

# COMPOSITIO MATHEMATICA

OLIVIER MATHIEU

## **Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications**

*Compositio Mathematica*, tome 69, n° 1 (1989), p. 37-60

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1989\\_\\_69\\_1\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1989__69_1_37_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Construction d'un groupe de Kac–Moody et applications\*

OLIVIER MATHIEU

*UA 748 du C.N.R.S., Université Paris 7, UER de Mathématiques, 2 Place Jussieu,  
75005 Paris, France*

Received 7 January 1988; accepted 24 May 1988

### Introduction

Soient  $A$  une matrice de Cartan généralisée [4], et  $P$  une réalisation entière de  $A$  (au sens de [8]). A tout anneau  $k$ , on a attaché certains schémas en groupe  $H$  et  $B$ , de manière fonctorielle (lorsque on a  $\det A \neq 0$ ,  $P$  est uniquement déterminé, et s'identifie au réseau des poids entiers; lorsqu'en outre  $A$  est de type fini,  $H$  est le sous-groupe de Cartan et  $B$  le sous-groupe de Borel du groupe de Chevalley simplement connexe associé à  $A$ ). Cet article contient trois résultats annoncés et partiellement démontrés dans [11].

Le premier de ces résultats est la construction d'un ind-schéma en groupe  $G$  généralisant le schéma de Chevalley, et satisfaisant de bonnes propriétés. En particulier  $G$  contient  $B$  comme sous-ind-schéma en groupe fermé, et l'action à droite de  $B$  sur  $G$  est localement libre. On peut obtenir le quotient  $G/B$  (déjà considéré dans [8]) et former de nouveaux quotients, comme  $G \times {}^B G/B$ . Le formalisme des ind-schémas, donne alors un sens à la formule, essentielle dans la suite

$$G \times {}^B G/B \simeq G/B \times G/B \text{ (lemme 9).} \quad (1)$$

Avant d'introduire les deux autres résultats (corollaires 1 et 3), j'aurai besoin de quelques notations supplémentaires. Soient  $\lambda$  un poids dominant entier,  $w$  un élément du groupe de Weyl  $W$  de  $G$ ,  $L(\lambda)$  le module intégrable de plus haut poids  $\lambda$ ,  $E_w(\lambda)$  le  $B$ -sous-module de  $L(\lambda)$  engendré par  $L(\lambda)_{w\lambda}$  et  $S_{w\lambda}$  le sous-schéma  $\overline{BL(\lambda)_{w\lambda}}$  dans  $\mathbb{P}E_w(\lambda)$  (bien défini car  $E_w(\lambda)$  est libre de rang fini [8]). On prouve:

$$(k \text{ normal}) S_{w\lambda} \text{ est normal et projectivement normal dans } \mathbb{P}E_w(\lambda). \quad (2)$$

---

\* Ce travail a été commencé à Yale University, où je bénéficiais d'un GRANT de l'AMS (No: DMS-851-2904).

Soient  $\mu, \theta$  deux autres poids dominants, et  $v \notin W$  liés par la relation  $\lambda + w\mu = v\theta$ . On prouve alors:

$$L(\theta) \text{ est un sous-quotient naturel de } L(\lambda) \otimes L(\mu). \quad (3)$$

En particulier, lorsque  $k$  est un corps de caractéristique 0, et que  $A$  est une matrice de Cartan ordinaire, cela résoud une question attribuée à Parthasarathy, Ranga Rao et Varadarajan, à savoir que l'on a  $[L(\lambda) \otimes L(\mu): L(\theta)] \neq 0$ , et cela généralise un résultat que P. Polo a obtenu pour une matrice de Cartan  $A$  de type  $A_n$  et le résultat original de Parthasarathy, Ranga Rao et Varadarajan obtenu lorsque  $w$  est l'élément maximal de  $W$  [13].

Les assertions (2) et (3) résultent d'un théorème technique sur les sections globales de certains fibrés sur les  $G$ -orbites de  $G/B \times G/B$ . Cela explique pourquoi je construis une structure de ind-schéma sur  $G$ . La méthode de démonstration combine des scindages de Frobenius en caractéristique  $p$  (suivant les idées de V.B. Metha, S. Ramanan, A. Ramanathan) et la topologie de la fibre des morphismes  $D(\tilde{w}) \rightarrow S_{w\lambda}$  (où  $D(\tilde{w})$  est un schéma de Demazure). Elle impose de ne pas se restreindre aux cas des corps de caractéristique 0, mais de considérer aussi la caractéristique  $p$ . La démonstration des assertions (2) et (3) sur des anneaux qui ne sont plus nécessairement des corps ménage quelques difficultés supplémentaires (on a à utiliser de la cohomologie de faisceaux). Le choix de travailler sur des anneaux arbitraires repose sur l'espoir que l'on puisse en général filtrer le module  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$  par des modules  $L(\xi)$ . Une telle filtration sur  $\mathbb{Z}$  induirait en effet une filtration fonctorielle en  $k$ . L'assertion (3) est un petit pas dans cette direction.

*Remarques:* 1) La construction du groupe  $G$  associé à la matrice de Cartan généralisée est différente des constructions de l'anneau des fonctions régulières à la Kac et Peterson ([5], cf. [8] pour des comparaisons). La construction adoptée ici a été suggérée par la construction de J. Tits de foncteurs en groupes de Kac–Moody discrets [19, 20]. Enfin, il est à noter que la construction de  $G$  repose sur une propriété délicate des variétés de Schubert, leur trivialité (cf. [8, 10]).

2) Pour  $A$  matrice de Cartan ordinaire, la normalité des schémas  $S_{w\lambda}$  a été prouvée par A. Joseph ( $k$  corps de caractéristique 0 [3]) C.S. Seshadri ( $k$  corps arbitraire [17]), et la projective normalité par V.B. Metha, S. Ramanan et A. Ramanathan ([12, 15, 16]; cf. aussi H.H. Andersen [1]). Pour  $A$  matrice de Cartan généralisée P. Slodowy a, en premier, prouvé la lissité

en codimension 1 de  $S_{w,\lambda}$  ( $k$  corps de caractéristique 0), dans [8, 10] j’ai donné une preuve de la normalité de  $S_{w,\lambda}$  ( $k$  normal,  $\lambda$  suffisamment grand) et S. Kumar en a donné une autre preuve en caractéristique 0 ( $k$  corps de caractéristique 0,  $\lambda$  suffisamment grand et une hypothèse supplémentaire) [6].

3) P. Polo a annoncé, dans un exposé à Oberwolfach en août 1987 que l’assertion (3) résultait, pour le cas d’une matrice de Cartan de type  $A_n$ , de résultats plus profonds obtenus par lui. L’idée d’utiliser le lemme de Joseph (cf. lemme 26) dans ce type de problème lui est due. S. Kumar a trouvé une démonstration indépendante de l’assertion (3) pour  $\mathfrak{g}$  semi-simple et  $k$  de caractéristique 0 [7].

*Remerciement.* Je tiens à remercier B. Kostant de m’avoir signalé la question de Parthasaraty, Ranga Rao et Varadarajan, à l’Institut d’Oberwolfach. C’est lui qui a suggéré l’interprétation en termes de section globales sur les  $G$ -orbites de  $G/B \times G/B$ , idée clef de la démonstration de l’assertion (3). C’est à Yale que j’ai commencé ce travail, et au Tata Institute de Bombay que je l’ai rédigé. Je remercie ces deux institutions pour leur accueil.

*Conventions générales.* Dans cet article,  $k$  désignera un anneau commutatif arbitraire, sauf mention du contraire (et ce fait sera signalé entre parenthèse avant l’énoncé concerné). En cas d’ambiguïtés possibles, on ajoutera  $k$  en exposant ou en indices des notations d’objets dépendent de  $k$ . Enfin le faisceau structural d’un schéma  $X$  sera noté  $\mathcal{O}_X$  ou même parfois simplement  $\mathcal{O}$ .

## I. Notations – rappels [8, 10]

Soient  $A$  une matrice de Cartan généralisée,  $(\mathfrak{h}, \Pi, \check{\Pi})$  une réalisation sur  $\mathbb{Q}$  de  $A$  [4] et  $P$  un système de poids entiers. Soit  $\mathfrak{g}$  l’algèbre de Kac-Moody maximale associée  $A$  (sur  $\mathbb{Q}$ ), et  $\Delta$  (respectivement  $\Delta^+$ ,  $\Delta_{re}^+$ ) l’ensemble des racines (respectivement positives, positives et réelles). L’ensemble  $\Pi$  est dit ensemble des racines simples, et l’on a  $\Pi \subseteq \Delta^+$ . Pour chaque  $\alpha \in \Delta_{re}^+$ , soit  $h_\alpha$  la coracine associée,  $s_\alpha$  réflexion associée dans le groupe de Weyl  $W$  de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\mathfrak{b}$  la sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$ , et  $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{b} + s_\alpha \mathfrak{b}$  l’algèbre parabolique associée à  $\alpha \in \Pi$ . Je pose aussi  $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ .

Soit  $\check{W}$  le monoïde libre engendré par les éléments  $s_\alpha (\alpha \in \Pi)$ . Lorsque  $W$  est fini, je pose  $\check{W} = W$  et je note  $\omega$  l’élément maximal de  $W$ . Lorsque  $W$  est infini, je pose  $\check{W} = W \cup \{\omega\}$ , et je prolonge l’ordre de Bruhat à  $\check{W}$  en

posant  $\omega \geq w$  pour tout  $w \in W$ . Pour tout  $w \in W$ , je pose  $\Phi_w = \{\alpha \in \Delta^+ / w^{-1}\alpha \notin \Delta^+\}$ . Pour toute partie  $I$  de  $\Pi$ , je pose  $W_I = \{w, ws_\alpha \geq w \text{ pour tout } \alpha \in I\}$ .

Je pose  $P^+ = \{\lambda \in P/\lambda(h_\alpha) \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Pi\}$ . Pour tout  $\Lambda \in P^+$ , je note  $L(\Lambda)$  le  $g$ -module intégrable de plus haut poids  $\Lambda$ , je pose  $I(\Lambda) = \{\alpha \in \Pi/\Lambda(h_\alpha) = 0\}$ , et pour tout  $w \in W$  je pose  $E_w(\Lambda) = U(\mathfrak{b}) \cdot L(\Lambda)_{w\Lambda}$  et  $F_w(\Lambda) = E_w(\Lambda)^*$ . Dans [8, 10], on a construit des schémas en groupes  $U, H, B, P_\alpha$  associés aux algèbres de Lie  $\mathfrak{n}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}_\alpha$ .

Ainsi on associe à  $A$  les objets  $U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{h}), U(\mathfrak{b}), L(\Lambda), E_w(\Lambda), F_w(\Lambda), U, H, B, P_\alpha$  sur  $\mathbb{Q}$  ( $w \in W, \alpha \in \Pi$ ). La construction des réseaux de Chevalley [19] donnent  $\mathbb{Z}$ -formes naturelles de ces objets, et de là des  $k$ -formes pour tout anneau arbitraire  $k$  [8] (à un  $\mathbb{Z}$ -module  $M$  est associé le foncteur  $k \mapsto k \otimes M$ ; à un  $\mathbb{Z}$ -schéma  $X$  est associé le foncteur  $k \mapsto \text{Spec } k \times X$ ). Suivant les conventions de l'introduction, je noterai encore  $U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{h}) \dots$  les  $k$ -formes de ces objets, dès lors que l'anneau  $k$  est fixé. En cas de possible ambiguïté, j'ajouterai  $k$  en indice ou en exposant.

Pour tout élément  $\tilde{w} = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_n}$  de  $\tilde{W}$ , le schéma  $E(\tilde{w}) = P_{\alpha_1} \times^B \dots \times^B P_{\alpha_n}$  et le schéma de Demazure [2]  $D(\tilde{w}) = E(\tilde{w})/B$  sont bien définis [8]. Soient  $\alpha \in \Pi, \eta \in \{0, 1\}$ . Je conviens de poser  $P_\alpha^\eta = P_\alpha$  si  $\eta = 1, P_\alpha^\eta = B$  si  $\eta = 0$ . Soient  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$  et  $\tilde{u} = s_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$ . Le morphisme naturel  $P_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \times \dots \times P_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \rightarrow P_{\alpha_1} \times \dots \times P_{\alpha_n}$  induit des morphismes naturels  $j'_\varepsilon: E(\tilde{u}) \rightarrow E(\tilde{w})$  et  $j_\varepsilon: D(\tilde{u}) \rightarrow D(\tilde{w})$ . Les morphismes  $j'_\varepsilon$  et  $j_\varepsilon$  sont dits les morphismes canoniques de  $E(\tilde{u})$  dans  $E(\tilde{w})$ , et de  $D(\tilde{u})$  dans  $D(\tilde{w})$ . Soient  $w \in W, \tilde{w}$  une décomposition réduite de  $w, \Lambda \in P^+, S_{w\Lambda}$  le sous-schéma  $\overline{B \cdot L(\Lambda)_{w\Lambda}}$  dans  $\mathbb{P}E_w(\Lambda)$  (bien défini car  $E_w(\Lambda)$  est libre de rang fini), et  $\pi: D(\tilde{w}) \rightarrow S_{w\Lambda}$  le morphisme naturel. L'espace annelé  $(S_{w\Lambda}, \pi_* \mathcal{O}_{D(\tilde{w})})$  est un schéma [8] lemme 141) et ne dépend en fait que de  $I = I(\Lambda)$  et de la classe de  $w$  dans  $W_I$  (cf. [8] ch. XIIX §2). On note  $S_{w,I}$  ce schéma, et on l'appelle schéma de Schubert, et on pose  $S_w = S_{w,\emptyset}$ .

Soit  $w \in W$ . À tout  $B$ -module  $M$ , on associe un faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{L}_w(M)$  sur  $S_w$ . L'application  $\lambda \mapsto \mathcal{L}_w(\lambda)$  définit une application  $P \rightarrow \text{Pic } S_w$  de  $P$  dans le groupe de Picard de  $S_w$ . Je pose  $B(w) = \text{Spec } (\mathcal{L}_w(k[B]))$ , de sorte qu'il existe un morphisme affine naturel  $B(w) \rightarrow S_w$  (cf. [8] ch. XIIX §2).

LEMME 1: a) Soient  $u, w \in W$  avec  $u \leq w$ . Le morphisme  $S_u \rightarrow S_w$  est une immersion fermée.

b) Soient  $w \in W$ , et  $\tilde{w}$  une décomposition réduite de  $w$ . Le morphisme  $\pi: D(\tilde{w}) \rightarrow S_w$  est trivial au sens de Kempf, i.e., on a  $\pi_* \mathcal{O}_{D(\tilde{w})} = \mathcal{O}_w$  et  $R^q \pi_* \mathcal{O}_{D(\tilde{w})} = 0$  pour  $q > 0$ .

c) Soient  $w, \tilde{w}$  comme au point 2. Le schéma  $B(w)$  est affine, et  $B(w)$  est l'affinisation de  $E(\tilde{w})$ .

*Démonstration:* cf. [8], proposition 26 et 29.

Je pose, pour tout  $w \in W$ ,  $k[B(w)] = \Gamma(B(w), \mathcal{O})$ .

Je note  $\psi: W \times W \rightarrow W$  l'unique fonction satisfaisant  $\psi(1, w) = w$ ,  $\psi(us_\alpha, v) = \psi(u, v)$  si  $s_\alpha v \leq v$ ,  $\psi(us_\alpha, v) = \psi(u, s_\alpha v)$  si  $s_\alpha v \geq v$ , pour tous  $u, v, w \in W$ ,  $\alpha \in \Pi$  tels que  $us_\alpha > u$ . Je note  $ht: Q \rightarrow \mathbb{Z}$  l'unique forme linéaire telle que l'on ait  $ht\alpha = 1$  pour tout  $\alpha \in \Pi$ .

## II. Construction du groupe de Kac-Moody

Pour tout  $U(\mathfrak{h})$ -module  $M$ , et pour tout  $\lambda \in P$ , je pose  $M_\lambda = \{m \in M / \forall u \in U(\mathfrak{h}): um = \lambda(u)m\}$  (je rappelle que tout  $\lambda \in P$  définit un caractère de  $U(\mathfrak{h})$ , note encore  $\lambda$ ).

**DÉFINITION:** Soient  $M$  un  $U(\mathfrak{g})$ -module. Je dis que  $M$  appartient à la catégorie  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$  (de Bernstein-Gelfand-Gelfand) si les conditions suivantes sont satisfaites.

a) On a  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ , et pour tout  $\lambda \in P$ ,  $M_\lambda$  est un  $k$ -module libre de rang fini.

b) Il existe une partie finie  $X$  de  $P$  telle que pour tout  $\lambda \in P$  avec  $M_\lambda \neq 0$ , il existe  $\nu \in X$  tel que l'on ait  $\nu \geq \lambda$ .

Soit  $\tau: U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$  l'involution de Cartan (qui échange  $U(\mathfrak{n}^+)$  et  $U(\mathfrak{n}^-)$ ). Pour tout  $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$  je note  $\check{M}$  le  $U(\mathfrak{g})$ -module  $\check{M} = \bigoplus_{\lambda \in P} (M_\lambda^*)$ , avec la structure de  $U(\mathfrak{g})$ -module tordue par  $\tau$ . Il est facile de prouver que l'on a  $\check{\check{M}} = M$ . Pour tout  $\lambda \in P$ , je note  $V(\lambda)$  le module de Verma de plus haut poids  $\lambda$  (cf. [8] ch. I).

**LEMME 2:** 1) ( $k$  anneau intègre) L'anneau  $k[U]$  est intègre. 2) ( $k$  anneau arbitraire) Soit  $\mathfrak{m}$  l'idéal d'augmentation de  $k[U]$ . Pour tout  $\gamma \in Q$ ,  $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)_\gamma$  est un  $k$ -module libre de rang fini. Toute section  $H$ -invariante de l'application  $\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  induit un isomorphisme  $S(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \simeq k[U]$ .

*Démonstration:* 1) Soit  $\Lambda$  un poids dominant entier et régulier. Le morphisme naturel  $V(\Lambda) \rightarrow L(\Lambda)$  induit une injection naturelle  $\check{L}(\Lambda) \rightarrow \check{V}(\Lambda)$ . Comme  $k$  est intègre, un schéma de Demazure est intègre. Donc pour tout  $w \in W$ , le schéma de Schubert  $S_w$  est intègre. Je pose  $A(w, \Lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(S_w, \mathcal{L}_w(-n\Lambda))$  et  $A(\Lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} (\varinjlim_{w \in W} \Gamma(S_w, \mathcal{L}_w(-n\Lambda)))$ . L'anneau  $A(w, \Lambda)$  est intègre, et donc  $A(\Lambda)$  est intègre. D'après [8] (théorème 5) on a  $A(\Lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} L(n\Lambda)^*$ . Donc  $\bigoplus_{n \geq 0} \check{L}(n\Lambda)$  est une sous-algèbre de  $A(\Lambda)$ . Ainsi  $\bigoplus_{n \geq 0} \check{L}(n\Lambda)$  est naturellement une algèbre intègre.

Comme  $B$ -module on a  $\check{V}(\lambda) = \check{V}(0) \otimes k_\lambda$  pour tout  $\lambda \in P$ . On a donc un morphisme naturel, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\check{L}(n\Lambda) \otimes k_{-n\Lambda} \rightarrow \check{V}(0)$ . D'après [8] (ch. XVIII) on a  $L(\Lambda) = U(\mathfrak{n}^-)/(\Sigma U(\mathfrak{n}^-)f_i^{(m)})$  où la somme porte sur  $i \in I, m > \Lambda(h_i)$ . Donc pour tout entier  $n, m$  avec  $n \leq m$ , on a des inclusions de  $U(\mathfrak{b})$ -modules:

$$\check{L}(n\Lambda) \otimes k_{-n\Lambda} \subseteq \check{L}(m\Lambda) \otimes k_{-m\Lambda} \subseteq \check{V}(0)$$

et on a  $\check{V}(0) = (\varinjlim_n \check{L}(n\Lambda) \otimes k_{-n\Lambda})$ . On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\check{L}(n\Lambda) \otimes k_{-n\Lambda}) \otimes (\check{L}(m\Lambda) \otimes k_{-m\Lambda}) & \longrightarrow & \check{V}(0) \otimes \check{V}(0) \\ \downarrow \nu & & \downarrow \mu \\ \check{L}((n+m)\Lambda) \otimes k_{-(n+m)\Lambda} & \longrightarrow & \check{V}(0) \end{array}$$

ou  $\mu$  est donnée par la multiplication de  $k[U]$  et l'identification  $\check{V}(0) \simeq k[U]$ , et où  $\nu$  est donnée par la structure d'algèbre de  $\bigoplus_{l \geq 0} \check{L}(l\Lambda)$ . Il en résulte que  $k[U]$  est intègre (Approximativement l'idée de la preuve est de réaliser  $U$  comme la "grosse orbite de  $G/B$ ").

2) Je pose  $Y = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . On a  $Y = \bigoplus_{\lambda \in P} Y_\lambda$ . Comme on a  $\mathfrak{m} = k \otimes \mathfrak{m}^2$ , on a aussi  $Y = k \otimes Y^2$ . Donc on se ramène au cas où l'on a  $k = \mathbb{Z}$  (et l'on oubliera l'exposant  $\mathbb{Z}$ ).

Pour tout entier  $n > 0$ , je pose  $Y_n = \bigoplus_{ht(\lambda)=n} Y_\lambda$ . Il est clair que l'on a  $Y = \bigoplus_{n > 0} Y_n$ , et que  $Y_n$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini. Je suppose d'abord qu'il existe un entier  $n$  avec  $\text{Tor } Y_n \neq 0$ . Je choisis alors un tel entier  $n$  minimal. Soit  $E$  une section  $H$ -invariante du morphisme  $(\bigoplus_{0 < i \leq n} \mathfrak{m}_i) \rightarrow \bigoplus_{0 < i \leq n} (Y_i/\text{Tor } Y_i)$ . Elle induit un morphisme d'algèbre  $SE \rightarrow \mathbb{Z}[U]$ . On notera que le morphisme  $\mathbb{Q} \otimes SE \rightarrow \mathbb{Q}[U]$  ainsi déterminé est injectif, donc  $SE$  s'injecte dans  $\mathbb{Z}[U]$ . Par construction, on a aussi  $(SE)_\lambda \simeq \mathbb{Z}[U]_\lambda$  pour tout  $\lambda$  avec  $ht(\lambda) < h$ . Soit  $\mathbb{O}: \mathbb{Z}[U] \rightarrow \mathbb{Z}[U] \otimes \mathbb{Z}[U]$  la comultiplication. Par construction, on a  $\mathbb{O}E \subseteq SE$ .

Ainsi  $SE$  est naturellement une sous-cogèbre de  $\mathbb{Z}[U]$ . Soit  $p$  un nombre premier associé à  $\text{Tor } Y_n$ . Le morphisme de cogèbre  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes SE \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[U]$  n'est pas injectif. Par construction le morphisme  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes E \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes Y$  est injectif. Donc l'image de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes SE$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[U]$  n'est pas absolument intègre. Ceci contredit le point 1. Donc  $Y$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre, et le lemme en résulte.

Je note  $\mathbb{G}_a$  le groupe additif de rang un. On déduit alors du fait que  $k[U]$  est une algèbre de polynômes les lemmes suivants:

LEMME 3: Soit  $n$  un entier  $> 0$ . Soit  $U(n)$  le sous-schéma de  $U$  défini par l'idéal engendré par  $\bigoplus_{h(\lambda) \leq n} k[U]_n$ . Alors  $U(n)$  est un sous-groupe distingué de  $U$ , le quotient  $U_n = U/U(n)$  existe, le morphisme  $U \rightarrow U_n$  est scindable à droite, et une telle section détermine un isomorphisme  $U = U_n \times U(n)$ . En outre  $U_n$  possède une série de composition finie par des groupes isomorphes à  $\mathbb{G}_a$ .

LEMME 4: Soit  $w \in W$ . Soit  $U(w)$  (respectivement  $U_w$ ) le sous-schéma de  $U$  défini par l'idéal engendré par les sous-espaces  $k[U]_y$  avec  $w^{-1}\gamma \in -Q^+$  (respectivement  $w^{-1}\gamma \in Q^+$ ). Alors  $U(w)$  et  $U_w$  sont deux sous-groupes de  $U$ , et l'on a un isomorphisme de schémas  $U \simeq W_w \times U(w)$ .

LEMME 5: Soit  $\tilde{w} \in \tilde{W}$ . Il existe un entier  $m > 0$ , tel que le fibré principal  $E(\tilde{w}) \rightarrow E(\tilde{w})/U(m)$  soit trivialisable.

*Démonstration:* On effectue la démonstration par récurrence. On peut donc supposer que l'on a  $\tilde{w} \neq 1$ . On pose donc  $\tilde{w} = s_\alpha \tilde{v}$ , et on choisit un entier  $n$  tel que le fibré principal  $E(\tilde{v}) \rightarrow E(\tilde{v})/U(n)$  soit trivial. Soit  $\varphi: P_\alpha \times U(n) \rightarrow P_\alpha$  le morphisme  $\varphi(p, u) = pup^{-1}$ . Il est clair qu'il existe un entier  $m \geq n$  tel que l'on ait  $\varphi(P_\alpha \times U(m)) \subseteq U(n)$ , et que le fibré principal  $E(\tilde{w}) \rightarrow E(\tilde{w})/U(m)$  est alors trivial.

On considère maintenant le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E(\tilde{w}) & \longrightarrow & B(w) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\ D(\tilde{w}) & \xrightarrow{\pi} & S_w \end{array}$$

où  $w \in W$ , et où  $\tilde{w}$  est une décomposition réduite de  $w$ .

LEMME 6: Soit  $V$  un ouvert de  $D(\tilde{w})$ . On suppose que l'on a  $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$  et que le morphisme  $P \rightarrow \text{Pic } V$  est nul. Alors l'action à droite de  $B$  sur  $\mu^{-1}(V)$  est trivialisable.

*Démonstration:* Par le lemme 5, il existe un entier  $m > 0$  tel que le fibré principal  $E(\tilde{w}) \rightarrow E(\tilde{w})/U(m)$  soit trivialisable. Je pose  $B_m = B/U(m)$ . Il suffit donc de démontrer que le fibré  $\mu^{-1}(V)/U(m) \rightarrow V$  est trivialisable. Sa classe  $[\xi]$  définit un élément de l'ensemble pointé  $H^1(V, B_m)$ . On a  $B_m = H \times U_m$ , d'où une suite exacte

$$H^1(V, U_m) \rightarrow H^1(V, B_m) \xrightarrow{j} H^1(V, H).$$



On a un isomorphisme naturel  $H^1(V, H) \simeq \text{End}(P, \text{Pic } V)$  et un morphisme naturel  $\varphi: \text{End}(P, P) \rightarrow \text{End}(P, \text{Pic } V)$ . Il est clair que l'on a  $j[\xi] = \varphi(\text{id}_P)$ . Donc par hypothèse on a  $j[\xi] = 0$ . Enfin par le lemme 3 et un dévissage évident,  $H^1(V, U_m)$  est réduit à un point. Donc  $[\xi]$  est la classe triviale, ce qui montre le lemme.

LEMME 7: *Soit  $V$  un ouvert de  $S_w$ . On suppose que l'on a  $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ , et que le morphisme  $P \rightarrow \text{Pic } V$  est nul. Alors l'action à droite de  $B$  sur  $v^{-1}(V)$  est trivialisable. En particulier  $B$  agit localement trivialement à droite sur  $B(w)$ .*

*Démonstration:* Je pose  $V' = \pi^{-1}V$ . Comme le morphisme  $\pi$  est trivial (lemme 1) on a aussi  $H^1(V', \mathcal{O}_{V'}) = 0$ . Comme pour tout  $\lambda \in P$ ,  $\mathcal{L}_w(\lambda)$  est l'image inverse de  $\mathcal{L}_w(\lambda)$ , le morphisme  $P \rightarrow \text{Pic } V'$  est nul. Par le lemme 6, l'action de  $B$  à droite sur  $\mu^{-1}(V')$  est trivialisable. Comme  $v^{-1}(V)$  est l'affinisation de  $\mu^{-1}(V')$ , le fibré principal  $v^{-1}(V) \rightarrow V$  est trivialisable. En particulier  $B$  agit trivialement à droite sur tout ouvert affine suffisamment petit de  $B(w)$ , ce qui achève la preuve du lemme.

On considère des triplets  $(X, \Gamma, (X_\gamma))$ , où  $\Gamma$  est un ensemble inductif,  $(X_\gamma)$  est un système inductif de schémas indexés par  $\gamma \in \Gamma$ , et où  $X$  est l'espace annelé  $\varinjlim X_\gamma$ . Soient  $(X, \Gamma, (X_\gamma))$  et  $(Y, \Omega, (Y_\omega))$  deux tels triplets. Un morphisme (un isomorphisme) d'espace annelé  $\varphi: X \rightarrow Y$  est dit un ind-morphisme (respectivement un ind-isomorphisme) si et seulement si il existe une application croissante  $f: \Gamma \rightarrow \Omega$  et un système compatible de morphismes de schémas  $\varphi_\gamma: X_\gamma \rightarrow Y_{f(\gamma)}$  dont  $\varphi$  est la limite (respectivement si  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont des ind-morphismes). On obtient ainsi une catégorie dont les objets, dits ind-schémas sont les classes de ind-schémas de ind-isomorphismes de tels triplets, et dont les morphismes sont les flèches induites par les ind-morphismes. Dans cette catégorie, appelée catégorie des ind-schémas, le produit existe. On peut donc définir les notions de ind-schémas en groupe, et d'action d'un ind-schéma en groupe sur un ind-schéma.

Soient  $X$  un ind-schéma, et  $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  un système inductif de schémas définissant la structure de ind-schéma sur  $X$ , et pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $i_\gamma$  le morphisme  $i_\gamma: X_\gamma \rightarrow X$ . Soient  $Y$  un sous-espace fermé de  $X$ ,  $Y_\gamma = i_\gamma^{-1}Y$  ( $\gamma \in \Gamma$ ),  $\mathcal{I}_\gamma$  l'idéal définissant  $Y_\gamma$  dans  $X_\gamma$ , de sorte que  $Y$  définit un faisceau d'idéaux  $\mathcal{I} = \varprojlim \mathcal{I}_\gamma$  et un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ . Je dis que  $Y$  est un sous-ind-schéma fermé de  $X$ , si le morphisme naturel  $\mathcal{O}_Y \rightarrow \varprojlim (i_{\gamma*}\mathcal{O}_{Y_\gamma})$  est un isomorphisme. Un ouvert  $V$  de  $X$  est dit affine généralisé s'il existe  $\gamma_0 \in \Gamma$  tel que  $i_\gamma^{-1}V$  soit affine pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$ . Le lemme suivant est trivial.

LEMME 8: *On suppose:*

- a) *pour  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  avec  $\gamma \leq \gamma'$ , le morphisme  $X_\gamma \rightarrow X_{\gamma'}$ , est une immersion fermée,*
- b) *les ouverts affines généralisés de  $X$  forment une base de la topologie de  $X$ .*

Alors tout fermé  $Y$  de l'un des  $X_\gamma$  est un ind-sous-schéma fermé de  $X$ .

Pour tous  $u, v, w \in W$ , il existe des morphismes naturels  $B(u) \times B(v) \rightarrow B(\psi(u, v))$ ,  $B(w) \rightarrow B(w^{-1})$  et  $\text{Spec } k \rightarrow B(w)$ . Je vais indiquer la construction du premier de ces morphismes. On choisit  $\tilde{u} = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_n}$  et  $\tilde{v} = s_{\beta_1} \dots s_{\beta_m}$  des décompositions réduites de  $u$  et de  $v$ . On a un morphisme naturel

$$(P_{\alpha_1} \times \dots \times P_{\alpha_n}) \times (P_{\beta_1} \times \dots \times P_{\beta_m}) \rightarrow B(\psi(u, v))$$

qui se factorise en  $E(\tilde{u}) \times E(\tilde{v}) \rightarrow B(\psi(u, v))$ . Comme  $B(u)$  et  $B(v)$  sont les affinisations de  $E(\tilde{u})$  et de  $E(\tilde{v})$ , on en déduit un morphisme  $B(u) \times B(v) \rightarrow B(\psi(u, v))$ . On construit de même le morphisme  $B(w) \rightarrow B(w^{-1})$ . Enfin le dernier morphisme est le morphisme composé  $\text{Spec } k \rightarrow B \rightarrow B(w)$ . Ces morphismes sont clairement compatibles aux restrictions. J'utiliserai deux notations,  $G$  et  $B(w)$  pour noter le ind-schéma  $\varinjlim_{u \in W} B(u)$ . Les morphismes précédents induisent des morphismes  $\mu: G \times G \rightarrow G$ ,  $i: G \rightarrow G$  et  $\varepsilon: \text{Spec } k \rightarrow G$  qui font de  $G$  un ind-schéma en groupe ( $\mu$  est la loi de groupe,  $i$  est l'inversion,  $\varepsilon$  est l'unité).

Par le lemme 7, le quotient  $G/B$  existe, et l'on a  $G/B = \varinjlim S_\mu$ . Je vais maintenant définir les grosses cellules  $C(G/B)$  et  $C(G)$  de  $G/B$  et de  $G$  (pour  $g$  de dimension finie, on aura  $C(G/B) = B^-B/B$  et  $C(G) = B^-B$ ; dans le cas général,  $B^-$  n'est pas défini).

La construction (cf. [8]), est la suivante. Soit  $\Lambda$  dominant régulier. J'identifie  $L(\Lambda)^*$  et  $\Gamma(G/B, \mathcal{L}(-\Lambda))$ . Soit  $\sigma$  un générateur de  $L(\Lambda)^*_\Lambda$ . Alors  $C(G/B)$  est le domaine de définition de  $\sigma^{-1}$ , et  $C(G)$  son image inverse. On montre aisément que  $C(G/B)$  et  $C(G)$  sont des ouverts affines généralisés qu'ils sont indépendants du choix de  $\Lambda$  et que le morphisme  $P \rightarrow \text{Pic } C(G/B)$  est nul (cf. [8]). Par le lemme 8, on en déduit que pour tout  $w \in W$ ,  $S_w \rightarrow G/B$  et  $B(w) \rightarrow G$  sont des immersions fermées.

Les ind-schémas  $G \times^B G/B$  et  $G/B \times G/B$  existent. De même, soient  $\Lambda, \mu, \nu \in P$ . Je note  $\mathcal{L}(\nu)$  (respectivement  $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ ) les sections du fibré  $G \times^B k_\nu$  (respectivement  $(G \times G) \times^{B \times B} (k_\lambda \times k_\mu)$ ).

LEMME 9: Il existe un isomorphisme naturel  $\chi_2: G \times^B G/B \rightarrow G/B \times G/B$  (donné par les formules naïves  $\chi_2(g, g') = (g, gg')$  et  $\chi_2^{-1}(g, g') = (g, g^{-1}g')$ ).

Démonstration: Le lemme résulte du fait que  $\mu$  et  $i$  sont des morphismes de ind-schémas. Soit  $u, v \in \bar{W}$ . Je pose  $S_{u,v} = B(u) \times^B B(v)/B$ , de sorte que  $G \times^B G/B$  est la limite des schémas  $S_{u,v}(u, v \in W)$  dits schémas de Schubert

généralisés. Soient  $\tilde{u}, \tilde{v}$  des décompositions de  $u$  et de  $v$ . Les morphismes naturels  $E(\tilde{u}) \rightarrow B(u)$  et  $E(\tilde{v}) \rightarrow B(v)$  induisent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(\tilde{u}) \times E(\tilde{v}) & \longrightarrow & B(u) \times B(v) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ D(\tilde{u}\tilde{v}) & \xrightarrow{g} & S_{u,v} \end{array}$$

Les morphismes  $\mu, \nu$  sont les applications de  $B \times B$  quotients. Donc par le lemme 1 et le lemme 22 de [8] on obtient:

LEMME 10: *On a  $g_* \mathcal{O}_{D(\tilde{u}\tilde{v})} = \mathcal{O}_{S_{u,v}}$ .*

Dans la suite de ce paragraphe, je suppose que  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p \neq 0$ . Pour tout espace annelé  $X$  sur  $k$  est défini le morphisme  $F$ , Frobenius absolu. Je peux donc dire que l'espace annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  est scindable (au sens de Metha, Ramanan et Ramanathan) si et seulement si le morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{O}_X \rightarrow F_* \mathcal{O}_X$  est scindable à gauche. Comme une variété de Demazure est compatiblement scindable [12] [8], par le lemme 10, une variété de Schubert généralisée  $S_{u,v}$  est scindable, compatiblement à ses sous-variétés de Schubert  $S_{u',v'} (u' \leq u, v' \leq v)$ . Comme  $S_{u,v}$  est complète, l'ensemble  $\Sigma_{u,v}$  des scindages compatibles de  $S_{u,v}$  est un espace affine de dimension finie, et non vide. Donc  $\Sigma = \varinjlim \Sigma_{u,v}$  est non vide. Ainsi  $G \times^B G/B$  est scindable, compatiblement à tous les ind-schémas de Schubert généralisés. Le morphisme  $S_{\omega,1} \rightarrow S_{\omega,\omega}$  s'identifie, via  $\chi_2$  au morphisme diagonal. On obtient ainsi une nouvelle preuve, et on généralise, un résultat de A. Ramanathan.

PROPOSITION 1 (cf. Ramanathan [16]): *Le ind-schéma  $G/B \times G/B$  est compatiblement scindé à sa diagonale.*

Remarques: 1) Une comparaison de la construction adoptée ici et des constructions antérieures (de J. Tits, V. Kac, et D. Peterson) est donnée dans [8] (ch. XV).

2) V.B. Metha m'a signalé une autre preuve de la proposition 1 (g de dimension finie).

3) Il est clair que la diagonale est un sous-ind schéma de  $G/B \times G/B$ . De plus tous les ind-schémas de Schubert généralisés sont des sous-ind schémas de  $G/B \times G/B$ .

Notations: Soient  $u \in W, M$  un  $B$ -module. Je note  $\mathcal{L}(M)$  les sections du fibrés  $G \times^B M \rightarrow G/B$ , et je pose  $DM = \Gamma(G/B, \mathcal{L}(M)), D_u M = \Gamma(S_u, \mathcal{L}_u(M))$ .

Les foncteurs  $D, D_u$  sont les duals des foncteurs de Joseph [3] [10]. Le morphisme naturel  $D \rightarrow DD_u$  est un isomorphisme [8] (ch. XIIX §3).

### III. Morphismes à fibres connexes

Dans tout ce paragraphe, je supposerai que  $k$  est un corps.

LEMME 11 (*k* corps): Soient  $\alpha \in \Pi, E$  un  $P_\alpha$ -module de dimension finie,  $X$  une sous-variété  $B$ -stable de  $\mathbb{P}E, Z$  une  $B$ -variété complète et  $\pi: Z \rightarrow X$  un morphisme  $B$ -équivariant. On suppose que pour tout  $x \in X$  l'ensemble  $\{g \in P_\alpha/gx \in X\}$  est égal à  $B$  ou à  $P_\alpha$ .

a) Le sous-espace  $Y = P_\alpha X$  de  $\mathbb{P}E$  est fermé.

b) On suppose que  $\pi$  est à fibres absolument connexes. Alors le morphisme naturel  $P_\alpha \times^B Z \rightarrow Y$  est à fibres absolument connexes.

*Démonstration:* Le morphisme naturel  $P_\alpha \times^B X \rightarrow P_\alpha/B$  est une fibration localement triviale, de base  $\mathbb{P}^1$  et de fibre  $X$ . Donc  $P_\alpha \times^B X$  est complet, le morphisme  $P_\alpha \times^B X \rightarrow Y$  est propre et  $Y$  est fermé. Ceci prouve l'assertion a).

Soit  $Y'$  le plus grand sous-espace de  $Y$  contenu dans  $X$  et  $P_\alpha$ -stable. Il est clair que  $Y'$  est un sous-schéma fermé de  $Y$ . On a un diagramme naturel

$$P_\alpha \times^B X \leftarrow P_\alpha \times^B Y' \rightarrow Y'$$

et  $Y$  s'identifie topologiquement au coproduit de  $P_\alpha \times^B X$  et de  $Y'$  suivant  $P_\alpha \times^B Y'$ . On en déduit (cf [8] lemme 31) que le morphisme  $P_\alpha \times^B X \rightarrow Y$  est à fibres absolument connexes. De même les fibres du morphisme  $P_\alpha \times^B Z \rightarrow P_\alpha \times^B X$  sont absolument connexes (cf [8] lemme 30). Donc il en est de même du morphisme  $P_\alpha \times^B Z \rightarrow Y$ .

Je n'utiliserai les énoncés suivants qu'en caractéristique non nulle. Il m'a paru plus clair de donner les énoncés correspondant en caractéristique 0 aussi.

On suppose donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\psi} & \tilde{S} \\ \uparrow & & \uparrow j \\ R & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

d'algèbres (commutatives)  $\mathbb{Z}$ -graduées de type fini sur le corps  $k$ . On ne suppose pas nécessairement que les composantes homogènes de ces algèbres

soient de dimension finie. On suppose en outre

- a)  $\varphi$  est surjective,
  - b)  $j$  est finie et injective,
  - c)  $\text{Spec } \tilde{S} \rightarrow \text{Spec } S$  est homéomorphisme absolu.
- Enfin on pose  $S' = \psi(\tilde{R})$ .

**LEMME 12** (*k corps de caractéristique 0*): *On suppose que  $\psi$  n'est pas surjective. Alors il existe un élément homogène  $s \in \tilde{S}$  tel que l'on ait  $s \notin S'$ , et  $s^l \in S'$  pour tout entier  $l \geq 2$ .*

**LEMME 13** (*k corps de caractéristique  $p \neq 0$* ): *On suppose que  $\psi$  n'est pas surjective. Alors il existe un élément homogène  $s \in \tilde{S}$  tel que l'on ait  $s \notin S'$  et  $s^p \in S'$ .*

*Démonstration:* 1) Pour tout élément homogène  $t \in \tilde{S}$ , soit  $I(t)$  l'annulateur de l'image de  $t$  dans le  $S'$ -module  $\tilde{S}/S'$ . Comme  $S'$  est noetherienne, il existe un élément homogène  $t \in \tilde{S}$  tel que  $I(t)$  soit maximal dans l'ensemble  $\{I(u)\}$ . Soit  $S''$  le sous-anneau  $S'[t]$  dans  $\tilde{S}$ . Je pose  $\mathfrak{p} = I(t)$ .

2) Par construction  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $S'$ . Je vais d'abord montrer que  $\mathfrak{p}$  est un idéal de  $S''$ . Pour cela, je peux supposer  $\mathfrak{p} \neq 0$ . L'extension  $S' \rightarrow S''$  est finie. On a donc  $\mathfrak{p}S'' \cap S' = \mathfrak{p}$ , et on a donc  $\mathfrak{p}t \subseteq \mathfrak{p}$ , d'où par récurrence  $\mathfrak{p}t^n \subseteq \mathfrak{p}$  pour tout entier  $n$ . Ainsi on a  $\mathfrak{p}S'' \subseteq \mathfrak{p}$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{p}$  est un idéal de  $S''$ . On remarque aussi que  $\mathfrak{p}$  est un idéal gradué de  $S''$ .

3) On suppose d'abord que  $\mathfrak{p}$  n'est pas un idéal réduit de  $S''$ . Alors il existe un élément homogène  $s \in S''$ , tel que l'on ait  $s \notin \mathfrak{p}$  et  $s^l \in \mathfrak{p}$  pour tout entier  $l \geq 2$ . Cela prouve dans ce cas les lemmes.

4) On suppose ensuite que  $\mathfrak{p}$  est un idéal réduit de  $S''$ . Comme l'extension  $S \rightarrow \tilde{S}$  est finie et donne un homéomorphisme absolu sur les spectres,  $\text{Spec } S'' \rightarrow \text{Spec } S'$  et donc  $\text{Spec } (S''/\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Spec } (S'/\mathfrak{p})$  sont donc aussi des homéomorphismes absolus. Donc  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $S''$ . Soient  $K'(K'')$  le corps des fractions de  $S'/\mathfrak{p}$  (respectivement de  $S''/\mathfrak{p}$ ). L'extension  $K' \rightarrow K''$  est purement inséparable. Par maximalité de  $I(t)$ , on a  $S''/\mathfrak{p} \cap K' = S'/\mathfrak{p}$ , et par construction on a  $S''/\mathfrak{p} \neq S'/\mathfrak{p}$ . Donc on a  $K'' \neq K'$ , et  $k$  est de caractéristique  $p \neq 0$ . Il existe un élément homogène  $s \in S''$ , dont l'image  $\bar{s}$  dans  $S''/\mathfrak{p}$  satisfait à  $\bar{s} \notin K'$  et  $\bar{s}^p \in K'$ . On a donc  $\bar{s}^p \notin S'/\mathfrak{p}$ , d'où  $s \notin S'$  et  $s^p \in S'$ , ce qui prouve aussi les lemmes dans ce cas.

On suppose donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{Y} \\ \downarrow j & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

de variétés complètes, et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible ample sur  $Y$ . Je pose  $\mathcal{M} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ , et je note encore  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  les images inverses de  $\mathcal{L}$  et de  $\mathcal{M}$  à  $X$ ,  $Y$  et  $\tilde{X}$ . On suppose en outre

- a)  $\varphi$  est une immersion fermée,  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $\Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ ,
- b)  $j$  est surjective,
- c)  $j$  est à fibres absolument connexes.

Enfin pour tout  $n > 0$ , je note  $R_n$  ( $R'_n$ ) l'application  $R_n: \Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$  (respectivement  $R'_n: \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ ).

LEMME 14 (*k corps de caractéristique 0*): On suppose que  $R_1$  n'est pas surjective. Alors il existe un entier  $n > 0$  et  $s \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$  tels que l'on ait  $s \notin \text{Im } R_n$  et  $s^l \in \text{Im } R_{nl}$ , pour tout entier  $l \geq 2$ .

LEMME 15 (*k corps de caractéristique  $p \neq 0$* ): On suppose que  $R_1$  n'est pas surjective. Alors il existe un entier  $n > 0$  et  $s \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$  tels que l'on ait  $s \notin \text{Im } R_n$  et  $s^p \in \text{Im } R_{np}$ .

Démonstration: 1) Je pose  $X' = \text{Spec } j_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ , et je note encore  $\mathcal{L}$  l'image inverse de  $\mathcal{L}$  à  $Y'$ , et  $j'$  le morphisme  $j': X' \rightarrow X$ . Comme  $j$  est à fibres absolument connexes, et que  $j'$  est finie,  $j'$  est un homéomorphisme absolu. En particulier  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$  est une extension de corps purement inséparable. En outre  $\mathcal{L}$  est ample sur  $X'$ .

2) On remarque que si les applications  $R_n$  sont surjectives pour  $n$  suffisamment grand, les lemmes sont triviaux. Je peux donc supposer le contraire. Je peux donc, quitte à remplacer  $\mathcal{L}$  par  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  (avec  $n$  suffisamment grand et  $R_n$  non surjective) supposer en outre que  $\mathcal{L}$  est très ample sur  $X$  et sur  $X'$ , et, puisque  $\varphi$  est une immersion fermée, que toutes les applications  $R'_m$ ,  $m > 0$  sont surjectives.

$$\begin{aligned} \text{Je pose: } S &= \Gamma(X, \mathcal{M}) \quad \tilde{S} = \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{M}) \\ R &= \Gamma(Y, \mathcal{M}) \quad \tilde{R} = \Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{M}) \end{aligned}$$

de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\psi^\#} & \tilde{S} \\ \uparrow & & \uparrow j^\# \\ R & \xrightarrow{\varphi^\#} & S \end{array}$$

d'algèbres commutatives de type fini sur  $k$ . Par construction, et parce qu'on a  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ , on a:

- a)  $\varphi^\#$  est surjective.

Par la formule de projection on a  $\tilde{S} = \Gamma(X', \mathcal{M}) = \Gamma(X, \mathcal{M} \otimes j'_* \mathcal{O}_{X'})$ . Comme  $j'$  est surjective le morphisme  $\mathcal{O}_X \rightarrow j'_* \mathcal{O}_{X'}$ , est injectif. En outre  $j'$  est finie. On a donc

(b)  $j^\#$  est finie et injective.

Je noterai  $O_S(O_{\tilde{S}})$  le point de  $\text{Spec } S$  ( $\text{Spec } \tilde{S}$  correspondant à l'idéal gradué maximal de  $S$  (respectivement de  $\tilde{S}$ ). Comme  $\mathcal{L}$  est très ample sur  $X$  et  $X'$ , on a  $\text{Spec } S - \{O_S\} = X \times k^*$  et  $\text{Spec } \tilde{S} - \{O_{\tilde{S}}\} = X' \times k^*$ . Comme  $j'$  est un homéomorphisme absolu, et que l'extension  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$  est purement inséparable, on a aussi

c)  $\text{Spec } \tilde{S} \rightarrow \text{Spec } S$  est un homéomorphisme absolu.

Enfin par construction  $\psi$  n'est pas surjective. D'après les lemmes 12 et 13, il existe un entier  $n$  et un élément  $s \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$  satisfaisant les conditions des lemmes cherchés (la condition  $\Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$  imposant en effet  $n > 0$ ).

**LEMME 16** (*même hypothèse,  $k$  corps de caractéristique  $p \neq 0$* ): *On suppose que  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont compatiblement scindées. Alors l'application  $\Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{L})$  est surjective.*

*Démonstration:* Cela résulte facilement du lemme 15 (cf. la preuve du lemme 56 de [8]).

#### IV. Surjectivité des restrictions

**LEMME 17:** *Soient  $\lambda, \mu, \theta \in P^+$ . On a  $\Gamma(G/B, \mathcal{L}(-\theta)) = L(\theta)^*$  et  $\Gamma(G/B \times G/B, \mathcal{L}(-\lambda, \mu)) = (L(\lambda) \otimes L(\mu))^*$ .*

*Démonstration:* La première assertion est le théorème 6 de [8]. La seconde en résulte, en considérant  $G/B \times G/B$  comme l'ind-schéma des drapeaux associé à  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ .

**DÉFINITION:** J'appellerai  $(B, (P_\alpha))$ -module tout  $k$ -module  $M$ , muni pour chaque  $\alpha \in \Pi$  d'une structure de  $P_\alpha$ -module, ces structures étant compatibles (i.e., les structures de  $B$ -modules induites par chacune des structures de  $P_\alpha$ -modules coïncidant).

On a une notion naturelle de morphisme de  $(B, (P_\alpha))$ -modules. Comme pour tout  $\alpha \in \Pi$ ,  $P_\alpha/B$  est propre, un morphisme de  $B$ -modules entre  $(B, (P_\alpha))$  modules est automatiquement un morphisme de  $(B, (P_\alpha))$ -modules (et de même pour une 1-extension).

**LEMME 18:** *Il y a une équivalence de catégories entre  $G$ -modules et  $(B, (P_\alpha))$ -modules.*

*Démonstration:* Soit  $M$  un  $k$ -module. Une structure de  $G$ -module est la donnée d'un système inductif de morphismes  $M \rightarrow M \otimes k[B(w)]$  (indexés par  $w \in W$ ), satisfaisant aux compatibilités évidentes. On suppose que  $M$  est un  $(B, (P_\alpha))$ -module. Soient  $w \in W$  et  $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_n}$  une décomposition réduite de  $w$ . La  $(B^{n-1})$ -equivariance du morphisme naturel  $M \rightarrow M \otimes k[P_{\alpha_1}] \otimes \dots \otimes k[P_{\alpha_n}]$  induit le morphisme  $M \rightarrow M \otimes \Gamma(D(w), \mathcal{O})$ . Par le lemme 1, on obtient ainsi un morphisme  $\delta_w : M \rightarrow M \otimes k[B(w)]$ . On montre de même que le morphisme construit ne dépend pas de la décomposition réduite choisie, et que la famille de morphismes  $(\delta_w)$  est un système inductif définissant une structure de  $G$ -module.

Ainsi à tout  $(B, (P_\alpha))$ -module on associe naturellement un  $G$ -module. La construction inverse est simplement la restriction. C.Q.F.D.

Un  $U(\mathfrak{g})$ -module  $M$  est dit intégrable, si pour tout  $\alpha \in \Pi$  sa structure de  $U(\mathfrak{p}_\alpha)$ -module provient d'une structure de  $P_\alpha$ -module (une telle structure est alors unique). Par le lemme précédent, un  $U(\mathfrak{g})$ -module intégrable est alors un  $G$ -module. Des exemples de  $U(\mathfrak{g})$ -modules intégrables sont fournis par les modules  $L(\xi)$ , et leur produits tensoriels. En revanche, quand  $\mathfrak{g}$  est de dimension infinie, le module adjoint n'est pas intégrable. Cette définition est plus restrictive que celle de Kac et Peterson [5].

Soient  $M$  un  $G$ -module,  $w \in W$ ,  $N$  un sous  $B$ -module de  $M$ . Alors le  $k$ -module  $wN$  est bien défini.

LEMME 19: Soient  $M$  un  $U(\mathfrak{g})$ -module intégrable et  $N$  un sous  $B$ -module de  $M$   
 a) Soit  $w \in W$ . Le  $k$ -module engendré par  $B(w)N$  est égal à  $U(\mathfrak{b})wN$ .  
 b) En particulier, pour tout  $u, v \in W$  avec  $u \leq v$  on a  $U(\mathfrak{b})uN \subseteq U(\mathfrak{b})vN$ , et l'on a

$$U(\mathfrak{g})N = \varinjlim_{w \in W} U(\mathfrak{b})wN.$$

*Démonstration:* 1) Il est clair que  $U(\mathfrak{b})wN$  est le  $k$ -module engendré par  $BwBN$ . Comme  $BwB$  est un ouvert dense de  $B(w)$ , le point a) s'en déduit.

2) Par le point 1, il vient que  $U(\mathfrak{b})wN$  est en fait un  $U(\mathfrak{p}_\alpha)$ -module, dès que l'on a  $w \geq s_\alpha w$  ( $w \in W, \alpha \in \Pi$ ). Donc pour tout  $\alpha \in \Pi$ ,  $\varinjlim U(\mathfrak{b})wN$  est un  $U(\mathfrak{p}_\alpha)$ -module. Comme  $U(\mathfrak{g})$  est engendré par les sous-anneaux  $U(\mathfrak{p}_\alpha)$ ,  $\varinjlim U(\mathfrak{b})wN$  est donc un  $U(\mathfrak{g})$ -module. Les inclusions évidentes

$$N \subseteq \varinjlim U(\mathfrak{b})wN \subseteq U(\mathfrak{g})N$$

prouvent le lemme.



Soient  $\lambda, \mu \in P^+$ . Le  $k$ -module  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$  possède trois structures de  $G$ -modules (respectivement de  $U(\mathfrak{g})$ -modules): l'action à gauche, notée  $L$ , l'action à droite, notée  $R$ , et l'action de Hopf  $M = L + R$ . Soient  $u, v \in W$ . Je pose

$$E_{u,v}(\lambda, \mu) = M(U(\mathfrak{b}))M(u)R(U(\mathfrak{b}))R(v)(e_\lambda \otimes e_\mu)$$

$$F_{u,v}(\lambda, \mu) = E_{u,v}(\lambda, \mu)^*$$

On suppose que  $k$  est un corps. Alors le morphisme naturel  $\gamma: B(u) \times B(v) \rightarrow \mathbb{P}E_{u,v}(\lambda, \mu)$  donné par la formule naïve

$$\chi(g, g') = M(g)R(g') \cdot (ke_\lambda \otimes ke_\mu),$$

factorise en un morphisme naturel  $S_{u,v} \rightarrow \mathbb{P}E_{u,v}(\lambda, \mu)$ . Je note  $S_{u\lambda, v\mu}$  son image. Ainsi  $S_{u\lambda, v\mu}$  est un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}E_{u,v}(\lambda, \mu)$ , fonctoriel en  $k$ . Soient  $\tilde{u}, \tilde{v}$  des décompositions réduites de  $u$  et de  $v$ . On a ainsi un diagramme naturel  $D(\tilde{u}\tilde{v}) \rightarrow S_{u,v} \rightarrow S_{u\lambda, v\mu}$ . Je note  $\mathcal{L}_{\tilde{u}, \tilde{v}}(\lambda, \mu)$  et  $\mathcal{L}_{u,v}(\lambda, \mu)$  les images inverses à  $D(\tilde{u}\tilde{v})$  et  $S_{u,v}$  du faisceau inversible tautologique  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E_{u,v}(\lambda, \mu)}(1)$  sur  $\mathbb{P}E_{u,v}(\lambda, \mu)$ . Ces faisceaux sont fonctoriels en  $k$ , et par construction  $\mathcal{L}_{u,v}(\lambda, \mu)$  est la restriction de  $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$  à  $S_{u,v}$ . Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on notera  $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$  ces faisceaux.

**LEMME 20** (*k* corps): Soient  $\lambda, \mu \in P^+$ ,  $u, v \in W$  et  $\tilde{u}, \tilde{v}$  des décompositions réduites de  $u$  et de  $v$ . Alors le morphisme  $D(\tilde{u}\tilde{v}) \rightarrow S_{u\lambda, v\mu}$  est à fibres absolument connexes.

*Démonstration:* Le lemme résulte d'une répétition récurrente du lemme 11.

On fixe  $u, v, u', v' \in W$  avec  $u \geq u', v \geq v'$ , et  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}', \tilde{v}'$  des décompositions réduites de ces éléments, avec  $\tilde{u} \geq \tilde{u}', \tilde{v} \geq \tilde{v}'$ . On choisit des morphismes canoniques  $E(\tilde{u}') \rightarrow E(\tilde{u})$  et  $E(\tilde{v}') \rightarrow E(\tilde{v})$ . Ces morphismes induisent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D(\tilde{u}'\tilde{v}') & \longrightarrow & D(\tilde{u}\tilde{v}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{u',v'} & \longrightarrow & S_{u,v} \end{array}$$

**LEMME 21:** Soient  $\lambda, \mu \in P^+$ . Alors le morphisme

$$(*) \quad \Gamma(D(\tilde{u}\tilde{v}), \mathcal{L}_{\tilde{u}, \tilde{v}}(-\lambda, -\mu)) \rightarrow \Gamma(D(\tilde{u}'\tilde{v}'), \mathcal{L}_{\tilde{u}', \tilde{v}'}(-\lambda, -\mu))$$

est surjectif. On a en outre

$$(**) H^l(D(\tilde{u}\tilde{v}), \mathcal{L}_{\tilde{u},\tilde{v}}(-\lambda, -\mu)) = 0 \text{ pour tout entier } l > 0.$$

*Démonstration:* 1) On suppose d'abord  $k$  corps parfait de caractéristique  $p \neq 0$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D(\tilde{u}'\tilde{v}') & \xrightarrow{\psi} & D(\tilde{u}\tilde{v}) \\ \downarrow j & & \downarrow i \\ S_{u'\lambda, v'\mu} & \xrightarrow{\varphi} & S_{u\lambda, v\mu} \end{array}$$

Par construction on a

a)  $S_{u'\lambda, v'\mu} \rightarrow S_{u\lambda, v\mu}$  est une immersion fermée, et

$$k = \Gamma(D(\tilde{u}'\tilde{v}'), \mathcal{O}) = \Gamma(S_{u'\lambda, v'\mu}, \mathcal{O})$$

$$k = \Gamma(D(\tilde{u}\tilde{v}), \mathcal{O}) = \Gamma(S_{u\lambda, v\mu}, \mathcal{O})$$

b)  $i$  est surjective

et par le lemme 11 on a

c)  $i$  est à fibres absolument connexes.

Donc par le lemme 16, et le scindage compatible des variétés de Demazure [8] (ch. VII) [12],  $\Gamma(D(\tilde{u}\tilde{v}), \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \rightarrow \Gamma(D(\tilde{u}'\tilde{v}'), \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$  est surjective.

Je vais prouver la seconde assertion par récurrence sur  $\tilde{u}$ . Lorsque  $\tilde{u} = 1$ , on a  $D(\tilde{u}, \tilde{v}) = D(\tilde{v})$  et  $\mathcal{L}(-\lambda, -\mu) = \mathcal{L}(-\lambda) \otimes k_{-\mu}$ . On a donc:

$$\begin{aligned} H^l(D(1, \tilde{v}), \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) &= H^l(D(\tilde{v}), \mathcal{L}(-\lambda)) \otimes k_{-\mu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après [8] (lemme 140).

On suppose maintenant  $\tilde{u} \neq 1$ , et je pose  $\tilde{u} = s_\alpha \tilde{w}$  ( $\alpha \in \Pi$ ,  $\tilde{w} \in \tilde{W}$ ). On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D(\tilde{w}\tilde{v}) & \longrightarrow & D(\tilde{u}\tilde{v}) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\ B/B & \xrightarrow{\xi} & P_\alpha/B \end{array}$$

D'après [8] (lemme 23) on a

$$R^q v_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu) = \mathcal{L}(H^q(D(\tilde{w}\tilde{v})), \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)).$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$(1) R^q v_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu) = 0 \text{ pour } q > 0$$

D'après la première assertion le morphisme

$$H^0(P_\alpha/B, v_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \rightarrow H^0(B/B, \mu_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$$

est surjectif, et l'on a [8] (lemme 23)

$$\zeta^* v_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu) = \mu_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu).$$

Donc par le lemme 142 de [8], on a:

$$(2) H^l(P_\alpha/B, v_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) = 0 \text{ pour } l > 0.$$

Donc par (1) et (2) on obtient  $H^l(D(\tilde{u}\tilde{v}), \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) = 0$  pour  $l > 0$ .

2) Le cas général s'en déduit par semi-continuité, d'abord au cas  $k = \mathbb{Z}$ , puis au cas  $k$  arbitraire. C.Q.F.D.

Enfin en utilisant la formule de projection et les lemmes 10 et 21 on arrive au lemme:

**LEMME 22:** Soient  $u, v, u', v' \in W$  avec  $u' \leq u, v' \leq v$  et  $\lambda, \mu \in P^+$ . Alors le morphisme  $\Gamma(S_{u,v}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \rightarrow \Gamma(S_{u',v'}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$  est surjectif.

*Remarque:* Si l'on ne désirait le lemme précédent que dans le cas où  $k$  est un corps, le résultat de nullité (\*\*) est inutile. Lorsque  $k$  est de caractéristique  $p \neq 0$ , cela résulte de la preuve. En caractéristique 0, il suffirait d'utiliser le lemme 14, et un argument de réduction modulo  $p$  comme dans [8].

Soient  $u, v \in \bar{W}$ . Je pose  $E_{u,v}(\lambda, \mu) = \varinjlim E_{x,y}(\lambda, \mu)$ , la limite étant prise sur  $x, y \in W$  avec  $x \leq u, y \leq v$ .

LEMME 23: Soient  $u', v' \in W$ ,  $u, v \in \bar{W}$  avec  $u' \leq u$ ,  $v' \leq v$ . Alors le morphisme

$$(*) \Gamma(S_{u,v}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \rightarrow \Gamma(S_{u',v'}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$$

est surjectif. On a  $\Gamma(S_{u,v}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) = F_{u,v}(\lambda, \mu)$ .

*Démonstration:* Pour tout  $x, y \in W$ ,  $x \leq u$ ,  $y \leq v$  je considère  $\mathcal{L}_{x,y}(-\lambda, -\mu)$  comme un faisceau sur  $S_{u,v}$  de support  $S_{x,y}$ . Par construction on a  $\mathcal{L}_{u,v}(-\lambda, -\mu) = \varinjlim \mathcal{L}_{x,y}(-\lambda, -\mu)$ , où la limite est prise sur les éléments  $x, y \in W$  avec  $u' \leq x \leq u$ ,  $v' \leq y \leq v$ , par conséquent on a

$$\Gamma(S_{u,v}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) = \varinjlim_{x,y} \Gamma(S_{x,y}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)).$$

Donc le morphisme (\*) est surjectif. Soient à présent  $x, y \in W$ . On applique le résultat précédent au cas où l'on a  $u = v = w$ . Par construction, le morphisme naturel  $F_{x,y}(\lambda, \mu) \rightarrow \Gamma(S_{x,y}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$  est injectif, et par le lemme 17, on a  $\Gamma(G/B \times G/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) = (L(\lambda) \otimes L(\mu))^*$ . On a aussi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (L(\lambda) \otimes L(\mu))^* & \longrightarrow & F_{x,y}(\lambda, \mu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(G/B \times G/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) & \longrightarrow & \Gamma(S_{x,y}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \end{array}$$

On en déduit donc que le morphisme  $F_{x,y}(\lambda, \mu) \rightarrow \Gamma(S_{x,y}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$  est un isomorphisme. Par passage à la limite, ce résultat est aussi vrai lorsque  $x, y \in \bar{W}$ .

PROPOSITION 2: Pour tous  $u, v, u', v' \in \bar{W}$  avec  $u' \leq u$ ,  $v' \leq v$ .  $E_{u',v'}(\lambda, \mu)$  est un facteur direct du  $k$ -module  $E_{u,v}(\lambda, \mu)$ . En particulier, on a  $E_{u,v}(\lambda, \mu) = k \otimes E_{u,v}^{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu)$ .

*Démonstration:* On suppose d'abord que l'on a  $u', v' \in W$ . Alors par le lemme 23, le morphisme  $F_{u,v}(\lambda, \mu) \rightarrow F_{u',v'}(\lambda, \mu)$  est surjectif, donc  $E_{u',v'}(\lambda, \mu)$  est un facteur direct du  $k$ -module  $E_{u,v}(\lambda, \mu)$ .

Je passe au cas général. Soit  $\xi \in P$ ,  $X = \{x, y \in W, x \leq u, y \leq v\}$ . Alors  $E_{x,y}^{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu)_{\xi}$  est une suite croissante de facteurs directs du module libre de rang fini  $E_{u,v}^{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu)_{\xi}$ . Donc il existe  $x, y \in P$ , avec  $E_{x,y}^{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu)_{\xi} = E_{u',v'}^{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu)_{\xi}$ .

Donc  $E_{u',v'}(\lambda, \mu)_\xi$  est facteur direct de  $E_{u,v}(\lambda, \mu)_\xi$ . Comme on a

$$E_{u,v}(\lambda, \mu) = \bigoplus_{\xi \in P} E_{u,v}(\lambda, \mu)_\xi$$

$$E_{u',v'}(\lambda, \mu) = \bigoplus_{\xi \in P} E_{u',v'}(\lambda, \mu)_\xi,$$

la proposition est montrée.

**LEMME 24:** *Soient  $u, v, u', v' \in \bar{W}$  avec  $u' \leq u, v' \leq v$ . Alors le morphisme  $\Gamma(S_{u,v}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \rightarrow \Gamma(S_{u',v'}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$  est surjectif. En outre on a  $\Gamma_k(S_{u,v}, L(-\lambda, -\mu)) = k \otimes \Gamma_{\mathbb{Z}}(S_{u,v}, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$ , dès que  $u, v \in W$ .*

*Démonstration:* Ce lemme résulte du lemme 23 et de la proposition 2. On rappelle aussi le fait suivant [8] (proposition 27):

**LEMME 25:** *Soient  $u \in W, \lambda \in P^+$ . Alors on a*

$$\Gamma_k(S_u, \mathcal{L}_u(-\lambda)) = k \otimes \Gamma_{\mathbb{Z}}(S_u, \mathcal{L}_u(-\lambda)) = F_u^k(\lambda).$$

*Remarque:* Soient  $\lambda \in P^+$ , et  $w \in W$ . Les énoncés équivalents suivants:

- (1)  $E_w^k(\lambda) = k \otimes E_w^{\mathbb{Z}}(\lambda)$ ,
- (2)  $E_w(\lambda)$  est un facteur direct de  $L(\lambda)$

ont été conjecturés par M. Demazure [2] et prouvés dans [1] [12] [15] [16] ( $\mathfrak{g}$  de dimension finie) et dans [8] ( $\mathfrak{g}$  Kac-Moody). La proposition 2 généralise cette conjecture aux modules  $E_{u,v}(\lambda, \mu)$ . En particulier ces modules sont libres de rang finis dès que  $u, v \in W$ . On peut ainsi définir les schémas  $\mathbb{P}E_{u,v}(\lambda, \mu)$  et  $S_{u\lambda, v\mu}$  ( $u, v \in W$ ) sur un anneau arbitraire  $k$ .

## V. Démonstration du théorème

Pour  $\mathfrak{g}$  de dimension finie, le lemme suivant est dû à A. Joseph en caractéristique 0 [3] et à P. Polo en caractéristique  $p$  [14]. Pour tout  $\alpha \in \Delta_{\text{re}}^+$ ,  $m \geq 1$ , je note  $e_\alpha$  la donnée radicielle associée à  $\alpha$  (définie au signe près) et  $e_\alpha^{(m)}$  sa puissance divisée d'ordre  $m$  [19].

**LEMME 26** (Joseph et Polo): *Soit  $u \in W, v \in P^+$ . Il existe un isomorphisme fonctoriel en  $k$  (au signe près)  $U(\mathfrak{h})/I \rightarrow E_u(v)$  où  $I$  est l'idéal à gauche engendré par a) le noyau du caractère  $uv: U(\mathfrak{h}) \rightarrow k$ , b) l'idéal d'augmentation  $U^+(\mathfrak{n}(u))$  de  $U(\mathfrak{n}(u))$ , c) les éléments  $e_\alpha^{(m)}$  avec  $\alpha \in \phi_w, m \geq -u(\mathfrak{h}_\alpha) + 1$ .*

*Démonstration* (Polo [14]): On a un morphisme naturel, au signe près  $\pi: U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{b})/I^{\mathbb{Z}} \rightarrow E_u^{\mathbb{Z}}(v)$ , tel que  $\pi(1)$  soit l'un des deux générateurs du  $\mathbb{Z}$ -module  $E_u^{\mathbb{Z}}(v)_{uv}$ , et de là un morphisme fonctoriel  $U(\mathfrak{b})/I \rightarrow E_u(v)$ . On peut donc supposer que  $k$  est un corps. Soit aussi  $J$  l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{b})$  engendré par les éléments a) et b). Pour tout  $w \in W$ , je note  $X_w$  la grosse cellule de  $S_w$ . Pour tout  $H$ -module  $M$ , je pose  $M^{(H)} = \bigoplus_{\xi \in P} (M_{\xi})^*$ . Par le lemme 4 on a  $U \simeq U_w \times U(w)$ . Donc on a un isomorphisme naturel  $(U(\mathfrak{b})/J)^{(H)} \simeq \Gamma(X_u, \mathcal{L}_u(-v))$ . Soit  $V$  la réunion des  $X_v$  où  $v$  décrit l'ensemble  $\{v/v \leq u, l(u) \leq l(v) + 1\}$ . On identifie alors  $(U(\mathfrak{b})/I)^*$  avec  $\Gamma(V, \mathcal{L}(-v))$ . Comme  $S_u$  est normale et que le complémentaire de  $V$  dans  $S_u$  est de codimension 2, on a  $(U(\mathfrak{b})/I)^* \simeq \Gamma(S_u, \mathcal{L}(-v))$ . Par le lemme 25, on a aussi  $\Gamma(S_u, \mathcal{L}_u(-v)) = E_u(v)^*$ , ce qui prouve le lemme.

On fixe jusqu'à la fin  $\lambda, \mu, \theta \in P^+$ , et  $w, v \in W$  liés par la relation

$$(*) \quad \lambda + w\mu = v\theta.$$

LEMME 27: *Il existe un morphisme surjectif fonctoriel (au signe près) de  $B$ -modules  $E_w(\mu) \otimes k_{\lambda} \rightarrow E_v(\theta)$ .*

*Démonstration:* Le module  $E_v(\theta)$  ne dépend en fait que de l'élément  $v\theta \in P$ . On peut donc supposer que l'on a  $vs_{\alpha} \geq v$ , pour tout  $\alpha \in \Pi$  avec  $\theta(h_{\alpha}) = 0$ . Il est clair aussi qu'il suffit de construire un morphisme surjectif  $\pi: E_w^{\mathbb{Z}}(\mu) \otimes \mathbb{Z}_{\lambda} \rightarrow E_v^{\mathbb{Z}}(\theta)$ . Soient  $e$  (resp.  $f$ ) un générateur du  $\mathbb{Z}$ -module  $(E_w^{\mathbb{Z}}(\mu) \otimes \mathbb{Z}_{\lambda})_{v\theta}$  (respectivement de  $E_v^{\mathbb{Z}}(\theta)$ ). On veut définir  $\pi$  tel que l'on ait  $\pi(e) = f$ . Il suffit donc de vérifier que l'annulateur  $I$  de  $e$  est inclus dans l'annulateur  $J$  de  $f$ . On a en effet:

a) Le noyau de  $w\mu + \lambda: U(\mathfrak{h}) \rightarrow k$  est inclus dans  $J$ .

b) Par construction on a  $\Phi_v = \{\alpha | v\theta(h_{\alpha}) < 0\}$  et  $\Phi_w \supseteq \{\alpha | w\mu(h_{\alpha}) < 0\}$ . Par la relation (\*), on a  $\Phi_v \subseteq \Phi_w$ , et on a donc  $U^+(\mathfrak{n}(w)) \subseteq U^+(\mathfrak{n}(v)) \subseteq J$ .

c) Enfin on a aussi que  $e_{\alpha}^{(m)} \in J$  si  $\alpha \in \Phi_w$  et  $m \geq w\mu(h_{\alpha}) + 1$ .

Donc d'après le lemme 26, il existe un morphisme de  $U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{b})$ -module  $\pi: E_w^{\mathbb{Z}}(\mu) \otimes \mathbb{Z}_{\lambda} \rightarrow E_v^{\mathbb{Z}}(\theta)$ , surjectif par construction. C.Q.F.D.

THÉORÈME: *Il existe un diagramme naturel de  $U(\mathfrak{g})$ -modules  $\Gamma(G/B \times G/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \xrightarrow{i} \Gamma(G \times^B B(w)/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \xleftarrow{j} \Gamma(G/B, \mathcal{L}(-\theta))$  où  $i$  (le morphisme naturel) est surjectif et où  $j$  (défini au signe près) est injectif. En outre ce diagramme est le dual du diagramme*

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) \xleftarrow{i'} U(\mathfrak{g})(L(\lambda)_{\lambda} \otimes L(\mu)_{w\mu}) \xrightarrow{j'} L(\theta)$$

où  $i'$  est l'inclusion naturelle, et où  $j'$  est surjective.

*Démonstration:* 1) Les assertions concernant  $i$  et  $i'$  résultent des lemmes 23 et 24, et du fait que l'on a

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}) \cdot (L(\lambda)_i \otimes L(\mu)_{w\mu}) &= U(\mathfrak{g}) \cdot E_{1,w}(\lambda, \mu) \\ &= E_{\omega,w}(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

2) Soit  $x \in W$ . Le morphisme naturel  $v: S_{x,w} \rightarrow S_x$  induit un isomorphisme  $v_* \mathcal{L}(-\lambda, -\mu) = \mathcal{L}(k_{-i} \otimes F_w(\mu))$ . D'ailleurs le morphisme du lemme 27 donne une suite exacte fonctorielle  $0 \rightarrow F_v(\theta) \rightarrow F_w(\mu) \otimes k_{-i} \rightarrow F \rightarrow 0$  (ce qui définit  $F$ ), d'où une suite exacte:

$$0 \rightarrow \Gamma(S_x, \mathcal{L}(F_v(\theta))) \rightarrow \Gamma(B(x) \times^B B(w)/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu)) \rightarrow F_x \rightarrow 0$$

(ce qui définit  $F_x$ ). En vertu des lemmes 23 et 25, on a  $F_x^k = k \otimes F_x^{\mathbb{Z}}$ . On a en outre  $F_x^{\mathbb{Z}} \subseteq \Gamma_{\mathbb{Z}}(S_x, \mathcal{L}(F))$ . Donc  $F_x^{\mathbb{Z}}$  étant sans torsion,  $F_x^k$  est libre.

3) Par passage à la limite sur  $x$ , on obtient une injection  $\Gamma(G/B, \mathcal{L}(F_v(\theta))) \rightarrow \Gamma(G \times^B B(w)/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$ . Comme on a  $DD_v \simeq D$  [8] (ch. XIIX §3), le morphisme naturel  $\mathcal{L}(F_v(\theta)) \rightarrow \mathcal{L}(-\theta)$  induit un isomorphisme  $\Gamma(G/B, \mathcal{L}(F_v(\theta))) \xrightarrow{\sim} \Gamma(G/B, \mathcal{L}(-\theta))$ . On obtient ainsi le morphisme  $j: \Gamma(G/B, \mathcal{L}(-\theta)) \rightarrow \Gamma(G \times^B B(w)/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))$ .

4) Le morphisme  $j$  est le dual d'un morphisme  $j': U(\mathfrak{g}) \cdot (L(\lambda)_i \otimes L(\mu)_{w\mu}) \rightarrow L(\theta)$  (lemmes 23 et 25). Il reste à montrer que  $j$  est surjectif. Or  $j'$  est la limite des morphismes  $\Gamma(B(x) \times^B B(w)/B, \mathcal{L}(-\lambda, -\mu))^* \rightarrow \Gamma(S_x, \mathcal{L}(F_v(\theta)))^*$  qui sont surjectifs par le point 2. Ainsi  $j'$  est surjective.

**COROLLAIRE 1:** (projective normalité des variétés de Schubert). *Soit  $I = I(\lambda)$ . Le morphisme naturel  $S_{w,I} \rightarrow S_{w,i}$  est un isomorphisme, et la  $k$ -algèbre  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(S_{w,I}, \mathcal{L}_w(-n\lambda))$  est engendrée par  $\Gamma(S_{w,I}, \mathcal{L}_w(-\lambda))$ . En particulier si  $k$  est normal,  $S_{w,i}$  est normale et le morphisme  $S_{w,I} \rightarrow \mathbb{P}E_w(\lambda)$  est une immersion fermée projectivement normale.*

*Démonstration:* On applique le théorème au cas  $w = 1$ . On en déduit donc que le morphisme  $(L(\lambda) \otimes L(\mu))^* \rightarrow (L(\lambda + \mu))^*$  est surjectif. Ceci implique que le morphisme  $F_w(\lambda) \otimes F_w(\mu) \rightarrow F_w(\lambda + \mu)$  est surjectif. Appliquant par récurrence ce résultat dans le cas où  $\lambda$  est un multiple de  $\mu$ , on obtient que  $F_w(\mu)^{\otimes n} \rightarrow F_w(n\mu)$  est surjective pour tout entier  $n > 0$ , ce qui prouve le corollaire.

De la seconde assertion du théorème on déduit

**COROLLAIRE 2:** *Le morphisme naturel  $L(\lambda + \mu) \rightarrow L(\lambda) \otimes L(\mu)$  est injectif.*

On suppose maintenant que  $k$  est un corps de caractéristique 0, et que  $\mathfrak{g}$  est symétrisable, de sorte que tout sous-module de  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$  est somme directe de modules simples  $L(\xi)$ ,  $\xi \in P^+$  [4].

**COROLLAIRE 3** (conjecture de Parthasaraty, Ranga Rao et Varadarajan) ( $k$  corps de caractéristique 0,  $\mathfrak{g}$  symétrisable): *Le module  $L(\theta)$  apparaît avec la multiplicité un dans le sous-module  $U(\mathfrak{g})(L(\lambda)_i \otimes L(\mu)_{w\mu})$  de  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ .*

*Démonstration:* La multiplicité de  $L(\theta)$  dans le module  $M = U(\mathfrak{g})(L(\lambda)_i \otimes L(\mu)_{w\mu})$  est au moins un d’après le théorème. On suppose que cette multiplicité est  $\geq 2$ . Par semi-simplicité [4],  $L(\theta) \oplus L(\theta)$  est alors un quotient de  $M$ . Donc on peut engendrer  $L(\theta) \oplus L(\theta)$  par un vecteur de poids  $v\theta$ , ce qui est absurde.

*Remarque:* Dans le cas général ( $k$  anneau arbitraire,  $\mathfrak{g}$  non nécessairement symétrisable), le module  $L(\theta)$  apparaît comme un sous-quotient naturel du produit tensoriel  $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ .

## Bibliographie

1. H.H. Andersen: Schubert varieties and Demazure’s character formula. *Inv. Math.* 79 (1985) 611–617.
2. M. Demazure: Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4ème série, 7 (1974) 53–88.
3. A. Joseph: On the Demazure character formula. *Ann. Ec. Norm. Sup.* 4ème série, 18 (1985) 389–419.
4. V.G. Kac: Infinite dimensional Lie algebras. *Progress in Math* 44, Birkhauser, Basel, Boston, Stuttgart (1983).
5. V.G. Kac and D. Peterson: Regular functions on certain infinite dimensional groups. Arithmetic and Geometry. *Progress in Math* 36 (1983) 141–146 Birkhauser, Boston.
6. S. Kumar: Demazure character formula in arbitrary Kac–Moody setting. *Inv. Math.* 89 (1987) 423.
7. S. Kumar: Proof of the Parthasarathy–Ranga Rao–Varadarajan conjecture. Preprint (1987).
8. O. Mathieu: Formule de Weyl et de Demazure, et théorème de Borel–Weil Bott pour les algèbres de Kac–Moody générales. Preprint (1986).
9. O. Mathieu: Fibrés en droite sur les variétés de Schubert associées aux algèbres de Kac–Moody. *Proceeding de “Symposium on topological methods in field theory”* (Helsinki–Juin 1986) Scientific World.
10. O. Mathieu: Formule de Demazure–Weyl . . . *Comptes Rendus* 303, série I (1986) 391–394.
11. O. Mathieu: Construction du groupe associé aux algèbres de Kac–Moody. *Comptes Rendus* 306 série I (1988) 227–230.
12. V.B. Metha and A. Ramanathan: Frobenius splitting and cohomology for Schubert varieties. *Ann of Math.* 122 (1985) 27–40.



13. K.R. Parthasarathy, R. Ranga Rao and V.S. Varadarajan: Representations of complex Lie groups and Lie algebras. *Ann of Math.* 85 (1967) 383–429.
14. P. Polo: Variétés de Schubert et excellentes filtrations. Preprint (1987).
15. S. Ramanan and A. Ramanathan: Projective normality of flag varieties and Schubert varieties. *Inv. Math.* 79 (1985) 217–224.
16. A. Ramanathan: Equations defining Schubert varieties and Frobenius splitting of the diagonal (preprint).
17. C.S. Seshadri: Normality of Schubert variety. *Proceeding de "Algebraic Geometry"* (Bombay, Avril 1984).
18. P. Slodowy: On the geometry of Schubert varieties attached to Kac–Moody Lie algebras. *Proceeding de "Algebraic Geometry"* (Vancouver, Juillet 1984).
19. J. Tits: Algèbres de Kac–Moody et groupes associés. *Annuaire du Collège de France* (1980–1981) 75–87 et (1981–1982) 91–106.
20. J. Tits: *Groups and groups functors attached to Kac–Moody data*. Arbeitstagung, Bonn 1984, Springer Verlag LN 1111 (1985) 193–223.