COMPOSITIO MATHEMATICA

FRANÇOISE GEANDIER

Déformations à nombre de Milnor constant : quelques résultats sur les polynômes de Bernstein

Compositio Mathematica, tome 77, nº 2 (1991), p. 131-163
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1991__77_2_131_0>

Compositio Mathematica **77**: 131–163, 1991.

Déformations à nombre de Milnor constant: quelques résultats sur les polynômes de Bernstein

FRANÇOISE GEANDIER

Lab de Mathematiques, Université de Nice, Parc Valrose, 06034 Nice cedex, France

Received 14 November 1989; accepted in revised form 6 February 1990

Introduction

On appelle polynôme de Bernstein d'une fonction holomorphe $f(x_1, \ldots, x_n)$, le polynôme unitaire de plus petit degré $b(s)$ de $\mathbf{C}[s]$ tel qu'il existe un opérateur différentiel $P(x, \partial/\partial x, s)$ holomorphe en x et polynomial en s, vérifiant:

$$Pf^{s+1} = b(s)f^s$$

Ce polynôme a été introduit par I. N. Bernstein qui a démontré son existence pour une fonction polynomiale (cf. [Be]). J. E. Björk en a ensuite prouvé l'existence pour une fonction holomorphe dans [Bj]. Puis B. Malgrange a prouvé la rationalité des racines du polynôme de Bernstein dans le cas d'une singularité isolée, en faisant le lien entre ces racines et les valeurs propres de la monodromie locale (cf. [Ma. 1]): plus précisément si α est racine du polynôme de Bernstein, $e^{-2i\pi\alpha}$ est valeur propre de la monodromie; on montre alors la rationalité des racines en utilisant la quasi-unipotence de la monodromie. Dans un article ultérieur B. Malgrange a montré la rationalité des racines du polynôme de Bernstein pour une singularité non nécessairement isolée toujours en associant les racines aux valeurs propres des monodromies (cf. [Ma. 2]). Entretemps M. Kashiwara a obtenu le même résultat en comparant le polynôme de Bernstein de f et d'une désingularisation de f (cf. [K]).

D'autre part, Lê Dũng Tràng et C. P. Ramanujam ont prouvé que lors d'une déformation à nombre de Milnor μ constant d'une singularité isolée d'hypersurface, le type topologique de la singularité est invariant (cf. [Lê-R]). De plus, Lê Dũng Tràng a montré que si deux hypersurfaces à singularité isolée à l'origine ont le même type topologique à l'origine, alors leurs monodromies locales sont conjuguées (cf. [Lê]). Donc, dans une déformation à μ-constant, les valeurs propres de la monodromie sont invariantes. On s'est alors demandé si le polynôme de Bernstein était lui aussi invariant à μ-constant: or il n'en est rien (voir par exemple les calculs de T. Yano dans [Y]): les racines ne sont constantes que modulo les entiers. A. N. Varchenko a été le premier à obtenir des résultats sur le comportement du polynôme de Bernstein dans une déformation à μ-constant: en mettant une filtration sur la cohomologie de la fibre de Milnor, il a prouvé un théorème de semi-continuité de certaines racines du polynôme de Bernstein (cf. [V1]). Ultérieurement, dans [V2], il a montré que la plus petite racine (en valeur absolue) du polynôme de Bernstein est invariante à μ-constant: ce résultat très fort repose sur l'existence d'une structure de Hodge mixte sur la fibration de Milnor prouvée par J. Steenbrink (cf. [S]). Pour démontrer la rationalité des racines du polynôme de Bernstein, M. Kashiwara dans son article [K], calcule la variété caractéristique de $\boldsymbol{D}[s]f^s$ où $\boldsymbol{D}$ est le faisceau des opérateurs différentiels en $\partial/\partial x$ à coefficients holomorphes en x: il en déduit, entre autres résultats, l'existence d'un 'bon opérateur' en s annulant f^s, i.e. un opérateur de la forme $s^m + P_1 s^{m-1} + \cdots + P_m$ où $P_i \in \boldsymbol{D}$ et est de degré inférieur ou égal à i.

Dans une note parue au C.R.A.S. (cf. [G.1]), on a étudié des germes de déformation à un paramètre $\mathbf{y}$ d'une singularité isolée d'hypersurface de $\mathbf{C}^n$ d'équation $F(x, \mathbf{y}) = 0$, et obtenu des résultats d'existence de polynômes de Bernstein et de 'bons opérateurs':

On considère une fonction $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ holomorphe sur un polydisque $W = X \times Y$ de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, de centre l'origine, telle que $F(0) = 0$. Pour tout $\mathbf{y} \in Y$, on note:

$$F_{\mathbf{y}}: \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \rightarrow & F(x_1, \ldots, x_n, \mathbf{y}) \end{array} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathbf{y}} = F_{\mathbf{y}}^{-1}(0).$$

On suppose que pour tout $\mathbf{y} \in Y$, $F_{\mathbf{y}}(0) = 0$ et que Γ_0 est à singularité isolée à l'origine. On note:

(*) $\mathcal{O}_W$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $W = X \times Y$ et $\mathcal{O}_{W,0}$ sa fibre à l'origine.
(*) $\mathcal{D}_{W/Y}$ le faisceau des opérateurs différentiels relatifs: $\mathcal{D}_{W/Y} = \mathcal{O}_W\langle \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n \rangle$.
(*) $b(s)$ le polynôme de Bernstein de F à l'origine: $b(s) = (s+1)\tilde{b}(s)$.
(*) $b_{\mathbf{y}}(s)$ le polynôme de Bernstein de $F_{\mathbf{y}}$ à l'origine: $b_{\mathbf{y}}(s) = (s+1)\tilde{b}_{\mathbf{y}}(s)$.

On a montré dans [G.1] l'existence d'un polynôme de Bernstein dit 'générique' $b_{\text{gén}}(s)$ et, sous l'hypothèse que la déformation est à nombre de Milnor μ constant le long de l'axe des paramètres, l'existence d'un polynôme de Bernstein dit 'en famille' $b_{W/Y}(s)$, et d'un bon opérateur en s 'en famille' dans $\mathcal{D}_{W/Y,0}[s]$ annulant F^s (cf. [G.1] ou §2. Rappels). Dans cet article, on prouve qu'en fait l'existence d'un bon opérateur en s 'en famille' annulant F^s caractérise les déformations à μ-constant:

THÉORÈME 6.1. *Soit F holomorphe sur W polydisque de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ de centre* *l'origine, telle que $F(0) = 0$. On suppose que F_0 admet l'origine comme seul point critique dans X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F définit une déformation à μ-constant.*
(ii) *Il existe un bon opérateur en s 'en famille' dans $\mathscr{D}_{W/Y,0}[s]$ qui annule F^s.*
(iii) *$\mathscr{D}_{W/Y,0}[s]\ F^s$ est un $\mathscr{D}_{W/Y,0}$-module de type fini.*
(iv) *Il existe $\delta(s) \in \mathbf{C}[s]$ non nul tel que $\delta(s)\ F^s \in \mathscr{D}_{W/Y,0}F^{s+1}$.*

Ainsi on peut caractériser les déformations à μ-constant par une équation fonctionnelle du type équation de Bernstein; on remarquera toutefois que l'on prend l'opérateur dans $\mathscr{D}_{W/Y,0}$ et non dans $\mathscr{D}_{W/Y,0}[s]$: le résultat 'μ-constant équivaut à l'existence de $b_{W/Y}(s)$' reste à l'état de conjecture.

D'autre part, on démontre dans cet article que, lors d'une déformation à μ-constant, le polynôme de Bernstein $b_{\mathbf{y}}(s)$ est égal au polynôme de Bernstein générique $b_{\text{gén}}(s)$ pour $\mathbf{y} \neq 0$, plus précisément on a le résultat suivant:

THÉORÈME 7.4. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors il existe un voisinage V de l'origine dans $\mathbf{C}$, contenu dans Y, tel que:*

(i) $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, $b_{\mathbf{y}}(s) = b_{\text{gén}}(s)$.
(ii) $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, *on a les relations de divisibilité suivantes: il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{b}(s) \arrow[dr, dash, "\text{divise}"'] & & & \\
& \tilde{b}_{\text{gén}}(s) \arrow[r, dash, "\text{divise}"] & \tilde{b}_{W/Y}(s) \arrow[r, dash, "\text{divise}"] & \tilde{b}(s)\tilde{b}(s+1)\cdots\tilde{b}(s+q) \\
\tilde{b}_{\mathbf{y}}(s) \arrow[ur, dash, "\text{divise}"] & \tilde{b}_0(s) \arrow[ur, dash, "\text{divise}"] & &
\end{tikzcd}$$

(iii) $\forall \mathbf{y} \in V$, $b)$ *divise* $b(s)b(s+1)\cdots b(s+n-1)$.

Dans [G.2] on calcule explicitement les polynômes de Bernstein $b(s)$, $b_{\text{gén}}(s)$, $b_{W/Y}(s)$ et $b_{\mathbf{y}}(s)$ pour une déformation à μ-constant d'une singularité isolée semi-quasi-homogène: on donne en effet une version relative de l'algorithme de calcul du polynôme de Bernstein d'une singularité isolée semi-quasi-homogène décrit dans [B-G-M]. D'autre part si on ne parvient pas à démontrer la conjecture 'μ-constant équivaut à l'existence de $b_{W/Y}(s)$' on donne néanmoins une caractérisation de l'existence du polynôme de Bernstein 'en famille' $b_{W/Y}(s)$:

THÉORÈME. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Le polynôme de Bernstein 'en famille' $b_{W/Y}(s)$ existe.*
(ii) $(s+1)(\mathscr{D}_{W/Y,0}[s]F^s/\mathscr{D}_{W/Y,0}[s]F^{s+1})$ *est un $\mathscr{D}_{W/Y,0}$ – module de type fini.*

Je tiens à exprimer ma gratitude au professeur Joël Briançon pour ses nombreux conseils et encouragements. Je voudrais aussi remercier Philippe

Maisonobe pour ses critiques avisées et constructives sur le contenu du manuscrit.

1. Définitions

1.1 NOTATIONS

On considère une fonction holomorphe $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ définie sur un polydisque $W = X \times Y$ de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, de centre l'origine, telle que $F(0) = 0$. Pour tout $\mathrm{y} \in Y$, on note:

$$F_{\mathrm{y}}: \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \rightarrow & F(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{y}) \end{array} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathrm{y}} = F_{\mathrm{y}}^{-1}(0).$$

On notera:

(∗) $\mathcal{O}_W$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $W = X \times Y$ et $\mathcal{O}_{W,0}$ sa fibre à l'origine.
(∗) $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X.
(∗) $\mathcal{O}_Y$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Y.
(∗) $\mathcal{D}_W$ le faisceau des opérateurs différentiels sur W.
(∗) $\mathcal{D}_{W/Y} = \mathcal{O}_W\langle \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n \rangle$ le faisceau des opérateurs différentiels relatifs sur W.
(∗) $J(F) = (\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n)\mathcal{O}_W$ l'idéal jacobien relatif de F et $\mathscr{C}$ la courbe de $X \times Y$ définie par l'idéal $J(F)$.
(∗) $J(F_{\mathrm{y}}) = (\partial F_{\mathrm{y}}/\partial x_1, \ldots, \partial F_{\mathrm{y}}/\partial x_n)\mathcal{O}_{X,0}$.
(∗) $b(s)$ le polynôme de Bernstein de F à l'origine.
(∗) $b_{\mathrm{y}}(s)$ le polynôme de Bernstein de F_{y} à l'origine.

1.2. DÉFINITION. On considère la condition (*):

(*) $\forall \mathrm{y} \in Y$, $F_{\mathrm{y}}(0) = 0$ et 0 est le seul point critique de F_{y} dans X.

Si F vérifie la condition (*), alors en particulier 0 est point critique isolé de F_{y} donc le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}/J(F_{\mathrm{y}})$ est de dimension finie $\mu(\mathrm{y})$ nombre de Milnor de Γ_{y} à l'origine. D'autre part la projection:

$$p: \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (x_1, \ldots, x_n, y) & \rightarrow & y \end{array}$$

est plate en 0: en effet, puisque l'idéal $(\partial F_0/\partial x_1, \ldots, \partial F_0/\partial x_n)\mathcal{O}_{X,0}$ définit l'origine dans $\mathbf{C}^n$, la suite $(\partial F_0/\partial x_1, \ldots, \partial F_0/\partial x_n)$ est régulière dans $\mathcal{O}_{X,0}$ donc les relations entre $\partial F_0/\partial x_1, \ldots, \partial F_0/\partial x_n$ sont triviales, par conséquent elles se prolongent en relations entre $\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n$: on en déduit que p est plate en 0 (cf. [Tj] prop. 2.1 et 2.2). Donc, d'après [B], $\forall y \in Y$ on a: $\mu(y) = \mu(0)$.

Réciproquement, on a le résultat suivant (cf. [T]): soit $(\Gamma, 0)$ un germe d'hypersurface de $\mathbf{C}^{n+1}$; on suppose qu'il existe une section continue de la projection q:

$$q: \begin{array}{l} \Gamma \quad\quad\quad \to \mathbf{C} \\ (x_1, \ldots, x_n, y) \to y \end{array}$$

i.e. une application:

$$\begin{array}{l} \mathbf{C} \to \quad \Gamma \\ y \to (\sigma(y), y), \end{array}$$

telle que $\sigma(\mathbf{y})$ soit point critique isolé de la fibre $\Gamma_{\mathbf{y}} = q^{-1}(\mathbf{y})$ à nombre de Milnor constant, pour $\mathbf{y}$ voisin de 0. Alors σ est analytique et, dans les nouvelles coordonnées $(x - \sigma(y), y)$, une équation de $(\Gamma, 0)$ admet un représentant F, défini dans un polydisque $X \times Y$ de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ de centre l'origine, qui vérifie la condition (*).

On dira donc que F *définit une déformation à μ-constant de Γ_0 le long de l'axe des paramètres y* dans $X \times Y$ si F vérifie la condition (*).

1.3. $\mathcal{O}_W[1/F, s]F^s$

On considère le faisceau $\mathcal{O}_W[1/F, s]F^s$, muni d'une structure de $\mathcal{D}_{W/Y}[s]$-Module à gauche de la façon suivante: Soient U un ouvert de W, $a \in \mathcal{O}_W(U)$ et $k, p \in \mathbf{N}$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{a}{F^k} s^p F^s\right) = s^p \left(\frac{1}{F^k}\frac{\partial a}{\partial x_j} + (s-k)\frac{a}{F^{k+1}}\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) F^s \quad \text{(cf. (Ma. 1]).}$$

Notons, pour $i \in \mathbf{N}$, $\xi_i = s(s-1)\ldots(s-i+1)(1/F^i)F^s$ et $\mathcal{F}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_W$-Modules de $\mathcal{O}_W[1/F, s]F^s$ engendré par $(\xi_i)_{i \in \mathbf{N}}$. Alors on a:

(i) $\mathcal{F}$ est stable sous l'action de $\mathcal{D}_{W/Y}[s]$:
$(\partial/\partial x_j)\xi_i = (\partial F/\partial x_j)\xi_{i+1}$ et $s\xi_i = i\xi_i + F\xi_{i+1}$.
(ii) $\mathcal{F} = \sum_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{D}_{W/Y}\xi_i = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{O}_W \xi_i$. (cf. [B-G-M]).

1.4. DÉFINITION. Soit $P \in \mathcal{D}_{W,0}[s]$ on note $d(P)$ son degré total en s, $\partial/\partial x_1$,

$\ldots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y$. On dit que P est un bon opérateur en s (resp. en $\partial/\partial y$) s'il s'écrit sous la forme:

$$P = s^p + P_1 s^{p-1} + \cdots + P_p \text{ où } P_i \in \mathscr{D}_{W,0} \text{ et } d(P_i) \leqslant i.$$

$$(\text{resp. } P = (\partial/\partial y)^r + P_1(\partial/\partial y)^{r-1} + \cdots + P_r \text{ où } P_i \in \mathscr{D}_{W/Y,0}[s] \text{ et } d(P_i) \leqslant i.)$$

2. Rappels

On rappelle ici des résultats démontrés dans [G.1]:

2.1. THÉORÈME.

(i) *L'idéal formé par les polynômes $\delta(s) \in \mathbf{C}[s]$ vérifiant:* '$\delta(s)F^s \in \mathscr{D}_{W/Y,0}[1/y][s]F^{s+1}$' *est non nul. On note $b_{\text{gén}}(s)$ son générateur unitaire et on l'appelle polynôme de Bernstein générique de F à l'origine.*

(ii) *Il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ tel que: $b_{\text{gén}}(s)$ divise $b(s)b(s+1)\cdots b(s+m)$. Ainsi $b_{\text{gén}}(s)$ est à racines rationnelles.*

2.2. PROPOSITION. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors il existe un bon opérateur Q en $\partial/\partial y$, qui annule F^s.*

2.3. THÉORÈME. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors on a:*

(i) *L'idéal formé par les polynômes $\gamma(s) \in \mathbf{C}[s]$ vérifiant:* '$\gamma(s)F^s \in \mathscr{D}_{W/Y,0}[s]F^{s+1}$', *est non nul. On note $b_{W/Y}(s)$ son générateur unitaire et on l'appelle polynôme de Bernstein 'en famille' de F à l'origine.*

(ii) *Il existe un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $b_{W/Y}(s)$ divise $b(s)b(s+1)\cdots b(s+p)$. Ainsi $b_{W/Y}(s)$ est à racines rationnelles.*

2.4. THÉORÈME. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors il existe un bon opérateur en s 'en famille' $H \in \mathscr{D}_{W/Y,0}[s]$ annulant F^s, i.e.:*

(1) $H = s^r + H_1 s^{r-1} + \cdots + H_r$ *où* $H_i \in \mathscr{D}_{W/Y,0}$ *et* $d(H_i) \leqslant i$.

(2) $HF^s = 0$.

3. Cohérence de $\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s$ et $\mathscr{N}$

3.1. NOTATION

On notera $\mathscr{N}$ le $\mathscr{D}_{W/Y}$-Module à gauche:

$$\mathscr{N} = (s+1)(\mathscr{D}_{W/Y}(s)F^s/\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^{s+1})$$

3.2. PROPOSITION. *Soit F holomorphe sur $X \times Y$, s'annulant à l'origine. Alors*:

$$\mathcal{N} \cong \mathcal{D}_{W/Y}[s]F^s/\mathcal{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s.$$

Preuve. On considère l'homomorphisme de faisceaux ψ défini sur les fibres de la manière suivante: Si $z \in X \times Y$,

$$\psi_z: \begin{array}{l} \mathcal{D}_{W/Y,z}[s]F^s/\mathcal{D}_{W/Y,z}[s](F, J(F))F^s \to \mathcal{N}_z \\ PF^s \bmod \mathcal{D}_{W/Y,z}[s](F, J(F))F^s \quad \to (s+1)(PF^s \bmod \mathcal{D}_{W/Y,z}[s]F^{s+1}) \end{array}$$

ψ_z est bien définie, en effet: soit $P \in \mathcal{D}_{W/Y,z}[s](F, J(F))$:

$$P = Q_0 F + \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \text{où } Q_i \in \mathcal{D}_{W/Y,z}[s].$$

Alors,

$$(s+1)PF^s = \left((s+1)Q_0 + \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) F^{s+1} \in \mathcal{D}_{W/Y,z}[s]F^{s+1}.$$

De plus il est clair que ψ_z est surjective. Considérons maintenant $P \in \mathcal{D}_{W/Y,z}[s]$ tel que:

$$(s+1)PF^s = QF^{s+1} \quad \text{où } Q \in \mathcal{D}_{W/Y,z}[s]$$

Ecrivons Q sous la forme:

$$Q = (s+1)R + q_0 + \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $q_0 \in \mathcal{O}_z$, $Q_i \in \mathcal{D}_{W/Y,z}$ et où $R \in \mathcal{D}_{W/Y,z}[s]$. On obtient alors:

$$(s+1)PF^s = (s+1)RF^{s+1} + q_0 F^{s+1} + (s+1) \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial F}{\partial x_i} F^s$$

d'où en substituant -1 à s: $q_0 \cdot 1 = 0$, i.e. $q_0 = 0$. Ainsi,

$$PF^s = \left(RF + \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) F^s$$

c'est-à-dire $PF^s \in \mathcal{D}_{W/Y,z}[s](F, J(F))F^s$: ψ_z est donc injective. Donc ψ est un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{D}_{W/Y}[s]F^s/\mathcal{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s$ sur $\mathcal{N}$.

3.3. PROPOSITION. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors*:

(1) $\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s$ *est* $\mathscr{D}_{W/Y}$*-cohérent.*
(2) $\mathscr{N}$ *est* $\mathscr{D}_{W/Y}$*-cohérent.*

Preuve. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y}$ le faisceau des opérateurs différentiels relatifs de degré $\leqslant k$. Soit K un polydisque contenu dans W: $\mathscr{D}_{W/Y}(K)$ est noethérien (à gauche et à droite); on en déduit alors, grâce au théorème d'Oka-Cartan, que $\mathscr{D}_{W/Y}$ est un faisceau d'anneaux cohérent (cf. [Ma-L] I.3.2): on va alors pouvoir utiliser le critère de cohérence suivant:

Critére. Soit N un $\mathscr{D}_{W/Y}$-Module admettant une bonne filtration, i.e. N possède une suite croissante de $\mathscr{O}_W$-Modules cohérents $(N_k)_{k \in \mathbf{N}}$ dont la réunion est N et qui vérifient la condition suivante: (*) *Il* existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y} N_{k_0} = N_{k_0+k}$.

alors N est $\mathscr{D}_{W/Y}$-cohérent.

On démontre ce critère en prouvant que, si N admet une bonne filtration, alors il vérifie les hypothèses de la proposition I.3.5 de [Ma-L] donc est $\mathscr{D}_{W/Y}$-cohérent (la proposition I.3.5 est donnée pour $\mathscr{D}_W$ dans [Ma-L] mais s'étend sans difficulté au cas des opérateurs différentiels relatifs grâce au caractère noethérien de $\mathscr{D}_{W/Y}(K)$).

Appliquons ce critère à $\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s$: d'après le théorème 2.4, lorsque F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres, il existe un opérateur H de $\mathscr{D}_{W/Y}[s]$ annulant F^s de la forme:

$$s^r + H_1 s^{r-1} + \cdots + H_r \quad \text{où } H_i \in \mathscr{D}_{W/Y}.$$

Notons $\mathscr{D}_{W/Y, \leqslant r-1}[s] = \mathscr{D}_{W/Y} + s\mathscr{D}_{W/Y} + \cdots + s^{r-1}\mathscr{D}_{W/Y}$, alors $\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s = \mathscr{D}_{W/Y, \leqslant r-1}[s]F^s$. Filtrons par le degré des opérateurs différentiels et considérons:

$$\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y \leqslant r-1}[s]F^s = (\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y} + \cdots + s^{r-1}\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y})F^s.$$

Alors $(\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y \leqslant r-1}[s]F^s)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{O}_W$-Modules cohérents dont la réunion est $\mathscr{D}_{W/Y, \leqslant r-1}[s]F^s = \mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s$, en effet: pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y \leqslant r-1}[s]F^s$ est contenu dans $\bigoplus_{j=0}^{k+r-1} \mathscr{O}_W \xi_j$ donc est $\mathscr{O}_W$-cohérent puisque c'est un sous-Module de type fini d'un $\mathscr{O}_W$-Module cohérent. D'autre part, pour tous k, $j \in \mathbf{N}$ on a $\mathscr{D}^{(j)}_{W/Y} \mathscr{D}^{(k)}_{W/Y \leqslant r-1}[s]F^s = \mathscr{D}^{(k+j)}_{W/Y \leqslant r-1}[s]F^s$, donc $(\mathscr{D}^{(k)}_{W/Y \leqslant r-1}[s]F^s)_{k \in \mathbf{N}}$ est une bonne filtration de $\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s$.

De plus, d'après la proposition 3.2, $\mathscr{N} \cong \mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s / \mathscr{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s$; or $\mathscr{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s$ est égal à $\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^{s+1} + \mathscr{D}_{W/Y} J(F)F^s$ donc est de type fini sur $\mathscr{D}_{W/Y}$: comme il est inclus dans le $\mathscr{D}_{W/Y}$-Module cohérent $\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s$, on en déduit qu'il est lui-même cohérent: donc $\mathscr{N}$ est $\mathscr{D}_{W/Y}$-cohérent.

4. Classification des $\mathscr{D}_{W/Y}$-Modules cohérents à support l'axe des paramètres

4.1. NOTATIONS

On notera:

*Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \; ; \; \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \; ; \; |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

*ε_i le n-uplet $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où 1 se trouve à la $i^{\text{ème}}$ position.

*$\Omega^k_{W/Y}$ le faisceau des k-formes différentielles relatives à coefficients dans $\mathcal{O}_W$.

*$\mathscr{M} = (x_1, \ldots, x_n)\mathcal{O}_{W,0}$.

4.2. DEFINITION. Soit N un $\mathscr{D}_{W/Y}$-Module à gauche. On appelle complexe de De Rham (relatif) de N le faisceau de complexes suivant:

$$0 \to N \to \Omega^1_{W/Y} \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} N \to \Omega^2_{W/Y} \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} N \to \cdots \to \Omega^n_{W/Y} \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} N \to 0$$

dont la différentielle d est définie par:

$$d_k\colon \Omega^k_{W/Y} \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} N \to \Omega^{k+1}_{W/Y} \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} N$$

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k} \otimes m \to \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} m$$

On notera $H^k(N)$ le $k^{i\text{ème}}$ faisceau de groupes de cohomologie de De Rham de N.

4.3. DÉFINITION. Soit M un $\mathscr{D}_{W/Y,0}$-module à gauche. On dit que M est à support l'axe des paramètres si:

$$\forall m \in M, \qquad \exists k \in \mathbf{N} \text{ tel que } \mathscr{M}^k m = 0.$$

4.4. PROPOSITION. *Soit A une partie non vide de* $\mathbf{N}^n$ *vérifiant:*

$$\begin{cases} A + \mathbf{N}^n = A \\ \mathbf{N}^n - A \text{ est de cardinal fini } c(A) \end{cases}$$

et soit $I(A)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{W,0}$ engendré par $\{x^\beta,\ \beta \in A\}$: $c(A) = rg_{C\{y\}}(\mathcal{O}_{W,0}/I(A))$. Alors on a un isomorphisme:

$$\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}I(A) \cong (\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M})^{c(A)}$$

Preuve. Par récurrence sur $c(A)$.

Si $c(A) = 1$: alors $\mathbf{N}^n - A = \{(0, \dots, 0)\}$ donc $I(A) = \mathcal{M}$.

Si $c(A) \geqslant 2$: hypothèse de récurrence: Pour toute partie non vide B de $\mathbf{N}^n$ vérifiant:

$$\begin{cases} B + \mathbf{N}^n = B. \\ \mathbf{N}^n - B \text{ est de cardinal fini } c(B) \leqslant c(A) - 1. \end{cases}$$

on a:

$$\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}I(B) \cong (\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M})^{c(B)}$$

Comme $c(A) \geqslant 2$, il existe $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que: $\alpha \notin A$ et $\forall i = 1, \dots, n$, $\alpha + \varepsilon_i \in A$.

Considérons l'homomorphisme de $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-Modules à gauche:

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M} &\to \mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}I(A) \\ P \bmod \mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M} &\to Px^\alpha \bmod \mathcal{D}_{W/Y,0}I(A) \end{aligned}$$

ψ est bien définie: en effet, $\forall i = 1, \dots, n$, $\alpha + \varepsilon_i \in A$, ce qui se traduit par $\mathcal{M}x^\alpha \subset I(A)$. Considérons maintenant l'homomorphisme de $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-Modules à gauche:

$$\begin{aligned} \omega\colon \mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}I(A) &\to \mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}I(A \cup \{\alpha\}) \\ P \bmod \mathcal{D}_{W/Y,0}I(A) &\to P \bmod \mathcal{D}_{W/Y,0}I(A \cup \{\alpha\}) \end{aligned}$$

ω est bien définie et surjective. On va montrer que la suite (*) est exacte scindée:

$$(*) \quad 0 \to \mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M} \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}I(A) \xrightarrow{\omega} \mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}I(A \cup \{\alpha\}) \to 0$$

ψ est injective puisque $x^\alpha \notin I(A)$. De plus il est clair que $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\omega$ puisque $A \cup \{\alpha\}$ est une réunion disjointe. Donc la suite (*) est exacte. On va maintenant construire une rétraction de ψ:

Soit χ: $\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}I(A) \to \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$

$$Q \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}I(A) \to \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} Q\,\partial^\alpha \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$$

χ est bien définie: en effet $\alpha \notin A$ donc $\mathscr{D}_{W/Y,0}I(A)\partial^\alpha$ est contenu dans $\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$. Montrons que $\chi \circ \psi$ est l'identité sur $\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$; soit $P \in \mathscr{D}_{W/Y,0}$, on a:

$$\chi \circ \psi(P \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} Px^\alpha\,\partial^\alpha \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$$

or $x^\alpha\,\partial^\alpha$ $\quad \equiv (-1)^{|\alpha|}\alpha! \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$

donc $\chi \circ \psi(P \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}) = P \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$. La suite (*) est donc exacte scindée, on en déduit:

$$\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}I(A) \cong (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}) \times (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}I(A \cup \{\alpha\}))$$

Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence à $B = A \cup \{\alpha\}$:
$c(B) = c(A) - 1$ donc

$$\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}I(B) \cong (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^{c(A)-1}$$

d'où l'isomorphisme:

$$\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}I(A) \cong (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^{c(A)}.$$

4.5. THÉORÈME. (1) *Soit M un $\mathscr{D}_{W/Y,0}$-module à gauche non nul de type fini à support l'axe des paramètres. Alors il existe $p \in \mathbf{N}$ et t entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ vérifiant $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_t$, tels que:*

(i) $M \cong (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^p \oplus (\bigoplus_{i=1}^t \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i}))$.
(ii) $H^k(M) = 0$ *pour* $k \neq n$.
(iii) $H^n(M) \cong (\mathbf{C}\{y\})^p \oplus (\bigoplus_{i=1}^t \mathbf{C}\{y\}/y^{\alpha_i})$.

(2) *Soit M un $\mathscr{D}_{W/Y,0}$-module à gauche de type fini à support l'axe des paramètres; on considère un endomorphisme u de $\mathscr{D}_{W/Y,0}$-modules à gauche de M, alors u commute avec la différentielle du complexe de De Rham relatif et ainsi induit un endomorphisme $H^k(u)$ de $H^k(M)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. On a alors:*

$$u = 0 \Leftrightarrow H^n(u) = 0.$$

Preuve. (1) Soit $(m_1, \ldots, m_r)$ un système de générateurs de M: M étant à support l'axe des paramètres il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que: $\mathscr{M}^{\mathrm{N}} m_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$. On a ainsi une surjection:

$$(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}^N)^r \to M$$

D'autre part, avec les notations de la proposition 4.4, $\mathscr{M}^N = I(A_N)$, où A_N désigne l'ensemble: $\{\beta \in \mathbf{N}^n, |\beta| \geqslant N\}$. On a donc un isomorphisme:

$$\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}^N \cong (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^{c(A_N)}$$

d'où la surjection $(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^q \xrightarrow{\psi} M$ avec $q = r \cdot c(A_N)$

$$(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^q$$

est un $(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})$-module noethérien, donc on a une suite exacte de la forme:

$$(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^m \xrightarrow{h} (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^q \xrightarrow{\psi} M \to 0$$

où

$$h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{W/Y,0}}[(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^m, (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^q].$$

Or

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{W/Y,0}}[(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^m, (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^q]$$

est isomorphe à

$$[\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{W/Y,0}}(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}, \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})]^{mq}.$$

D'autre part,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{W/Y,0}}(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}, \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}) \cong \mathbf{C}\{y\},$$

en effet l'application:

$$\lambda\colon \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M} \to \mathbf{D}_{W/Y,0} = \mathscr{O}_{Y,0}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$$

$$\sum \partial^\gamma p_\gamma(x_1, \ldots, x_n, y) \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M} \to \sum \partial^\gamma p_\gamma(0, \ldots, 0, y)$$

est un isomorphisme de $\mathbf{D}_{W/Y,0}$-modules et l'homomorphisme de $\mathbf{C}\{y\}$-modules qui à un endomorphisme g de $\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$ associe $\lambda[g(1 \bmod \mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})]$ fournit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{W/Y,0}}(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}, \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})$ sur $\mathbf{C}\{y\}$. Ainsi l'homomorphisme h est entièrement déterminé par la donnée d'une matrice Λ de dimensions $q \times m$ à coefficients dans $\mathbf{C}\{y\}$. Or $\mathbf{C}\{y\}$ est un anneau principal donc il existe une matrice carrée Φ de dimensions $m \times m$ et une matrice carrée Σ de dimensions $q \times q$, à coefficients dans $\mathbf{C}\{y\}$ et inversibles, telles que:

$$\Sigma\Lambda\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} y^{\alpha_1} & & & & & \\ & y^{\alpha_2} & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & y^{\alpha_t} & & \\ & & & & 0 & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice $\Sigma\Lambda\Phi^{-1}$ définit un homomorphisme ω de $(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^m$ dans $(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^q$ qui vérifie: $\mathrm{Im}\,\omega = \bigoplus_{i=1}^t y^{\alpha_i}(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})$. De même Φ définit un automorphisme ϕ de $(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^m$ et Σ définit un automorphisme σ de $(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^q$. On a ainsi le diagramme commutatif suivant dont les lignes horizontales sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
\left(\dfrac{\mathscr{D}_{W/Y,0}}{\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}}\right)^m & \xrightarrow{h} & \left(\dfrac{\mathscr{D}_{W/Y,0}}{\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}}\right)^q & \xrightarrow{\psi} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \sigma & & \downarrow \chi & & \\
\left(\dfrac{\mathscr{D}_{W/Y,0}}{\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}}\right)^m & \xrightarrow{\omega} & \left(\dfrac{\mathscr{D}_{W/Y,0}}{\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}}\right)^q & \xrightarrow{\pi} & \left(\dfrac{\mathscr{D}_{W/Y,0}}{\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}}\right)^p \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^t \dfrac{\mathscr{D}_{W/Y,0}}{\mathscr{D}_{W/Y,0}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i})}\right) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où χ est définie par $\chi \circ \psi = \pi \circ \sigma$. comme ϕ et σ sont bijectives, on en déduit que χ l'est également. Donc

$$M \cong (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^p \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^t \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i})\right).$$

Pour déterminer $H^k(M)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, il suffit donc de calculer

$$H^k(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}) \text{ et } H^k(\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i}));$$

pour cela il est facile de constater que le complexe de De Rham de $\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M}$ est isomorphe au complexe de Koszul de $\mathbf{D}_{W/Y,0}$ relativement à

$\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$ via l'isomorphisme λ entre $\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M}$ et $\mathbf{D}_{W/Y,0}$: or la suite $(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ est régulière dans $\mathbf{D}_{W/Y,0}$ donc le complexe de Koszul est exact en degré $k \neq n$. On en déduit que $H^k(\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M}) = 0$ pour $k \neq n$.

$$\text{de plus } H^n(\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}\mathcal{M}) \cong \mathbf{D}_{W/Y,0}\Big/\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{D}_{W/Y,0} \cong \mathbf{C}\{y\}.$$

De même le complexe de De Rham de $\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}(\mathcal{M}, y^\alpha)$ est isomorphe au complexe de Koszul de $\mathbf{D}_{W/Y,0}/y^\alpha\mathbf{D}_{W/Y,0}$; d'où $H^k(\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}(\mathcal{M}, y^\alpha)) = 0$ pour $k \neq n$ et $H^n(\mathcal{D}_{W/Y,0}/\mathcal{D}_{W/Y,0}(\mathcal{M}, y^\alpha)) \cong \mathbf{C}\{y\}/y^\alpha$ et (1) est démontré.

(2) On considère M un $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module à gauche de type fini à support l'axe des paramètres et u un endomorphisme de M. Il est clair que si $u = 0$, alors $H^n(u) = 0$. Supposons maintenant que $H^n(u) = 0$: on peut supposer M non nul sinon le résultat est évident. Soit i: $u(M) \to M$ l'injection canonique et v l'homomorphisme de M dans $u(M)$ défini par $u = i \circ v$. On a alors la suite exacte de $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-modules:

$$0 \to \operatorname{Ker} u \to M \xrightarrow{v} u(M) \to 0$$

v commutant avec la différentielle du complexe de De Rham relatif, induit un homomorphisme sur les complexes de De Rham: on obtient ainsi une suite exacte courte de complexes dont on tire la suite exacte longue de cohomologie:

$$\cdots \to H^{n-1}(u(M)) \to H^n(\operatorname{Ker} u) \to H^n(M) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(u(M)) \to 0$$

En particulier $H^n(u(M)) = \operatorname{Im} H^n(v)$. D'autre part de la suite exacte:

$$0 \to u(M) \xrightarrow{i} M \to M/u(M) \to 0$$

on tire la suite exacte de cohomologie:

$$\cdots \to H^{n-1}(M/u(M)) \to H^n(u(M)) \xrightarrow{H^n(i)} H^n(M) \to H^n(M/u(M)) \to 0$$

Or $M/u(M)$ est un $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module de type fini à support l'axe des paramètres, tout comme M, donc d'après (1), on a: $H^{n-1}(M/u(M)) = 0$, on en déduit que $H^n(i)$ est injective. De plus $H^n(u) = H^n(i) \circ H^n(v) = 0$ donc $H^n(v) = 0$ d'où $H^n(u(M)) = 0$. D'autre part $u(M)$ est un sous-module du $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module noethérien à support l'axe des paramètres M donc $u(M)$ est un $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module de type fini à support l'axe des paramètres, donc $H^n(u(M)) = 0$ entraîne $u(M) = 0$ d'après (1), par conséquent $u = 0$.

4.6. THÉORÈME. *Soit N un $\mathscr{D}_{W/Y}$-Module cohérent non nul à support l'axe des paramètres. Alors il existe $p \in \mathbf{N}$, t entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ vérifiant $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_t$, et un polydisque ouvert $U \times V$ contenu dans $W = X \times Y$, de centre l'origine, tels que:*

(1) $N \mid U \times V \cong (\mathscr{D}_{W/Y}/\mathscr{D}_{W/Y}\mathscr{M})^p \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathscr{D}_{W/Y}/\mathscr{D}_{W/Y}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i})\right) \mid U \times V.$

(2) $N \mid U \times V - \{0\} \cong (\mathscr{D}_{W/Y}/\mathscr{D}_{W/Y}\mathscr{M})^p \mid U \times V - \{0\}.$

(3) $H^k(N) \mid U \times V = 0$ pour $k \neq n$.

(4) $H^n(N) \mid \{0\} \times V - \{0\} \cong \mathscr{O}_Y^p \mid V - \{0\}.$

Preuve. N étant $\mathscr{D}_{W/Y}$-cohérent, N_0 est de type fini sur $\mathscr{D}_{W/Y,0}$; de plus N étant à support l'axe des paramètres $\{0\} \times Y$, grâce au théorème des zéros on en déduit que N_0 est à support l'axe des paramètres au sens de la définition 4.3: alors d'après le théorème 4.5, on a:

$$N_0 \cong (\mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}\mathscr{M})^p \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathscr{D}_{W/Y,0}/\mathscr{D}_{W/Y,0}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i})\right)$$

Considérons le $\mathscr{D}_{W/Y}$-Module:

$$\mathscr{S} = (\mathscr{D}_{W/Y}/\mathscr{D}_{W/Y}\mathscr{M})^p \oplus (\textstyle\bigoplus_{i=1}^{t} \mathscr{D}_{W/Y}/\mathscr{D}_{W/Y}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i})):$$

$\mathscr{S}$ est $\mathscr{D}_{W/Y}$-cohérent. On a ainsi deux $\mathscr{D}_{W/Y}$-Modules cohérents dont les fibres à l'origine sont isomorphes: il existe donc un polydisque $U \times V$ contenu dans $X \times Y$ de centre l'origine tel que: $N \mid U \times V \cong \mathscr{S} \mid U \times V$. Pour $z \in X \times Y$ non nul, $1 \in \mathscr{D}_{W/Y,z}(\mathscr{M}, y^{\alpha_i})$ pour tout $i = 1, \ldots, t$ donc on a

$$N \mid U \times V - \{0\} \cong (\mathscr{D}_{W/Y}/\mathscr{D}_{W/Y}\mathscr{M})^p \mid U \times V - \{0\}.$$

D'autre part, d'après le théorème 4.5 on a:

$$H^k(N) \mid U \times V = 0 \text{ pour } k \neq n \quad \text{et}$$
$$H^n(N) \mid \{0\} \times V \cong \mathscr{O}_Y^p \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathscr{O}_Y/y^{\alpha_i}\mathscr{O}_Y\right) \mid \{0\} \times V.$$

Or pour $\mathbf{z} = (0, \mathbf{y}) \in \{0\} \times V - \{0\}$, on a:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathscr{O}_Y/y^{\alpha_i}\mathscr{O}_Y\right)_{\mathbf{z}} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathscr{O}_{Y,\mathbf{y}}/y^{\alpha_i}\mathscr{O}_{Y,\mathbf{y}} = 0$$

d'où $H^n(N) \mid \{0\} \times V - \{0\} \cong \mathscr{O}_Y^p \mid V - \{0\}$.

5. Division à μ-constant

5.1. NOTATION

On note $\mathbf{D}_{W/Y}$ le faisceau des opérateurs différentiels relatifs à coefficients dans $\mathcal{O}_Y$:

$$\mathbf{D}_{W/Y} = \mathcal{O}_Y\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$$

5.2. LEMME. *Soit F holomorphe sur $W = X \times Y$. On suppose que $F_0(0) = 0$ et que 0 est le seul point critique de F_0 dans X. Alors $\mathcal{O}_{W,0}/J(F)\mathcal{O}_{W,0}$ est un $\mathbf{C}\{y\}$-module libre de rang $\mu(0)$: il existe donc un $\mathbf{C}\{y\}$-module E_0 isomorphe à $\mathcal{O}_{W,0}/J(F)\mathcal{O}_{W,0}$ tel que*

$$\mathcal{O}_{W,0} = E_0 \oplus J(F)\mathcal{O}_{W,0}$$

Preuve. L'idéal $(\partial F_0/\partial x_1, \ldots, \partial F_0/\partial x_n)$ définit l'origine dans $\mathbf{C}^n$ donc la projection $p: \mathscr{C} \to \mathbf{C}$ de la courbe des zéros de $J(F)$ sur l'axe des paramètres est finie et plate en 0 (cf. 1.2), c'est-à-dire $\mathcal{O}_{W,0}/J(F)\mathcal{O}_{W,0}$ est un $\mathbf{C}\{y\}$-module plat donc libre, et de rang $\mu(0)$ d'après le lemme de Nakayama.

On va maintenant construire, sous l'hypothèse que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres, un $\mathcal{O}_Y$-Module E de base $\{0\} \times Y$ tel qu'on ait une 'ré-écriture':

$$\bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{O}_W \xi_i \mid \{0\} \times Y = \sum \mathscr{D}_{W/Y} \xi_i \mid \{0\} \times Y$$
$$= \left(\bigoplus_{j \geqslant 0} \mathbf{D}_{W/Y} E \xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y} J(F) F^s \right) \mid \{0\} \times Y$$

et des sous $\mathcal{O}_Y$-Modules Z et Z' de $\bigoplus_{j \geqslant 0} E\xi_j$ tels que $H^n(\mathcal{N}) \mid \{0\} \times Y \cong Z'/Z$.

5.3. PROPOSITION. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors il existe un polydisque de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ de centre l'origine (que l'on notera encore $X \times Y$) sur lequel F est définie, et un $\mathcal{O}_Y$-Module E de base $\{0\} \times Y$, isomorphe à $(\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W) \mid \{0\} \times Y$ qui vérifient:*

(i) $E \cong \mathcal{O}_Y^{\mu}$.
(ii) $\mathcal{O}_W \mid \{0\} \times Y = E \oplus (J(F) \mid \{0\} \times Y)$.

Preuve. Comme on a une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres, $J(F)$ définit $\{0\} \times Y$ donc $\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W$ est à support $\{0\} \times Y$. De plus la projection $p: \mathscr{C} \to \mathbf{C}$ de la courbe des zéros de $J(F)$ sur l'axe des paramètres est finie en 0 donc $p_*(\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W)$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent d'après le théorème des morphismes finis. Or $p_*(\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W)$ s'identifie à $\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W \mid \{0\} \times Y$

puisque $\mathscr{C} = \{0\} \times Y$ donc $\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W \mid \{0\} \times Y$ est $\mathcal{O}_Y$-cohérent. De plus d'après le lemme 5.2 $\mathcal{O}_{W,0}/J(F)\mathcal{O}_{W,0}$ est un $\mathbf{C}\{y\}$-module de rang $\mu(0) = \mu$ donc, quitte à restreindre Y, on a: $\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W \mid \{0\} \times Y \cong \mathcal{O}_Y^{\mu}$, puisque les fibres à l'origine de ces deux $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents sont isomorphes.

Comme $\mathcal{O}_W/J(F)\mathcal{O}_W \mid \{0\} \times Y$ est libre, la suite exacte de $\mathcal{O}_W$-Modules suivante:

$$0 \to J(F) \mid \{0\} \times Y \to \mathcal{O}_W \mid \{0\} \times Y \to \mathcal{O}_W/J(F) \mid \{0\} \times Y \to 0$$

est scindée; il existe donc un $\mathcal{O}_Y$-Module E, isomorphe à $\mathcal{O}_W/J(F) \mid \{0\} \times Y$, tel qu'on ait:

$$\mathcal{O}_W \mid \{0\} \times Y = E \oplus (J(F) \mid \{0\} \times Y).$$

5.4. PROPOSITION. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors on a:*

(i) *Soit* $z \in \{0\} \times Y$.

(*) pour $i \geqslant 1$, $\mathcal{O}_{W,z}\xi_i \subset \mathscr{D}_{W/Y,z}\xi_i \subset \mathbf{D}_{W/Y,z}E_z\xi_i \oplus \mathscr{D}_{W/Y,z}\xi_{i-1}$.

(*) *pour* $i = 0$, $\mathcal{O}_{W,z}F^s \subset \mathscr{D}_{W/Y,z}F^s \subset \mathbf{D}_{W/Y,z}E_zF^s \oplus \mathscr{D}_{W/Y,z}J(F)F^s$.

(ii) $$\bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{O}_W\xi_i \mid \{0\} \times Y = \sum \mathscr{D}_{W/Y}\xi_i \mid \{0\} \times Y = \left(\bigoplus_{j \geqslant 0} \mathbf{D}_{W/Y}E\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y}J(F)F^s\right)\Bigg| \{0\} \times Y.$$

(iii) *On a une injection de* $\mathscr{D}_{W/Y}[s] \mid \{0\} \times Y$-Modules:

$$\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s \mid \{0\} \times Y \hookrightarrow \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}_W\xi_i \mid \{0\} \times Y \hookrightarrow \left(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y}E\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y}J(F)F^s\right)\Bigg| \{0\} \times Y$$

où r est le degré en s du bon opérateur H annulant F^s (cf. 2.4).

Preuve. (i) Soit $z \in \{0\} \times Y$ et $P \in \mathscr{D}_{W/Y,z}$: $P = \sum_{\gamma \in N^n} \partial^\gamma p_\gamma$ où $p_\gamma \in \mathcal{O}_{W,z}$. D'après la proposition 5.3 on a:

$$\mathcal{O}_{W,z} = E_z \oplus J(F)\mathcal{O}_{W,z},$$

donc pour tout γ, p_γ s'écrit: $p_\gamma = q_\gamma + \sum_{j=1}^{n} r_\gamma^{(j)} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}$,

où $q_\gamma \in E_z$ est unique et $r_\gamma^{(j)} \in \mathcal{O}_{W,\dot{z}}$.

Ainsi, pour $i \geqslant 1$ on a

$$P\xi_i = \left(\sum \partial^\gamma q_\gamma\right) \xi_i + \left(\sum \partial^\gamma \sum_{j=1}^{n} r_\gamma^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \xi_{i-1}.$$

et pour $i = 0$,

$$PF^s = \left(\sum \partial^\gamma q_\gamma\right) F^s + \left(\sum \partial^\gamma \sum_{j=1}^{n} r_\gamma^{(j)} \frac{\partial F}{\partial x_j}\right) F^s.$$

On montre ensuite que les sommes en question sont directes en utilisant le résultat de [Y]:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_{\mathscr{D}_{W/Y,0}} F^s &= \{P \in \mathscr{D}_{W/Y,0} / PF^s = 0\} \\ &= \mathscr{D}_{W/Y,0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i};\ i, j = 1, \ldots, n\right)\end{aligned}$$

(voir aussi [B-G-M]).

(ii) $\bigoplus_{i \geqslant 0} \mathscr{O}_W \xi_i \mid \{0\} \times Y$ et $(\bigoplus_{j \geqslant 0} \mathbf{D}_{W/Y} E\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y} J(F)F^s) \mid \{0\} \times Y$ sont deux sous-faisceaux de $\mathscr{O}_W[1/F, s]F^s \mid \{0\} \times Y$: il suffit donc de montrer que leurs fibres en tout point z de $\{0\} \times Y$ sont égales: on a l'inclusion

$$\bigoplus_{j \geqslant 0} \mathbf{D}_{W/Y,z} E_z \xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y,z} J(F) F^s \subset \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathscr{O}_{W,z} \xi_i$$

en faisant agir les opérateurs différentiels. L'inclusion réciproque s'obtient en itérant le (i).

(iii) D'après le théorème 2.4, il existe un opérateur

$$H = s^r + H_1 s^{r-1} + \cdots + H_r, \text{ où } H_i \in \mathscr{D}_{W/Y} \text{ et } d(H_i) \leqslant i,$$

qui annule F^s donc on a:

$$\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s = (\mathscr{D}_{W/Y} + s\mathscr{D}_{W/Y} + \cdots + s^{r-1}\mathscr{D}_{W/Y})F^s,$$

de plus $s^k F^s \in \bigoplus_{i=0}^{k} \mathscr{O}_W \xi_i$, donc

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s \mid \{0\} \times Y &\hookrightarrow \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathscr{O}_W \xi_i \mid \{0\} \times Y \\ &\subset \left(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y} E\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y} J(F) F^s\right) \mid \{0\} \times Y.\end{aligned}$$

5.5. NOTATIONS

Soit $\mathscr{E} = \bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y} E\xi_j \mid \{0\} \times Y$. $\mathscr{E}$ est muni d'une structure de $\mathscr{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-Module quand on l'identifie au quotient de

$$(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y} E\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y} J(F)F^s) \mid \{0\} \times Y \text{ par } (\mathscr{D}_{W/Y} J(F)F^s) \mid \{0\} \times Y.$$

Soit π: $(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y} E\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y} J(F)F^s) \mid \{0\} \times Y \to \mathscr{E}$ la surjection canonique, et soient

$$\mathscr{Z} = \pi \circ i(\mathscr{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s) \mid \{0\} \times Y)$$
$$\text{et } \mathscr{Z}' = \pi \circ i(\mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s \mid \{0\} \times Y).$$

Soit c l'homomorphisme de $\mathscr{O}_Y$-Modules:

$$c: \mathscr{E} \to \bigoplus_{j=0}^{r-1} E\xi_j$$
$$\sum_{j=0}^{r-1} P_j \xi_j \to \sum_{j=0}^{r-1} c(P_j)\xi_j$$

où $c(P_j)$ désigne le terme constant de P_j dans l'écriture à droite.

Soient $Z = c(\mathscr{Z})$ et $Z' = c(\mathscr{Z}')$.

Soit η l'homomorphisme de $\mathscr{O}_Y$-Modules 'de décalage':

$$\eta: \bigoplus_{j \geqslant 0} E\xi_j \to \bigoplus_{j \geqslant 1} E\xi_j$$
$$\sum_{j=0}^{k} P_j \xi_j \to \sum_{j=0}^{k} P_j \xi_{j+1}$$

on montre facilement que η est un isomorphisme et que $Z' = EF^s \oplus \eta(Z)$. (cf. [B-G-M]).

5.6. PROPOSITION. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors il existe un polydisque de* $\mathbf{C}$ *de centre l'origine (que l'on notera encore Y) tel que*:

(i) $\mathscr{N} \mid \{0\} \times Y \cong \mathscr{Z}'/\mathscr{Z}$.
(ii) $H^n(\mathscr{N}) \mid \{0\} \times Y \cong Z'/Z$.

Preuve. Le (i) s'obtient facilement à partir de l'isomorphisme: $\mathcal{N} \cong \mathcal{D}_{W/Y}[s]F^s/\mathcal{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s$ (cf. proposition 3.2).

(ii) Montrons d'abord que $(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y}E\xi_j \oplus \mathcal{D}_{W/Y}J(F)F^s) \mid \{0\} \times Y$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$ sont $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérents:

$$\left(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y}E\xi_j \oplus \mathcal{D}_{W/Y}J(F)F^s\right) \mid \{0\} \times Y \subset \mathcal{D}_{W/Y}[s]F^{s-r+1} \mid \{0\} \times Y$$

de plus, d'après la proposition 3.3, $\mathcal{D}_{W/Y}[s]F^{s-r+1}$ est $\mathcal{D}_{W/Y}$-cohérent: on en déduit que $\mathcal{D}_{W/Y}[s]F^{s-r+1} \mid \{0\} \times Y$ est $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérent (le foncteur restriction est exact). De plus, d'après la proposition 5.3, on a $E \cong \mathcal{O}_Y^{\mu}$, on en déduit que $(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y}E\xi_j \oplus \mathcal{D}_{W/Y}J(F)F^s) \mid \{0\} \times Y$ est de type fini sur $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$ donc est $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérent.

D'autre part on a la suite exacte:

$$0 \to \mathcal{D}_{W/Y}J(F)F^s \mid \{0\} \times Y \to \left(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y}E\xi_j \oplus \mathcal{D}_{W/Y}J(F)F^s\right)\Bigg| \{0\} \times Y \to \mathscr{E} \to 0$$

$\mathcal{D}_{W/Y}J(F)F^s \mid \{0\} \times Y$ est de type fini sur $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$ et est contenu dans un $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-Module cohérent donc est lui-même $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérent: on en déduit que $\mathscr{E}$ est $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérent.

Enfin $\mathscr{X}$ est l'image de l'homomorphisme

$$\pi \circ i \colon \mathcal{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s \mid \{0\} \times Y \to \mathscr{E}$$

entre deux $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-Modules cohérents, donc $\mathscr{X}$ est $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérent. De même $\mathscr{X}'$ est $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérent car

$$\mathcal{D}_{W/Y}[s]F^s \mid \{0\} \times Y$$

et $\mathscr{E}$ le sont.

Considérons maintenant la suite exacte:

$$0 \to \mathscr{X} \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{X} \to 0$$

On en déduit la suite exacte de cohomologie de De Rham:

$$\cdots \to H^{n-1}(\mathscr{E}/\mathscr{X}) \to H^n(\mathscr{X}) \to H^n(\mathscr{E}) \to H^n(\mathscr{E}/\mathscr{X}) \to 0$$

Or $\mathscr{E}/\mathscr{X}$ est $\mathcal{D}_{W/Y} \mid \{0\} \times Y$-cohérent, de plus $\mathscr{E}_0 = \bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbf{D}_{W/Y,0}E_0\xi_j$ est un $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module à support l'axe des paramètres au sens de la définition 4.3: en effet $E_0 \cong \mathcal{O}_{W,0}/J(F)\mathcal{O}_{W,0}$ et $J(F)$ définit $\{0\} \times Y$ donc, d'après le théorème des zéros, $\forall m \in \mathscr{E}_0$, $\exists k \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{M}^k m = 0$. Donc il en est de même pour $\mathscr{E}_0/\mathscr{Z}_0$: on peut donc appliquer le théorème 4.6 à $\mathscr{E}/\mathscr{Z}$ (voir la preuve de ce théorème): quitte à restreindre Y, on a: $H^{n-1}(\mathscr{E}/\mathscr{Z}) = 0$.

Donc on a une injection: $H^n(\mathscr{Z}) \hookrightarrow H^n(\mathscr{E})$, i.e.

$$\mathscr{Z}\Big/\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{Z} \hookrightarrow \mathscr{E}\Big/\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{E}$$

autrement dit

$$\mathscr{Z} \cap \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{Z}.$$

D'autre part, on a la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathscr{Z} \cap \operatorname{Ker} c \to \mathscr{Z} \to Z \to 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{E}$$

donc on a:

$$\mathscr{Z} \cap \operatorname{Ker} c = \mathscr{Z} \cap \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{Z}$$

donc $Z \cong H^n(\mathscr{Z})$. On montre de la même manière que $Z' \cong H^n(\mathscr{Z}')$.

Enfin, d'après (i) on a la suite exacte:

$$0 \to \mathscr{Z} \to \mathscr{Z}' \to \mathscr{N} \mid \{0\} \times Y \to 0$$

dont on déduit la suite de cohomologie de De Rham:

$$\cdots \to H^{n-1}(\mathscr{N}) \mid \{0\} \times Y \to H^n(\mathscr{Z}) \to H^n(\mathscr{Z}') \to H^n(\mathscr{N}) \mid \{0\} \times Y \to 0$$

Or $\mathscr{N}$ est $\mathscr{D}_{W/Y}$-cohérent d'après la proposition 3.3. De plus il est à support l'axe des paramètres puisque $\mathscr{N} \cong \mathscr{D}_{W/Y}[s]F^s/\mathscr{D}_{W/Y}[s](F, J(F))F^s$ et $J(F)$ définit l'axe des paramètres. Donc d'après le théorème 4.6, quitte à restreindre Y, on a $H^{n-1}(\mathscr{N}) \mid \{0\} \times Y = 0$. On en déduit:

$$H^n(\mathscr{N}) \mid \{0\} \times Y \cong Z'/Z.$$

6. Caractérisation d'une déformation à μ-constant

On va maintenant établir la réciproque du théorème 2.4:

6.1. THÉORÈME. *Soit F holomorphe sur $W = X \times Y$, s'annulant à l'origine. On suppose que F_0 admet l'origine comme seul point critique dans X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F définit une déformation à μ-constant.*
(ii) *Il existe un bon opérateur en s, $H \in \mathscr{D}_{W/Y,0}[s]$ annulant F^s, i.e. H s'écrit sous la forme:*

$$H = s^r + H_1 s^{r-1} + \cdots + H_r \quad \text{où } H_i \in \mathscr{D}_{W/Y,0} \quad \text{et} \quad d(H_i) \leqslant i.$$

(iii) *$\mathscr{D}_{W/Y,0}[s]F^s$ est un $\mathscr{D}_{W/Y,0}$-module de type fini.*
(iv) *Il existe un polynôme $\delta(s) \in \mathbf{C}[s]$ non nul tel que $\delta(s)F^s \in \mathscr{D}_{W/Y,0}F^{s+1}$.*

On remarquera que l'équation fonctionnelle (iv) *n'est pas celle correspondant au polynôme de Bernstein 'en famille': le polynôme $\delta(s)$ obtenu est seulement un multiple de $b_{W/Y}(s)$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii): c'est le théorème 2.4. (ii) $\Rightarrow$ (iii): immédiat.
(iii) $\Rightarrow$ (i): on suppose que $\mathscr{D}_{W/Y,0}[s]F^s$ possède un nombre fini de générateurs sur $\mathscr{D}_{W/Y,0}$: on peut supposer qu'ils s'écrivent sous la forme: $s^{r-1}A_0F^s, \ldots, sA_{r-2}F^s$, $A_{r-1}F^s$ où $A_i \in \mathscr{D}_{W/Y,0}$. Alors il existe $R_0, \ldots, R_{r-1} \in \mathscr{D}_{W/Y,0}$ tels que:

$$s^rF^s = \sum_{i=0}^{r-1} s^{r-1-i}R_iA_iF^s.$$

Ainsi: $(s^r - \sum_{i=0}^{r-1} s^{r-1-i}R_iA_i)F^s = 0$: on a donc trouvé un opérateur G annulant F^s de la forme:

$$G = s^r + G_1 s^{r-1} + \cdots + G_r \quad \text{où} \quad G_i \in \mathscr{D}_{W/Y,0}.$$

D'autre part F_0 admet l'origine comme seul point critique dans X donc, d'après le lemme 5.2, il existe un $\mathbf{C}\{y\}$-module libre de rang $\mu(0)$, E_0, isomorphe à $\mathscr{O}_{W,0}/J(F)\mathscr{O}_{W,0}$ tel que:

$$\mathscr{O}_{W,0} = E_0 \oplus J(F)\mathscr{O}_{W,0} \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathscr{O}_{W,0}\xi_i = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathbf{D}_{W/Y,0}E_0\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y,0}J(F)F^s$$

(cf. preuve de 5.4). On peut écrire s^rF^s sous la forme:

$$s^rF^s = s(s-1)\cdots(s-r+1)F^{s-r}F^r + \alpha(s)F^s$$

où $\alpha(s)$ est un polynôme de $\mathbf{C}[s]$ de degré $\leqslant r-1$. On a alors:

$$GF^s = F^r\xi_r + (\alpha(s) + G_1 s^{r-1} + \cdots + G_r)F^s = 0.$$

On développe GF^s dans $\sum \mathscr{D}_{W/Y,0}\xi_i = \bigoplus_{j\geqslant 0}\mathbf{D}_{W/Y,0}\, E_0\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y,0}J(F)F^s$: Tout d'abord, F^r s'écrit dans $\mathscr{O}_{W,0} = E_0 \oplus J(F)\mathscr{O}_{W,0}$ de la manière suivante:

$$F^r = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \eta \quad \text{où } \beta_i \in \mathscr{O}_{W,0} \text{ et } \eta \in E_0 \text{ unique.}$$

Ainsi on a:

$$0 = GF^s = \eta\xi_r + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\xi_{r-1} + (\alpha(s) + G_1 s^{r-1} + \cdots + G_r)F^s.$$

D'autre part $(\alpha(s) + G_1 s^{r-1} + \cdots + G_r)F^s \in \bigoplus_{j=0}^{r-1}\mathbf{D}_{W/Y,0}E_0\xi_j \oplus \mathscr{D}_{W/Y,0}J(F)F^s$ puisque $(\alpha(s) + G_1 s^{r-1} + \cdots + G_r)$ est de degré $\leqslant r-1$ en s. Donc:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\xi_{r-1} + (\alpha(s) + G_1 s^{r-1} + \cdots + G_r)F^s = \sum_{j=0}^{r-1} Q_j\xi_j + Q'_0 F^s$$

$$\text{où } Q_j \in \mathbf{D}_{W/Y,0}E_0 \quad \text{et} \quad Q'_0 \in \mathscr{D}_{W/Y,0}J(F).$$

Ainsi, $0 = GF^s = \eta\xi_r + \sum_{j=0}^{r-1} Q_j\xi_j + Q'_0 F^s$: comme la somme est directe, on en déduit $\eta = 0$ donc $F^r \in J(F)\mathscr{O}_{W,0}$. On va en déduire que F définit une déformation à μ-constant: tout d'abord, F s'annule sur la courbe $\mathscr{C}$ des zéros de $J(F)$ puisqu'une puissance de F appartient $J(F)\mathscr{O}_{W,0}$. Considérons alors la projection $p: \mathscr{C} \to \mathbf{C}$ de $\mathscr{C}$ sur l'axe des paramètres: p est finie en 0 donc il existe un voisinage V de l'origine dans $\mathbf{C}$ tel que, $\forall \mathbf{y} \in V$, la fibre $p^{-1}(\mathbf{y})$ est finie. Comme F s'annule sur $\mathscr{C}$, $\forall \mathbf{y} \in V$ tout point $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de $p^{-1}(\mathbf{y})$ est tel que $\mathbf{x}$ est point critique de $F_{\mathbf{y}}^{-1}(0)$. D'autre part p est plate en 0 puisque l'idéal $(\partial F_0/\partial x_1, \ldots, \partial F_0/\partial x_n)$ définit l'origine dans $\mathbf{C}^n$ donc

$$\sum_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in p^{-1}(\mathbf{y})} \dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,\mathbf{x}}/J(F_{\mathbf{y}})) = \mu(0). \quad \text{(cf. [B])}.$$

On en déduit alors d'après [La] que $p^{-1}(\mathbf{y})$ est réduit à un singleton: $p^{-1}(\mathbf{y}) = ((g(\mathbf{y}), \mathbf{y}))$. Donc F définit une déformation à μ-constant de $F_0^{-1}(0)$ le long de $x = g(y)$.

(i) $\Rightarrow$ (iv): on suppose que F définit une déformation à μ-constant, alors (ii) est vérifié: il existe un bon opérateur en s, H qui annule F^s:

$$H = s^r + H_1 s^{r-1} + \cdots + H_r \quad \text{où } H_i \in \mathscr{D}_{W/Y,0} \quad \text{et} \quad d(H_i) \leqslant i.$$

De plus, $J(F)\mathcal{O}_{W,0}$ définit l'axe des paramètres donc, d'après le théorème des zéros, il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que $F^k\in J(F)\mathcal{O}_{W,0}$:

$$F^k = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

D'autre part, en itérant le théorème 2.3, on trouve $c(s)\in\mathbf{C}[s]$ non nul tel que: $c(s)F^s = PF^{s+p}$ où P appartient à $\mathcal{D}_{W/Y,0}[s]$ et où $p = (r-1)(k-1)+1$. Quitte à diviser P par l'opérateur $H(s+p)$, on peut supposer que le degré en s de P est $\leqslant r-1$.

On a:

$$F^{s+p} = F^{s+p-k} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ donc}$$

$$(s+p-k+1)F^{s+p} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} F^{s+p-k+1}$$

Or $P = (s+p-k+1)R + T$ où $T\in\mathcal{D}_{W/Y,0}$ et $\deg_s(R) \leqslant r-2$, d'où:

$$\begin{aligned} PF^{s+p} &= R \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} F^{s+p-k+1} + TF^{s+p} \\ &= R'F^{s+p-k+1} + TF^{s+p} \quad \text{où } \deg_s(R') \leqslant r-2. \end{aligned}$$

On recommence la même opération avec R' en le divisant par $(s+p-2k+2)$ et on itère ainsi le raisonnement: au bout de $r-1$ étapes, on obtient alors:

$$c(s)F^s \in \mathcal{D}_{W/Y,0}F^{s+1}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii): On suppose qu'il existe $\delta(s)\in\mathbf{C}[s]$ non nul et $A\in\mathcal{D}_{W/Y,0}$ tels que: $\delta(s)F^s = AF^{s+1}$. Alors $(\delta(s)-AF)$ est un opérateur unitaire en s qui annule F^s donc $\mathcal{D}_{W/Y,0}[s]F^s$ est un $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module de type fini.

7. Polynôme de Bernstein de la fibre générique

7.1. NOTATIONS

(*) $\Delta = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle.$

(*) $\mathcal{N}(\mathrm{y}) = (s+1)(\Delta[s]F_{\mathrm{y}}^s/\Delta[s]F_{\mathrm{y}}^{s+1})$ pour tout $\mathrm{y}\in Y$.

$$(*) \quad \mathcal{N}' = (s+1)\left(\mathcal{D}_{W/Y}\left[\frac{1}{y}\right][s]F^s/\mathcal{D}_{W/Y}\left[\frac{1}{y}\right][s]F^{s+1}\right):$$

$$\text{on a } \mathcal{N}' \cong \mathcal{N} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_Y\left[\frac{1}{y}\right].$$

7.2. PROPOSITION. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors:*

(i) $b_{\text{gén}}(s)$ *est le polynôme minimal de l'action de $H^n(s)$ sur $H^n(\mathcal{N}'_0)$.*
(ii) $\tilde{b}_{\mathbf{y}}(s)$ *est le polynôme minimal de l'action de $H^n(s)$ sur $H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y}))$.*

Preuve. Comme F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres, $\mathcal{N}_0$ est un $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module de type fini à support l'axe des paramètres (cf. preuve de 5.6), donc d'après le théorème 4.5, (2) pour tout endomorphisme u de $\mathcal{D}_{W/Y,0}$-module de $\mathcal{N}_0$, on a: $u = 0 \Leftrightarrow H^n(u) = 0$. De plus $\mathcal{N}'_0 \cong \mathcal{N}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{Y,0}} \mathcal{O}_{Y,0}[1/y]$, donc pour tout k on a:

$$H^k(\mathcal{N}'_0) \cong H^k(\mathcal{N}_0) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,0}} \mathcal{O}_{Y,0}[1/y]$$

de plus $\mathcal{O}_{Y,0}[1/y]$ est libre donc plat sur $\mathcal{O}_{Y,0}$, on déduit alors de la preuve de 4.5, (2) que, si u est l'action d'un polynôme en s sur $\mathcal{N}'_0$, on a encore: $u = 0 \Leftrightarrow H^n(u) = 0$. Donc le polynôme minimal de l'action de $H^n(s)$ sur $H^n(\mathcal{N}'_0)$ n'est autre que le polynôme minimal de l'action de s sur $\mathcal{N}'_0$ à savoir $\tilde{b}_{\text{gén}}(s)$.

(ii) Se démontre par des considérations analogues (cf. [B-G-M] ou bien [Ma. 1]).

7.3. PROPOSITION. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors il existe un polydisque $V \subset Y$, de centre l'origine, tel que:*

(i) $H^n(\mathcal{N}')|\{0\} \times V \cong \mathcal{O}_Y^\mu[1/y]|V$.
(ii) $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, *l'homomorphisme obtenu en spécialisant y en* $\mathbf{y}$:

$$\phi_{\mathbf{y}}: (\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y/(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_Y))_{(0,\mathbf{y})} \to \mathcal{N}(\mathbf{y})$$

est un isomorphisme.

(iii) $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, *l'isomorphisme $\phi_{\mathbf{y}}$ induit un isomorphisme en cohomologie*:

$$H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathbf{y})} \underset{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}}{\otimes} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}) \cong H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y})).$$

Preuve. F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres, donc $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_{W/Y}$-Module cohérent à support l'axe des paramètres (cf. preuve de 5.6): on lui applique alors le théorème 4.6: $\exists p \in \mathbf{N}$, t entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$

vérifiant $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_t$, et un polydisque ouvert $U \times V \subset W$, de centre l'origine, tels que:

$$\mathcal{N}|U \times V \cong (\mathcal{D}_{W/Y}/\mathcal{D}_{W/Y}\mathcal{M})^p \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{D}_{W/Y}/\mathcal{D}_{W/Y}(\mathcal{M}, y^{\alpha_i})\right)|U \times V,$$

$$\mathcal{N}|U \times V - \{0\} \cong (\mathcal{D}_{W/Y}/\mathcal{D}_{W/Y}\mathcal{M})^p|U \times V - \{0\}$$

$$\text{et} \quad H^n(\mathcal{N})|\{0\} \times V - \{0\} \cong \mathcal{O}_Y^p|V - \{0\}.$$

Montrons que l'entier p n'est autre que le nombre de Milnor μ: d'après la proposition 5.6, quitte à restreindre Y, on a: $H^n(\mathcal{N})|\{0\} \times Y \cong Z'/Z$, on en déduit:

$$Z'/Z|\{0\} \times V - \{0\} \cong \mathcal{O}_Y^p|V - \{0\}:$$

ainsi Z'/Z est libre de rang p sur $\mathcal{O}_Y$ en dehors de la fibre à l'origine. D'autre part, d'après la proposition 5.3, on a $E \cong \mathcal{O}_Y^\mu$ et d'après [B-G-M] (cf. notations 5.5), $Z' = EF^s \oplus \eta(Z)$ où η est un isomorphisme. Considérons la fibre de ces faisceaux en $(0, \mathrm{y})$ pour $\mathrm{y} \in V - \{0\}$: $E_{(0,\mathrm{y})}$ est un $\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}$-module libre de rang μ donc $Z'_{(0,\mathrm{y})}$ et $Z_{(0,\mathrm{y})}$, qui sont des sous-$\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}$-modules de $\bigoplus_{j=0}^{r-1} E_{(0,\mathrm{y})}\xi_j$, sont libres de rang fini sur l'anneau principal $\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}$. Donc on a:

$$\begin{aligned} p = rg(Z'_{(0,\mathrm{y})}/Z_{(0,\mathrm{y})}) &= rg(Z'_{(0,\mathrm{y})}) - rg(Z_{(0,\mathrm{y})}) \\ &= rg(Z'_{(0,\mathrm{y})}) - rg(\eta(Z_{(0,\mathrm{y})})) \\ &= rg(E_{(0,\mathrm{y})}) = \mu. \end{aligned}$$

D'autre part, $\mathcal{N}' \cong \mathcal{N} \bigotimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[1/y]$, donc on a:

$$\mathcal{N}'|U \times V \cong \left(\mathcal{D}_{W/Y}\left[\frac{1}{y}\right] \Big/ \mathcal{D}_{W/Y}\left[\frac{1}{y}\right]\mathcal{M}\right)^\mu |U \times V$$

$$\text{et} \quad H^n(\mathcal{N}')|\{0\} \times V \cong \mathcal{O}_Y^\mu\left[\frac{1}{y}\right]\Bigg| V.$$

Ainsi $\forall \mathrm{y} \in \bar{V} - \{0\}$, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'_{(0,\mathrm{y})} &\cong \left(\mathcal{D}_{W/Y,(0,\mathrm{y})}\left[\frac{1}{y}\right] \Big/ \mathcal{D}_{W/Y,(0,\mathrm{y})}\left[\frac{1}{y}\right]\mathcal{M}\right)^\mu \\ &\cong (\mathcal{D}_{W/Y,(0,\mathrm{y})}/\mathcal{D}_{W/Y,(0,\mathrm{y})}\mathcal{M})^\mu \text{ puisque } \mathrm{y} \neq 0. \\ &\cong \left(\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\rangle\right)^\mu \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})} \underset{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}}{\otimes} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}) \cong \left(\mathbf{C}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\rangle\right)^{\mu}$$
$$\cong (\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n))^{\mu}$$

d'où:

$$\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})}/(y-\mathbf{y})\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})} \cong (\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n))^{\mu}$$

D'autre part, $\forall \mathbf{y} \in V$, $\Gamma_{\mathbf{y}} = F_{\mathbf{y}}^{-1}(0)$ est à singularité isolée à l'origine de nombre de Milnor μ donc, d'après [B-G-M] ou [Ma. 1], on a:

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}) \cong (\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n))^{\mu} \quad \text{et} \quad H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y})) \cong \mathbf{C}^{\mu}.$$

Considérons maintenant, $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, l'homomorphisme de spécialisation:

$$\phi_{\mathbf{y}}: \mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})}/(y-\mathbf{y})\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})} \to \mathcal{N}(\mathbf{y})$$
$$P\left(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, s\right) F^s \operatorname{mod}(y-\mathbf{y})\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})} \to P\left(x, \mathbf{y}, \frac{\partial}{\partial x}, s\right) F^s_{\mathbf{y}}$$

Il est clair que $\phi_{\mathbf{y}}$ est bien défini et surjectif. On a alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})}/(y-\mathbf{y})\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})} & \xrightarrow{\phi_{\mathbf{y}}} & \mathcal{N}(\mathbf{y}) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ (\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n))^{\mu} & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{y}}} & (\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n))^{\mu} \end{array}$$

où $\psi_{\mathbf{y}}$ est définie par $\psi_{\mathbf{y}} = \delta \circ \phi_{\mathbf{y}} \circ \gamma^{-1}$. Comme $\phi_{\mathbf{y}}$ est surjective, il en est de même de $\psi_{\mathbf{y}}$. D'autre part $\psi_{\mathbf{y}}$ est un endomorphisme de Δ-modules de $(\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n))^{\mu}$: or on montre facilement, que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\operatorname{Hom}_{\Delta}[(\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n)), (\Delta/\Delta(x_1, \ldots, x_n))]$ est isomorphe à $\mathbf{C}$ (cf. preuve du théorème 4.5). Donc $\psi_{\mathbf{y}}$ est déterminé par une matrice de dimensions $\mu \times \mu$ à coefficients dans $\mathbf{C}$; $\psi_{\mathbf{y}}$ étant surjective, cette matrice est inversible donc $\psi_{\mathbf{y}}$ est bijective; on en déduit que $\phi_{\mathbf{y}}$ est un isomorphisme. Ainsi:

$$\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}, (\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_Y))_{(0,\mathbf{y})} \cong \mathcal{N}(\mathbf{y})$$

donc

$$H^n[\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}] \cong H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y}))$$

d'où:

$$H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathbf{y})} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}) \cong H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y}))$$

par exactitude à droite du foncteur produit tensoriel puisque l'on a:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [\mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}})]$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{N}'_{(0,\mathbf{y})}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y-\mathbf{y})\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}).$$

7.4. THÉORÈME. *On suppose que F définit une déformation à μ-constant le long de l'axe des paramètres. Alors il existe un polydisque $V \subset Y$ de centre l'origine tel que:*

(i) $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, $b_{\mathbf{y}}(s) = b_{\text{gén}}(s)$.
(ii) $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, *on a les relations de divisibilité suivantes: il existe $q \in \mathbf{N}^*$ tel que*

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{b}(s) & & & & \\ & \underset{\text{divise}}{\searrow} & & & \\ & & \tilde{b}_{\text{gén}}(s) \xrightarrow{\text{divise}} \tilde{b}_{W/Y}(s) \xrightarrow{\text{divise}} \tilde{b}(s)\tilde{b}(s+1)\cdots\tilde{b}(s+q) & & \\ & \underset{\text{divise}}{\nearrow} & \quad \underset{\text{divise}}{\nearrow} & & \\ \tilde{b}_{\mathbf{y}}(s) & & \tilde{b}_0(s) & & \end{array}$$

(iii) $\forall \mathbf{y} \in V$, $\tilde{b}_0(s)$ divise $\tilde{b}_{\mathbf{y}}(s)\tilde{b}_{\mathbf{y}}(s+1)\cdots\tilde{b}_{\mathbf{y}}(s+n-1)$.

Preuve. (i) Pour montrer que $b_{\mathbf{y}}(s) = b_{\text{gén}}(s)$ pour $\mathbf{y}$ non nul voisin de 0, il suffit, d'après la proposition 7.2 de comparer l'action de $H^n(s)$ sur $H^n(\mathcal{N}'_0)$ et sur $H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y}))$: pour cela on va utiliser l'isomorphisme de la proposition 7.3 (iii):

$$H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathbf{y})} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y-\mathbf{y})\,\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}) \cong H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y}))$$

Tout d'abord, étudions l'action de $H^n(s)$ sur $H^n(\mathcal{N}'_0)$ et notons u l'endomorphisme de $H^n(\mathcal{N}'_0)$ ainsi obtenu:

D'après la proposition 7.3 (i) on a un isomorphisme:

$$H^n(\mathcal{N}')|\{0\} \times V \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_Y^{\mu}\left[\frac{1}{y}\right] \Big| V$$

d'où l'isomorphisme:

$$H^n(\mathcal{N}'_0) \xrightarrow{\psi_0} \left(\mathbf{C}\{y\}\left[\frac{1}{y}\right]\right)^{\mu}.$$

Soit A la matrice de l'endomorphisme $\psi_0 \circ u \circ \psi_0^{-1}$ dans la base canonique de $(\mathbf{C}\{y\}[1/y])^\mu$ sur le corps $\mathbf{C}\{y\}[1/y]$: d'après la proposition 7.2, A a pour polynôme minimal $\tilde{b}_{\text{gén}}$. Soit y^k un dénominateur commun aux coefficients de la matrice A: $A \in 1/y^k(\mathbf{C}\{y\})^{\mu^2}$. Donc, quitte à restreindre V, on peut supposer que la fonction méromorphe de y, A, est définie sur $V - \{0\}$:

$$\begin{aligned} A\colon V - \{0\} &\to \mathbf{C}^{\mu^2} \\ \mathrm{y} &\to A(\mathrm{y}) \end{aligned}$$

Quitte à restreindre V, la matrice $A(\mathrm{y})$ a pour polynôme minimal $\tilde{b}_{\text{gén}}$ pour tout $\mathrm{y} \in V - \{0\}$: en effet $\tilde{b}_{\text{gén}}$ est à racines rationnelles d'après le théorème 2.1, donc la matrice A est semblable à un tableau diagonal de blocs de Jordan du type:

$$U_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

où λ est racine de $\tilde{b}_{\text{gén}}$: $\lambda \in \mathbf{Q}$. C'est-à-dire, il existe une matrice inversible Λ de dimensions $\mu \times \mu$ à coefficients dans le corps $\mathbf{C}\{y\}[1/y]$, telle que $\Lambda A \Lambda^{-1}$ soit un tableau diagonal de matrices du type U_λ. Quitte à restreindre V, on peut supposer que la fonction méromorphe de y, Λ, est définie sur $V - \{0\}$, et ainsi on a:

$$\forall \mathrm{y} \in V - \{0\}, \qquad (\Lambda A \Lambda^{-1})(\mathrm{y}) = \Lambda(\mathrm{y}) A(\mathrm{y}) \Lambda^{-1}(\mathrm{y}) = \Lambda A \Lambda^{-1},$$

puisque toutes les matrices U_λ sont indépendantes de y: donc $A(\mathrm{y})$ et A ont même polynôme minimal, en l'occurrence $\tilde{b}_{\text{gén}}$, pour tout $\mathrm{y} \in V - \{0\}$.

D'autre part, $\forall \mathrm{y} \in V - \{0\}$, $A(\mathrm{y})$ n'est autre que la matrice, dans la base canonique de $\mathbf{C}^\mu$ sur $\mathbf{C}$, de l'endomorphisme u_{y} de $\mathbf{C}^\mu$ donné par l'action de $H^n(s)$ sur: $H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathrm{y})} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}/(y - \mathrm{y})\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}})$ via l'isomorphisme $\psi_{(0,\mathrm{y})}$, en effet on a:

$$\begin{aligned} H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathrm{y})} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}/(y - \mathrm{y})\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}) &\cong H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathrm{y})}/(y - \mathrm{y})H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathrm{y})} \\ &\cong \left(\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}\left[\frac{1}{y}\right]\right)^\mu \Big/ (y - \mathrm{y})\left(\mathcal{O}_{Y,\mathrm{y}}\left[\frac{1}{y}\right]\right)^\mu \\ &\cong \mathbf{C}^\mu \text{ en spécialisant en } \mathrm{y}. \end{aligned}$$

d'où le résultat, car la spécialisation en y n'affecte pas l'action de s.

Considérons maintenant l'action de $H^n(s)$ sur $H^n(\mathcal{N}(\mathrm{y}))$ et notons w_{y} l'endomorphisme de $H^n(\mathcal{N}(\mathrm{y}))$ ainsi obtenu. D'après [B-G-M] ou [Ma. 1], pour tout $\mathbf{y} \in Y$, on a un isomorphisme $\beta_{\mathbf{y}}: H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y})) \to \mathbf{C}^\mu$ pour tout $\mathbf{y} \in Y$: notons $\mathscr{A}(\mathbf{y})$ la matrice de l'endomorphisme $\beta_{\mathbf{y}} \circ w_{\mathbf{y}} \circ \beta_{\mathbf{y}}^{-1}$ dans la base canonique de $\mathbf{C}^\mu$ sur $\mathbf{C}$: d'après la proposition 7.2, $\mathscr{A}(\mathbf{y})$ a pour polynôme minimal b. Il reste à montrer que les matrices $A(\mathbf{y})$ et $\mathscr{A}(\mathbf{y})$ sont semblables pour tout $\mathbf{y} \in V - \{0\}$: d'après la proposition 7.3(iii), on a un isomorphisme:

$$H^n(\mathcal{N}')_{(0,\mathbf{y})} \bigotimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}} (\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}/(y - \mathbf{y})\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}) \cong H^n(\mathcal{N}(\mathbf{y}))$$

obtenu en spécialisant en $\mathbf{y}$. Or la spécialisation en $\mathbf{y}$ n'affecte pas l'action de s, on en déduit que $u_{\mathbf{y}}$ et $\beta_{\mathbf{y}} \circ w_{\mathbf{y}} \circ \beta_{\mathbf{y}}^{-1}$, provenant tous deux de l'action de $H^n(s)$, sont conjugués. Donc les matrices $A(\mathbf{y})$ et $\mathscr{A}(\mathbf{y})$ sont semblables: on en déduit $\forall \mathbf{y} \in V - \{0\}$, $b_{\mathbf{y}}(s) = b_{\text{gén}}(s)$.

Montrons maintenant (ii):

(*) *bdivise* $b(s)$: par définition de $b_{\text{gén}}$, il existe $K \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathscr{D}_{W/Y,0}[s]$ tels que:

$$y^K b_{\text{gén}}(s) F^s = P F^{s+1}.$$

Soit $R \in \mathscr{D}_{W,0}[s]$. D'après la proposition 2.2, à μ-constant, il existe un bon opérateur Q en $\partial/\partial y$ de degré $q + 1$ qui annule F^s: alors, quitte à diviser R par Q, on peut supposer que le degré en $\partial/\partial y$ de R est $\leqslant q$. D'où: $y^{K+q} R F^s = T y^K F^s$ où $T \in \mathscr{D}_{W,0}[s]$. Donc on a:

$$y^{K+q} b_{\text{gén}}(s) R F^s = T y^K b_{\text{gén}}(s) F^s = T P F^{s+1},$$

ainsi, si on note $L = K + q$, on obtient:

$$y^L b_{\text{gén}}(s) \mathscr{D}_{W,0}[s] F^s \subset \mathscr{D}_{W,0}[s] F^{s+1}.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^L b_{\text{gén}}(s) \mathscr{D}_{W,0}[s] F^s) \subset \mathscr{D}_{W,0}[s] F^{s+1},$$

c'est-à-dire:

$$L y^{L-1} b_{\text{gén}}(s) \mathscr{D}_{W,0}[s] F^s + y^L b_{\text{gén}}(s) \frac{\partial}{\partial y} \mathscr{D}_{W,0}[s] F^s \subset \mathscr{D}_{W,0}[s] F^{s+1}.$$

On en déduit:

$$y^{L-1} b_{\text{gén}}(s) \mathscr{D}_{W,0}[s] F^s \subset \mathscr{D}_{W,0}[s] F^{s+1}.$$

Ainsi, par récurrence décroissante sur L, on obtient:

$$b_{\text{gén}}(s)\mathcal{D}_{W,0}[s]F^s \subset \mathcal{D}_{W,0}[s]F^{s+1}.$$

Donc $b(s)$ divise $\tilde{b}_{\text{gén}}(s)$.

(*) $\tilde{b}_{\text{gén}}(s)$ divise $\tilde{b}_{W/Y}(s)$: immédiat puisque $\mathcal{D}_{W/Y,0}[s] \subset \mathcal{D}_{W/Y,0}\left[\frac{1}{y}\right][s]$.

(*) $\tilde{b}_{W/Y}(s)$ divise $\tilde{b}(s)\tilde{b}(s+1)\cdots\tilde{b}(s+q)$: par définition du polynôme de Bernstein $b(s)$ on a par itération:

$$b(s)b(s+1)\cdots b(s+q)F^s = T_{q+1}F^{s+q+1} \quad \text{où } T_{q+1} \in \mathcal{D}_{W,0}[s].$$

Quitte à diviser par l'opérateur $Q(s+q+1)$, on peut supposer que le degré en $\partial/\partial y$ de T_{q+1} est $\leqslant q$. Ecrivons T_{q+1} sous la forme:

$$T_{q+1} = (s+q+1)S + g + \sum_{i=1}^{n} T_{q+1}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} + T_{q+1}^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial y}$$

où $g \in \mathcal{O}_{W,0}$; S, $T_{q+1}^{(1)}, \ldots, T_{q+1}^{(n)} \in \mathcal{D}_{W/Y,0}[s]$, et $T_{q+1}^{(n+1)} \in \mathcal{D}_{W,0}[s]$ de degré en $\partial/\partial y \leqslant q-1$. Ainsi $T_{q+1}F^{s+q+1}$ s'écrit:

$$T_{q+1}F^{s+q+1} = (s+q+1)\left[SF + \sum_{i=1}^{n} T_{q+1}^{(i)}\frac{\partial F}{\partial x_i} + T_{q+1}^{(n+1)}\frac{\partial F}{\partial y}\right]F^{s+q} + gF^{s+q+1}.$$

D'autre part, $b(s+q) = (s+q+1)\tilde{b}(s+q)$ donc on obtient:

$$\begin{aligned}(s+q+1)&b(s)\cdots b(s+q-1)\tilde{b}(s+q)F^s \\ &=(s+q+1)\left[SF + \sum_{i=1}^{n} T_{q+1}^{(i)}\frac{\partial F}{\partial x_i} + T_{q+1}^{(n+1)}\frac{\partial F}{\partial y}\right]F^{s+q} + gF^{s+q+1}.\end{aligned}$$

Si on substitute $-q-1$ à s on a alors: $g.1 = 0$ donc $g = 0$. Donc $b(s)\cdots b(s+q-1)\tilde{b}(s+q)F^s = T_qF^{s+q}$ où

$$T_q = SF + \sum_{i=1}^{n} T_{q+1}^{(i)}\frac{\partial F}{\partial x_i} + T_{q+1}^{(n+1)}\frac{\partial F}{\partial y}$$

et ainsi le degré en $\partial/\partial y$ de T_q est $\leqslant q-1$. De cette manière, par récurrence décroissante sur le degré en $\partial/\partial y$, on obtient: $b(s)\tilde{b}(s+1)\cdots\tilde{b}(s+q)F^s = T_1F^{s+1}$ où T_1 est de degré nul en $\partial/\partial y$ i.e. $T_1 \in \mathcal{D}_{W/Y,0}[s]$. Donc $b_{W/Y}(s)$ divise $b(s)\tilde{b}(s+1)\cdots\tilde{b}(s+q)$ d'où $\tilde{b}_{W/Y}(s)$ divise $\tilde{b}(s)\tilde{b}(s+1)\cdots\tilde{b}(s+q)$.

(*) $\tilde{b}_0(s)$ divise $\tilde{b}_{W/Y}(s)$: par définition de $b_{W/Y}(s)$, il existe

$$P(x, y, \partial/\partial x, s) \in \mathscr{D}_{W/Y,0}[s]$$

tel que:

$$b_{W/Y}(s)F^s = PF^{s+1}.$$

Donc en spécialisant en 0, on obtient: $b_{W/Y}(s)F_0^s = P(x, 0, \partial/\partial x, s)F_0^{s+1}$. On en déduit que $b_0(s)$ divise $b_{W/Y}(s)$ donc $\tilde{b}_0(s)$ divise $\tilde{b}_{W/Y}(s)$.

(iii) D'après (i) et (ii) il est clair que pour tour $y \in V$ on a:

$$\tilde{b}_0(s) \text{ divise } \tilde{b}_y(s)\tilde{b}_y(s+1)\cdots\tilde{b}_y(s+q).$$

Il suffit donc de montrer que $\tilde{b}_0(s)$ est premier avec $\tilde{b}_y(s+k)$ pour $k \geqslant n$: si $\tilde{b}_0(s)$ et $\tilde{b}_y(s+k)$ avaient un facteur commun, il existerait $-\alpha$ racine de $\tilde{b}_0(s)$ et $-\beta$ racine de $\tilde{b}_y(s+k)$ telles que: $\alpha = \beta + k$. Or les racines d'un polynôme de Bernstein sont <0 (cf. [Ma. 1]) donc $\beta > 0$, par conséquent $\alpha > k$, d'où $\alpha > n$. D'autre part, d'après [V2], si $m(\alpha)$ désigne la multiplicité de $-\alpha$ dans $\tilde{b}_0(s)$ on a: $m(\alpha) \leqslant n + 1 - \alpha$ donc $\alpha \leqslant n + 1 - m(\alpha) \leqslant n$, ce qui contredit l'inégalité $\alpha > n$.

Références

[Be] I. N. Bernstein, The analytic continuation of generalised functions with respect to a parameter. *Functional Anal. Appl.* 6 (1972) 26–40.

[Bj] J. E. Björk, Dimensions over Algebras of differential operators. Preprint. Non publié (1974).

[B] J. Briançon, Familles équisingulières d'hypersurfaces à singularité isolée. *Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Nice* (1976).

[B-G-M] J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe and M. Miniconi, Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein: Cas non dégénéré. *Ann. Inst. Fourier. Fasc. 3. Tome 39* (1989).

[G.1] F. Geandier, Polynômes de Bernstein et déformations à μ-constant. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 309, Série I, p. 831–834, (1989).

[G.2] F. Geandier, Polynômes de Bernstein et déformations à μ-constant. *Thèse de doctorat. Université de Nice.* (16 Juin 1989).

[K] M. Kashiwara, B-Functions and Holonomic Systems. *Invent. Math.* 38 (1976) 33–53.

[La] F. Lazzeri, A theorem on the monodromy of isolated singularities. *Singularités à Cargèse. (Astérisque 7 et 8).* (1973).

[Lê] Lê-Dung-Tràng, Topologie des singularités des hypersurfaces complexes. *Singularités à Cargèse. (Astérisque 7 et 8).* (1973).

[Lê-R] Lê-Dung-Tràng and C. P. Ramanujam, The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. *Amer. J. Math.* vol. 98 (1976) 67–78.

[Ma. 1] B. Malgrange, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée. *Lect. Notes Math.* vol. 459. Springer-Verlag (1975) 98–119.

[Ma. 2] B. Malgrange, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente. *Astérisque* 101–102 (1983) 233–267.

[Ma-L] B. Malgrange and M. Lejeune, Séminaire opérateurs différentiels et pseudo-différentiels, Preprint. Université de Grenoble (1975–76).

[S] J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. Real and Complex Singularities (*Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math.*, Oslo, 1976) Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn. 525–563 (1977).

[T] B. Teissier, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney §II. Singularités à Cargèse. (*Astérisque* 7 et 8). (1973).

[Tj] G. N. Tjurina, Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces. *Math. USSR*. Izvestijà. Vol. 3 (1970) 967–999.

[V.1] A. N. Varchenko, Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial. *Bull. Sc. Math.* 2ème série. 104 (1980) 205–223.

[V.2] A. N. Varchenko, Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology. *Math. USSR*. Izvestijà. Vol. 18. no. 3 (1982).

[Y] T. Yano, On the theory of *b*-functions. *Publ. RIMS*, Kyoto University, 14 (1978) 111–202.