{v \leq i \leq q}$ .

**PROPOSITION 2.8.** *Soit  $E$  un escalier ayant pour fonction de Hilbert  $T$ , alors  $V(E)$  est la trace sur  $G_T$ , d'un produit de cellules de Schubert dans  $\prod_{i=0}^q G_{(i+1-t_i, i+1)}$ .*

*Preuve.* Prenons sur  $\mathcal{R}_i$  le drapeau  $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_i = \mathcal{R}_i$  où  $V_l = \langle x^l, x^{l-1}y, \dots, x^{i-l}y^l \rangle$ ,  $\dim V_l = l + 1$ . On a une décomposition cellulaire de  $\prod_{i=0}^q G_{(i+1-t_i, i+1)}$  en prenant des produits de cellules de Schubert,  $\prod_{i=0}^q W_i^0(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,i-t_i})$ , où  $W_i^0(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,i-t_i})$  est une cellule de Schubert de la grassmannienne  $G_{(i+1-t_i, i+1)}$ .

Considérons l'idéal monômial  $M_E$  associé à l'escalier  $E$ .

Soit  $\{(\alpha_0(i), \beta_0(i)), (\alpha_1(i), \beta_1(i)), \dots, (\alpha_{i-t_i}(i), \beta_{i-t_i}(i))\}$   $\beta_0(i) < \beta_1(i) < \dots < \beta_{i-t_i}$  l'ensemble des exposants privilégiés des monômes de degré  $i$  appartenant à  $M_E$ . On a alors  $\pi(M_E)$  qui appartient au produit de cellules de Schubert  $\prod_{i=0}^q W_i^0(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,i-t_i})$ , où  $a_{i,j} = \beta_j(i)$  ( $v \leq i \leq q, 0 \leq j \leq i - t_i$ ).

Par définition de l'escalier canonique d'un idéal, il est clair que deux idéaux  $I$  et  $I'$  ont même escalier canonique si et seulement si leurs images par le plongement  $\pi: G_T \hookrightarrow \prod_{i=0}^q G_{(i+1-t_i, i+1)}$  appartiennent à une même produit de cellules de Schubert.

Une direction  $L$  étant choisie, on a une décomposition cellulaire de  $\prod_{i=0}^q G_{(i+1-t_i, i+1)}$  relative à  $L$ , en prenant sur  $\mathcal{R}_i$  le drapeau  $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_i = \mathcal{R}_i$  où  $V_l = \langle L^l, L^{l-1}K, \dots, L^{i-l}K^l \rangle$ ,  $\dim V_l = l + 1$ , et  $K$  est une autre direction non tangente à  $L$ .

De façon équivalente à la Proposition 2.8, on a:

**PROPOSITION 2.9.** *Soit  $\prod_{i=0}^q W_i^0(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,i-t_i})$  un produit de cellules de Schubert dans  $\prod_{i=0}^q G_{(i+1-t_i, i+1)}$  relativement aux drapeaux ci-dessus, alors la trace sur  $G_T$  de ce produit de cellules de Schubert est une strate associée à un escalier  $E(L)$  si et seulement si l'idéal monômial  $(L^{i-a_{i,j}}K^{a_{i,j}})_{(v \leq i \leq q, 0 \leq j \leq i - t_i)}$  a pour fonction de Hilbert  $T$ .*

### 3. Les cellules de Göttsche en termes d'escaliers-condition nécessaire à l'incidence

Rappelons qu'à une partition  $P \equiv (b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{r-1} > b_r = 0)$  telle que

$\prod_{i=0}^r b_i = n$  est associée l'idéal monômial  $M_P = (y^{b_0}, y^{b_1}x, \dots, y^{b_i}x^i, \dots, x^r)$ .

On désigne par  $U_P$ , la cellule attachée à la partition  $P$ , via la  $\mathbb{C}^*$ -action:  $t.y = t^{w_1}y, t.x = t^{w_2}x. U_P = \{I \in Z_T \text{ (resp. } G_T) / \lim_{t \rightarrow 0} (t.I) = M_P\}$ .

Il est facile de voir qu'il y a bijection entre l'ensemble des partitions  $P \equiv (b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{r-1} > b_r = 0)$  telle que  $\sum_{i=0}^r b_i = n$  et l'ensemble des escaliers de colongueur  $n$ .

A un escalier  $E$  de colongueur  $n$  on associe la partition  $P \equiv (b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{r-1} > b_r = 0)$  où

$$b_i = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{M_E + (x^i)}{M_E + (x^{i+1})} \right), \quad M_E = (x^{\alpha_p} y^{\beta_p})_{0 \leq p \leq s}.$$

Fixons un escalier  $E$  de colongueur  $n$  et considérons la strate  $V(E) = \{I \subset \mathcal{R}, I \in Z_T \text{ (resp. } G_T) / \text{l'escalier canonique de } I \text{ est } E\}$ .

**PROPOSITION 3.1.** Soit  $U_{P_E} := \{I \subset \mathcal{R} / \lim_{t \rightarrow 0} (t.I) = M_E\}$ , alors on a  $U_{P_E} = V(E)$ .

*Preuve.* L'inclusion  $V(E) \subset U_{P_E}$  nous est assurée par les conditions  $w_2 > w_1$  et  $nw_2 < (n+1)w_1$ . En effet soit  $I \in Z_T$  (resp.  $G_T$ ) de base standard  $(f_0, f_1, \dots, f_s)$ , telle que

$$f_p = x^{\alpha_p} y^{\beta_p} + \left( \sum_{i+j=\alpha_p+\beta_p, i>\alpha_p} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i+j>\alpha_p+\beta_p} a_{ij} x^i y^j \right)_{(i,j) \in \Delta(I)}$$

(où  $\Delta(I) = \mathbb{N}^2 - \exp(I)$ ).

Les conditions  $w_2 > w_1$  et  $nw_2 < (n+1)w_1$  entraînent que l'on peut, dans l'expression de  $t.f_p$ , mettre en facteur  $t^{\alpha_p w_2 + \beta_p w_1}$ , on a alors  $\lim_{t \rightarrow 0} (t.f_p) = x^{\alpha_p} y^{\beta_p}$ , d'où  $\lim_{t \rightarrow 0} ((t.I) = M_E)$ , et l'inclusion  $V(E) \subset U_{P_E}$ .

Réciproquement si  $I \in U_{P_E}$ , la condition  $\lim_{t \rightarrow 0} (t.I) = M_E$  entraîne  $\exp(I) = E + \mathbb{N}^2$ . Les résultats de paragraphes §1 et §2 permettent d'énoncer le théorème donnant une première condition nécessaire à l'incidence.

**THÉORÈME 3.2.** Soient  $E$  et  $E'$  deux escaliers de suites caractéristiques  $\mathcal{L}_E$  et  $\mathcal{L}_{E'}$  respectivement. Alors, si  $V(E') \subset \overline{V(E)}$  (resp.  $V(E') \cap \overline{V(E)} \neq \emptyset$ ), alors  $\mathcal{L}_{E'} \geq \mathcal{L}_E$  (i.e.  $\mathcal{L}_{E'(i,j)} \geq \mathcal{L}_{E(i,j)}$  pour tout couple d'entiers naturels  $(i, j)$ ).

*Preuve.* Si  $Y$  (resp.  $Y'$ ) est un sous-schéma défini par un idéal  $I_Y \in V(E)$  (resp.  $I_{Y'} \in V(E')$ ), la Proposition 2.4 nous dit que l'application  $Y \mapsto \text{longueur}(Y \cap X_{ij})$  (resp.  $Y' \mapsto \text{longueur}(Y' \cap X_{ij})$ ) est constante sur  $V(E)$  (resp.  $V(E')$ ):  $\text{longueur}(Y \cap X_{ij}) = \mathcal{L}_{E(i,j)}$ . Nous savons en outre (Proposition 1.2.6)

que ces applications sont semi-continues supérieurement sur  $G_T$ . On en déduit que  $V(E') \subset \overline{V(E)}$  (resp.  $V(E') \cap \overline{V(E)} \neq \emptyset$ ) entraîne.

$$\mathcal{S}_{E'(i,j)} \geq \mathcal{S}_{E(i,j)} \text{ pour tout couple d'entiers naturels } (i, j).$$

**4. Non suffisance de la condition du Théorème 3.2, et exemples où la condition de frontière n'est pas satisfaite**

EXEMPLES 4.1. Soit  $G_T$  la variété paramétrant les idéaux homogènes de  $\mathbb{C}[[x, y]]$  de fonction de Hilbert  $T = (1, 2, 3, 2, 1)$ .  $G_T$  est une variété lisse, compacte de dimension 4.

On exhibe ici, trois cellules,  $V(E), V(E'), V(E'')$  telle que:

- (i)  $\mathcal{S}_{E''} \geq \mathcal{S}_{E'} \geq \mathcal{S}_E$
- (ii)  $V(E'') \cap \overline{V(E)} = \emptyset, V(E') \cap \overline{V(E)} \neq \emptyset$ , mais  $V(E')$  non contenue dans  $\overline{V(E)}$ .

La cellule  $V(E)$ : (cellule attachée à l'idéal monômial  $M = (y^4, xy^2, x^2y, x^5)$ )  
 $V(E)$  paramètre les idéaux  $I$  de la forme:  $I = (y^3(y + ax) + bx^4, x^2(y + ax), x^2(y + ax), x^5)$  ( $a, b \in \mathbb{C}$ ). Ces idéaux ont pour escalier  $E$ :

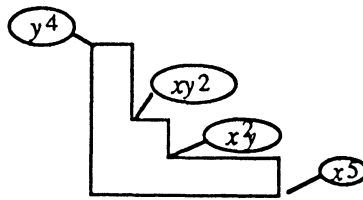


Fig. 4.1.1.

La cellule  $V(E')$ : (cellule attachée à l'idéal monômial  $M' = (y^5, xy^2, x^2y, x^4)$ )  
 $V(E')$  paramètre les idéaux  $I'$  de la forme:  $I' = (y^5, xy^2 + a'x^3, x^2y + b'x^3, x^4)$  ( $a', b' \in \mathbb{C}$ ). Ces idéaux ont pour escalier  $E'$ :

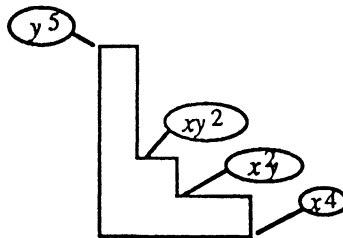


Fig. 4.1.2.

La cellule  $V(E'')$ : cellule attachée à l'idéal monômial  $M'' = (y^5, xy^2, x^3)$ , paramètre les idéaux  $I''$  de la forme  $I'' = (y^5, xy^2 + a''x^2y, x^3), a'' \in \mathbb{C}$ .

Escalier des idéaux  $I'', E''$ :

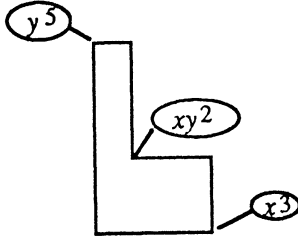


Fig. 4.1.3.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathcal{S}_E &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, \dots) \\ \mathcal{S}_{E'} &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, \dots) \\ \mathcal{S}_{E''} &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, \dots) \end{aligned}$$

$-V(E'') \cap \overline{V(E)}$  est vide car déformer platement un idéal  $I'' = (y^5, xy^2 + a''x^2y, x^3)$ , en un idéal  $I'_t$  dont l'escalier est  $E$ , revient à déformer les deux générateurs  $xy^2 + a''x^2y$  et  $x^3$  de  $I''$  (tout élément de  $G$ , contenant l'idéal maximal à la puissance 5).

On voit qu'avec une telle déformation on ne pourra avoir un générateur contenant le monôme  $y^4$  (qui apparaît dans les idéaux appartenant à  $V(E)$ ). D'où la non suffisance de la condition du Théorème 3.2.

$-V(E') \cap \overline{V(E)}$  est non vide et paramètre les idéaux  $I'$  de la forme  $I' = (y^5, xy(y + \lambda x), x^2(y + \lambda x), x^4)$ . Cependant  $\overline{V(E)}$  ne contient pas  $V(E')$ , car ces deux cellules ont même dimension 2 (Proposition 2.6).

Les cellules de la variété  $G_T$  ne satisfont donc pas le condition de frontière, à savoir que l'adhérence d'une cellule n'est pas toujours une réunion de cellules.

### 5. Fonctions-escalier généralisées

La notion de fonction-escalier se généralise de la façon suivante:

soit  $J = \{(j_1, k_1), \dots, (j_p, k_p)\} \subset \mathbb{N}^2$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^2$  fixé, avec  $j_1 < j_2 < \dots < j_p, k_1 > k_2 > \dots > k_p$  et  $j_i + k_i > j_{i+1} + k_{i+1}$ .

Considérons l'idéal  $M_J = (x^{j_1}m^{k_1}) + (x^{j_2}m^{k_2}) + \dots + (x^{j_p}m^{k_p})$  de  $\mathcal{R}$ .

Pour  $j$  fixé, on définit alors une fonction  $F_J$  sur  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$  par  $F_J(I) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/[I + M_J])$ . Notons que  $M_J = M_{ij}(x)$  lorsque  $J = \{(0, i + j + 1), (i, j)\}$ .

LEMME 5.2. (i) La fonction  $F_J$  est semi-continue supérieurement sur  $\text{Hilb}^n \mathcal{R}$ . (ii) La restriction de  $F_J$  à  $G_T$  est semi-continue supérieurement et est définie par: pour tout  $I \in G_T F_J(I) = \#(\Delta(I) \cap \Delta(M_J))$  où  $\Delta(I) = \mathbb{N}^2\text{-Exp}(I)$  et  $\Delta(M_J) = \mathbb{N}^2\text{-Exp}(M_J)$ .

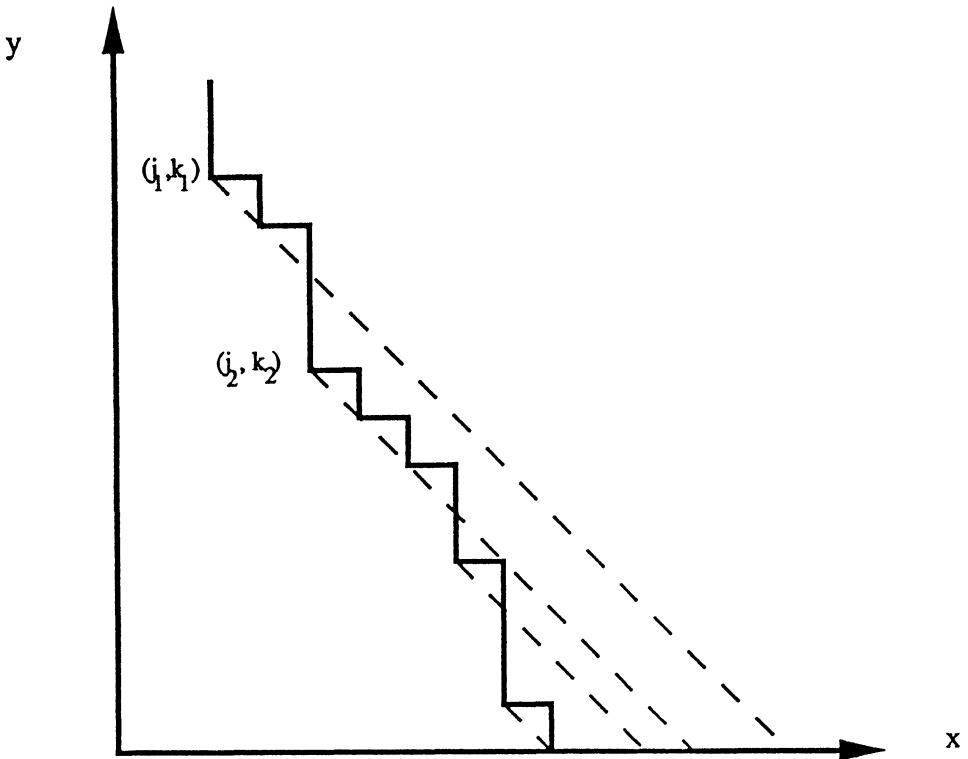


Fig. 5.1. L'escalier canonique de  $M_J$ .

*Preuve.* (i) Pour  $I$ , idéal de colongueur  $n$ , nous pouvons considérer  $(I/\mathfrak{m}^n)$  comme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{R}/\mathfrak{m}^n$ , et la condition  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/[I + M_J]) \geq m$  (pour  $m \in \mathbb{N}$ ) est équivalente à  $\dim_{\mathbb{C}}([I + M_J]/\mathfrak{m}^n) \leq n(n + 1)/2 - m$ , ce qui est une condition fermée.

(ii) Pour prouver que  $F_J(I) = \#(\Delta(I) \cap \Delta(M_J))$ , il nous suffit de montrer que  $\text{Exp}(I + M_J) = \text{Exp}(I) \cup \text{Exp}(M_J)$ .

Soit  $f \in (I + M_J)$ ,  $f = g + h$ ,  $g \in I$ ,  $h \in M_J$ . Pour montrer que  $\text{exp}(f) \in \text{Exp}(I) \cup \text{Exp}(M_J)$ , on peut se remener au cas où  $f = g + h$  avec  $g$  et  $h$  homogènes de même degré, car les idéaux  $I$  et  $M_J$  sont homogènes. Distinguons deux cas:

1°)  $f \in M_J$ : cas trivial.

2°)  $f \notin M_J$ : soient alors  $(\alpha, \beta) = \text{exp}(g)$  et  $(\alpha', \beta') = \text{exp}(h)$ , on aura  $\text{exp}(f) = (\alpha, \beta)$ . En effet,  $g$  et  $h$  étant supposés homogènes de même degré, on aura  $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$  et l'hypothèse  $f \notin M_J$  entraîne que  $(\alpha, \beta)$  est strictement plus petit que  $(\alpha', \beta')$  dans l'ordre diagonal (§1.1).

Dans tous les cas, pour  $f \in (I + M_J)$ , on a  $\text{exp}(f) \in \text{Exp}(I) \cup \text{Exp}(M_J)$ .



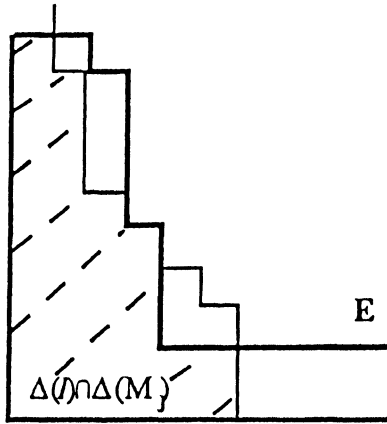


Fig. 5.3.

L'inclusion  $\text{Exp}(I) \cup \text{Exp}(M_J) \subset \text{Exp}(I + M_J)$  étant triviale, on a  $\text{Exp}(I + M_J) = \text{Exp}(I) \cup \text{Exp}(M_J)$  et on en déduit que

$$F_J(I) = \#\Delta(I + M_J) = \#(\Delta(I) \cap \Delta(M_J)).$$

**REMARQUE 5.4.** (i) Lorsque  $J = \{(j, 0)\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $F_J(I)$  est la trace du point  $\mathcal{R}/I$  avec le  $j$ -ème voisinage infinitésimal de la droite  $x = 0$ .

(ii) L'égalité  $F_J(I) = \#(\Delta(I) \cap \Delta(M_J))$  dans le Lemme 5.2 n'est pas vraie si  $I$  est un idéal non homogène: par exemple si on prend  $J = \{(1, 0)\}$ , on a  $M_J = x\mathcal{R}$ . Soit  $I = (y^4, ay^3 + x^2, xy^2)$ , avec  $a \in \mathbb{C}^*$ , on a  $\Delta(I) = \{1, y, y^2, xy, y^3\}$ ,  $\Delta(M_J) = \{(y^i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ ,  $\#(\Delta(I) \cap \Delta(M_J)) = 4$  mais  $F_J(I) = 3$ .

**PROPOSITION 5.5.** Soient  $I$  et  $I'$  deux idéaux homogènes ayant pour fonction de Hilbert  $T$ , alors si  $\mathcal{F}(I')_{(i,j)} \geq \mathcal{F}(I)_{(i,j)}$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , alors on a  $F_J(I') \geq F_J(I)$  pour tout  $J = \{(j_1, k_1), \dots, (j_p, k_p)\} \subset \mathbb{N}^2$  tel que  $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ ,  $k_1 > k_2 > \dots > k_p$  et  $j_i + k_i > j_{i+1} + k_{i+1}$ .

*Preuve.* Par l'absurde: supposons que  $\mathcal{F}(I')_{(i,j)} \geq \mathcal{F}(I)_{(i,j)}$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , et qu'il existe  $J$  tel que  $F_J(I') < F_J(I)$ . L'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $l$  appartenant à l'idéal  $(I + M_J)$  (resp.  $I' + M_J$ ) est  $(I + M_J)_l = I_l + (M_J)_l$ .

On a

$$F_J(I') = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{R}}{I' + M_J} \right) = \sum_{l=0}^{l=n} \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{R}_l}{I'_l + (M_J)_l} \right);$$

$$F_J(I) = \sum_{l=0}^{l=n} (l + 1) - \dim_{\mathbb{C}}(I'_l + (M_J)_l)$$

(resp.  $F_J(I)$ ). De l'hypothèse  $F_J(I') < F_J(I)$  on déduit qu'il existe un indice  $l$  tel que  $[(l+1) - \dim_{\mathbb{C}}(I'_l + (M_J)_l)] < [(l+1) - \dim_{\mathbb{C}}(I_l + (M_J)_l)]$ , donc  $\dim_{\mathbb{C}}(I'_l + (M_J)_l) < \dim_{\mathbb{C}}(I_l + (M_J)_l)$ .

Considérons alors  $(\alpha, \beta) = \inf\{(i, j) \in \text{Exp}(M_J) \mid i + j = l\}$ , on a  $(M_J)_l = x^\alpha m^\beta$ .

Soient

$$q = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{I_l + x^\alpha m^\beta}{x^\alpha m^\beta}\right) \quad \text{et} \quad q' = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{I'_l + x^\alpha m^\beta}{x^\alpha m^\beta}\right);$$

$\dim_{\mathbb{C}}(I_l + (M_J)_l) < \dim_{\mathbb{C}}(I'_l + (M_J)_l)$  entraîne  $q < q'$ . Comparons  $\mathcal{F}(I)_{(\alpha, \beta)}$  et  $\mathcal{F}(I')_{(\alpha, \beta)}$ :

$$\mathcal{F}(I)_{(\alpha, \beta)} = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{R}}{I + m^{\alpha+\beta+1} + x^\alpha m^\beta}\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{R}}{I + m^{\alpha+\beta}}\right) + (\alpha - q),$$

$$\mathcal{F}(I')_{(\alpha, \beta)} = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{R}}{I' + m^{\alpha+\beta+1} + x^\alpha m^\beta}\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{R}}{I' + m^{\alpha+\beta}}\right) + (\alpha - q'),$$

Les idéaux  $I$  et  $I'$  ayant le même fonction de Hilbert, on a  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/[I + m^{\alpha+\beta}]) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}/[I' + m^{\alpha+\beta}])$ , donc  $\mathcal{F}(I)_{(\alpha+\beta)} - \mathcal{F}(I')_{(\alpha+\beta)} = q' - q > 0$ , contredisant l'hypothèse  $\mathcal{F}(I')_{(i, j)} \geq \mathcal{F}(I)_{(i, j)}$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ .

**REMARQUE 5.6.** (i) La Proposition 5.5 ne se généralise pas au cas où les idéaux  $I$  et  $I'$  sont non homogènes. Il suffit par exemple de prendre  $I = (y^4, xy^2, x^2)$ ,  $I' = (y^4, ay^3 + x^2, xy^2)$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ . Les idéaux  $I$  et  $I'$  ont même escalier canonique, donc même fonction-escalier, mais pour  $J = \{(1, 0)\}$ , on a

$$F_J(I') = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{R}}{I' + (x)}\right) = 3$$

qui est strictement inférieur à

$$F_J(I) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{R}}{I + (x)}\right) = 4.$$

(ii) Pour un idéal homogène  $I$  ayant pour fonction de Hilbert  $T$ , si on considère les  $J$  de la forme  $J = \{(l, 0)\}_{l \in \mathbb{N}}$ , la connaissance des  $F_J(I)$  détermine l'escalier de  $I$ , donc sa fonction-escalier. Cependant, pour deux idéaux  $I$  et  $I'$ , l'inégalité  $F_J(I') \geq F_J(I)$  pour tout  $J = \{(l, 0)\}_{l \in \mathbb{N}}$  n'entraîne pas forcément  $\mathcal{S}_{I'}(i, j) \geq \mathcal{S}_I(i, j)$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $j \leq i - 1$ :

*Exemple:* soient  $E'$  l'escalier  $\{(0, 6), (1, 3), (2, 2), (4, 1), (5, 0)\}$  et  $E = \{(0, 4), (2, 3), (3, 1), (6, 0)\}$ , pour tout idéal  $I'$  ayant pour escalier  $E'$ , et pour tout  $I$  ayant  $E$  pour escalier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{R}}{I' + (x^t)} \right) \geq \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathcal{R}}{I + (x^t)} \right),$$

cependant,

$$\mathcal{F}(I')_{(3,1)} = 11 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(I)_{(3,1)} = 12.$$

## References

- [BB] Bialynicki-Birula, A.: Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus. *Bulletin de l'académie Polonaise des Sciences, Séries des Sciences math. astr. et phys.* 24, #9, 667–674 (1976).
- [Br-1] Briançon, J.: Description de  $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ . *Invent. Math.* 41, 45–89 (1977).
- [Br-2] Briançon, J.: Weierstrass préparé à la Hironaka. *Astérisque* 7, 8, 67–73 (1973).
- [Br-Ga] Briançon, J. and Galligo, A.: Déformations distinguées d'un point de  $\mathbb{C}^2$  ou  $\mathbb{R}^2$ . *Astérisque* 7, 8, 129–138 (1973).
- [Fu] Fulton, W.: *Intersection theory*. Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [G-H] Griffiths, P. and Harris, J.: *Principles of Algebraic Geometry* (1977), J. Wiley, New York.
- [Gö] Göttsche, L.: Betti-numbers for the Hilbert function strata of the punctual Hilbert scheme in two variables. *Manuscripta Math.* 66, 253–259 (1990).
- [Gr] Granger, M.: Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels. *Mém. Soc. Math. Fr. Nouv. Ser.* 7–12 (1982–1983).
- [I] Iarrobino, A.: Punctual Hilbert scheme. *Memoirs of AMS*, vol. 10, #188 (1977), AMS, Providence.
- [Y-1] Yaméogo, J.: Sur l'alignement dans les schémas de Hilbert ponctuels du plan. *Math. Ann.* 285, 511–525 (1989).
- [Y-2] Yaméogo, J.: Décomposition cellulaire des variétés de Iarrobino. Incidence des cellules -II- Preprint (Nice 1992).