COMPOSITIO MATHEMATICA

AZIZ EL KACIMI-ALAOUI

Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications

Compositio Mathematica, tome 73, nº 1 (1990), p. 57-106

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__73_1_57_0>

Compositio Mathematica **73**: 57–106, 1990.

Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications

par

AZIZ EL KACIMI-ALAOUI

Université de Valenciennes Le Mont Houy 59326 Valenciennes Cedex et URA au CNRS D751 Université de Lille I 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex France.

Received 1 March 1988; accepted in revised form 8 June 1989

A la mémoire de Bruce Reinhart, l'initiateur des feuilletages riemanniens.

Abstract. Let $\mathcal{F}$ be a Riemannian foliation on a compact manifold M and E and F Hermitian $\mathcal{F}$-bundles over M. We prove that every basic transversely elliptic operator acting on the basic sections is a Fredholm operator. This implies that every basic transversely elliptic complex on M admits a Hodge decomposition. We deduce many cohomological properties of the leaf space $B = M/\mathcal{F}$ similar to the cohomological properties of a compact Riemannian manifold. Using the same methods we extend the Yau's proof of the first Calabi's conjecture on the relation between the Ricci curvature and the first Chern class to the leaf space of a transversely Kählerian and homologically orientable foliation.

Mots Cles: Feuilletage, $\mathcal{F}$-fibré, section basique, ellipticité transverse, courbure basique, classe de Chern.

Classification Ams: 57 N 30, 57 R 30.

Introduction.

Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est la réalisation géométrique d'un système différentiel complètement intégrable. A un instant donné on passe d'une variété intégrale à une autre en changeant de condition initiale. On peut donc interpréter l'espace des feuilles $B = M/\mathcal{F}$ comme un espace de paramètres des conditions initiales de ce système. Toute structure transverse à $\mathcal{F}$ peut être considérée comme structure sur B. Ainsi bon nombre de propriétés géométriques de $\mathcal{F}$ peuvent se lire sur cet espace. Des exemples simples montrent qu'en général B n'est pas une variété. On peut cependent y définir la notion de fonction, de forme différentielle, de métrique riemannienne etc. Ces objets correspondent à leurs analogues sur M invariants le long des feuilles. Si M est compacte, on peut alors se demander dans quelle mesure l'espace B ressemble-t-il à une variété compacte.

L'objet de ce travail est de montrer que si $\mathcal{F}$ est riemannien alors B se comporte comme une variété compacte du point de vue de l'Analyse Globale. Plus précisément on peut considérer et résoudre globalement des équations différentielles elliptiques sur un tel espace. L'ellipticité sur B signifie, bien entendu ellipticité transverse à $\mathscr{F}$ sur M. Cette notion a été implicitement utilisée par B.L. Reinhart [16]. Elle est apparue aussi dans les travaux de M.F. Atiyah [1] A. Connes [4] et C. Lazarov [13].

Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ riemannien de codimension n (réelle ou complexe suivant le cas). Un *$\mathscr{F}$-fibré hermitien* E sur M est un fibré vectoriel complexe (dont on notera N' le rang) muni d'une connexion hermitienne basique. On notera ∇ la dérivée covariante associée et h la métrique hermitienne. Une section α de E est dite *basique* si elle est parallèle le long des feuilles i.e. vérifie $\nabla_X\alpha = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathscr{F}$. L'ensemble $C^\infty(E/\mathscr{F})$ des sections basiques de E est un module sur l'anneau $A(M/\mathscr{F})$ des fonctions basiques i.e. constantes sur les feuilles de $\mathscr{F}$. Soient E et F deux $\mathscr{F}$-fibrés hermitiens au-dessus de M. Un opérateur différentiel basique d'ordre m est une application linéaire $D\colon C^\infty(E/\mathscr{F})\to C^\infty(F/\mathscr{F})$ qui s'écrit relativement à un système de coordonnées locales (x, y) adaptées à $\mathscr{F}$ (i.e. localement $\mathscr{F}$ est défini par $\mathrm{d}y = 0$) sous la forme

$$D=\sum_{s=0}^{m} P_s\left(y; \frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

où P_s est un polynôme homogène de degré s en $\partial/\partial y_1,\ldots,\partial/\partial y_n$ à coéfficients des matrices dépendant de y seulement. On dira que D est *transversalement elliptique* si sa restriction à toute transversale est elliptique. On peut interpréter un tel opérateur comme un opérateur différentiel au sens usuel, elliptique sur l'espace B.

La donnée des métriques hermitiennes sur E et F permet de munir $C^\infty(E/\mathscr{F})$ et $C^\infty(F/\mathscr{F})$ de produits scalaires. Soit D^* l'adjoint de D. Notre résultat principal est alors le suivant:

THEOREME. *Soit D un opérateur différentiel basique transversalement elliptique $D\colon C^\infty(E/\mathscr{F})\to C^\infty(F/\mathscr{F})$ où E et F sont des $\mathscr{F}$-fibrés hermitiens. Alors*
(i) *$\mathscr{H}(E/\mathscr{F})=\ker D$ est de dimension finie,*
(ii) *on a une décomposition orthogonale $C^\infty(E/\mathscr{F})=\mathscr{H}(E/\mathscr{F})\oplus \operatorname{Im} D^*$.*

Nous donnons plusieurs applications de ce résultat. Parmi les plus importantes

(i) nous retrouvons la décomposition de Hodge pour le complexe de de Rham basique obtenue déjà dans [5], et très récemment dans [12] avec une hypothèse supplémentaire.

(ii) Dans le cas où $\mathscr{F}$ est en plus transversalement holomorphe (i.e. hermitien) nous établissons une décomposition de Hodge-Kodaira pour le complexe de Dolbeault basique. Il en résulte que la cohomologie de Dolbeault basique $H^{**}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ vérifie la dualité de Serre si et seulement si $\mathscr{F}$ est homologiquement orientable i.e. l'espace vectoriel de cohomologie de de Rham basique $H^{2n}(M/\mathscr{F})$ est non nul.

(iii) si $\mathscr{F}$ est transversalement kählérien et homologiquement orientable alors $H^{**}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ possède les mêmes propriétés que son analogue sur les variétés kählériennes compactes (structure de Hodge, décomposition de Lefschetz etc...). Sous ces mêmes hypothèses nous donnons une extension de la démonstration de S.T. Yau de la première conjecture de Calabi reliant la courbure de Ricci et la première classe de Chern d'une variété kählérienne compacte à l'espace des feuilles $B = M/\mathscr{F}$.

Signalons enfin que cette théorie peut être écrite directement sur les pseudo-groupes d'isométries à génération compacte [8] qui est a priori un cadre plus général!

Pendant la rédaction de ce travail j'ai bénéficié de l'aide précieuse de André Haefliger, Gilbert Hector et Pierre Molino. Je les en remercie vivement.

Sauf précision ou mention expresse du contraire, les structures considérées sont de classe C^∞.

1. Operateurs elliptiques invariants.

Soient M une variété de dimension n, G un groupe de Lie connexe et E un fibré vectoriel complexe de rang N' défini par un cocycle $\{U_i, \gamma_{ij}\}$ où U_i est un ouvert de M et γ_{ij} une application de $U_i \cap U_j$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(N', \mathbb{C})$.

DEFINITION 1.1. On dira que E est un *G-fibré* s'il existe une représentation de G dans le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des automorphismes de E au-dessus de M.

Ceci définit en particulier une action de G sur M. Soit E un tel fibré et désignons par $C^\infty(E)$ l'espace de ses sections. L'action de G sur E induit de manière évidente une action de G sur $C^\infty(E)$. Pour tout $g \in \mathrm{Aut}(E)$ on notera encore g l'automorphisme de $C^\infty(E)$ associé.

Si $g \in G, \alpha \in C^\infty(E), (g \cdot \alpha)(x) = g \cdot \alpha(g^{-1}x)$.

Si X est un champ fondamental de l'action de G et $\alpha \in C^\infty(E)$,

$$(L_X\alpha)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\exp t\, X \circ \alpha - \alpha}{t}(x).$$

DEFINITION 1.2. Une section α de E est *G-invariante* si $g \cdot \alpha = \alpha$, $\forall g \in G$, ou encore $L_X\alpha = 0$ pour tout champ fondamental X (G étant connexe).

On note $C_G^\infty(E)$ l'ensemble des sections G-invariantes de E. C'est un module sur l'anneau $A_G(M)$ des fonctions G-invariantes i.e. constantes sur les orbites de G sur M.

Soit D un opérateur différentiel agissant sur les sections de E. On dira que D est *invariant* si $L_X \circ D = D \circ L_X$ pour tout champ fondamental X associé à l'action de G sur E. Un tel opérateur induit un opérateur qu'on notera encore D sur $C_G^\infty(E)$.

Une section α de E est donnée localement sur un ouvert U_i par ses composantes

$$\alpha_i(x) = (\alpha_i^1(x), \ldots, \alpha_i^{N'}(x))$$

de telle sorte que sur $U_i \cap U_j$ on a

$$\alpha_i^r(x) = \sum_{l=1}^{N'} \gamma_{ij}^{rl} \alpha_j^l(x).$$

Soit m l'ordre de l'opérateur D. Alors $D\alpha$ a pour composantes

$$(D\alpha)_i^r(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{N'} P_k^{rl}\left(x; \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\alpha_i^l(x)$$

où P_k^{rl} est un polynôme homogène de degré k en $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$.

Dans toute la suite nous supposerons que G est compact. Dans ce cas le fibré E peut être muni d'une métrique hermitienne $h = (h_{rl})$ invariante par G.

Soient $x \in M$ et $\xi \in T_x^* M$; on substitue ξ_t à $\partial/\partial x_t$ pour tout $t = 1, \ldots, n$ et on note $(P_m^{rl}(x, \xi))$ la matrice qui définit le symbole principal $\sigma(D)(x, \xi): E_x \to E_x$ où E_x est la fibre de E en x.

Soit τ un sous-fibré de T^*M.

DEFINITION 1.3. On dira que D est *τ-elliptique* si $\sigma(D)(x, \xi)$ est un isomorphisme pour tout $x \in M$ et tout ξ non nul appartenant à τ.

On retrouve la définition usuelle de l'ellipticité en posant $\tau = T^*M$.

Supposons que $m = 2m'$. En utilisant la métrique hermitienne h sur E on définit pour tout $x \in M$ et tout $\xi \in T^*M$ une forme quadratique $A_D(x, \xi, \cdot)$ sur E_x en posant

$$A_D(x, \xi, \eta) = h((-1)^{m'} \sigma(D)(x, \xi)(\eta), \eta).$$

pour tout $\eta \in E_x$.

DEFINITION 1.4. On dira que D est *fortement τ-elliptique* si $A_D(x, \xi, \cdot)$ est définie positive pour tout $x \in M$ et tout ξ non nul appartenant à τ. Dans le cas où $\tau = T^*M$, on dira tout simplement que D est *fortement elliptique*.

Dans toute la suite M sera compacte et munie d'une métrique riemannienne G-invariante dont on notera dx la mesure canonique associée. Pour tous $\alpha, \beta \in$

$C^\infty(E)$ on pose

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M h(\alpha(x), \beta(x))\, dx. \tag{1}$$

On définit ainsi sur $C^\infty(E)$ un produit scalaire G-invariant pour lequel $C_G^\infty(E)$ est un sous-espace fermé. On pose

$$\mathscr{H}_G(E) = \{\alpha \in C_G^\infty(E) / D\alpha = 0\}$$
$$B_G^*(E) = \{\beta \in C_G^\infty(E) / \exists \alpha \in C_G^\infty(E), \beta = D^*\alpha\}$$

où D^* est l'adjoint formel de D qui est bien entendu invariant.

THEOREME 1.5. Soit D un opérateur différentiel invariant et elliptique agissant sur les sections d'un G-fibré hermitien E au-dessus d'une variété compacte M. Alors
(i) $\mathscr{H}_G(E)$ est de dimension finie,
(ii) on a une décomposition orthogonale $C_G^\infty(E) = \mathscr{H}_G(E) \oplus B_G^*(E)$.

Démonstration. L'opérateur D agissant sur $C^\infty(E)$ est elliptique. D'après la théorie générale [21] son noyau Ker D est de dimension finie, l'image de D^* est fermée et on a une décomposition orthogonale

$$C^\infty(E) = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D^* \tag{2}$$

Comme $\mathscr{H}_G(E)$ est contenu dans Ker D, il est de dimension finie. D'autre part, les opérateurs D et D^* sont invariants; donc pour tout champ fondamental X l'application $L_X: C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ préserve Ker D et Im D^*. D'où

$$\mathscr{H}_G(E) = \operatorname{Ker} D \cap C_G^\infty(E)$$
$$B_G^*(E) = \operatorname{Im} D^* \cap C_G^\infty(E)$$

mais surtout si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $L_X\alpha = 0$ alors $L_X\alpha_i = 0$ pour $i = 0$, i.e. $\alpha_1 \in \mathscr{H}_G(E)$ et $\alpha_2 \in \beta_G^*(E)$.

D'après (2) on a

$$C_G^\infty(E) = \mathscr{H}_G(E) \oplus B_G^*(E).$$

C.Q.F.D.

2. Opérateurs transversalement elliptiques sur les feuilletages. Applications aux feuilletages riemanniens.

Soit M une variété munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension n. On notera $T\mathscr{F}$ le fibré tangent à $\mathscr{F}$ et $\nu\mathscr{F} = TM/T\mathscr{F}$ le fibré normal; $\mathscr{X}(M)$ et $\Gamma(\mathscr{F})$ sont les $A(M)$-modules des sections respectivement de TM et $T\mathscr{F}$ où $A(M)$ est l'anneau des fonctions sur M.

Un champ de vecteurs Y sur M est dit *feuilleté* si pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{F})$ le crochet $[X, Y] \in \Gamma(\mathscr{F})$. L'ensemble $\mathscr{X}(M, \mathscr{F})$ des champs feuilletés est un module sur l'anneau $A(M/\mathscr{F})$ des fonctions basiques i.e. des fonctions constantes sur les feuilles de $\mathscr{F}$. Le $A(M/\mathscr{F})$-module $\Gamma(\mathscr{F})$ est un idéal de $\mathscr{X}(M, \mathscr{F})$. Un élément du quotient $\mathscr{X}(M/\mathscr{F}) = \mathscr{X}(M, \mathscr{F})/\Gamma(\mathscr{F})$ sera appelé un *champ basique*.

Enfin si X est un champ feuilleté sur M, X^b sera sa classe d'équivalence dans $\nu\mathscr{F}$ i.e. le champ basique associé.

Si V est un ouvert de M et $E \to M$ un fibré vectoriel $C_V^\infty(E)$ sera l'espace des sections de E au-dessus de V; pour $V = M$ on aura $C_V^\infty(E) = C^\infty(E)$. Si E_1 et E_2 sont des fibrés vectoriels au-dessus de M, on notera $L^k(E_1, E_2)$ le fibré des applications k-linéaires de E_1 dans E_2, $S^k(E_1, E_2)$ le sous-fibré des applications k-linéaires symétriques et $S^k\colon L^k(E_1, E_2) \to S^k(E_1, E_2)$ l'application canonique de symétrisation définie par

$$S^k(\phi)(Y_1, \dots, Y_k) = \frac{1}{k!} \sum_\sigma \phi(Y_{\sigma(1)}, \dots, Y_{\sigma(k)})$$

où σ décrit toutes les permutations de $\{1, \dots, k\}$.

2.1. *Feuilletages riemanniens – structure.*

Soit $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ un cocycle définissant $\mathscr{F}$ de variété transverse T. L'application $f_i\colon U_i \to T$ est une sumbersion et γ_{ij} est un difféomorphisme local de T tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U_i \cap U_j \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f_j"'] & T \\ T \arrow[ur, "\gamma_{ij}"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Une structure transverse à $\mathscr{F}$ est une structure sur T invariante par les γ_{ij}.

2.1.1. *Exemples de structures transverses.*

Les exemples que nous allons donner seront principalement ceux que nous considérerons par la suite.

(i) Si T est une varitét analytique complexe et les γ_{ij} sont biholomorphes, on dira que $\mathscr{F}$ est *transversalement holomorphe.*

(ii) Si T est une variété riemannienne pour laquelle les γ_{ij} sont des isométries, on dira que $\mathscr{F}$ est *riemannien.* Ceci est équivalent à l'existence d'une métrique riemannienne sur $v\mathscr{F}$ invariante le long des feuilles. Dans un système de coordonnées locales (x, y) adaptées à $\mathscr{F}$, une telle métrique h s'écrit:

$$h = \sum_{k,l} h_{kl}(y)\, \mathrm{d}y^k\, \mathrm{d}y^l.$$

(iii) On dira que $\mathscr{F}$ est *transversalement parallélisable* (T.P. en abrégé) s'il existe sur M n champs de vecteurs basiques linéairement indépendants en chaque point. Autrement dit le module $\mathscr{X}(M/\mathscr{F})$ est libre de rang n.

Bien sûr tout feuilletage T.P. est riemannien; il suffit de définir la métrique riemannienne sur $v\mathscr{F}$ en un point et la transporter sur toute la variété à l'aide du parallélisme transverse.

(iv) On dira que $\mathscr{F}$ est *transversalement de Lie* si T est un groupe de Lie et les γ_{ij} sont des translations.

Un feuilletage transversalement de Lie est T.P.

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage riemannien de codimension n sur une variété compacte M. Le comportement qualitatif de $\mathscr{F}$ est décrit par les théorèmes qui suivent.

THEOREME 2.1.2. [14]. Supposons que $\mathscr{F}$ est T.P. Alors:
- (i) Les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale $F \to M \xrightarrow{\pi} W$ appelée *fibration basique de* $\mathscr{F}$. La variété W sera appelée la *variété basique* de $\mathscr{F}$.
- (ii) Il existe un groupe de Lie 1-connexe Γ tel que le feuilletage $\mathscr{F}_0$ induit dans chaque fibre F est un Γ-feuilletage de Lie à feuilles denses.
- (iii) Le groupe structural de π est un sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}(F, \mathscr{F}_0)$ des difféomorphismes de F qui respectent le feuilletage $\mathscr{F}_0$.

Si $\mathscr{F}$ n'est pas nécessairement T.P. on peut supposer, quitte à passer à un revêtement à deux feuillets que $\mathscr{F}$ est transversalement orientable. Soit alors $\mathrm{SO}(n) \to M^\# \xrightarrow{p} M$ le fibré principal des repères orthonormés directs transverses à $\mathscr{F}$.

THEOREME 2.1.3. [14]. Le feuilletage $\mathscr{F}$ se relève à $M^\#$ en un feuilletage $\mathscr{F}^\#$ tel que:
- (i) $\dim \mathscr{F}^\# = \dim \mathscr{F}$;
- (ii) $\mathscr{F}^\#$ est T.P. et invariant par l'action de $G = \mathrm{SO}(n)$ sur $M^\#$

Le parallélisme transverse à $\mathscr{F}^\#$ se compose d'une partie verticale $(Q_1, \ldots, Q_N)$ où $N = n(n-1)/n = \dim \mathrm{SO}(n)$ formée des champs fondamentaux de l'action de $\mathrm{SO}(n)$ sur $M^\#$ et d'une partie horizontale $(P_1, \ldots, P_n)$ donée par la connexion de

Levi-Civita basique du fibré principal

$$\mathrm{SO}(n) \to M^{\#} \xrightarrow{\rho} M.$$

Le parellélisme $(P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_N)$ vérifie
(i) $[P_i, P_j]$ est vertical pour $i, j = 1, \ldots, n$,
(ii) $[P_i, Q_k]$ horizontal où $i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, N$,
(iii) $[Q_k, Q_l]$ est vertical pour $k, l = 1, \ldots, N$.
Ces deux théorèmes nous seront fondamentalement utiles dans toute la suite.

2.2. Catégorie des $\mathscr{F}$-fibrés – opérateurs différentiels basiques.

Soit $\iota: P \to M$ un fibré principal de groupe structural $G' \subset \mathrm{GL}(N', \mathbb{C})$. Pour tout point $z \in P$ on notera $\mathscr{G}'_z$ l'espace tangent en z à la fibre de ι.

DEFINITION 2.2.1. Une *connexion* sur le fibré $G' \to P \xrightarrow{\iota} M$ est un sous-fibré $\mathscr{H}$ de T.P. tel que
(i) $\mathscr{H}_z \cap \mathscr{G}'_z = \{0\}$ pour tout $z \in P$;
(ii) $\mathscr{H}_{zg'} = (R_{g'})_* \mathscr{H}_z$ pour tout $z \in P$ et tout $g' \in G'$ où $R_{g'}$ est l'action à droite de g' sur P.

Si $\mathscr{H}$ est une connexion sur P on notera, pour tout champ de vecteurs Y sur M, $\tilde{Y}$ l'unique champ de vecteurs sur P, horizontal et se projetant sur Y; de même si τ est un sous-fibré de TM, $\tilde{\tau}$ sera le sous-fibré de $\mathscr{H}$ engendré par les relevés horizontaux des champs tangents à τ.

DEFINITION 2.2.2. On dira que P est *feuilleté* s'il est muni d'une connexion $\mathscr{H}$ pour laquelle $\tilde{\tau}(\tilde{\tau} = T\mathscr{F}) = \widetilde{T\mathscr{F}}$ est intégrable.

Dans ce cas $\tilde{\tau}$ définit un feuilletage horizontal $\tilde{\mathscr{F}}$ sur P de même dimension que $\tilde{\mathscr{F}}$ et invariant par l'action à droite de G' sur P. Notons ω la l-forme de connexion associée à $\mathscr{H}$. C'est un 1-forme sur P à valeurs dans $\mathscr{G}'$.

DEFINITION 2.2.3. La connexion $\mathscr{H}$ est dite *basique* si ω est *basique* pour $\tilde{\mathscr{F}}$ i.e. $L_{\tilde{X}}\omega = 0$ pour tout X tangent à $\mathscr{F}$. On dira alors que P est un *$\mathscr{F}$-fibré*.

On remarquera que la forme ω est basique au sens usuel car on a également $i_{\tilde{X}}\omega = 0$ puisque $\tilde{X}$ est horizontal pour tout X.

Soit maintenant E un fibré vectoriel complexe de rang N' et $G' \to P \xrightarrow{\iota} M$ le fibré principal associé par la représentation linéaire $G' \hookrightarrow \mathrm{GL}(N', \mathbb{C})$.

DEFINITION 2.2.4. On dira que E est
(i) *feuilleté* si P est feuilleté;
(ii) *un $\mathscr{F}$-fibré* si P est un $\mathscr{F}$-fibré.

Rappelons que E s'obtient à partir de P en quotientant $P \times \mathbb{C}^{N'}$ par l'action libre de G'

$$g' \cdot (z, e) = (zg', g'^{-1}e).$$

Pour tout $(z, e) \in P \times \mathbb{C}^{N'}$ on notera $[z, e]$ sa classe d'équivalence dans $P \times_{G'} \mathbb{C}^{N'}$.

Pour toute section α de E on définit une fonction $\sigma(\alpha): P \to \mathbb{C}^{N'}$ par

$$[z, \sigma(\alpha)(z)] = \alpha(\iota(z)).$$

On a clairement $\sigma(\alpha)(zg') = g'^{-1}\sigma(\alpha)(z)$ pour tout $z \in P$ et tout $g' \in G'$. L'application σ est un isomorphisme de $C^\infty(E)$ sur l'espace $C^\infty_G(P, \mathbb{C}^{N'})$ des fonctions G'-équivariantes sur P à valeurs dans $\mathbb{C}^{N'}$.

Soient $\alpha \in C^\infty(E)$ et $X \in \mathscr{X}(M)$ on pose

$$\nabla_X \alpha(x) = [\sigma^{-1}(\tilde{X} \cdot \sigma(\alpha))](z)$$

où $x = \iota(z)$.

L'application $\nabla: \mathscr{X}(M) \times C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ ainsi définie est $A(M)$-linéaire en X et vérifie

(i) $\nabla_X(\alpha + \beta) = \nabla_X\alpha + \nabla_X\beta$

(ii) $\nabla_X(f\alpha) = f\nabla_X\alpha + (X \cdot f)\alpha$

$\forall \alpha, \beta \in C^\infty(E)$, $\forall X \in \mathscr{X}(M)$ et $\forall f \in A(M)$.

Pour tous $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ on notera $\mathscr{R}(X, Y)$ l'endomorphisme de $C^\infty(E)$

$$\mathscr{R}(X, Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

qu'on appelle la *courbure de la connexion linéaire* ∇ sur E.

2.2.5. PROPOSITION. [11] *Si E est un $\mathscr{F}$-fibré on a*

$$i_X\mathscr{R} = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{F})$.

On observe que ∇ définit sur E un champ d'éléments horizontaux $\mathscr{H}_E$. En particulier $\mathscr{R}(X, Y) = 0$ si $X, Y \in \Gamma(\mathscr{F})$. Il existe un feuilletage $\mathscr{F}_E$ sur E relevé horizontal de $\mathscr{F}$ pour $\mathscr{H}_E$. Ce feuilletage peut être obtenu autrement: sur chaque facteur $P \times \{e\}$ on met le feuilletage $\tilde{\mathscr{F}}$. On obtient ainsi un feuilletage sur $P \times \mathbb{C}^{N'}$ invariant par G'. Il passe donc au quotient en un feuilletage $\mathscr{F}_E$ sur $E = P \times_{G'} \mathbb{C}^{N'}$.

Un morphisme de fibré feuilletés $\psi: E_1 \to E_2$ est un morphisme de fibrés qui envoie les feuilles de $\mathscr{F}_{E_1}$ dans les feuilles de $\mathscr{F}_{E_2}$. Un tel morphisme est induit par un morphisme feuilleté $\tilde{\psi}: P_1 \to P_2$. Supposons que E_1 et E_2 sont des $\mathscr{F}$-fibrés et notons ω_i la 1-forme de connexion basique sur P_i où $i = 1, 2$. On dira que ψ est un *morphisme de $\mathscr{F}$-fibrés* si $\tilde{\psi}^*\omega_2 = \omega_1$.

Pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$, on notera X_E le relevé horizontal pour $\mathscr{H}_E$ de X. En utilisant le fait que la courbure $\mathscr{R}$ vérifie $i_X\mathscr{R} = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{F})$ on montre la

PROPOSITION 2.2.6. *Pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{F})$ et tout champ feuilleté $Y \in \mathscr{X}(M, \mathscr{F})$, $[X_E, Y_E] \in \Gamma(\mathscr{F}_E)$. Autrement dit, tout automorphisme infinitésimal Y de $\mathscr{F}$ se relève en un automorphisme de $\mathscr{F}_E$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{F})$ et tout $Y \in \mathscr{X}(M, \mathscr{F})$ on a

$$\widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}].$$

Soient α une section de E, $z \in P$ et $x = \imath(z)$. Par définition de $\mathscr{R}$ on a:

$$(\mathscr{R}(X, Y)\alpha)(x) = [\sigma^{-1}(([\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]})\sigma(\alpha))](z)$$

comme $X \in \Gamma(\mathscr{F})$ on a $\mathscr{R}(X, Y) = 0$ pour toute section α de E. D'où l'on déduit $\widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ qui implique bien entendu la proposition 2.2.6. □

Soient E_1 et E_2 deux $\mathscr{F}$-fibrés. La proposition qui suit se démontre de la même manière que dans le cas classique.

PROPOSITION 2.2.7. Les connexions basiques sur E_1 et E_2 définissent une unique connexion basique ∇^k sur $S^k(E_1, E_2)$.

Ceci montre que $S^k(E_1, E_2)$ est un $\mathscr{F}$-fibré.

DEFINITION 2.2.8. On dira que $\alpha \in C^\infty(E)$ est *basique* si $\nabla_X\alpha = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{F})$.

Si α est basique et $f \in A(M/\mathscr{F})$ alors $f\alpha$ est basique. En effet on a

$$\nabla_X(f\alpha) = f\nabla_X\alpha + (X \cdot f)\alpha.$$

Si $X \in \Gamma(\mathscr{F})$, alors $X \cdot f = 0$ et $\nabla_X\alpha = 0$. L'espace $C^\infty(E/\mathscr{F})$ des sections basiques de E est donc un module sur l'anneau $A(M/\mathscr{F})$.

2.3. Fibrés des jets basiques.

La plupart des définitions et démonstrations que nous presentons dans cette section sont une adaptation au cas basique de l'exposé de R.S. Palais [15] Chapitre IV.

Soient V un ouvert distingué pour $\mathscr{F}$ et $f_V\colon V \to T$ une submersion définissant feuilletage $\mathscr{F}_V$ induit par $\mathscr{F}$ sur V. Le fibré normal à $\mathscr{F}_V$ s'identifie alors au pull-back du fibré tangent à T par la projection f_V. Pour tout point $z \in V$ on notera $y = f_V(z)$ et $I^m(T)_y$ (resp. $I^m(V/\mathscr{F}_V)_z$) l'idéal des fonctions sur T (resp. les fonctions basiques sur V) dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont nulles en y (resp. en z). Bien sûr les deux idéaux sont isomorphes. Les lemmes 1 et 2 p. 56–57 de [15] se transposent au cas basique i.e. on a:

LEMME 2.3.1. *Il existe une application linéaire* $d_z^m\colon I^m(V/\mathscr{F}_V)_z \to S^m(\nu\mathscr{F}_z, \mathbb{C})$ *telle que si* $Y_1^b \dots Y_m^b$ *sont* m *champs basiques et* $f \in I^m(V/\mathscr{F}_V)_z$ *on a:*

(i) $d_z^m f(Y_1, \dots, Y_m) = (Y_1 \dots Y_m)\cdot f(z)$ *où* $Y_1, \dots, Y_m$ *sont des champs feuilletés sur* V *représentant respectivement* $Y_1^b, \dots, Y_m^b$;

(ii) *la suite*

$$0 \to I^{m+1}(V/\mathscr{F}_V)_z \to I^m(V/\mathscr{F}_V)_z \xrightarrow{d_z^m} S^m(\nu\mathscr{F}_z, \mathbb{C}) \to 0$$

est exacte.

De la même manière on a le

LEMME 2.3.2. *Soit* $g \in I(V/\mathscr{F}_V)_z$ *et posons* $\mathrm{d}g_z = v$. *On a alors*

$$d_z^m g^m = m!\, S^m(v)$$

où $S^m(v)$ *est l'élément de* $s^m(\nu_z\mathscr{F}, \mathbb{C})$ *défini par* $S^m(v)(w_1, \dots, w_n) = v(w_1) \dots v(w_n)$.

Soit maintenant $E \to M$ un $\mathscr{F}$-fibré vectoriel. Choisissons l'ouvert V de telle sorte qu'il soit à la fois distingué pour $\mathscr{F}$ et trivialisant pour E. On pose

$$Z_V^m(E/\mathscr{F})_z = \{ f\alpha / f \in I^{m+1}(V/\mathscr{F}_V)_z \text{ et } \alpha \in C^\infty(E/\mathscr{F}_V) \}$$

où $C^\infty(E/\mathscr{F}_V)$ est l'espace des sections basiques pour $\mathscr{F}_V$ au-dessus de V et

$$J_V^m(E/\mathscr{F}_V)_z = \frac{C^\infty(E/\mathscr{F}_V)}{Z_V^m(E/\mathscr{F})_z}.$$

La projection canonique $C^\infty(E/\mathscr{F}_V) \to J_V^m(E/\mathscr{F}_V)_z$ est compatible avec les restrictions $C^\infty(E/\mathscr{F}_V) \to C^\infty(E/\mathscr{F}_{V'})$ pour $V' \subset V$. On l'appellera le m-jet basique en z.

Un raisonnement analogue á celui utilisé pour le lemme 3 de [15] p. 58 donne

LEMME 2.3.3. *Il existe une application*

$$d_z^m\colon Z_V^{m-1}(E/\mathscr{F})_z \to S^m(\nu_z\mathscr{F}, E_z)$$

telle que

(i) *si* $f \in Z^{m-1}(E/\mathscr{F})_z$ *et* $h \in C^\infty(E^*/\mathscr{F}_V)_z$ *alors* $d_z^m(h \circ f) = h(z) \circ d_z^m f$ *où* $(h \circ f)(z) = h(z)(f(z))$

(ii) *si* $g \in A(V/\mathscr{F}_V)$ *est telle que* $g(z) = 0$ *et* $\mathrm{d}g_z = v$ *et* $f \in C^\infty(E/\mathscr{F}_V)$ *alors* $d_z^m(g^m f) = m!\, S^m(v) \otimes e$ *avec* $e = f(z)$ *qui est dans* E_z.

(iii) *La suite*

$$0 \to Z_V^m(E/\mathscr{F})_z \to Z_V^{m-1}(E/\mathscr{F})_z \xrightarrow{d_z^m} S^m(v_z\mathscr{F}, E_z) \to 0$$

est exacte.

Ici $E^* \to M$ désigne le dual de E qui est bien sûr un $\mathscr{F}$-fibré.

L'application canonique $f \to J_m(f)_z$ de $C^\infty(E/\mathscr{F}_V)$ dans $J_V^m(E/\mathscr{F})_z = C^\infty(E/\mathscr{F}_V)/Z_V^m(E/\mathscr{F})_z$ envoie $Z_V^m(E/\mathscr{F})_z$ dans $Z_V^{m-1}(E/\mathscr{F})_z$. Elle induit donc une application linéaire $J_m(f)_z \to J_{m-1}(f)_z$ de $J_V^m(E/\mathscr{F})_z$ dans $J_V^{m-1}(E/\mathscr{F})_z$ ayant pour noyau $Z_V^{m-1}(E/\mathscr{F})_z/Z_V^m(E/\mathscr{F})_z$. Par le Lemme 2.3.3 on obtient une suite exacte

$$0 \to S^m(v_z\mathscr{F}, E_z) \xrightarrow{i} J_V^m(E/\mathscr{F})_z \to J_V^{m-1}(E/\mathscr{F})_z \to 0 \tag{S}$$

où i est caractérisée par

$$i(S^m(v^b) \otimes e) = J_m\left(\frac{1}{m!} g^m f\right)$$

avec $g \in A(V/\mathscr{F}_V)$ vérifiant $g(z) = 0$, $\mathrm{d}g_z = v$ et $f(z) = e$.

Posons $J^m(E/\mathscr{F}) = \bigcup_{z \in V} J_V^m(E/\mathscr{F})_z$ et définissons $J_m(f)\colon M \to J^m(E/\mathscr{F})$ pour $f \in C_V^\infty(E/\mathscr{F})_z$ par $J_m(f)(z) = J_m(f)_z$.

PROPOSITION 2.3.4. *$J^m(E/\mathscr{F})$ est un fibré vectoriel.*

Démonstration. Soient V un ouvert distingué trivialisant E et f une section $\mathscr{F}$-basique au-dessus de V i.e. une fonction $\mathscr{F}_V$-basique de V dans $\mathbb{C}^{N'}$.

On a $J_m(f)_z = 0$ si et seulement si les termes du développement de Taylor $d_z^k f$ sont nuls pour $k = 0, \dots, m$. On pose alors

$$\psi(J_m(f)_z) = (z, \{d^k f\}_{0 \leqslant k \leqslant m}).$$

L'application ψ ainsi définie est une trivialisation de $J^m(E/\mathscr{F})$ au-dessus de V

$$J^m(E/\mathscr{F})|_V \simeq V \times \bigotimes_{k=0} S^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{N'}). \qquad \square$$

En utilisant le fait que E et $v\mathscr{F}$ sont des $\mathscr{F}$-fibrés nous allons montrer, qu'en fait $J^m(E/\mathscr{F})$ et $\oplus_{k=0}^m S^k(v\mathscr{F}, E)$ sont canoniquement isomorphes.

La suite (S) donne une suite exacte au niveau des fibrés

$$0 \to S^m(\nu\mathscr{F}, E) \xrightarrow{i} J^m(E/\mathscr{F}) \to J^{m-1}(E/\mathscr{F}) \to 0. \qquad (S^*)$$

Pour $m = 1$ on a simplement

$$0 \to L(\nu\mathscr{F}, E) \xrightarrow{i} J^1(E/\mathscr{F}) \xrightarrow{p} E \to 0$$

où $i(\mathrm{d}g_z \otimes f(z)) = J_1(gf)_z$ et $pJ_1(f)_z = f(z)$ avec $g \in A(V/\mathscr{F}_V)$ telle que $g(z) = 0$ et $f \in C_V^\infty(E/\mathscr{F})$.

PROPOSITION 2.3.5. *La connexion ∇ définit une application linéaire $T: J^1(E/\mathscr{F}) \to L(\nu\mathscr{F}, E)$ telle que $T \circ i$ est l'identité de $L(\nu\mathscr{F}, E)$.*

Démonstration. La connexion ∇ sur E peut être vue comme une application linéaire de $C^\infty(E)$ à valeurs dans $C^\infty(L(TM, E))$ définie par

$$(\nabla\alpha)_z(X) = (\nabla_X\alpha)(z).$$

Si $\alpha \in C^\infty(E/\mathscr{F})$ alors $(\nabla\alpha)(X) = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{F})$. Donc ∇ définit une application linéaire de $C^\infty(E/\mathscr{F})$ dans $C^\infty(L(\nu\mathscr{F}, E))$ telle que l'application $\alpha \to \nabla\alpha(z)$ est nulle sur $Z_V^1(E/\mathscr{F})$. Elle induit donc une application

$$T_z: J^1(E/\mathscr{F})_z = C_V^\infty(E/\mathscr{F})/Z_V^1(M/\mathscr{F})_z \to L(\nu_z\mathscr{F}, E_z)$$

vérifiant $\nabla = T \circ J_1$.

Par construction $T \circ i$ est l'identité de $L(\nu\mathscr{F}, E)$. □

THEOREME 2.3.6. *La connexion ∇ définit une application $D_m: J^m(E/\mathscr{F}) \to S^m(\nu\mathscr{F}, E)$ telle que $D_m \circ i = \mathrm{id}_{S^m(\nu\mathscr{F}, E)}$.*

Démonstration. Il suffit de poser $D_m = S_*^m \circ \nabla^{m-1} \circ \cdots \circ \nabla^1 \circ \nabla$ où ∇^k est vue comme application linéaire de $L^k(\nu\mathscr{F}, E)$ dans $L(L^k(\nu\mathscr{F}, E), E) \simeq L^{k+1}(\nu\mathscr{F}, E)$. Un calcul simple utilisant la définition de i dans la suite exacte (S^*) permet de conclure. □

COROLLAIRE 2.3.7. *Il existe un isomorphisme canonique du fibré $J^m(E/\mathscr{F})$ sur le $\mathscr{F}$-fibré $\bigoplus_{k=0}^m S^k(\nu\mathscr{F}, E)$.*

Démonstration. Par la suite (S^*), $J^{m-1}(E/\mathscr{F})$ se réalise comme sous-fibré de $J^m(E/\mathscr{F})$ isomorphe au noyau de D_m. On a ainsi

$$J^m(E/\mathscr{F}) = J^{m-1}(E/\mathscr{F}) \oplus S^m(\nu\mathscr{F}, E).$$

Un raisonnement analogue donne

$$J^{m-1}(E/\mathscr{F}) \simeq J^{m-2}(E/\mathscr{F}) \oplus S^{m-1}(v\mathscr{F}, E)$$

etc... On obtient finalement

$$J^{m}(E/\mathscr{F}) \simeq \bigoplus_{k=0}^{m} S^{k}(v\mathscr{F}, E) \qquad \square$$

On en déduit que $J^m(E/\mathscr{F})$ est canoniquement muni d'une connexion basique et qui en fait un $\mathscr{F}$-fibré.

2.4. *Opérateurs différentiels basiques sur les $\mathscr{F}$-fibrés.*

Considérons le préfaisceau $\boldsymbol{C}$ sur M qui à tout ouvert V associe l'espace $C^\infty_V(E/\mathscr{F})$ des sections $\mathscr{F}_V$-basiques de V.

DEFINITION 2.4.1. Un *opérateur différentiel basique* d'ordre m agissant sur les sections basiques $C^\infty(E/\mathscr{F})$ de E est un morphisme $D: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ tel que pour tout ouvert V distingué pour $\mathscr{F}$ et trivialisant E pour tout $z \in V$, $J_m(\alpha)_z = 0$ implique $D\alpha(z) = 0$ $\forall \alpha \in C^\infty_V(E/\mathscr{F})$.

Un tel morphisme induit une application linéaire $D: C^\infty(E/\mathscr{F}) \to C^\infty(E/\mathscr{F})$. Dans un système de coordonnées locales (x, y) adaptées à $\mathscr{F}$, D s'écrit

$$D = \sum_{k=0}^{m} P_k\left(y; \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

où pour tout $k = 0, \dots, m$ P_k est un polynôme homogène de degré k en $\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n$ dont les coéfficients sont des matrices carrées d'ordre $N' = \operatorname{rang}_{\mathbb{C}} E$ à valeurs des fonctions basiques.

On peut remarquer que si T est un morphisme feuilleté entre deux $\mathscr{F}$-fibrés E_1 et E_2 alors la section T_* du $\mathscr{F}$-fibré $L(E_1, E_2)$ induite par T est C^∞ et basique. On a la proposition qui se démontre comme dans le cas classique [15].

PROPOSITION 2.4.2. *D est un opérateur différentiel basique d'ordre m si et seulement si il existe un morphisme feuilleté $T: J^m(E/\mathscr{F}) \to E$ tel que $D = T_* \circ J_m$.*

2.5. *$\mathscr{F}$-fibrés hermitiens.*

Supposons que $\mathscr{F}$ est riemannien. Alors le fibré $v\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = v\mathscr{F} \otimes \mathbb{C}$ est muni d'une métrique hermitienne h invariante le long des feuilles.

PROPOSITION 2.5.1. *La connexion de Levi-Civita transverse associée à h est basique et fait donc de* $v\mathscr{F}_{\mathbb{C}}$ *un* $\mathscr{F}$*-fibré hermitien.*

Les sections basiques de $v\mathscr{F}_{\mathbb{C}}$ ne sont rien d'autre que les champs basiques sur M.

De manière générale soit E un $\mathscr{F}$-fibré muni d'une métrique hermitienne h. On peut considérer h comme une section du fibré S^2E^* des formes bilinéaires hermitiennes sur E. La connexion basique ∇ s'étend de manière naturelle en une connexion basique ∇^S sur S^2E^*.

DEFINITION 2.5.2. On dira que E est un $\mathscr{F}$-fibré hermitien si $\nabla^S_X h = 0$ pour tout $x \in \Gamma(\mathscr{F})$.

Si $\mathscr{F}$ est riemannien alors sur l'espace total d'un tel fibré, le feuilletage $\mathscr{F}_E$ est riemannien. En effet le fibré normal à $\mathscr{F}_E$ s'identifie à la somme directe du fibré TE tangent aux fibres de $q: E \to M$ et au fibré $q^*(v\mathscr{F})$ qui sont munis de métriques riemanniennes invariantes le long des feuilles de $\mathscr{F}_E$.

Les $\mathscr{F}$-fibrés hermitiens constitueront la catégorie que l'on considérera dans toute la suite.

Soient maintenant D un opérateur différentiel basique d'ordre m agissant sur les sections basiques de E, $z \in M$ et $\xi \in T^*M$ basique pour $\mathscr{F}$. On se donne une fonction basique g définie sur un voisinage V distingué pour $\mathscr{F}$ et trivialisant E telle que $g(z) = 0$ et $\mathrm{d}g(z) = \xi$ et $\alpha \in C^\infty_V(E/\mathscr{F})$. On notera η la valeur de α au point z. Par analogie au cas classique (cf. [13]) on définit le *symbole principal* de D au point z comme étant l'application linéaire $\sigma(D)(z, \xi): E_z \to E_z$ définie par

$$\sigma(D)(z, \xi)(\eta) = \frac{1}{m!} D(g^n \alpha)(z)(\eta).$$

Comme en 1.3 on notera $A_D(z, \xi, \cdot)$ la forme quadratique associée à D relativement à la métrique hermitienne h sur E.

DEFINITION 2.5.3. On dira que D est

(i) *transversalement elliptique* si $\sigma(D)(z, \xi)$ est un isomorphisme pour tout $z \in M$ et tout ξ non nul;

(ii) *fortement transversalement elliptique* si $A_D(z, \xi, \cdot)$ est définie positive pour tout $z \in M$ et tout ξ non nul.

Dans toute la suite E sera un $\mathscr{F}$-fibré hermitien de rang N' au-dessus d'une variété compacte M munie d'un feuilletage riemannien $\mathscr{F}$ de codimension n. On notera h la métrique hermitienne sur E. Quitte à passer à un revêtement à deux feuillets on peut supposer que $\mathscr{F}$ est transversalement orientable. On se donne un opérateur différentiel basique D d'ordre pair $m = 2m'$ fortement transversalement elliptique agissant sur les sections basiques de E.

Nous allons montrer que D possède les mêmes propriétés qu'un opérateur fortement elliptique agissant sur toutes les sections d'un fibré herminiten au-dessus d'une variété compacte. Nous procéderons en trois étapes.

2.6. Feuilletages de Lie à feuilles denses.

Dans ce cas l'espace vectoriel $C^\infty(E/\mathscr{F})$ est de dimension finie. En effet une section basique qui est nulle en un point est nulle partout par densité des feuilles. Autrement dit, une section basique est entièrement déterminée par la valeur qu'elle prend en un point. Il n'y a donc qu'un nombre fini de sections basiques linéairement indépendantes. Posons $\bar{E}_0 = C^\infty(E/\mathscr{F})$ et $N'_0 = \dim \bar{E}_0$. La métrique hermitienne sur E définit une métrique hermitienne sur $\bar{E}_0$. La décomposition de Hodge pour D se ramène donc à celle d'une application linéaire opérant sur un espace hermitien de dimension finie.

2.7. Feuilletages T.P.

Pour tout $u \in W$, on note F_u la fibre au-dessus de u de la fibration basique $\pi: M \to W$ et $\bar{E}_u = C^\infty(E_u/\mathscr{F}_u)$ où E_u et $\mathscr{F}_u$ sont respectivement les restrictions du fibré E et du feuilletage $\mathscr{F}$ à F_u.

PROPOSITION 2.7.1. *La dimension de $\bar{E}_u$ ne dépend pas de u.*

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux points de W. Les automorphismes infinitésimaux de $\mathscr{F}$ se relèvent naturellement (E étant un $\mathscr{F}$-fibré) en automorphismes infinitésimaux de $\mathscr{F}_E$, et il en est de même du groupe des automorphismes qu'ils engendrent. Celui-ci est transitif sur M et projetable sur W. Donc il existe dans ce groupe un élément γ tel que $\gamma(F_{u_1}) = F_{u_2}$. Si γ_E est son relevé dans E, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E_{u_1} & \xrightarrow{\gamma_E} & E_{u_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{u_1} & \xrightarrow{\gamma} & F_{u_2} \end{array}$$

L'automorphisme γ_E induit alors un isomorphisme entre $\bar{E}_{u_1}$ et $\bar{E}_{u_2}$. □

On pose $\bar{E} = \bigcup_{u\in W} \bar{E}_u$ et on note $\bar{q}: \bar{E} \to W$ la projection $\bar{q}(\alpha_u) = u$.

PROPOSITION 2.7.2. *$\bar{E}$ est un fibré hermitien au-dessus de W.*

Démonstration. $\bar{E}$ est la réunion pour chaque $u \in W$, d'un espace vectoriel de dimension N'_0 associé à ce point. On définit sur $\bar{E}$ une structure de fibré vectoriel de base W à l'aide des trivialisations locales suivantes: soient $u_0 \in W$, $z_0 \in \pi^{-1}(u_0)$ et N'_0 sections basiques $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N'_0}$ de E linéairement indépendantes en z_0 L'ouvert de M où ces sections restent linéairement indépendantes est saturé pour la fibration π, donc se projette en un ouvert U de W dans lequel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N'_0}$

définissent une trivialisation locale de $\bar{E}$. Il est immédiat de vérifier que ces trivialisations locales sont différentiablement compatibles (le passage d'une telle trivialisation à une autre se faisant par une matrice de fonctions basiques, regardées comme fonctions différentiables sur W).

En outre si α est une section basique de E, la correspondance $u \to \alpha|_{\pi^{-1}(u)}$ définit une section de $\bar{E}$ que nous noterons $\psi(\alpha)$. D'où une application:

$$\psi: C^\infty(E/\mathscr{F}) \to C^\infty(\bar{E})$$

qui est visiblement un isomorphisme de $A(W)$-modules ($A(W)$ étant identifié au module des fonctions basiques sur M).

D'autre part, comme pour tout $u \in W$, l'espace vectoriel $\bar{E}_u$ est muni d'une métrique $\bar{h}_u$ provenant de la métrique hermitienne h définie globalement sur E, le fibré $\bar{E}$ est canoniquement munie d'une métrique hermitienne $\bar{h}$. □

$\bar{E}$ sera appelé le *fibré utile* correspondant à E.

EXEMPLE 2.7.3. Soit $M = T^3$ le tore de dimension 3 et notons (z_1, z_2, u) les coordonnées canoniques. Considérons le feuilletage $\mathscr{F}$ défini par le système différentiel

$$\begin{cases} a\,\mathrm{d}z_1 - \mathrm{d}z_2 = 0 \\ \qquad\quad \mathrm{d}u = 0 \end{cases}$$

où a est un nombre réel irrationnel. C'est un feuilletage transversalement de Lie de groupe $\mathbb{R}^2$, donc T.P. Sa fibration basique s'identifie à la fibration triviale définie par l'équation $\mathrm{d}u = 0$:

$$T^2 \hookrightarrow T^3 \xrightarrow{\pi} S^1$$

Le feuilletage induit sur chaque fibre T^2 est le feuilletage par droites irrationnelles de pente a.

Soit E le fibré complexe de rang 2 défini par la représentation:

$$\psi: \pi_1(M) \to \mathrm{SU}(2)$$

avec .

$$= \psi((1,0,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \psi((0,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$\psi((0,0,1)) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\mu} \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et λ et μ sont des réels quelconques.

On munit E de la connexion canonique associée à ψ. Elle est basique et plate. D'autre part le groupe structural de E est un sous-groupe de SU(2). Bref E est un $\mathscr{F}$-fibré hermitien. Le feuilletage $\mathscr{F}_E$ sur E est un feuilletage en droites.

Soit u un élément de S^1.

(i) Une section α de E_u est un couple de fonctions (f, g) sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs complexes telles que f est bipériodique (et induit donc une fonction sur le tore T^2) et g périodique en z_1 (pour z_2 fixé) et vérifiant

$$g(z_1, z_2 + 1)\,e^{i\theta} = g(z_1, z_2)$$

Imposer à α d'être basique, c'est imposer à f et g de satisfaire

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} + a\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z_1} + a\frac{\partial g}{\partial z_2} = 0.$$

Comme $\mathscr{F}_u$ est à feuilles dense, f est en fait constante. Fixons $z_2 \in \mathbb{R}$. La fonction $z_1 \to g(z_1, z_2)$ se développe en série de Fourier

$$g(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n(z_2)\,e^{2i\pi n z_1}.$$

L'équation $(\partial g/\partial z_1) + a(\partial g/\partial z_2) = 0$ est équivalente au système

$$g_n'(z_2) = -\frac{2i\pi n}{a} g_n(z_2), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ce qui donne

$$g_n(z_2) = g_n\,e^{-(2i\pi n/a)z_2}$$

où les $g_n, n \in \mathbb{Z}$, sont des constantes complexes. D'où

$$g(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n\,e^{2i\pi n(z_1 - (z_2/a))}.$$

Comme g doit en plus satisfaire la relation $g(z_1, z_2 + 1)\,e^{i\theta} = g(z_1, z_2)$ on doit avoir

$$e^{i(\theta - (2\pi/a)n)} = 1, \quad \forall_n \in \mathbb{Z}$$

i.e. $\theta - (2\pi/a)n \in 2\pi\mathbb{Z}$. Un calcul simple montre que s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$\theta - (2\pi/a)n_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$, il est unique, dans ce cas la fonction

$$g(z_1, z_2) = g_{n_0} e^{2i\pi(z_1 - (z_2/a))n_0} \ (g_n = 0 \text{ si } n \neq n_0)$$

convient. L'espace $\bar{E}_0$ est donc de dimension complexe 2 et est engendré par 1 et g. Si $\theta - (2\pi/a)n \notin 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a nécessairement $g_n = 0$ et donc $g \equiv 0$; dans ce cas l'espace $\bar{E}_0$ est de dimension complexe 1 engendré par $f \equiv 1$.

(ii) En opérant ainsi sur chaque fibre on voit que

(*) s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ (et il est unique) tel que $\theta - (2\pi/a)n_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ le fibré utile $\bar{E} \to \mathbb{S}^1$ est de rang 2 défini par la représentation

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1) &\xrightarrow{\bar{\psi}} \mathrm{SU}(2) \\ 1 &\longrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(**) Si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\theta - (2\pi/a)n \notin 2\pi\mathbb{Z}$, le fibré utile $\bar{E}$ est de rang 1, et est défini par la représentation

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1) &\to \mathrm{SU}(1) \\ 1 &\to e^{i\lambda} \end{aligned}$$

2.7.4. Produit scalaire.

En utilisant la métrique hermitienne h sur E, nous allons munir l'espace $C^\infty(E/\mathscr{F})$ d'une structure préhilbertienne.

Supposons que la métrique sur M quasi-fibrée pour $\mathscr{F}$ soit telle que le volume des fibres est égal à 1. La mesure canonique associée est de la forme

$$v = \lambda \wedge \pi^*(w)$$

où λ est la forme volume sur les fibres de π et w la mesure induite sur W. Si α et β sont deux éléments de $C^\infty(E/\mathscr{F})$ on pose:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_E = \int_M h_z(\alpha, \beta) v.$$

On définit ainsi un produit scalaire sur $C^\infty(E/\mathscr{F})$.

Considérons maintenant deux éléments $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ de $C^\infty(\bar{E})$ tels que

$$\bar{\alpha} = \psi(\alpha) \quad \text{et} \quad \bar{\beta} = \psi(\beta)$$

avec $\alpha, \beta \in C^\infty(E/\mathscr{F})$ et ψ l'isomorphisme entre $C^\infty(E/\mathscr{F})$ et $C^\infty(\bar{E})$ décrit en 2.7.2. On pose:

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle_{\bar{E}} = \int_W \bar{h}_u(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) w$$

On a alors la

PROPOSITION. 2.7.5. *L'isomorphisme ψ est une isométrie de $C^\infty(E/\mathscr{F})$ sur $C^\infty(\bar{E})$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle_E &= \int_M h_z(\alpha, \beta) v \\ &= \int_M h_z(\alpha, \beta) \lambda \Lambda \pi^*(w). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on a:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle_E &= \int_W \left(\int_F h_z(\alpha, \beta) \lambda \right) w \\ &= \int_W \bar{h}_u(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) w \end{aligned}$$

i.e. $\langle \alpha, \beta \rangle_E = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle_{\bar{E}}$. □

Nous allons maintenant associer à l'opérateur D un opérateur différentiel ordinaire de même ordre sur W agissant sur $C^\infty(\bar{E})$ et fortement elliptique.

PROPOSITION 2.7.7. *D induit sur W un opérateur différentiel $\bar{D}$ agissant sur les sections de $\bar{E}$.*

Démonstration. Soit U un ouvert de W (muni du feuilletage par points) trivialisant $\bar{E}$ et posons $V = \pi^{-1}(U)$. Si $C_U^\infty(\bar{E})$ est l'espace des sections de $\bar{F}$ au-dessus de U on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_V^\infty(E/\mathscr{F}) & \xrightarrow{\quad D \quad} & C_V^\infty(E/\mathscr{F}) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ C_U^\infty(\bar{E}) & \xrightarrow{\quad \bar{D} \quad} & C_U^\infty(\bar{E}) \end{array}$$

qui définit donc l'opérateur différentiel $\bar{D}$ cherché. □

PROPOSITION 2.7.8. *$\bar{D}$ est d'ordre $2m'$ et est fortement elliptique.*

Démonstration. Soient $u \in V$ et $z \in F_u$. Posons $E' = \pi^*\bar{E}$. Alors l'évaluation de $\alpha \in E'_u$ en z permet d'identifier E' à un sous-fibré de E. L'espace cotangent à M en z se décompose de la façon suivante:

$$T_z^*M = T_z^*F \oplus N_z^*$$

où N_z est l'orthogonal à l'espace T_zF tangent à la fibre de π en z. Pour tout $\bar{\xi} \in T_u^*W$ on note ξ l'unique vecteur de N_z^* qui se projette sur $\bar{\xi}$. Soit g une fonction sur W telle que $g(u) = 0$ et $dg_u = \bar{\xi}$; bien entendu si g est considérée comme fonction sur M, elle est basique pour la fibration π et on a donc $dg_z = \xi$ puisque la 1-forme différentielle dg est aussi basique pour π. Considérons une section locale $\bar{\alpha}$ de $\bar{E}$ telle que $\bar{\alpha}(u) = \eta \in \bar{E}_u$. On pose $\alpha = \psi^{-1}(\bar{\alpha})$. Le symbole de D est alors donné par

$$\sigma(D)(z, \xi)(\eta(z)) = \frac{1}{m!} D(g^m\alpha)(z)(\eta(z))$$

et préserve le sous-espace E'_z; il induit donc une application linéaire de $\bar{E}_u$ dans lui-même qui n'est rien d'autre que le symbole principal

$$\sigma(\bar{D})(u, \bar{\xi})(\eta) = \frac{1}{m!} \bar{D}(g^m\bar{\alpha})(u)(\eta)$$

de $\bar{D}$ au point u. Ceci montre que $\bar{D}$ est d'ordre $2m' = m$ et que la forme quadratique $A_{\bar{D}}(u, \bar{\xi}, \cdot)$ associée à $\bar{D}$ sur $\bar{E}_u$ relativement à la métrique hermitienne $\bar{h}$ est égale à la restriction à E'_u de la forme quadratique $A_D(z, \xi, \cdot)$ associée à D sur E_z relativement à la métrique hermitienne h. Comme cette dernière est définie positive pour tout $\xi \neq 0$ (D étant fortement transversalement elliptique) et que $\xi = 0$ si et seulement si $\bar{\xi} = 0$, $A_{\bar{D}}(u, \bar{\xi}, \cdot)$ est définie positive pour tout $\bar{\xi} \neq 0$ i.e. $\bar{D}$ est fortement elliptique. □

On note D^* l'adjoint de D pour le produit scalaire sur $C^\infty(E/\mathscr{F})$. C'est un opérateur différentiel basique d'ordre $2m'$. Puisque ψ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens on a $\overline{D^*} = \bar{D}^*$.
Soit $\mathscr{H}(E/\mathscr{F}) = \{\alpha \in C^\infty(E/\mathscr{F})/D\alpha = 0\}$ qui s'identifie à $\mathscr{H}(\bar{E}) = \operatorname{Ker} \bar{D}$. On a le

THÉORÈME 2.7.9. *L'espace vectoriel $\mathscr{H}(E/\mathscr{F})$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale*

$$C^\infty(E/\mathscr{F}) = \mathscr{H}(E/\mathscr{F}) \oplus \operatorname{Im} D^*.$$

Démonstration. Résulte de la théorie générale des opérateurs elliptiques appliquée à $\bar{D}$ agissant sur $C^\infty(\bar{E})$ sur la variété compacte W (cf. [21]), □

2.8. Cas riemannien.

On note toujours $G = \mathrm{SO}(n) \to M^\# \xrightarrow{\rho} M$ le fibré principal des repères orthonormés directs transverses à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^\#$ le feuilletage T.P. sur $M^\#$ associé à $\mathscr{F}$. On pose $E^\# = \rho^* E$ et on note $q^\#$ la projection $E^\# \to M^\#$.

PROPOSITION 2.8.1. *$E^\#$ est à la fois un $\mathscr{F}^\#$-fibré hermitien et un G-fibré sur $M^\#$.*

Démonstration. Soit ρ_E: $E^\# \to E$ la projection relevant ρ. L'image réciproque par ρ_E de la connexion ∇ sur E est une connexion $\nabla^\#$ sur $E^\#$ qui en fait un fibré feuilleté. On a alors un diagramme commutatif de variétés et d'applications feuilletées

$$\begin{array}{ccc} E^\# & \xrightarrow{\rho_E} & E \\ {\scriptstyle q^\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ M^\# & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

La connexion $\nabla^\#$ est donc basique et compatible avec la métrique hermitienne $h^\#$ sur $E^\#$ relevée de h. D'autre part, l'action de G sur $M^\#$ se relève, à l'aide de cette connexion, en une action sur $E^\#$ qui préserve à la fois le feuilletage $\mathscr{F}_{E^\#}$ et la métrique hermitienne $h^\#$. Ce qui démontre la proposition. □

Au fibré $E^\#$ correspond, par la proposition 2.7.2., un fibré $\bar{E}^\#$ sur la variété basique $W^\#$ de $\mathscr{F}^\#$. L'action de G sur $E^\#$ induit une action sur $\bar{E}^\#$ qui en fait un G-fibré muni d'une métrique $\bar{h}^\#$ G-invariante induite par h. On dira que *$\bar{E}^\#$ est le fibré utile correspondant à E.*

REMARQUES 2.8.2. (i) L'anneau $A(M/\mathscr{F})$ des fonctions basiques sur M s'identifie à l'anneau $A_G(W^\#)$ des fonctions sur $W^\#$ invariantes par G. On a alors un isomorphisme naturel entre le $A(M/\mathscr{F})$-module $C^\infty(E/\mathscr{F})$ et le $A_G(W^\#)$-module $C^\infty_G(E^\#/\mathscr{F}^\#)$ des sections basiques de $E^\#$ invariantes par G. Comme $C^\infty(E^\#/\mathscr{F}^\#)$ est canoniquement isomorphe au $A(W)$-module $C^\infty(\bar{E})$ on a une identification naturelle entre $C^\infty(E/\mathscr{F})$ et le $A_G(W^\#)$-module $C^\infty_G(\bar{E}^\#)$, des sections de $\bar{E}^\#$ qui sont G-invariantes.

(ii) Signalons aussi que E étant un $\mathscr{F}$-fibré hermitien, il en est de même de tous les fibrés associés ($S^k(v\mathscr{F}, E)$, $J^k(E/\mathscr{F})$, $L(J^k(E/\mathscr{F}), E)$ etc...). Leurs relevés $S^k(v\mathscr{F}, E)^\#$, $J^k(E/\mathscr{F})^\#$, $L(J^k(E/\mathscr{F}), E)^\#$ ... à $M^\#$ par la projection ρ: $M^\# \to M$ sont à la fois des $\mathscr{F}^\#$-fibrés hermitiens et des G-fibrés.

(iii) On définit le produit scalaire sur $C^\infty(E/\mathscr{F})$ par restriction à $C_G^\infty(E^\#/\mathscr{F}^\#)$ de celui défini à l'aide de la métrique $h^\#$ comme précédemment sur $C^\infty(E^\#/\mathscr{F}^\#)$.

Posons $N = \frac{1}{2}n(n-1) = \dim G$ et considérons le parallélisme transverse à $\mathscr{F}^\#$, $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_N\}$ (cf. Théorème 2.1.3). Les champs basiques associés $P_1^b, \ldots, P_n^b, Q_1^b, \ldots, Q_N^b$ engendrent le fibré normal $v\mathscr{F}^\#$ à $\mathscr{F}^\#$. On notera H le sous-fibré de $TM^\#$ engendré par $(P_1, \ldots, P_n)$ et V celui engendré par $(Q_1, \ldots, Q_N)$. De même H^b sera le sous-fibré de $v\mathscr{F}^\#$ engendré par $(P_1^b, \ldots, P_n^b)$ et V^b celui engendré par $(Q_1^b, \ldots, Q_N^b)$. On a de manière évidente

$$\begin{aligned} TM^\# &= T\mathscr{F}^\# \oplus V \oplus H \\ v\mathscr{F}^\# &= V^b \oplus H^b \end{aligned}$$

et des isomorphismes naturels

$$(v\mathscr{F})^\# = \rho^*(v\mathscr{F}) \simeq H^b \tag{1}$$

$$S^k((v\mathscr{F})^\#, E^\#) \simeq S^k(v\mathscr{F}, E)^\# \simeq S^k(v\mathscr{F}^\#/V^b, E^\#) \tag{2}$$

Soit maintenant $D = T_* \circ J_m$ où J_m est un jet basique d'ordre m et T un morphisme feuilleté $T: J^m(E/\mathscr{F}) \to E$. Nous allons relever l'opérateur D en un opérateur différentiel basique d'ordre $2m'$ sur M agissant sur $C^\infty(E^\#/\mathscr{F}^\#)$ et commutant à l'action de G. Pour cela il suffit de relever T en un morphisme feuilleté: $T^\#: J^m(E^\#/\mathscr{F}^\#) \to E^\#$ commutant à l'action de G induite sur $J^m(E^\#/\mathscr{F}^\#)$ et $E^\#$.

LEMME 2.8.3. *Il existe un relèvement $\tilde{T}^\#$ qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(v\mathscr{F}, E)^\# \arrow[r, "\tilde{T}^\#"] \arrow[d, "\rho_*^s"] & E^\# \arrow[d, dash, "\rho_*"] \\ J^m(E/\mathscr{F}) \simeq \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(v\mathscr{F}, E) \arrow[r] & E \end{tikzcd} \tag{**}$$

où ρ_* et ρ_*^s sont les applications naturelles définies par ρ.

Démonstration. Soient $z^\# \in M^\#$ et $z = \rho(z^\#)$. La restriction de ρ_* à la fibre $E_{z^\#}^\#$ de $E^\#$ en $z^\#$ est un isomorphisme sur E_z. Pour tout $\theta \in S^k(v\mathscr{F}, E)^\#$ on pose

$$\tilde{T}_{z^\#}^\#(\theta) = \rho_*^{-1}[T_z(\rho_*^s(\theta)]$$

On vérifie alors facilement qu $\tilde{T}^\#$ est différentiable par le Théorème 2 p. 60 de [15]; c'est donc un morphisme feuilleté et fait commuter le diagramme (**).

□

Reste à prolonger $\tilde{T}^{\#}$. On a des isomorphismes canoniques

$$S^k(\nu\mathscr{F}, E)^{\#} \simeq S^k((\nu\mathscr{F})^{\#}, E^{\#}) \simeq S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}/V^b, E^{\#})$$

pour tout $k = 0, \dots, m$. Alors la projection

$$pr\colon \nu\mathscr{F}^{\#} \to \nu\mathscr{F}^{\#}/V^b$$

définit une injection

$$pr^*\colon S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}/V^b, E^{\#}) \to S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}, E^{\#}).$$

LEMME 2.8.4. *Il existe un morphisme feuilleté $T^{\#}$ qui fait commuter le diagramme:*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}/V^b, E^{\#}) \arrow[rr, "\tilde{T}^{\#}"] \arrow[d, hook] & & E^{\#} \\ \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}, E^{\#}) \arrow[urr, "T^{\#}"'] & & \end{tikzcd} \qquad (***)$$

Démonstration. On a $\tilde{T}^{\#} = \tilde{T}_0^{\#} \oplus \cdots \oplus \tilde{T}_m^{\#}$ où $\tilde{T}_k^{\#}$ est la kème composante de $\tilde{T}^{\#}$. Il suffit de prolonger cette composante. On a $\nu\mathscr{F}^{\#} = V^b \oplus H^b$. D'où

$$S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}, E^{\#}) = \bigoplus_{r+s=k} S^{s,r}$$

où $S^{s,r} = S^s(H^b, E^{\#}) \otimes S^r(V^b, \mathbb{C})$; et donc

$$S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}/V^b, E^{\#}) = S^{k,0} \simeq S^k(H^b, E^{\#}).$$

Tout $\theta \in S^k(\nu\mathscr{F}^{\#}, E^{\#})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\theta = \theta^{k,0} + \sum_{\substack{s+r=k \\ r \geqslant 1}} \theta^{s,r}$$

où $\theta^{s,r} \in S^{s,r}$ on pose alors

$$T_k^{\#}(\theta) = \tilde{T}_k^{\#}(\theta^{k,0}) \quad \text{et} \quad T_k^{\#}\left(\sum_{\substack{s+r=k \\ r \geqslant 1}} \theta^{sr}\right) = 0.$$

Ceci définit bien le prolongement $T^{\#}$ cherché. On vérifie facilement qu'il commute à l'action de G. □

On pose $D^{\#} = T^{\#}_{*} \circ J^{\#}_{m}$. On obtient ainsi un opérateur différentiel basique d'ordre m sur $M^{\#}$, G-invariant agissant sur les sections basiques de $E^{\#}$ et dont la restriction à $C^{\infty}_{G,\rho^{-1}(V)}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#})$, pour tout ouvert V de M fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}_{G,\rho^{-1}(V)}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#}) & \xrightarrow{\quad D^{\#} \quad} & C^{\infty}_{G,\rho^{-1}(V)}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#}) \\ \int \Big\| & & \int \Big\| \\ C^{\infty}_{V}(E/\mathscr{F}) & \xrightarrow{\qquad D \qquad} & C^{\infty}_{V}(E/\mathscr{F}). \end{array}$$

PROPOSITION 2.8.5. *L'opérateur $D^{\#}$ est fortement H^{*}-elliptique.*

Démonstration. Soient $z^{\#} \in M^{\#}$, $\xi^{\#}_{H} \in H^{*}_{z^{\#}}$ et $\eta^{\#} \in E^{\#}_{z^{\#}}$. On notera $z = \rho(z^{\#})$, $\xi = \rho_{*}(\xi^{\#}_{H})$ et $\eta = \rho_{*}(\eta^{\#})$ qui sont respectivement des vecteurs de $(\nu\mathscr{F})^{*}_{z}$ et E_{z} où ρ_{*} est la projection induite naturellement par ρ. Il existe alors un ouvert V distingué pour $\mathscr{F}$ et trivialisant E, une fonction basique g définie sur V et $\alpha \in C^{\infty}_{V}(E/\mathscr{F})$ vérifiant

$$g^{\#}(z^{\#}) = 0, \quad dg^{\#}_{z^{\#}} = \xi^{\#}_{H} \quad \text{et} \quad \alpha^{\#}(z^{\#}) = \eta^{\#}.$$

où $g^{\#}$ et $\alpha^{\#}$ sont les relevées à $\rho^{-1}(V)$ de g et α. Puisque la restriction de $D^{\#}$ à $C^{\infty}_{G,\rho^{-1}(V)}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#})$ est égale à D on a

$$\begin{aligned} \sigma(D^{\#})(z^{\#}, \xi^{\#}_{H}, \eta^{\#}) &= \frac{1}{m!} D^{\#}(g^{\#m}\alpha^{\#})(z^{\#})(\eta^{\#}) \\ &= \frac{1}{m!} \rho_{*}^{-1}[D(g^{m}\alpha)(z)(\eta)] \\ &= \rho_{*}^{-1}[\sigma(D)(z, \xi)(\eta)]. \end{aligned}$$

D'où

$$A_{D^{\#}}(z^{\#}, \xi^{\#}_{H}, \eta^{\#}) = A_{D}(z, \xi, \eta).$$

Comme $A_{D}(z, \xi, \cdot)$ est définie positive pour tout $\xi \neq 0$ et basique et que $\xi^{\#}_{H} \neq 0$ si et seulement si $\xi \neq 0$, $A_{D^{\#}}(z^{\#}, \xi^{\#}_{H}, \cdot)$ est définie positive pour tout $\xi^{\#}_{H} \in H^{*}_{z}$ non nul i.e. $D^{\#}$ est fortement H^{*}-elliptique. □

Ceci n'est malheureusement pas suffisant pour appliquer le Théorème 2.7.9 car $D^\#$ *n*'est pas fortement transversalement elliptique. Nous allons le compléter à cet effet.

Les champs fondamentaux $Q_1, \ldots, Q_N$ de l'action de G sur $M^\#$ définissent des opérateurs différentiels d'ordre 1 basiques et G-invariants qu'on notera encore $Q_1, \ldots, Q_N$. On pose

$$Q' = \left(\sum_{j=1}^{N} Q_j \bar{Q}_j\right)^{m'}, \qquad Q = (-1)^{m'} Q' \quad \text{et} \quad D' = D^\# + Q$$

où $\bar{Q}_j$ est le conjugué complexe de Q_j et $m = 2m'$ est l'ordre de D.

PROPOSITION 2.8.6. *L'opérateur Q est fortement V^*-elliptique et est nul sur $C_G^\infty(E^\#/F^\#)$.*

Démonstration. Soit $(g_1, \ldots, g_N)$ un système de coordonnées locales au voisinage d'un point $z \in M^\#$ dans la fibre de $\rho\colon M^\# \to M$ telles que pour tout $j = 1, \ldots, N$ l'opérateur Q_j s'écrit $Q_j = b_j(\partial/\partial g_j)$ où b_j est une fonction telle $|b_j| \equiv 1$. On a alors

$$Q = \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{N} b_j \bar{b}_j \frac{\partial}{\partial g_j} \frac{\partial}{\partial g_j}\right)^{m'}$$

où

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m' \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } m' \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit $\xi_V^\# = (\xi_{V1}^\#, \ldots, \xi_{VN}^\#)$ un vecteur de V_z^*. Il est alors facile de voir que pour tout vecteur $\eta^\#$ de $E_{z^\#}^\#$ et quelle que soit la parité de m' on a

$$A_Q(z^\#, \xi_V^\#, \eta^\#) = \sum_{k,l} h_{kl}^\#(z^\#)(\xi_k^\#)^{2m'} \eta_k^\# \bar{\eta}_l^\#$$

i.e. la forme quadratique $A_Q^\#(z^\#, \xi_V^\#, \cdot)$ a pour matrice

$$A = \Xi \cdot h^\#$$

où $h^\#$ est la matrice de la métrique hermitienne sur $E^\#$ et Ξ la matrice diagonale

$$\Xi = \begin{pmatrix} (\xi_{V1}^\#)^{2m'} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & (\xi_{VN}^\#)^{2m'} \end{pmatrix}.$$

Comme $h^{\#}$ est une métrique hermitienne elle est définie positive; en plus tous les coéfficients de Ξ sont positifs. Donc $A_Q(z^{\#}, \xi_V^{\#}, \cdot)$ est définie positive pour tout $\xi_V^{\#} \in V_{z^{\#}}^{*}$ non nul.

Le fait que Q est nul sur $C_G^{\infty}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#})$ découle de la définition même d'une section basique invariante. □

Soit maintenant $\xi \in T_{z^{\#}}^{*} M^{\#}$ un covecteur basique non nul. On a $\xi^{\#} = \xi_H^{\#} + \xi_V^{\#}$ où $\xi_H^{\#} \in H_{z^{\#}}^{*}$ et $\xi_V^{\#} \in V_{z^{\#}}^{*}$

$$A_{D'}(z^{\#}, \xi^{\#}, \cdot) = A_{D^{\#}}(z^{\#}, \xi_H^{\#}, \cdot) + A_Q(z^{\#}, \xi_V^{\#}, \cdot).$$

On déduit immédiatement des Propositions 2.8.5 et 2.8.6 que $A_{D'}(z^{\#}, \xi^{\#}, \cdot)$ est définie positive i.e. que D' est fortement transversalement elliptique. Il est basique, et invariant agissant sur $C^{\infty}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#})$.

Comme pour $\alpha^{\#} \in C_G^{\infty}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#})$ on a $Q\alpha^{\#} = 0$, la restriction de D' à $C_G^{\infty}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#})$ est égale à D. D'autre part l'adjoint D'^{*} de D' est la somme du relevé de l'adjoint de D et de l'adjoint de Q.

Le Théorème 2.7.9. appliqué à D' donne

(i) l'espace vectoriel $\mathscr{H}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#}) = \operatorname{Ker} D'$ est de dimension finie;

(ii) on a une décomposition orthogonale $C^{\infty}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#}) = \mathscr{H}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#}) \oplus \operatorname{Im} D'^{*}$.

En se restreignant à $C_G^{\infty}(E^{\#}/\mathscr{F}^{\#})$ et en raisonnant de la même manière qu'en 1.1.5, on obtient finalement le

THÉORÈME 2.8.7

(i) *L'espace vectoriel* $\mathscr{H}(E/\mathscr{F})$ *est de dimension finie;*

(ii) *On a une décomposition orthogonale* $C^{\infty}(E/\mathscr{F}) = \mathscr{H}(E/\mathscr{F}) \oplus \operatorname{Im} D^{*}$. □

2.8.8. Version générale

Soient maintenant E et F deux $\mathscr{F}$-fibrés hermitiens au-dessus de M et D un opérateur différentiel basique

$$D: C^{\infty}(E/\mathscr{F}) \to C^{\infty}(F/\mathscr{F})$$

d'ordre m (pair ou impair). Pour tout point $z \in M$ et tout covecteur basique ξ on définit comme en 2.5.2 le symbole de D

$$\sigma(D)(z, \xi): E_z \to F_z.$$

On dira que D est *transversalement elliptique* si $\sigma(D)(z, \xi)$ est un isomorphisme pour tout z et tout ξ non nul. Dans ce cas le rang de E est égal à celui de F. Soit D un tel opérateur. On peut montrer facilement que l'adjoint D^{*} de D a pour symbole

$$\sigma(D^*)(z, \xi) = (-1)^m \sigma^*(D)(z, \xi)$$

où $\sigma^*(D)(z, \xi)$ est la matrice adjointe de $\sigma(D)(z, \xi)$ pour les produits scalaires dans E_z et F_z.

On pose $L = D^*D$. Pour tout $\eta \in E_z$ on a alors

$$A_L(z, \xi, \eta) = (-1)^m \langle \sigma(L)(z, \xi)\eta, \eta \rangle = \langle \sigma(D)(z, \xi)\eta, \sigma(D)(z, \xi)\eta \rangle.$$

On en déduit alors que l'opérateur

$$L: C^\infty(E/\mathscr{F}) \to C^\infty(E/\mathscr{F})$$

est fortement transversalement elliptique.

La Théorème 2.8.7 appliqué à L nous permet alors d'établir facilement le résultat plus général.

(i) Ker D est de dimension finie.

(ii) on a une décomposition orthogonale

$$C^\infty(E/\mathscr{F}) = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D^*.$$

Ce théorème montre que l'opérateur $D: C^\infty(E/\mathscr{F}) \to C^\infty(F/\mathscr{F})$ est de Fredholm. C'est donc un opérateur à indice

$$\operatorname{Ind}_{\mathscr{F}}(D) = \dim \operatorname{Ker} D - \dim \operatorname{Ker} D^*.$$

PROBLÈME 2.8.9 Calculer cet entier en fonction d'invariants transverses de $\mathscr{F}$.

3. Applications

Nous allons donner quelques exemples pour illustrer les résultats que nous venons d'obtenir.

Soit M une variété compacte, connexe munie d'un feuilletage riemannien $\mathscr{F}$ de codimension n (réelle ou complexe suivant le cas) et transversalement orientable. La métrique riemannienne sur le fibré normal $\nu\mathscr{F}$ définit sur son complexifié $\nu\mathscr{F}_{\mathbb{C}}$ une métrique hermitienne invariante le long des feuilles. La connexion associée fait de $\nu\mathscr{F}_{\mathbb{C}}$ un $\mathscr{F}$-fibré hermitien.

Dans toute la suite le feuilletage $\mathscr{F}$ sera supposé homologiquement orientable i.e. l'espace vectoriel de cohomologie basique en dimension maximum est non nul. Pour la dualité de Poincaré et la dualité de Serre, cette condition $H^{\operatorname{cod}\mathscr{F}}(M/\mathscr{F}) \neq 0$ est nécessaire. C'est en fait une telle condition qui traduit la bonne notion d'"orientabilité de l'espace des feuilles $B = M/\mathscr{F}$". L'orientabilité transverse n'est malheureusement pas suffisante. Dans un premier temps nous allons examiner en détail un exemple dont la construction est dûe à Y. Carrière [3].

3.1. *Exemple*

3.1.1. *Construction*

Soit A une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à 2. Elle a deux valeurs propres réelles et irrationnelles λ et $\lambda' = 1/\lambda$. Soit a la pente du vecteur propre associé à λ. Le flot linéaire sur $T^2 \times \mathbb{R}$ défini par le système

$$\begin{cases} a\,dx - dy = 0 \\ dt = 0 \end{cases}$$

est invariant par la transformation

$$T^2 \times \mathbb{R} \to T^2 \times \mathbb{R}$$

$$(x, y, t) \to (A(x, y), t + 1)$$

et définit donc un flot $\mathscr{F}$ sur le fibré hyperbolique de fibre T^2 et de base S^1

$$T_A^3 = T^2 \times \mathbb{R}/(x, y, t) \sim (A(x, y), t + 1).$$

Notons b la pente du vecteur propre associé à la valaur propre $1/\lambda$.

Les champs besiques

$$\begin{cases} Y = \lambda^t\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\[2ex] Z = \dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

vérifient $[Y, Z] = (-\log \lambda)Y$ et forment un parallélisme pour $\mathscr{F}$. L'algèbre de Lie qu'ils engendrent (sur $\mathbb{R}$) est isomorphe à celle du groupe GA des transformations affines de la droite réelle qui préservent l'orientation. C'est donc un feuilletage de Lie de groupe GA.

3.1.2. Description des formes basiques

On se restreint aux formes basiques à coéfficients et à valeurs réels. Le cas complexe se traite de la même manière.

La base duale du parallélisme transverse (Y, Z) est formée des 1-formes basiques

$$\begin{cases} \theta = \lambda^{-t}\left(\dfrac{a}{a-b}\mathrm{d}x - \dfrac{1}{a-b}\mathrm{d}y\right) \\ \eta = \mathrm{d}t \end{cases}$$

dont les différentielles extérieures sont

$$\mathrm{d}\theta = (\log \lambda)\theta \wedge \eta \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\eta = 0.$$

Les fonctions basiques sont les fonctions qui ne dépendent que de t et qui sont périodiques de période 1. Les 1-formes basiques sont les formes qui s'écrivent

$$\alpha = f\theta + g\eta$$

où f et g sont des fonctions basiques. Les 2-formes basiques sont du type

$$\beta = h\theta \wedge \eta$$

où h est une fonction basique.

On peut alors donner sans difficulté la cohomologie basique de $\mathscr{F}$

$$H^r(T_A^3/\mathscr{F}) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ pour } r = 0 \text{ engendré par } 1 \\ \mathbb{R} \text{ pour } r = 1 \text{ engendré par } 1 \\ 0 \text{ pour } r \geqslant 2 \end{cases}$$

Ce feuilletage n'est donc pas homologiquement orientable.

Nous allons retrouver ces résultats en appliquant au $\mathscr{F}$-fibré $\Lambda^* v\mathscr{F}$ des r-formes extérieures sur le fibré normal $v\mathscr{F}$ le théorème 2.7.9.

3.1.3. Fibré utile associé à $\Lambda^* v\mathscr{F}$.

Rappelons que la fibration basique de $\mathscr{F}$ est la fibration en tores plate

$$T^2 \to T_A^3 \to S^1$$

associée à la représentation $\pi_1(S^1) \to \mathrm{Diff}(T^2)$ qui à 1 associe le difféomorphisme de T^2 défini par la matrice A.

(i) $r = 0$: pour chaque $u \in S^1$, l'espace des sections globales $C^\infty(v^*\mathscr{F}_u/\mathscr{F}_u)$ est de dimension 1 et le fibré $\overline{\Lambda^0 v^*\mathscr{F}}$ est le fibré trivial de rang 1 au dessus de S^1.

(ii) $r = 1$; le fibré $\overline{\Lambda^1 v^*\mathscr{F}} \to S^1$ est le fibré trivial de rang 2. Toute section de ce fibré s'écrit

$$\alpha = f(t)\theta + g(t)\eta$$

où f et g sont périodiques de période 1. La métrique induite est celle pour laquelle la base (θ, η) est ortghonormée.

(iii) $r = 2$, le fibré $\overline{\Lambda^2 v^*\mathscr{F}} \to S^1$ est le fibré trivial de rang 1. Toute section s'écrit

$$\beta = h(t)v$$

où $v = \theta \wedge \eta$ et h périodique de période 1.

3.1.4. Les opérateurs D et $\bar{D}$.

On considère le complexe

$$0 \to \Omega^0(T_A^3/\mathscr{F}) \xrightarrow{d} \Omega^1(T_A^3/\mathscr{F}) \xrightarrow{d} \Omega^2(T_A^3/\mathscr{F}) \to 0$$

Bien sûr on a $\Omega^r(T_A^3/\mathscr{F}) = C^\infty(\Lambda^r v^*\mathscr{F}/\mathscr{F})$ pour $r = 0, 1$, et 2.

On pose

$$*(1) = v$$
$$*(\theta) = \eta \text{ et } *(\eta) = -\theta$$
$$*(v) = 1$$

et on étend $*$ linéairement par rapport aux fonctions basiques. D'autre part, on définit le morphisme $I: \Omega^2(T_A^3/\mathscr{F}) \to \Omega^1(S^1)$ par

$$I(h(t)v) = h(t)\eta.$$

Ce morphisme n'envoie pas les cobords basiques sur les cobords de S^1 mais permet de définir un produit scalaire sur chaque $\Omega^r(T_A^3/\mathscr{F})$ par

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{S^1} I(\alpha \wedge *\beta).$$

Un calcul facile (mais un peu long) montre que l'adjoint

$$\delta: \Omega^r(T_A^3/\mathscr{F}) \to \Omega^{r-1}(T_A^3/\mathscr{F})$$

de d pour ce produit scalaire est donné par

(i) $r = 0$, $\delta(f) = 0$

(ii) $r = 1$, $\delta(f\theta) = 0$ et $\delta(g\eta) = -g'(t)$

(iii) $r = 2$, $\delta(hv) = (h(t) \log \lambda - h'(t))\theta$.

Comme une section α est harmonique si et seulement si elle vérifie

$$d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \delta\alpha = 0$$

l'examen des différentes expressions de d et celles de δ montre que

(i′) les seules fonctions basiques harmoniques sont les constantes;

(ii′) les seules 1-formes basiques harmoniques sont du type $g\eta$ où g est une constante;

(iii′) il n'y a pas de 2-forme basique harmonique non nulle.

Remarquons pour finir que δ ne coincide pas avec l'opérateur

$$\delta' = (-1)^r * d *.$$

En fait on peut montrer que δ' ne peut jamais être l'adjoint de d quel que soit le parallélisme transverse (Y, Z) que l'on choisit. Comme on peut toujours choisir la métrique telle que (Y, Z) soit orthonormé alors changer (Y, Z) revient à changer la métrique.

Nous allons voir que cette difficulté sera relevée par la condition d'orientabilité homologique de $\mathscr{F}$; ce que l'on supposera désormais.

3.2. Le complexe de de Rham basique

On pose $E = \Lambda^r \nu^* \mathscr{F} \otimes \mathbb{C}$ où $0 \leqslant r \leqslant \mathrm{Cod}_{\mathbb{R}} \mathscr{F}$. On note $\Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ l'espace des sections basiques de E qui sont bien sûr les r-formes basiques à valeurs complexes de $\mathscr{F}$. On supposera dans un premier temps que $\mathscr{F}$ est T.P. et que sa fibration basique

$$F \to M \xrightarrow{\pi} W$$

est telle que W est orientable (on peut toujours s'y ramener par passage à un revêtement à deux feuillets).

3.2.1. Intégration sur la fibre

Soient p et q deux entiers naturels et posons

$$F^p\Omega^{p+q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \{\alpha \in \Omega^{p+q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) / i_v\alpha = 0 \text{ pour tout}$$

$(q + 1)$-vecteur $v = X_1 \wedge \cdots \wedge X_{q+1}$ tangent à la fibration $\pi\}$.

On obtient alors une filtration de $\Omega^*(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ compatible avec d et donc une suite spectrale convergent vers $H^*(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ et de terme

$$E_2^{pq} = H^p(W, \mathbf{H}^q(F/\mathscr{F}_0, \mathbb{C}))$$

où $\mathscr{F}_0$ est le feuilletage induit sur F et $\mathbf{H}^q(F/\mathscr{F}_0, \mathbb{C}) \to W$ est le fibré plat de fibre la cohomologie basique de $\mathscr{F}_0$ (cf. [6] pour plus de détails). Notons s la dimension de W et t la codimension de $\mathscr{F}_0$ (dans F).

Dire que $\mathbf{H}^n(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ c'est dire $H^s(W, \mathbf{H}^t(F/\mathscr{F}_0, \mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}$. Mais $\mathbf{H}^t(F/\mathscr{F}_0, \mathbb{C})$ est de rang 1, il est donc trivial. Il existe alors sur M une forme basique fermée λ de degré t induisant une forme volume basique sur chaque fibre de $\pi: M \to W$. Sa classe sera appelée la *classe de Thom basique de* π.

On considère alors l'homomorphisme

$$\begin{aligned} &\phi: \Omega^p(W, \mathbb{C}) \to \Omega^{p+t}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \\ &\alpha \to \pi^*\alpha \wedge \lambda \end{aligned}$$

où $0 \leqslant p \leqslant s$. Il est facile de vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Omega^p(W, \mathbb{C}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d"'] & \Omega^{p+t}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \arrow[d, "d"] \\ \Omega^{p+1}(W, \mathbb{C}) \arrow[r, "\phi"] & \Omega^{p+1+t}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

est commutatif et que ϕ induit un isomorphisme

$$\phi^*: H^s(W, \mathbb{C}) \to H^n(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}).$$

L'isomorphisme inverse

$$I^*: H^n(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to H^s(W, \mathbb{C})$$

est induit par l'opérateur

$$I: \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{r-t}(W, \mathbb{C})$$

défini par

$$I(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} \alpha \text{ si } \tilde{\alpha} = \pi^*(\alpha) \wedge \lambda \text{ avec } \alpha \in \Omega^*(W, \mathbb{C}) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

qu'on appellera *l'intégration sur la fibre.* Notons que toute n-forme basique sur M est de la forme $\pi^*(\alpha) \wedge \lambda$ où α est une s-forme sur W.

3.2.2. L'opérateur $\bar{*}$.
L'opérateur $*: \Omega^r(M/\mathscr{F}) \to \Omega^{n-r}(M/\mathscr{F})$ défini dans [5] 4.4. (ii) par la métrique riemannienne transverse à $\mathscr{F}$, s'étend par linéarité en un opérateur

$$\bar{*}: \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{n-r}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$$

qui est en fait un isomorphisme.

3.2.3. Produit scalaire sur $\Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$.
Soient $\alpha, \beta \in \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$. Alors $\alpha \wedge \bar{*}\beta$ est un élément de $\Omega^n(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$. Pour tout $j = 1, \ldots, N$ considérons la 1-forme basique θ^j duale du champ fondamental Q_j et

$$\chi = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^N$$

la forme caractéristique du fibré principal $G = \mathrm{SO}(n) \to M^\# \xrightarrow{\rho} M$. La forme différentielle $\rho^*(\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi$ est basique et invariante sur $M^\#$ de degré $n + N = \operatorname{cod} \mathscr{F}^\#$. On définit alors le produit scalaire de α et β par

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_W I(\rho^*(\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi)$$

où I est l'homomorphisme défini en 3.2.1. et W est la variété basique de $\mathscr{F}^\#$.

L'espace $\Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ est muni ainsi d'une structure préhilbertienne.

On passe au cas où $\mathscr{F}$ n'est pas forcément T.P.

3.2.4. Le Laplacien basique
Soit $\delta: \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{r-1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ l'opérateur $\delta = (-1)^r \bar{*} \mathrm{d} \bar{*}$. Alors on a pour tout $\alpha \in \Omega^{r-1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ et tout $\beta \in \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$

$$\langle \mathrm{d}\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$$

i.e. δ est l'adjoint de d. En effet la forme $\rho^*(\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi$ est de degré $n + N - 1$ et on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\rho^*(\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi) &= \rho^*(\mathrm{d}\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi + \\ &+ (-1)^{r-1}\rho^*(\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{*}\beta) \wedge \chi + (-1)^{2r-1}\rho^*(\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \mathrm{d}\chi = \\ &= \rho^*(\mathrm{d}\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi - \rho^*(\alpha \wedge \bar{*}\delta\beta) \wedge \chi - \rho^*(\alpha \wedge \bar{*}\beta) \wedge \mathrm{d}\chi.\end{aligned}$$

Mais la forme $d\chi$ est nulle sur tout système de $N+1$ vecteurs $(Q_1, \ldots, Q_N, P_j)$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. En effet

$$\begin{aligned} d\chi(Q_1, \ldots, Q_N, P_j) &= \sum_k (-1)^k Q_k \cdot \chi(Q_1, \ldots, \hat{Q}_k, \ldots, Q_N, P_j) + \\ &+ (-1)^{N+1} P_j \chi(Q_1, \ldots, Q_k) + \sum_{k,l} (-1)^{k+l} \chi([Q_k, Q_l], \ldots \\ &\hat{Q}_k, \ldots, \hat{Q}_l, \ldots, Q_N, P_j) + \sum_k (-1)^{k+N+1} \chi([Q_k, P_j], \ldots, \hat{Q}_k \ldots \hat{P}_j). \end{aligned}$$

Le premier, le troisième et le quatrième terme sont nuls pour des raisons de degré (voir les relations de crochet que vérifie le parallélisme $(Q_1, \ldots, Q_N, P_1, \ldots, P_n)$ en 2.1.3); le deuxième est nul car la fonction $\chi(Q_1, \ldots, Q_N)$ est constante égale à 1. Comme le parallélisme $(Q_1, \ldots, Q_N, P_1, \ldots, P_n)$ engendre tous les champs transverse à $\mathscr{F}^{\#}$, la forme $d\chi$ est nulle sur tout système de $N+1$ vecteurs $(X_1, \ldots, X_N, Y)$ où $X_1, \ldots, X_N$ sont tangents aux fibres de $\rho: M^{\#} \to M$. Ce qui implique la nullité du terme $\rho^*(\alpha \wedge *\beta) \wedge d\chi$. En appliquant le morphisme I et en intégrant à gauche et à droite sur W on obtient

$$0 = \langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, \delta\beta \rangle.$$

L'opérateur $\Delta = d\delta + \delta d$ est basique et auto-adjoint. Sur la variété quotient locale il coïncide avec le laplacien usuel défini à l'aide de la métrique induite. Il est donc fortement transversalement elliptique. D'après le Théorème 2.3.7 on a:

THÉORÈME 3.2.5. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage riemannien sur une variété compacte M. Alors*

(i) *l'espace vectoriel* $\mathscr{H}^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker} \Delta$ est de dimension finie,

(ii) *on a une décomposition orthogonale* $\Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \mathscr{H}^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} \delta$.

L'espace vectoriel $H^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ de cohomologie basique à coéfficients complexes s'identifie à $\mathscr{H}^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$. Il est donc de dimension finie.

Rappelons la

DÉFINITION 3.2.6. on dira que $\mathscr{F}$ est homologiquement orientable si $H^{\operatorname{cod} \mathscr{F}}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \neq 0$.

On a la

PROPOSITION 3.2.7. *Supposons $\mathscr{F}$ homologiquement orientable. Alors l'opérateur* $*: \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{n-r}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ *vérifie* $*\Delta = \Delta *$ *et induit un isomorphisme*

$$*: \mathscr{H}^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \mathscr{H}^{n-r}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}).$$

La démonstration de cette proposition est évidente. Elle utilise le fait que pour un feuilletage riemannien homologiquement orientable sur une variété compacte l'opérateur d a pour adjoint

$$\delta = (-1)^r \ast d \ast \quad \text{(cf. 3.2.4).}$$

De la proposition 3.2.7. on déduit le

THÉORÈME DE DUALITÉ DE POINCARÉ 3.2.8. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage riemannien homologiquement orientable sur une variété compacte M. Alors pour tout $r = 0, \ldots, n = \operatorname{cod} \mathscr{F}$ on a un isomorphisme*

$$H^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \simeq H^{n-r}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$$

3.3. Le complexe de Dolbeault basique

Supposons que $\mathscr{F}$ est transversalement holomorphe. Alors le fibré $v\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \mathscr{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ hérite d'une structure complexe dont on notera J l'automorphisme associé. La métrique riemannienne transverse h définit une métrique hermitienne $\tilde{h}(\cdot,\cdot) = ((h(\cdot,\cdot) + h(J\cdot, J\cdot))/2$ (i.e. vérifie $\tilde{h}(J\cdot, J\cdot) = \tilde{h}(\cdot,\cdot)$ sur $v\mathscr{F}_{\mathbb{C}}$ invariante le long des feuilles et en fait un $\mathscr{F}$-fibré hermitien. Dans ce cas on dira que le feuilletage $\mathscr{F}$ est *hermitien.*

On a une décomposition en somme directe

$$v\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = v\mathscr{F}_{(1,0)} \oplus v\mathscr{F}_{(0,1)}$$

où $v\mathscr{F}_{(1,0)}$ et $v\mathscr{F}_{(0,1)}$ sont les sous-fibrés propres associés respectivement aux valeurs propres i et $-i$ de J. On a alors une décomposition du fibré en algèbres extérieures

$$\Lambda^r v^* \mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}$$

où $\Lambda^{p,q} = \Lambda^p v^* \mathscr{F}_{(1,0)} \otimes \Lambda^q v^* \mathscr{F}_{(0,1)}$. On pose $\Lambda^{p,q} = E$. C'est un $\mathscr{F}$-fibré hermitien.

DÉFINITION 3.3.1. Une section basique de E est appelée *forme différentielle basique de type* (p, q).

On notera $\Omega^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ l'espace de telles formes différentielles. On a de manière évidente:

$$\Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}).$$

Sur les formes basiques $\Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ la différentielle d se décompose en la somme de deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ respectivement de bidegrés $(1,0)$ et $(0,1)$. On obtient un complexe différentiel

$$0 \to \Omega^{p,0}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \to \Omega^{p,n}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to 0$$

qu'on appellera le *complexe de Dolbeault basique* du feuilletage $\mathscr{F}$. Son homologie sera appelée la *cohomologie de Dolbeault basique* de $\mathscr{F}$.

3.3.2. L'opérateur Δ''

L'opérateur $\bar{*}$ défini en 3.2.2. induit un isomorphisme

$$\bar{*}: \Omega^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{n-q,n-p}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}).$$

D'autre part, la restriction à $\Omega^{p,q}(M/\mathscr{F})$ de l'opérateur

$$\delta: \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{r-1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$$

décrit en 3.2.4. se décompose en la somme de deux termes

$$\delta = (-1)^{p+q} \bar{*} \bar{\partial} \bar{*} + (-1)^{p+q} \bar{*} \partial \bar{*}.$$

Le premier est de type $(-1,0)$, le second est de type $(0,-1)$. Si on pose

$$\bar{\delta} = (-1)^{p+q} \bar{*} \partial \bar{*}$$

on vérifie facilement, en utilisant 3.2.4 que l'opérateur

$$\bar{\delta}: \Omega^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{p,q-1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$$

est bien l'adjoint de $\bar{\partial}$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. On en déduit que l'opérateur basique $\Delta'' = \bar{\partial}\bar{\delta} + \bar{\delta}\bar{\partial}$ est auto-adjoint.

Une écriture locale de Δ'' montre comme dans le cas de Δ que c'est un opérateur fortement transversalement elliptique. D'après 2.8.7. on a le

THÉORÈME 3.3.3. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage hermitien de codimension complexe n sur une variété compacte M. Alors*

(i) *L'espace vectoriel $\mathscr{H}^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker} \Delta''$ est de dimension finie;*

(ii) *On a une décomposition orthogonale*
$\Omega^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \mathscr{H}^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Im} \bar{\partial} \oplus \operatorname{Im} \bar{\delta}$

L'espace vectoriel $\mathscr{H}^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ s'identifie à $\mathscr{H}^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$; il est donc de dimension finie. D'autre part $\ast$ induit un isomorphisme

$$\ast: \mathscr{H}^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{H}^{n-p,n-q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}).$$

D'où le

THÉORÈME DE DUALITÉ DE SERRE [20] 3.3.4. *Supposons $\mathscr{F}$ homologiquement orientable.*

Pour tout $p, q = 0, \ldots, n$ on a un isomorphisme

$$H^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \simeq H^{n-p,n-q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$$

La démonstration découle d'une proposition analogue à la Proposition 3.2.7 qu'on obtiendrait en considérant l'opérateur

$$\ast: \Omega^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{n-p,n-q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$$

REMARQUE 3.3.5. Les mêmes théorèmes de décomposition et de dualité peuvent être obtenus en prenant les formes différentielles à valeurs dans un $\mathscr{F}$-fibré holomorphe.

3.4. Le cas transversalement kählérien.

La métrique hermitienne $\tilde{h}$ sur $v\mathscr{F}_{\mathbb{C}}$ vérifie $\tilde{h}(\cdot,\cdot) = \tilde{h}(J\cdot, J\cdot)$. On pose

$$\omega(\cdot,\cdot) = \tilde{h}(J\cdot,\cdot).$$

On définit ainsi une 2-forme différentielle sur M.

PROPOSITION 3.4.1. *La forme ω est basique, de type $(1, 1)$ et réelle,*

Démonstration Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ un système de coordonnées locales transverses à $\mathscr{F}$. La métrique $\tilde{h}$ s'écrit

$$\tilde{h}(z) = \sum_{k,l} \tilde{h}_{k\bar{l}}(z)\, \mathrm{d}z_k\, \mathrm{d}\bar{z}_l.$$

D'où:

$$\omega(z) = i \sum_{k,l} \tilde{h}_{k\bar{l}}(z)\, \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar{z}_l.$$

On voit donc que ω est basique et de type $(1, 1)$.

Comme $\tilde{h}_{k\bar{l}} = \tilde{h}_{\bar{k}l}$ et $d\bar{z}_k \wedge dz_l = -dz_l \wedge d\bar{z}_k$, on obtient:

$$\overline{\omega(z)} = i \sum h_{k\bar{l}}(z)\, dz_l \wedge d\bar{z}_k$$

i.e. $\overline{\omega(z)} = \omega(z)$. La forme ω est donc réelle.

DEFINITION 3.4.2. On dira que $\mathscr{F}$ est *transversalement kählérien* si ω, est fermée et dans ce cas on l'appellera la *forme de Kähler* du feuilletage $\mathscr{F}$.

EXEMPLES 3.4.3. (i) Tout feuilletage de Lie de groupe $\mathbb{C}^n$ est transversalement kählérien.

(ii) On peut bien entendu construire d'autres exemples de tels feuilletages en suspendant des groupes d'automorphismes de variétés kählériennes.

(iii) Soient $\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}$ des nombres réels strictement positifs. Le flot sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dont les orbites sont les variétés intégrales du champ de vecteurs holomorphe

$$\dot{z}_k = i\theta_k z_k \quad \text{où} \quad k = 1, \ldots, n+1$$

est holomorphe et préserve la métrique kählérienne standard de $\mathbb{C}^{n+1}$, $h = \Sigma_{k=1}^{n+1} dz_k \otimes d\bar{z}_k$. Il induit alors un flot réel tranversalement kählérien de codimension complexe n sur la sphère

$$S^{2n+1} = \left\{ (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \Big/ \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2 = 1 \right\}.$$

Géométriquement on peut dire qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ hermitien est transversalement kählérien si au voisinage de tout point de M on peut trouver un système de coordonnées complexes $(z_1, \ldots, z_n)$ transverses à $\mathscr{F}$ et qui soient géodésiques i.e. la métrique h coincide à l'ordre 2 avec la métrique euclidienne $2\, \Sigma_k\, dz \cdot d\bar{z}_k$.

La cohomologie de Dolbeault basique d'un feuilletage $\mathscr{F}$ transversalement kählérien et homologiquement orientable sur une variété compacte M possède les mêmes propriétés que la cohomologie de Dolbeault ordinaire sur une variété kählérienne compacte.

Soit $(M, \mathscr{F})$ un tel feuilletage. On notera ω sa forme de Kähler et $\bar{\delta} = -\bar{*}\, \partial\, \bar{*}$ l'adjoint de $\bar{\partial}$ sur $\Omega^{p,q}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$.

On définit un opérateur L sur $\Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ à valeurs dans $\Omega^{r+2}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ par

$$L\alpha = \alpha \wedge \omega$$

et son adjoint $\Lambda = -\bar{*} L \bar{*}$.

LEMME 3.4.4. *On a*

(i) $\Lambda\partial - \partial\Lambda = -i\bar{\partial}$
(ii) $\Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda = i\partial$
(iii) $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}\partial + \overline{\partial\partial} = 0.$

La démonstration est similaire à celle du cas classique qu'on pourra trouver par exemple dans [8] ou [9].

Du lemme 3.3.4 on déduit la

PROPOSITION 3.4.5. *On a*

(i) $\Delta = 2\Delta''$
(ii) Le laplacien basique Δ *commute avec les opérateurs* L *et* Λ.

On obtient finalement le

THÉORÈME 3.4.6 *Pour tout feuilletage* $\mathscr{F}$ *transversalement kählerien et homologiquement orientable sur une variété compacte* M *on a*

(i) la r-forme basique $\alpha = \Sigma_{p+q=r}\alpha_{p,q}$ *est harmonique si et seulement si toute composante* $\alpha_{p,q}$ *de type* (p,q) *l'est; d'où*

$$H^r(M/\mathscr{F},\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M;\mathscr{F},\mathbb{C});$$

(ii) La conjugaison induit un isomorphisme antilinéaire entre $H^{p,q}(M/\mathscr{F},\mathbb{C})$ *et* $H^{p,q}(M/\mathscr{F},\mathbb{C})$;
(iii) Pour tout $p = 0,\ldots,n$ *la forme* ω^p *est harmonique; donc* $H^{p,p}(M/\mathscr{F},\mathbb{C}) \neq 0$.

On peut remarquer que toute p-forme basique holomorphe est harmonique. Pour $p = 1$, une telle forme sera appelée, par analogie au cas classique, *différentielle basique abélienne de première espèce.*

Posons $b^r(M/\mathscr{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^r(M/\mathscr{F},\mathbb{C})$ et $h^{p,q}(M/\mathscr{F}) = \dim H^{p,q}(M/\mathscr{F},\mathbb{C})$. Alors pour $n = 1$ on a $h^{1,0}(M/\mathscr{F}) = \frac{1}{2}b^1(M/\mathscr{F})$. Le nombre de différentielles basiques abéliennes de première espèce linéairement indépendantes ne dépend donc que de la structure transverse différentiable. En particulier si $H^1(M,\mathbb{C}) = 0$ on a $b^1(M/\mathscr{F}) = 0$ (car l'application canonique $H^1(M/\mathscr{F},\mathbb{C}) \to H^1(M,\mathbb{C})$ est injective) et donc de telles différentielles non nulles n'existent pas.

3.4.7 *Décomposition de Lefschetz basique*

$\mathscr{F}$ sera toujours supposé transversalement kählérien homologiquement orientable et M compacte.

Notons $L^k\colon \Omega^r(M/\mathscr{F},\mathbb{C}) \to \Omega^{r+2k}(M/\mathscr{F},\mathbb{C})$ l'opérateur défini par

$$L^k\alpha = \begin{cases} \alpha\wedge\omega^k & \text{si } k \geqslant 1 \\ \alpha & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

et $\Lambda: \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega^{r-2}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ l'adjoint de $L = L^1$ (défini en fin de 3.4.3). On pose

$$H_0^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker}(\Lambda: H^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to H^{r-2}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})).$$

Un élément de $H_0^*(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ est dit *primitif*. Il est clair que $H_0^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = H^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ pour $r = 0, 1$.

On a alors les assertions suivantes

(i) $L^k: H^{n-k}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to H^{n+k}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ est un isomorphisme;

(ii) $H^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \oplus_k L^k H_0^{r-2k}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$.

Démonstration. Comme $\mathscr{F}$ est homologiquement orientable l'adjoint de d est $\delta = (-1)^r \bar{*}\, d\, \bar{*}$. D'autre part comme $\mathscr{F}$ est transversalement kahlérien on peut montrer comme dans le cas classique (cf. [21] p. 194–195) que le laplacien basique Δ commute avec tous les opérateurs $L, \Lambda, d, \partial, \bar{\partial}, \partial$ et $\bar{\partial}$. On applique alors le Théorème 3.12 de [21] page 182 au niveau des formes basiques harmoniques. □

Regardons quelques exemples pour terminer ce paragraphe.

3.4.8. Exemple de calcul de classes basiques primitives.

Soit $\mathscr{F}$ un flot d'isométries sur une variété riemannienne compacte M^{n+1} i.e. on a une action localement libre de $\mathbb{R}$ sur M préservant la métrique. Par exemple tout flot riemannien sur une variété compacte simplement connexe est d'isométries (cf. [7]).

L'adhérence K de l'image de $\mathbb{R}$ (via cette action) est un sous-groupe connexe compact (un tore) du groupe $\operatorname{Isom}(M)$ des isométries de M. La cohomologie de Rham de M est donc naturellement isomorphe à celle du complexe $\Omega_K^*(M, \mathbb{C})$ des formes sur M invariantes par l'action de K.

Soit X le champ fondamental associé au flot $\mathscr{F}$. On définit alors l'application

$$\phi: \Omega_K^r(M, \mathbb{C}) \to \Omega_K^{r-1}(M, \mathbb{C})$$

par $\phi(\alpha) = (-1)^r i_X \alpha$ (cf. [18]). On vérifie sans peine que l'image de ϕ est le sous-espace des $(r-1)$-formes basiques et que le noyau est le sous-espace des r-formes basiques i.e. on a une suite exacte

$$0 \to \Omega^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to \Omega_K^r(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\phi} \Omega^{r-1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to 0$$

qui induit une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \to H^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to H^r(M, \mathbb{C}) \to H^{r-1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to H^{r+1}(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \to$$

$$\to H^{r+1}(M, \mathbb{C}) \to \cdots$$

Si M est une sphère d'homologie, alors nécessairement n est pair et on a

$$H^r(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } r \text{ est pair avec } 0 \leqslant r \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons en plus que $\mathscr{F}$ est transversalement kählérien de forme de Kähler basique ω. Alors l'algèbre de cohomologie basique de $\mathscr{F}$ est engendrée par la classe $[\omega]$ i.e.

$$H^*(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}[\omega]^j$$

Comme $\omega^{n-2k+1} \wedge \omega^k = \omega^{n-k+1}$ est harmonique (donc non nulle en cohomologie) pour $k \geqslant 1$ $[\omega]$ n'est pas primitive. Les seules classes basiques primitives sont les fonctions constantes.

Un exemple concret d'un tel flot est donné en 3.4.3. (iii).

On remarque alors que du point de vue cohomologique l'espace des feuilles $B = M/\mathscr{F}$ est équivalent à l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$.

3.4.9 *La codimension 2 réelle.*

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage riemannien de codimension 2 transversalement orientable sur une variété compacte M. Notons ν le fibré normal à $\mathscr{F}$. Soit y un point de M et ν_y la fibre de ν en y. Alors à tout vecteur $v \in \nu_y$ on associe l'unique vecteur $J_y(v)$ de même longueur (ν étant muni de la métrique g induite par celle transverse à $\mathscr{F}$) tel que $(v, J_y v)$ est une base orthogonale directe de ν_y. One définit donc un automorphisme de fibré

$$J: \nu \to \nu$$

qui vérifie $J^2 = -\mathrm{id}_\nu$.

Comme l'espace transverse est de dimension 2 cette structure presque complexe est intégrable et fait de $\mathscr{F}$ un feuilletage transversalement holomorphe qui est en fait transversalement kählérien si on munit le fibré $\nu_{\mathbb{C}} = \nu \otimes_{\mathbb{R}} C$ de la métrique hermitienne

$$h(\cdot,\cdot) = \tfrac{1}{2}(g(\cdot,\cdot) + g(J\cdot, J\cdot))$$

Supposons en plus que $\mathscr{F}$ est homologiquement orientable (i.e. $H^2(M/\mathscr{F}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$). D'aprés 3.4.6 la dimension de l'espace vectoriel $H^1(M/\mathscr{F}, \mathbb{C})$ est paire égale à $2g$ où g est le nombre le différentielles basiques abéliennes. La caractéristique basique d'Euler Poincaré de $\mathscr{F}$ est donc égale à

$$\chi(M/\mathscr{F}) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g.$$

Cette fois on constate que l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien homologiquement orientable de codimension 2 sur une variété compacte est équivalent cohomologiquement à une surface de Riemann compacte.

3.5 *Version basique du théorème de Calabi-Yau*

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage transversalement kählérien et homologiquement orientable de codimension n ($n \geqslant 2$) sur une variété compacte M; De manière analogue au cas des variétés kählériennes on définit la 2-forme de courbure de Ricci basique et la première classe de Chern du fibré normal $v\mathscr{F} = TM/T\mathscr{F}$ qui habite dans l'espace vectoriel de cohomologie de Dolbeault basique

$$H^{1,1}(M/\mathscr{F}) \hookrightarrow H^2(M/\mathscr{F}) \quad \text{(cf. 3.4.6)}.$$

L'objet de cette partie est de relier ces deux notions en montrant que la démonstration de S.T. Yau [19] de la première conjecture de Calabi [2] s'étend à l'espace des feuilles $B = \mathrm{M}/\mathscr{F}$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante dont la démonstration découle simplement des théorèmes de décomposition de Hodge obtenus au paragraphe 3.

PROPOSITION 3.5.1. *Soient ω et $\tilde{\omega}$ deux formes basiques de type* $(1, 1)$ *réelles fermées et cohomologues dans $H^2(M/\mathscr{F})$. Alors il existe une fonction basique f sur M telle que*

$$\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}f.$$

Nous supposerons que la métrique h et l'automorphisme J sur $v\mathscr{F}$ sont fixés. On notera ∇ la connexion de Lévi-Civita transverse associée à h qui est une connexion basique.

3.5.2. *Courbure basique*
Pour tous champs de vecteurs X et Y sur M on pose:

$$\mathscr{R}(X, Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

On obtient ainsi une 2-forme différentielle sur M à valeurs dans le fibré $\mathrm{Hom}(v\mathscr{F}, v\mathscr{F})$ qui est basique par définition même de la connexion ∇. Elle est de type $(1, 1)$.

La trace de l'application $Z \to \mathscr{R}(X, Z)Y$ est une 2-forme symétrique basique de type (1, 1) qu'on notera ρ. C'est la *courbure de Ricci basique* de ∇.

DEFINITION 3.5.3. *La 2-forme différentielle basique de type* (1, 1) *définie par*

$$\gamma(\cdot,\cdot) = \rho(\cdot, J\cdot)$$

est appelée la *forme de Ricci basique.*

Cette forme γ est fermée. Elle définit donc une classe de cohomologie $[\gamma]_b$ dans $H^2(M/\mathscr{F})$. En coordonnées locales transverses $(z_1, \ldots, z_n)$ on a

$$h(z) = \sum_{k,l} h_{k\bar{l}}(z)\,\mathrm{d}z_k\,\mathrm{d}\bar{z}_l.$$

D'où

$$\omega(z) = i\sum_{k,l} h_{k\bar{l}}(z)\,\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar{z}_l.$$

C'est la *forme de Kähler basique* de h. De même on a

$$\rho(z) = \sum_{k,l} \rho_{k\bar{l}}(z)\,\mathrm{d}z_k\,\mathrm{d}\bar{z}_l$$

on a

$$\gamma(z) = i\sum_{k,l} \rho_{k\bar{l}}(z)\,\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar{z}_l$$

et comme dans le cas usuel

$$\gamma = i\partial\bar{\partial}\log\det(h_{k\bar{l}}).$$

On a la

PROPOSITION 3.5.4. [*19*] *La classe* $[\gamma]$ *dans* $H^2(M, \mathbb{R})$ *ne dépend pas de la connexion choisie et coincide avec* $2\pi c_1(\nu\mathscr{F})$ *où* $c_1(\nu\mathscr{F})$ *est la première classe de Chern du fibré* $\nu\mathscr{F}$.

Comme γ est basique, la forme $(1/2\pi)\gamma$ définit une classe de cohomologie $(1/2\pi)[\gamma]_b$ dans $H^2(M/\mathscr{F})$ dont l'image par le morphisme naturel $H^2(M/\mathscr{F}) \to H^2(M, \mathbb{R})$ coïncide avec $c_1(\nu\mathscr{F})$.

La classe de cohomologie basique $c_1(M/\mathscr{F}) = (1/2\pi)[\gamma])_b$ sera appelée *la première classe de Chern basique* de $\mathscr{F}$.

3.5.5. Enoncé du théorème

Soient $c \in H^2(M/\mathscr{F})$ contenant au moins une forme de Kähler basique et γ une 2-forme basique réelle de type (1, 1) telle que $[\gamma] = 2\pi c_1(M/\mathscr{F})$. Alors c contient une unique forme de Kähler basique ω telle que γ soit la forme de courbure de Ricci basique de la métrique kählérienne transverse associée à ω.

Ceci constitue une version basique de la première conjecture de E. Calabi [2]. Nous adapterons la démonstration de S.T. Yau en suivant les exposés du "Séminaire Palaiseau" [19].

3.5.6. Démonstration du théorème

On peut remarquer que si $\mathscr{F}$ n'a pas de fonctions basiques non constantes (par exemple si $\mathscr{F}$ a une feuille dense) alors le théorème est trivial. En effet d'après la Proposition 3.5.1. deux formes basiques de type (1, 1), réelles, fermées et cohomologues dans $H^2(M/\mathscr{F})$ sont égales. Donc la forme γ telle que $[\gamma] = 2\pi c_1(M/\mathscr{F})$ est nécessairement la forme de Ricci basique de l'unique forme de Kähler ω contenue dans c.

On supposera donc que $\mathscr{F}$ a des fonctions basiques non constantes.

(*i*) *Espaces de fonctions basiques et différentes normes*

Remarquons tout d'abors que si $\mathscr{F}$ est à feuilles denses alors par ergodicité toute fonction basique mesurable sur M est constante. On en déduit que les fonctions basiques mesurables sur $M^\#$ s'identifient aux fonctions mesurables sur W et donc l'algèbre $\mathscr{M}(M/\mathscr{F})$ des fonctions basiques mesurables sur M est canoniquement isomorphe à l'algèbre $\mathscr{M}_G(W)$ des fonctions mesurables sur W et G-invariantes.

Si f est un élément de $\mathscr{M}(M/\mathscr{F})$ on notera $f^\#$ et $\bar{f}$ les éléments correspondants respectivement de $\mathscr{M}(M^\#/\mathscr{F}^\#)$ et $\mathscr{M}_G(W)$ définis par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M^\# \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f^\#"] & M \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

on notera $\mathscr{I}: \mathscr{M}(M/\mathscr{F}) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{M}_G(W)$ l'isomorphisme naturel.

On munit $M^\#$ de la mesure transverse $\mu = \rho^*(\omega^n) \wedge \chi$ et W de la mesure $\eta = I(\mu)$ où

$$I: \Omega^{\operatorname{cod} F^\#}(M^\#/\mathscr{F}^\#) \to \Omega^{\dim W}(W)$$

est le morphisme réel d'intégration sur la fibre de la fibration basique $F \to M^\# \xrightarrow{\pi} W$ qu'on peut construire de la même manière qu'en 3.2.1 et induisant un isomorphisme en cohomologie

$$I^*: H^{\mathrm{cod}\,\mathscr{F}^\#}(M^\#/\mathscr{F}^\#) \to H^{\dim W}(W).$$

On note

$C^{l,\lambda}(W)$ l'espace des fonctions sur W de classe de Holder $C^{l,\lambda}$ muni de la norme habituelle $\| \quad \|_{C^{l,\lambda}(W)}$ où l est un entier et $\lambda \in]0, 1[$. On pose

$$\|f\|_{C^{l,\lambda}} = \|\bar{f}\|_{C^{l,\lambda}(W)}$$

pour tout $f \in C^{l,\lambda}(M/\mathscr{F}) = \mathscr{I}^{-1}(C^{l,\lambda}(W))$. Tour élément de $C^{l,\lambda}(M/\mathscr{F})$ sera appelé *fonction basique de classe de Hölder* $C^{l,\lambda}$.

pour $p \in [0, +\infty[$, $L^p(M/\mathscr{F}) = \mathscr{I}^{-1}(L^p(W))$ muni de la norme:

$$\|f\| = \left(\int_W |\bar{f}|^p \,\mathrm{d}\eta\right)^{1/p}.$$

$L^\infty(M/\mathscr{F})$ l'espace des fonctions basiques essentiellement bornées i.e telles que

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{u \in W} |\bar{f}(u)| < +\infty$$

et enfin

$$W^{l,p}(M/\mathscr{F}) = \{f \in L^p(M/\mathscr{F})/D^s f \in L^p(M/\mathscr{F})\} \quad \text{où} \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$D^s = \frac{\partial^{|s|}}{\partial z^{s_1} \ldots \partial z^{s_n}} \quad \text{avec} \quad s = (s_1, \ldots, s_n) \in N^n \quad \text{et} \quad |s| = s_1 + \cdots + s_n \leqslant l.$$

(*ii*) *Estimées de Schauder*

Soit D un opérateur différentiel basique d'ordre 2 agissant sur $C^{2,\lambda}(M/\mathscr{F})$ et fortement transversalement elliptique. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in C^{2,\lambda}(M/\mathscr{F})$ on ait

$$\|f\|_{C^{2,\lambda}} \leqslant C(\|Df\|_{C^{0,\lambda}} + \|f\|_{C^0})$$

où

$$\|f\|_{C^0} = \sup_{y \in M} |f(y)|$$

Démonstration. Si $f \in C^{2,\lambda}(M/\mathscr{F})$, alors $\bar{f} \in C_G^{2,\lambda}(W) \subset C^{2,\lambda}(W)$. Donc $\overline{Df} = \bar{D}\bar{f}$. Les estimées de Schauder sur W (cf. [19] exposé II) appliquées à $\bar{D}$ et $\bar{f}$ donnent la constante C et les inégalités cherchées.

(iii) Mise en équation

En appliquant la Proposition 3.5.1 on transforme le problème sur les formes basiques en un problème sur les fonctions basiques.

Soit ω la forme de Kähler basique contenue dans c dont on fixe la métrique kählérienne associée h. Soit γ_ω sa forme de Ricci basique. Elle vérifie

$$[\gamma_\omega]_b = 2\pi c_1(M/\mathscr{F}).$$

Soit γ une 2-forme basique de type (1, 1), réelle, fermée et tell que

$$[\gamma]_b = [\gamma_\omega]_b.$$

D'après la Proposition 3.5.1 il existe une fonction basique f réelle vérifiant

$$\gamma = \gamma_\omega - i\partial\bar{\partial} f.$$

Pour que f soit unique, on lui imposera la condition

$$\int e^f = \int 1.$$

où pour toute fonction basique ψ on a

$$\int \psi = \int_W \bar{\psi}\, d\eta$$

on aura donc

$$\int 1 = \int_W d\eta = \mathrm{Vol}(W) = \mathrm{Vol}(M)$$

si on suppose que le volume des fibres de $\pi\colon M^\# \to W$ est égal à 1.

L'inconnue du problème est une forme de Kähler basique $\tilde{\omega}$ telle que

$$[\tilde{\omega}]_b = [\omega]_b \quad \text{et} \quad [\gamma_{\tilde{\omega}}]_b = [\tilde{\gamma}]_b.$$

Mais $\tilde{\omega}$ peut s'écrire d'après la Proposition 3.5.1.

$$\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}\psi$$

où ψ est une fonction basique réelle qu'on peut choisir vérifiant

$$\int \psi = 0.$$

La problème à résoudre est alors le suivant soient ω une forme de Kähler basique et f une fonction basique réelle vérifiant

$$\int e^f = \int \cdot 1.$$

Existe-t-il une et une seule fonction basique réelle $\hat{\psi}$ telle que

(a) $\int \psi = 0$

(b) $\omega + i\partial\bar{\partial}\psi$ est définie positive

(c) $(\omega + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = e^f \omega^n \quad (E)$?

(iv) Résolution de l'équation (E)

Nous reproduisons, en les adaptant à notre situation les différentes étapes de la démonstration exposée par L. Berard-Bergery dans [19].

Unicité. Soient ψ_1 et ψ_2 deux solutions de (E) et posons $\psi = \psi_1 - \psi_2$. En notant ω_1 et ω_2 les formes de Kähler basiques associées on obtient:

$$(\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = \omega_2^n = e^f \omega^n = \omega_1^n.$$

De ces relations on déduit:

$$(i\partial\bar{\partial}\psi) \wedge \sum_{k=0}^{k-1} (\omega_1^k \wedge \omega_2^{n-k-1}) = 0.$$

La forme différentielle $\Sigma_{k=0}^{n-1} \omega_1^k \wedge \omega_2^{n-k-1}$ est basique, de type $(n-1, n-1)$, réelle et fermée. En coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ transverses à $\mathscr{F}$ elle s'écrit

$$\sum_{k,l=0}^{n} M^{kl} dz_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}z_k \wedge \cdots \wedge \hat{d}\bar{z}_l \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$$

où la matrice (M^{kI}) est définie positive (cf. [19] p, 92). La fonction ψ est donc solution de l'équation fortement transversalement elliptique

$$\sum_{k,l=1}^{n} M^{kI} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} = 0.$$

Par conséquent $\bar{\psi}$ est solution d'une équation du second ordre fortement elliptique sur W. Elle est donc constante et par suite nulle puisque elle vérifie $\int \psi = 0$. Ce qui démontre l'unicité.

Existence. Comme dans [19] on remplace f par $tf + \log(\int . 1) - \log(\int e^f)$ où $t \in [0, 1]$. L'équation (E) devient:

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = e^{tf} \frac{\int . 1}{\int e^{tf}} \omega^n \quad (E_t)$$

on fixe $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ et $\lambda \in]0, 1[$ et on note

$$\mathscr{A} = \{t \in [0, 1]/(E_t) \text{ a une solution } \psi \text{ dans } C^{k,\lambda}(M/\mathscr{F}) \text{ vérifiant } \int \psi = 0\}.$$

Résoudre l'équation (E) revient à montrer que $1 \in A$ pour tout $k \geqslant 2$ et $0 < \lambda < 1$. La démonstration donnée dans [19] se transpose entièrement. Il suffit de remplacer tous les éléments par leurs analogues basiques en utilisant les résultats sur les opérateurs fortement transversalement elliptiques obtenus au paragraphe 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. Atiyah, Elliptic operators and compact groups. *Lecture Notes in Math*, no. 401 (1974).

[2] E. Calabi, On Kähler manifolds with vanishing canonical class. *Algebraic Geometry and Topology*, A symposium in honor of Lefschetz, Princeton University Press (1955), 78–79.

[3] Y. Carriere, *Flots riemanniens.* Journées sur les structures transverses des feuilletages, Toulouse, Astérisque no 116 (1984).

[4] A. Connes, A survey of foliations and operator algebras. *Proceedings of Symp. in Pure Math.* Vol. 38 (1982).

[5] A. El Kacimi-Alaoui et G. Hector, Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien. *Ann. Inst. Fourier de Grenoble* 36, 3 (1986), 207–227.

[6] A. El Kacimi-Alaoui, V. Sergiescu et G. Hector, La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie. *Math. Z.*, 188 (1985), 593–599.

[7] E. Ghys, Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes. *Ann. Inst. Fourier*, 34, 4 (1984), 203–223.

[8] S. Goldberg, Curvature and Homology. Dover Publications, Inc., New-York.

[9] P. Griffiths, and J. Harris, Principles of algebraic Geometry. *Pure and Applied Mathematics* – Interscience Series of Texts.

[10] A. Haefliger, Pseudo-groups of local isometries. In Differential Geometry, Santiago de Compostela, Sept. 1984, 174–197. L. Cordero editor, *Research notes* 131, Pitman (1985).

[11] F. Kamber and P. Tondeur, Foliated Bundles and Characteristic classes. *Lecture Notes in Math.*, no. 493, Springer-Verlag (1975).

[12] F. Kamber, and P. Tondeur, Hodge de Rham theory for Riemannian foliations. *Math. Ann.* 277, 415–431 (1987).

[13] C. Lazarov, An Index Theorem for foliations. Illinois *J. of Math.* Vol. 30 no. 1 (1986).

[14] P. Molino, Géométrie globale des feuilletages riemanniens. *Pro. Kon. Neder. Akad., Ser. A*, 1, 85 (1982), 45–76.

[15] R.S. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem. *Ann. of Math. Studies* no. 57, Princeton University Press (1965).

[16] B.L. Reinhart, Harmonic integrals on almost product manifolds. *Trans. AMS*, 88 (1958), 243–276.

[17] B.L. Reinhart, Foliated manifold with bundle-like metric. *Ann. of Math.*, 69 (1959), p. 119–132.

[18] M. Saralegui, The Euler Class for flow of isometries. *Research Notes in Math* 131 (1985) edited by L.A. Cordero.

[19] Seminaire Palaiseau, Première classe de Chern et courbure de Ricci: preuve de la conjecture de Calabi – *Astérisque* no. 58 (1978).

[20] J.P. Serre, Un théorème de dualité. *Comment. Math. Helv.*, 29, (1955), 9–26.

[21] R.C. Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds. *G.T.M.* no. 65, Springer-Verlag (1979).

[22] S.T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kählerian manifold and the complex Monge-Ampère equation. *Comm. Pure and Appl. Math. XXVI* (1978), 339–411.