

# COMPOSITIO MATHEMATICA

G. DIAZ

**Complément à : « Sur l'approximation de  $\pi$  par  
des nombres algébriques particuliers »**

*Compositio Mathematica*, tome 79, n° 3 (1991), p. 255-270

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1991\\_\\_79\\_3\\_255\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1991__79_3_255_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Complément à: Sur l'approximation de $\pi$ par des nombres algébriques particuliers

G. DIAZ

*Equipe de Théorie des Nombres, Université de Saint-Etienne, 42023 Saint-Etienne Cédex 2, France*

Received 22 February 1990; accepted 22 October 1990

**Résumé.** En modifiant, dans l'esprit de [D2], la méthode utilisée dans [D1] on améliore un résultat de M. Waldschmidt sur l'approximation de  $\pi$  par les nombres algébriques.

### 1. Enoncé des résultats

Pour un nombre algébrique  $\xi$  on note  $d(\xi)$  son degré,  $M(\xi)$  sa mesure de Mahler,  $h(\xi)$  sa hauteur logarithmique absolue c'est-à-dire  $h(\xi) = (\log M(\xi))/d(\xi)$ .

On a démontré dans [D1] les deux théorèmes suivants, par une méthode de Gel'fond-Schneider assez standard.

**THÉORÈME 1.** *Il existe  $c_1 > 0$  tel que pour tout entier  $N \geq 1$  et tout nombre algébrique  $\xi$  appartenant au corps  $\mathbb{Q}(i, \exp(2\pi i/N))$  on ait, en notant  $D_N$  le degré de ce corps de nombres*

$$\log|\pi - \xi| \geq -c_1 \frac{D_N^2}{N} (h(\xi) + \log D_N)(\log D_N).$$

**THÉORÈME 2.** *Il existe  $c_2 > 0$  tel que pour tout entier  $N \geq 2$  et tout nombre algébrique  $\xi$  on ait, en notant  $D_N$  le degré du corps de nombres  $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$*

$$\log|\pi - \xi| \geq -c_2 D_N^2 (h(\xi) + \log D_N) \left( \frac{\log D_N}{\log N} \right).$$

Une telle minoration est appelée une mesure (d'approximation) de  $\pi$ .

Le théorème 1 améliore un résultat de N. I. Feldman (1973), le théorème 2 retrouve simplement un résultat de M. Waldschmidt [W1, théorème 2.5] obtenu via les formes linéaires de logarithmes. Le premier n'est pas conséquence du second. Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 sont identiques, à un "détail" près: dans la deuxième on introduit un élément primitif de  $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$  qui fait apparaître dans la mesure, via le théorème de Liouville, la quantité  $D_N^2(h(\xi) + \log D_N)$ . Comme me l'a fait remarqué M. Waldschmidt il est moins

pénalisant d'utiliser une base du corps de nombres  $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$  constituée d'éléments de la forme  $i^p \xi^q \exp(2\pi i r/N)$ ,  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ ,  $p < 2$ ,  $q < d(\xi)$ ,  $r < \varphi(N)$  où  $\varphi$  est la fonction indicatrice d'Euler; cette façon de faire introduit malgré tout la quantité  $D_N d(\xi) h(\xi)$  dans la mesure et ne permet pas de remplacer  $\log N$  par  $N$  dans le théorème 2 (sauf si on se limite à des nombres algébriques  $\xi$  vérifiant  $N d(\xi) \ll D_N(\log D_N)$ ).

Et pourtant en regardant la partie "essentielle" de la démonstration du théorème 2 il est naturel de conjecturer que dans ce théorème on peut remplacer  $\log N$  par  $N$ . C'est ce que nous allons démontrer ici.

**THÉORÈME 3.** *Il existe  $c_3 > 0$  tel que pour tout entier  $N \geq 1$  et tout nombre algébrique  $\xi$  on ait, en notant  $D_N$  le degré du corps de nombres  $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$*

$$\log|\pi - \xi| \geq -c_3 \frac{D_N^2}{N} (h(\xi) + \log D_N)(\log D_N).$$

Ceci améliore donc le théorème 2 et redonne le théorème 1 comme cas particulier. La démonstration est du type Gel'fond-Schneider, dans la variante de [D2]; on détaillera la méthode au paragraphe 2 après avoir introduit les notations nécessaires. La démonstration elle-même occupe le paragraphe 3.

## 2. Préliminaires

### 2.1. Polynômes de Feldman

On note  $\Delta_0(z) = 1$  et pour  $m \in \mathbb{N}$  non nul  $\Delta_m(z) = (z+1) \cdots (z+m)/(m!)$ . Le lemme suivant résulte des estimations de P. Philippon [P2].

**LEMME 1.** (a) *Pour tout  $z \in \mathbb{Q}$ , tout  $t \in \mathbb{N}$ :*

$$\log \left| \frac{1}{t!} \Delta_m^{(t)}(z) \right| \leq (m-t) \log \left( 1 + \frac{|z|}{m} \right) + 3m.$$

(b) *On se donne  $z$  dans  $\mathbb{Q}$ ,  $t$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$ ; il existe un entier positif  $\delta(z, m, t)$  dénominateur commun à tous les nombres rationnels  $(\tau!)^{-1} \Delta_\mu^{(\tau)}(z)$  (où  $0 \leq \mu \leq m$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ ) et tel que l'on ait, en notant  $\text{den}(z)$  le dénominateur de  $z$ :*

$$\log \delta(z, m, t) \leq 21m(1 + \log(1+t) + \log \text{den}(z)).$$

2.2. Fonction auxiliaire, polynômes auxiliaires

Dans toute la suite on se fixe un entier  $N \geq 1$  et un nombre algébrique  $\xi$ . On note  $\theta_N = \exp(2\pi i/N)$ , et  $D_N$  le degré du corps de nombres  $\mathbb{Q}(i, \xi, \theta_N)$ ;  $\theta_N$  est un entier algébrique de degré  $\varphi(N)$ .

Soient  $K, M$  deux entiers  $\geq 1$  et  $\{P_{km}; 0 \leq k < K, 0 \leq m < M\}$  une famille de polynômes de  $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$ . On leur associe la fonction entière

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_{km}(\pi, \theta_N) \Delta_m(z) \exp(2\pi i k z).$$

On part du fait que les dérivées des fonctions  $\Delta_m(z) \exp(2\pi i k z)$  calculées en les points  $s/N$  (où  $s \in \mathbb{N}$ ) sont des expressions  $\mathbb{Q}$ -polynômiales en  $(\pi, \theta_N)$ ; comme c'est aussi le cas pour les coefficients  $P_{km}(\pi, \theta_N)$  de  $F$ , la propriété passe à  $F$ . On souhaite travailler avec des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ; par le lemme 1 on sait qu'il existe un dénominateur  $\delta(s/N, M-1, t)$  commun à tous les nombres rationnels  $(\tau!)^{-1} \Delta_m^{(\tau)}(s/N)$  avec  $0 \leq m < M, 0 \leq \tau \leq t$ . On note simplement  $\delta(s, t)$  ce dénominateur:

$$\begin{aligned} \delta(s, t) F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) &= \sum_{k < K} \sum_{m < M} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\pi, \theta_N) \frac{t!}{(t-\tau)!} \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) (2k\pi i)^{t-\tau} \theta_N^{ks}. \end{aligned}$$

En notant  $n(ks)$  le reste de la division de  $ks$  par  $N$  on a  $\theta_N^{ks} = \theta_N^{n(ks)}$ . Pour tout  $(k, m, t, s) \in \mathbb{N}^4$  avec  $k < K, m < M$  et tout  $(t, s) \in \mathbb{N}^2$  on définit alors les polynômes de  $\mathbb{Z}[i][X_1, X_2]$  suivants:

$$\begin{cases} R_{kmts}(X_1, X_2) = \left(\sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) (2ki)^{t-\tau} X_1^{t-\tau}\right) X_2^{n(ks)}, \\ Q_{ts}(X_1, X_2) = \sum_{k < K} \sum_{m < M} P_{km}(X_1, X_2) R_{kmts}(X_1, X_2). \end{cases}$$

La **relation fondamentale** s'écrit pour tout  $(t, s) \in \mathbb{N}^2$ :

$$\delta(s, t) F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) = Q_{ts}(\pi, \theta_N). \tag{1}$$

Notons que les degrés partiels de  $R_{kmts}$  sont respectivement majorés par  $t$  et  $n(ks)$ . Il est tentant d'abaisser le degré en  $X_2$  en introduisant le polynôme

minimal de  $\theta_N$  pour calculer  $\theta_N^{n(k_s)}$ , cela complique la situation et dégrade les estimations en hauteurs des polynômes  $R_{kmts}$ .

### 2.3. *Quelle va être la démarche dans la démonstration?*

On va modifier, par rapport à la démonstration du théorème 2 de [D1], essentiellement la phase de construction, le reste de la démonstration relevant de la méthode classique de Gel'fond-Schneider. On adapte pour cela la démarche utilisée dans [D2], en construisant une famille  $\{P_{km}; k < K, m < M\}$  qui permet d'annuler tous les polynômes  $Q_{ts}(X_1, \theta_N)$  pour  $0 \leq t < T, 0 \leq s < S$ , puis en dérivant adéquatement les  $P_{km}$  pour obtenir des polynômes non tous nuls en  $(\xi, \theta_N)$ ; cette condition est absolument indispensable pour le lemme de zéros. Il se trouve que cette façon de faire ne dégrade pas les estimations "naturelles", en ce sens que la contribution des coefficients  $P_{km}$  reste plus petite que celle des  $R_{kmts}$ . A noter une différence par rapport à [D2]: pour que la dernière remarque soit exacte (et on veut qu'il en soit ainsi), il faut dériver les polynômes  $P_{km}$  uniquement par rapport à la première variable alors que dans [D2] on dérivait par rapport à toutes les variables. C'est ce qui autorise à prendre pour équations  $Q_{ts}(X_1, \theta_N) = 0$ , au lieu de  $Q_{ts}(X_1, X_2) = 0$  comme le suggère une transcription simpliste de [D2].

## 3. Démonstration du théorème 3

Dans la suite  $N \geq 1$  et  $\xi$  sont fixés. Il est clair que l'on peut se restreindre au cas  $|\pi - \xi| \leq 1/2$ , ce que l'on fera; en particulier on a  $|\xi| \leq 4$ . Les paramètres seront les entiers  $K, M, T, S, T'$  et le réel  $R$ , tous plus grands que 1; on leur imposera au cours de la démonstration des contraintes  $\mathcal{C}1, \mathcal{C}2, \dots, \mathcal{C}8$ .

### 3.1. *Premier pas: la construction.*

L'objectif de ce pas est de construire une famille de polynômes de  $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$ , non tous nuls,  $\{\tilde{P}_{km}; 0 \leq k < K, 0 \leq m < M\}$ , chaque  $\tilde{P}_{km}$  ayant des degrés partiels en  $X_1, X_2$  strictement majorés par  $T, \varphi(N)$  et telle que l'on ait

$$(\mathcal{S}) \quad \tilde{Q}_{ts}(X_1, \theta_N) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq t < T, 0 \leq s < S,$$

où on a noté  $\tilde{Q}_{ts}(X_1, X_2) := \sum_{k < K} \sum_{m < M} \tilde{P}_{km}(X_1, X_2) R_{kmts}(X_1, X_2)$ .

Comment justifier l'hypothèse sur les degrés partiels des  $\tilde{P}_{km}$ ? Pour  $t < T, s < S$  les degrés partiels des  $R_{kmts}$  sont majorés par  $T, N$  et il serait "logique" d'imposer la même chose aux  $\tilde{P}_{km}$ . Mais au second pas il sera nécessaire de montrer que les  $\tilde{P}_{km}(X_1, \theta_N)$  ne sont pas tous nuls, ce qui n'est pas évident sous la

seule hypothèse que le degré en  $X_2$  des  $\tilde{P}_{km}$  est strictement inférieure à  $N$ ; c'est par contre immédiat si on remplace  $N$  par  $\varphi(N)$ .

Rappelons enfin que dans le second pas les polynômes  $\tilde{P}_{km}$ ,  $\tilde{Q}_{ts}$  seront modifiés en des polynômes  $P_{km}$ ,  $Q_{ts}$ .

Les inconnues sont les coefficients des KM polynômes  $\tilde{P}_{km}$ , et leur nombre est donc majoré par KMT  $\varphi(N)$ . Pour  $t < T$ , le degré en  $X_1$  des  $Q_{ts}$  est majoré par  $2T$ ; donc le nombre de coefficients de chaque polynôme  $Q_{ts}(X_1, \theta_N)$ , pour  $t < T$  et  $s < S$ , est majoré par  $2T$ . Ainsi annuler un tel polynôme, c'est-à-dire annuler chacun de ses coefficients, fournit au plus  $2T$  équations; et ces équations sont linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Q}(i, \theta_N)$  et même plus précisément dans  $\mathbb{Z}[i, \theta_N]$ . Donc au total ( $\mathcal{S}$ ) s'écrit comme un système linéaire ayant au plus  $2T^2S$  équations. Pour résoudre ce système on va utiliser un lemme de Siegel, par exemple la version de [M-W]; il faut imposer une contrainte à savoir que le nombre d'inconnues KMT  $\varphi(N)$  est strictement plus grand que le nombre d'équations multiplié par le degré du corps  $\mathbb{Q}(i, \theta_N)$  i.e.  $2T^2S[\mathbb{Q}(i, \theta_N): \mathbb{Q}]$ . On va imposer un peu plus, après avoir majoré  $[\mathbb{Q}(i, \theta_N): \mathbb{Q}]$  par  $2\varphi(N)$ , à savoir  $\text{KMT } \varphi(N) \geq 2(4T^2S\varphi(N))$ ; cela donne la première contrainte:

- ( $\mathcal{C}1$ )  $\text{KM} \geq 8TS$ .

On explicite l'équation générale du système linéaire à résoudre; pour cela on pose:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{ts}(X_1, X_2) = \sum_{n_1 < 2T} \sum_{n_2 < 2N} \tilde{q}_{tsn} X_1^{n_1} X_2^{n_2}, & n = (n_1, n_2), \\ \tilde{P}_{km}(X_1, X_2) = \sum_{v_1 < T} \sum_{v_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{kmv} X_1^{v_1} X_2^{v_2}, & v = (v_1, v_2). \end{cases}$$

Ainsi:

$$\tilde{Q}_{ts} = \sum_{k < K} \sum_{m < M} \sum_{v_1 < T} \sum_{v_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{kmv} \left( \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{s}{N} \right) (2ki)^{t-\tau} X_1^{v_1+t-\tau} \right) X_2^{v_2+n(kv)}$$

D'où pour tout  $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$  avec  $0 \leq n_1 < 2T, 0 \leq n_2 < 2N$ :

$$\tilde{q}_{tsn} = \sum_{(k,m,v_1)} \tilde{p}_{kmv} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left( \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{s}{N} \right) \right) (2ki)^{t-\tau},$$

la somme portant sur tous les  $(k, m, v_1) \in \mathbb{N}^3$  vérifiant

$$k < K, m < M, v_1 < T, 0 \leq v_2 < \varphi(N), 0 \leq \tau \leq \min(m, t)$$

$$\text{où } v_2 := n_2 - n(ks), \tau := v_1 + t - n_1.$$

Puisque  $\tilde{Q}_{ts}(X_1, \theta_N) = \sum_{n_1 < 2T} (\sum_{n_2 < 2N} \tilde{q}_{tsn} \theta_N^{n_2}) X_1^{n_1}$ , le système  $(\mathcal{S})$  est équivalent à :

$$(\mathcal{S}') \begin{cases} \sum_{n_2 < 2N} \tilde{q}_{tsn} \theta_N^{n_2} = 0, \\ \text{pour } 0 \leq t < T, 0 \leq s < S, 0 \leq n_1 < 2T. \end{cases}$$

L'équation numérotée  $(t, s, n_1)$  est donc avec les notations antérieures :

$$0 = \sum_{n_2 < 2N} \sum_{(k,m,v_1)} \tilde{p}_{kmv} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left( \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{s}{N} \right) \right) (2ki)^{t-\tau} \theta_N^{n_2}$$

c'est-à-dire encore

$$\begin{cases} 0 = \sum_{(k,m,v_1)} \tilde{p}_{kmv} U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}(i, \theta_N), \\ \text{où } U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}(Y_1, Y_2) := \sum_{n_2 < 2N} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left( \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{s}{N} \right) (2kY_1)^{t-\tau} \right) Y_2^{n_2}. \end{cases}$$

En tenant compte de  $M(i) = M(\theta_N) = 1$ , le lemme de Siegel permet d'affirmer que  $(\mathcal{S}')$  admet une solution non nulle  $\{\tilde{p}_{kmv}; k < K, m < M, v = (v_1, v_2), v_1 < T, v_2 < \varphi(N)\}$ , à composantes dans  $\mathbb{Z}$ , vérifiant

$$\begin{aligned} & \log \max_{k,m,v} |\tilde{p}_{kmv}| \\ & \leq \log 3 + \left( \frac{4T^2 S \varphi(N)}{\text{KMT} \varphi(N) - 4T^2 S \varphi(N)} \right) \log \max_{(t,s,n_1)} \left( \sum_{(k,m,v_1)} 2L(U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}) \right) \end{aligned}$$

(pour un polynôme  $P$ ,  $L(P)$  désigne sa longueur c'est-à-dire la somme des modules de ses coefficients). Il reste à estimer les longueurs qui apparaissent ci-dessus; en revenant aux définitions :

$$L(U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}) \leq \sum_{n_2 < 2N} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{s}{N} \right) \right| (2k)^{t-\tau}.$$

Grâce au lemme 1:

$$\log \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{S}{N} \right) \right| \leq 25M \log eT(N + S/M).$$

On majore ensuite  $t!/(t - \tau)!$  par  $t^\tau$  puis  $T^M$  (puisque  $\tau \leq m, t < T$ ). Donc:

$$\begin{aligned} 2L(U_{(k,m,s)}^{(t,s,n_1)}) &\leq 4NT^M(2K)^T \exp(25M \log eT(N + S/M)) \\ &\leq \exp(T \log 2K + 29M \log eT(N + S/M)). \end{aligned}$$

En utilisant (E1) la majoration des  $|\tilde{p}_{kmv}|$  devient:

$$\log \max_{k,m,v} |\tilde{p}_{kmv}| \leq \log 3 + \log \max_{(t,s,n_1)} \left( \sum_{(k,m,v_1)} 2L(U_{(k,m,v_1)}^{(t,s,n_1)}) \right)$$

et donc:

$$\log \max_{k,m,v} |\tilde{p}_{kmv}| \leq 5T \log eK + 30M \log eT(N + S/M). \tag{2}$$

Ceci termine la construction.

### 3.2. Deuxième pas: modification des polynômes $\tilde{P}_{km}, \tilde{Q}_{ts}$

Pour l'instant on sait que les  $\tilde{P}_{km}$  ne sont pas tous nuls, mais on ne peut rien dire de tel pour les  $\tilde{P}_{km}(\xi, \theta_N)$ . Or si tous ces nombres algébriques étaient nuls, tous les  $\tilde{Q}_{ts}(\xi, \theta_N)$  seraient évidemment nuls et il n'y aurait rien à en tirer. Dans ce pas on va modifier les  $\tilde{P}_{km}$  en des polynômes  $P_{km} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$  qui ne seront pas tous nuls en  $(\xi, \theta_N)$ .

Si on procède, comme dans [D2], par dérivation sur  $X_1$  et  $X_2$  on fait apparaître dans les estimations de la longueur des  $P_{km}$  un terme en  $\exp \varphi(N)$  (via la majoration des coefficients du binôme); comme ce terme est indésirable on va dériver les  $\tilde{P}_{km}$  uniquement par rapport à  $X_1$ .

#### 3.2.1. Définition des nouveaux polynômes auxiliaires

Pour  $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2], j \in \mathbb{N}$  on note  $D^j P$  la dérivée  $j^{\text{ème}}$  de  $P$  par rapport à  $X_1$ . Puisque

$$\tilde{P}_{km}(X_1, \theta_N) = \sum_{v_1 < T} \left( \sum_{v_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{kmv} \theta_N^{v_2} \right) X_1^{v_1}$$



et puisque les  $\tilde{p}_{km}$  sont dans  $\mathbb{Z}$  et non tous nuls, les polynômes  $\tilde{P}_{km}(X_1, \theta_N)$  ne sont pas tous nuls; à noter que c'est précisément pour avoir cela que l'on a borné par  $\varphi(N)$  le degré en  $X_2$  des  $\tilde{P}_{km}$ ! Donc l'ensemble  $J := \bigcup_{k,m} \{j \in \mathbb{N}; (D^j \tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N) \neq 0\}$  est fini non vide (fini car il n'y a qu'un nombre fini de  $\tilde{P}_{km}$ ; non vide car pour un polynôme  $\tilde{P}_{km}(X_1, \theta_N)$  non nul – il y en a – une de ses dérivées en  $\xi$  est nécessairement non nulle). On note  $j$  le plus petit élément de  $J$  et ainsi:

$$\begin{cases} \text{*pour au moins un couple } (k, m), (D^j \tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N) \text{ est non nul,} \\ \text{*pour tout } h \in \mathbb{N}, h < j, \text{ tout couple } (k, m): (D^h \tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N) = 0. \end{cases}$$

On définit alors pour tout  $(k, m) \in \mathbb{N}^2, k < K$  et  $m < M$ , et tout  $(t, s) \in \mathbb{N}^2$  les polynômes  $P_{km} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2], Q_{ts} \in \mathbb{Z}[i][X_1, X_2]$ :

$$P_{km}(X_1, X_2) := \frac{1}{j!} (D^j \tilde{P}_{km})(X_1, X_2),$$

$$Q_{ts}(X_1, X_2) := \sum_{k < K} \sum_{m < M} P_{km}(X_1, X_2) R_{kmts}(X_1, X_2).$$

Avec ces notations, un des nombres  $P_{km}(\xi, \theta_N)$  est non nul. Ceci sera utilisé au pas 4.

### 3.2.2. Propriétés des polynômes $P_{km}, Q_{ts}$

Soit  $(t, s) \in \mathbb{N}^2$  avec  $t < T, s < S$ ; par construction  $\tilde{Q}_{ts}(X_1, \theta_N)$  est nul, donc  $(D^j \tilde{Q}_{ts})(X_1, \theta_N)$  est aussi nul. En utilisant la formule de Leibniz et la définition de  $j$  on en déduit

$$\sum_{k,m} (D^j \tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N) R_{kmts}(\xi, \theta_N) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$Q_{ts}(\xi, \theta_N) = 0 \text{ pour } t < T, s < S. \tag{3}$$

C'est cette propriété qui maintenant remplace ( $\mathcal{S}$ ). On a immédiatement:

$$\begin{cases} \deg_{X_1}(P_{km}) \leq \deg_{X_1}(\tilde{P}_{km}) < T, \\ \deg_{X_2}(P_{km}) \leq \deg_{X_2}(\tilde{P}_{km}) < \varphi(N), \\ \deg_{X_1}(Q_{ts}) < T + t, \deg_{X_2}(Q_{ts}) < 2N. \end{cases} \tag{4}$$

Nous aurons besoin aussi d'estimations pour la longueur des  $P_{km}$  et des  $Q_{ts}$ .  
Puisque

$$\tilde{P}_{km} = \sum_{v_1 < T} \sum_{v_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{kmv} X_1^{v_1} X_2^{v_2}$$

on a:

$$P_{km}(X_1, X_2) = \sum_{j \leq v_1 < T} \sum_{v_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{kmv} \binom{v_1}{j} X_1^{v_1-j} X_2^{v_2}.$$

D'où:

$$L(P_{km}) = \sum_{j \leq v_1 < T} \sum_{v_2 < \varphi(N)} |\tilde{p}_{kmv}| \binom{v_1}{j};$$

on vérifie que

$$\sum_{j \leq v_1 < T} \binom{v_1}{j} \text{ est égal à } \binom{T}{j+1}$$

que l'on majore par  $2^T$ . Et en utilisant (2) on obtient:

$$L(P_{km}) \leq \varphi(N) 2^T \max_{k,m,v} |\tilde{p}_{kmv}| \leq N 2^T \max_{k,m,v} |\tilde{p}_{kmv}|$$

i.e.

$$L(P_{km}) \leq \exp(6T \log eK + 31M \log eT(N + S/M)). \tag{5}$$

A noter que dans (2) on peut remplacer le 5 par 4,1 et dans (5) le 6 par 5,1. De  $Q_{ts} = \sum_{k,m} P_{km} R_{kmts}$  il résulte facilement:  $L(Q_{ts}) \leq \sum_{k,m} L(P_{km}) L(R_{kmts})$ .

En revenant à la définition:

$$L(R_{kmts}) = \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{s}{N} \right) \right| (2k)^{t-\tau};$$

par le lemme 1:

$$\log \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left( \frac{s}{N} \right) \right| \leq 25M \log e(1 + t)(N + s/M).$$

Donc

$$L(R_{kmts}) \leq \exp(t \log eK + 27M \log e(1 + t)(N + s/M)).$$

D'où pour  $Q_{ts}$ , quel que soit le couple  $(t, s)$ :

$$L(Q_{ts}) \leq \exp(31M \log e(1 + t)(N + s/M) + 31M \log eT(N + S/M) + 6(T + t) \log eK). \tag{6}$$

### 3.3. Troisième pas: extrapolation

Ce pas est de nature analytique, et va faire intervenir la “relation fondamentale”, c’est-à-dire le lien qui existe entre les  $Q_{ts}(\pi, \theta_N)$  et une certaine fonction entière, dite fonction auxiliaire.

Nous utiliserons les trois lemmes suivants, la démonstration du premier étant laissée au lecteur.

LEMME 2. Soient  $R \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $d$ ,  $x$  et  $y$  deux nombres complexes. Alors

$$|R(x) - R(y)| \leq |x - y|L(R)d \max(1, |x|, |y|)^d.$$

LEMME 3. Pour tout  $(t, s) \in \mathbb{N}^2$ :

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leq |\pi - \xi|(t + T)L(Q_{ts})4^{t+T}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $Q_{ts}^*(X) := Q_{ts}(X, \theta_N)$ ; par le lemme 2:

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leq |\pi - \xi| \deg(Q_{ts}^*)L(Q_{ts}^*) \max(1, \pi, |\xi|)^{\deg(Q_{ts}^*)}.$$

Rappelons que  $|\xi|$  est plus petit que 4. Le degré de  $Q_{ts}^*$  est, par (4), plus petit que  $(t + T)$ . Et enfin il est immédiat que  $L(Q_{ts}^*)$  est majorée par  $L(Q_{ts})$ ; d'où:

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leq |\pi - \xi|(t + T)L(Q_{ts})4^{t+T}.$$

LEMME 4. Formule d'extrapolation [C2, Lemme 7]. Soient  $f$  une fonction entière,  $S$  et  $T$  des entiers positifs,  $r$  et  $R$  des nombres réels avec  $r \geq 2S$ ,  $R > 2r$ . Alors

$$|f|_r \leq 2|f|_R \left(\frac{2r}{R}\right)^{TS} + \left(\frac{9r}{S}\right)^{TS} \left(\max_{\substack{0 \leq t < T \\ 0 \leq s < S}} \frac{1}{t!} |f^{(t)}(s)|\right).$$

Rappelons que  $|f|_r := \sup\{|f(z)|; z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ . On va introduire pour utiliser ce lemme d'extrapolation la fonction  $f$  suivante:

$$f(z) := \sum_{k < K} \sum_{m < M} P_{km}(\pi, \theta_N) \Delta_m \left( \frac{z}{N} \right) \exp \left( 2\pi i k \frac{z}{N} \right).$$

La relation fondamentale (1) s'écrit alors, pour tout  $(t, s) \in \mathbb{N}^2$ :

$$\delta(s, t) f^{(t)}(s) = \frac{1}{N^t} Q_{ts}(\pi, \theta_N). \tag{7}$$

Majoration de  $|f^{(t)}(s)|$  pour  $0 \leq t < T, 0 \leq s < S$

En utilisant (7) et la propriété (3) (c'est là que cette propriété, issue directement de la construction, sert):

$$\delta(s, t) N^t f^{(t)}(s) = Q_{ts}(\pi, \theta_N) = Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N);$$

et par le lemme 3 et (6):

$$|f^{(t)}(s)| \leq |Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leq |\pi - \xi| (2T) L(Q_{ts}) 4^{2T}$$

et donc:

$$|f^{(t)}(s)| \leq |\pi - \xi| \exp(18T \log eK + 62M \log eT(N + S/M)). \tag{8}$$

Estimation de  $|f|_R$

Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| \leq R$ ; par définition:

$$f(z) = \sum_{k < K} \sum_{m < M} P_{km}(\pi, \theta_N) \Delta_m \left( \frac{z}{N} \right) \exp \left( 2\pi i k \frac{z}{N} \right).$$

On a

$$|\Delta_m(z/N)| \leq \Delta_m(|z|/N) \leq \Delta_m([\![z|/N]\!] + 1) = \binom{m + [\![z|/N]\!] + 1}{m},$$

que l'on peut majorer par  $2^{m+1 + [\![z|/N]\!]}$  et donc par  $2^{M+(R/N)}$ . De plus  $|P_{km}(\pi, \theta_N)| \leq L(P_{km})\pi^T$ , et on sait estimer le majorant à l'aide de (5):

$$|P_{km}(\pi, \theta_N)| \leq \exp(7T \log eK + 30M \log eT(N + S/M)).$$

D'où au total:

$$|f|_R \leq (KM) \max_{k,m} |P_{km}(\tau, \theta_N)| 2^{M+(R/N)} \exp(2\pi KR/N),$$

i.e.

$$|f|_R \leq \exp(8T \log eK + 32M \log eT(N + S/M) + 8KR/N). \tag{9}$$

*Application du lemme d'extrapolation*

On applique le lemme 4 à la fonction  $f$  en prenant  $r = 2S'$  où  $S'$  est un nouveau paramètre entier plus grand que  $S$  (on extrapole de  $(T, S)$  à  $(T, S')$ ). On impose pour cela la nouvelle contrainte:

- (C2)  $S' > S, R > 4S'$ .

La formule d'extrapolation implique:

$$|f|_r \leq 2|f|_R \exp\left(-TS \log\left(\frac{R}{4S'}\right)\right) + \exp\left(TS \log\left(\frac{18S'}{S}\right)\right) \left(\max_{t < T, s < S} |f^{(t)}(s)|\right).$$

Et en utilisant (8), (9):

$$|f|_r \leq \exp\left(-TS \log\left(\frac{R}{4S'}\right) + B_1\right) + |\pi - \xi| \exp(B_2), \tag{10}$$

avec

$$B_1 := 9T \log eK + 32M \log eT(N + S/M) + 8KR/N,$$

$$B_2 := TS \log(18S'/S) + 18T \log eK + 62M \log eT(N + S/M).$$

*Conséquence: majoration de  $|Q_{ts}(\xi, \theta_N)|$  pour  $t < T, s < S'$*

Par (7) on a  $|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leq \delta(s, t) N^t |f^{(t)}(s)|$ . Le disque de centre  $s$  et de rayon 1 est tout entier dans le disque  $|z| \leq 2S'$  et donc les formules de Cauchy donnent  $|f^{(t)}(s)| \leq (t!) |f|_r$ . D'où:  $|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leq \delta(s, t) N^t (t!) |f|_r$ . Par le lemme 1,  $\delta(s, t)$  est plus petit que  $\exp(21 M \log eTN)$ . Et (10) permet de conclure que:

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leq \exp\left(-TS \log\left(\frac{R}{4S'}\right) + B_3\right) + |\pi - \xi| \exp(B_4),$$

avec

$$\begin{aligned} B_3 &:= B_1 + 21M \log eTN + T \log TN, \\ B_4 &:= B_2 + 21M \log eTN + T \log TN. \end{aligned} \quad (11)$$

Il faut maintenant passer à  $|Q_{ts}(\xi, \theta_N)|$  ce qui se fait en utilisant l'inégalité triangulaire:

$$|Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leq |Q_{ts}(\pi, \theta_N)| + |Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)|,$$

puis le lemme 3 et (6) pour majorer le second terme de droite:

$$\begin{aligned} |Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| &\leq |\pi - \xi| (2T)L(Q_{ts})16^T \\ &\leq |\pi - \xi| \exp(18T \log eK + 62M \log eT(N + S'/M)). \end{aligned}$$

D'où au total:

$$\begin{aligned} |Q_{ts}(\pi, \theta_N)| &\leq \exp(-TS \log(R/4S') + B_3) + |\pi - \xi| \exp(B_4) \\ &\quad + |\pi - \xi| \exp(18T \log eK + 62M \log eT(N + S'/M)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leq \exp(-TS \log(R/4S') + B_5) + |\pi - \xi| \exp(B_6) \quad (12)$$

avec

$$\begin{aligned} B_5 &:= 9T \log eK + T \log TN + 53M \log eT(N + S/M) + 8KR/N, \\ B_6 &:= TS \log(18S'/S) + T \log TN + 19T \log eK + 83M \log eT(N + S'/M). \end{aligned}$$

Ceci termine la phase d'extrapolation.

### 3.4. Quatrième pas: le lemme de zéros

L'objectif est ici de trouver des conditions suffisantes, sur les paramètres, pour que les nombres algébriques  $Q_{ts}(\xi, \theta_N)$ ,  $t < T$  et  $s < S'$ , ne soient pas tous nuls. Il suffit d'utiliser le lemme de zéros détaillé dans [D1], qui est une conséquence simple du résultat général de P. Philippon [P1]. Cela fournit les conditions

suffisantes suivantes:

- (C3)  $T \geq 3, S' \geq 4, N \leq [S'/2],$
- (C4)  $TS' \geq 24MK,$
- (C5)  $TN \geq 6K.$

Rappelons que c'est ici qu'intervient le fait que les  $P_{km}(\xi, \theta_N)$  ne sont pas tous nuls.

### 3.5. Cinquième pas: le théorème de Liouville

Nous allons utiliser le théorème de Liouville dans la forme suivante:

LEMME 5. [W2, Lemme 2.2]. Soient  $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des nombres algébriques éléments d'un corps de nombres de degré  $d$  sur  $\mathbb{Q}$ . Si  $Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est non nul on a:

$$\log|Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \geq -d \log L(Q) - d \left( \sum_{j=1}^n h(\alpha_j) \deg_{X_j} Q \right).$$

On prend ici comme corps de nombres  $\mathbb{Q}(i, \xi, \theta_N)$ , dont le degré a été noté  $D_N$ . On choisit un couple  $(t, s) \in \mathbb{N}^2$  avec  $t < T, s < S'$  pour lequel  $Q_{ts}(\xi, \theta_N)$  est non nul; on note  $Q_{1ts}, Q_{2ts}$  les parties réelle et imaginaire du polynôme  $Q_{ts}$ . Une des quantités  $Q_{1ts}(\xi, \theta_N), Q_{2ts}(\xi, \theta_N)$  est non nulle et on peut lui appliquer le lemme 5; puisque  $h(\theta_N) = 0$  il reste, avec  $\varepsilon = 1$  ou  $2$ :

$$\log|Q_{\varepsilon ts}(\xi, \theta_N)| \geq -D_N \log L(Q_{\varepsilon ts}) - D_N h(\xi) \deg_{X_1}(Q_{\varepsilon ts}).$$

Comme il est immédiat que  $L(Q_{\varepsilon ts}) \leq L(Q_{ts}), \deg_{X_1}(Q_{\varepsilon ts}) \leq \deg_{X_1}(Q_{ts})$  en utilisant (4) et (6) on a:

$$\log|Q_{\varepsilon ts}(\xi, \theta_N)| \geq -A \tag{13}$$

avec

$$A = D_N(12T \log eK + 62M \log eT(N + S'/M)) + 2D_N T h(\xi).$$

On peut noter que c'est dans l'expression  $A$  qu'apparaît la différence essentielle avec la situation du théorème 2 de [D1]; la méthode développée ici a permis de supprimer la quantité  $D_N^2(h(\xi) + \log D_N)$  qu'introduisait le théorème de l'élément primitif utilisé. Plus précisément d'ailleurs elle n'a introduit aucun élément parasite!

Comme  $Q_{ts}(\xi, \theta_N) = Q_{1ts}(\xi, \theta_N) + iQ_{2ts}(\xi, \theta_N)$ , on peut majorer  $|Q_{ts}(\xi, \theta_N)|$  à l'aide de (12); en mettant bout à bout la majoration (12) et la minoration (13) il reste:

$$\exp(-A) \leq \exp(-TS \log(R/4S') + B_5) + |\pi - \xi| \exp(B_6). \quad (14)$$

On va noter  $U := TS \log(R/4S')$  et imposer une dernière série de contraintes, où  $\lambda$  est un nouveau paramètre:

- (C6)  $2B_5 \leq U$ ,
- (C7)  $B_6 \leq \lambda U$ ,
- (C8)  $\log 4 + 2A \leq U$ .

La relation (14) donne alors la minoration désirée:

$$|\pi - \xi| \geq \exp(-(\lambda + 1/2)U). \quad (15)$$

(par (C8)  $2 \exp(-U/2) \leq \exp(-A)$ ; par (C6)  $\exp(-TS(\log R/4S') + B_5)$  est majoré par  $\exp(-U/2)$ ; par (C7)  $\exp(B_6)$  est majoré par  $\exp(\lambda U)$ ; alors (14) s'écrit:

$$2 \exp(-U/2) \leq \exp(-U/2) + |\pi - \xi| \exp(\lambda U)$$

c'est-à-dire  $\exp(-(\lambda + 1/2)U) \leq |\pi - \xi|$ ).

### 3.6. Conclusion

Il reste à choisir les paramètres  $\lambda, K, M, T, S, S', R$  en fonction de  $D_N$  et  $h(\xi)$ , de façon à satisfaire les contraintes (C1) à (C8) et à avoir la meilleure mesure possible. Rappelons les contraintes:

- (C1)  $KM \geq 8TS$ ;
- (C2)  $S' > S$ ;  $R > 4S'$ ;
- (C3)  $T \geq 3$ ;  $S' \geq 4$ ;  $N \leq [S'/2]$ ;
- (C4)  $TS' \geq 24MK$ ;
- (C5)  $TN \geq 6K$ ;
- (C6)  $18T \log eK + 2T \log TN + 106M \log eT(N + S/M) + 16KR/N \leq U$ ;
- (C7)  $TS \log(18S'/S) + T \log TN + 19T \log eK + 83M \log eT(N + S'/M) \leq \lambda U$ ;
- (C8)  $\log 4 + 2D_N(12T \log eK + 62M \log eT(N + S'/M)) + 4D_N Th(\xi) \leq U$ .



On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il existe des réels positifs  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  tels que les paramètres suivants vérifient les contraintes ci-dessus

$$\begin{aligned} T &= [x_1 D_N(\log D_N) N^{-1}], \quad K = [x_2 D_N(\log D_N)], \\ M &= [x_3 D_N(h(\xi) + \log D_N) N^{-1}], \\ S &= [x_4 D_N(h(\xi) + \log D_N)], \quad S' = [x_5 D_N(h(\xi) + \log D_N)], \\ R &= 4eS', \quad \lambda = x_6. \end{aligned}$$

Rappelons (voir [D1]) que des propriétés de  $\varphi$  on déduit les inégalités suivantes, utiles ici:

$$N \leq 7D_N(\log D_N), \quad \log N \leq 5(\log D_N)/2.$$

Il existe alors une constante absolue  $x_7 > 0$  telle que (15) s'écrive:

$$\log|\pi - \xi| \geq -x_7 \frac{D_N^2}{N} (h(\xi) + \log D_N)(\log D_N).$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3. On peut noter que l'on a englobé le cas  $N = 1$  dans le théorème 3 mais que cela n'apporte rien; cela redonne la mesure d'approximation de  $\pi$  qui est déjà contenue dans le théorème 2, et qui remonte essentiellement à P. L. Cijssouw [C1].

## References

- [C1] P. L. Cijssouw, *A transcendence measure for  $\pi$* , dans "Transcendence Theory and Applications" (A. Baker, D. W. Masser ed.), Academic Press, 1977.
- [C2] P. L. Cijssouw, Transcendence measure of exponentials and logarithms of algebraic numbers, *Compositio Math.* 28(2), 1974, 163–178.
- [D1] G. Diaz, Sur l'approximation de  $\pi$  par des nombres algébriques particuliers, *Compositio Math.* 74, 1990, 285–298.
- [D2] G. Diaz, Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles, *J. Number Theory* 31(1), 1989, 1–23.
- [M-W] M. Mignotte, M. Waldschmidt, Linear forms in two logarithms and Schneider's method, *Math. Ann.* 231, 1978, 241–267.
- [P1] P. Philippon, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. France* 114, 1986, 355–383.
- [P2] P. Philippon, Polynômes d'interpolation zur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}[i]$ , dans "Cinquante Ans de Polynômes" (M. Langevin, M. Waldschmidt ed.), Springer 1990.
- [W1] M. Waldschmidt, Transcendence measures for exponentials and logarithms, *J. Austral. Math. Soc. (series A)* 25, 1978, 445–465.
- [W2] M. Waldschmidt, A lower bound for linear forms in logarithms, *Acta Arith.* 37, 1980, 257–283.