COMPOSITIO MATHEMATICA

J. ALEXANDER

Singularités imposables en position générale à une hypersurface projective

Compositio Mathematica, tome 68, nº 3 (1988), p. 305-354
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__68_3_305_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica 68: 305-354 (1988)
© Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Printed in the Netherlands

Singularités imposables en position générale à une hypersurface projective

J. ALEXANDER
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Parc Valrose, 06034 Nice, France

Received 10 June 1987; accepted 14 April 1988

Table des Matieres

0. Introduction

Dans un espace projectif (ou affine) de dimension n sur un corps k algébriquement clos, quel est le nombre maximum de points qu'on peut choisir en position générale, tel qu'il existe une hypersurface d'un degré d donné, ayant une singularité à chacun de ces points? Une méthode mise au point par A. Hirschowitz (La méthode d'Horace; voir [H]) lui a permis de répondre à cette question en dimensions deux et trois. En reprenant son travail et en utilisant sa méthode, une réponse complète est donnée en toute dimension pour tout degré d, sauf $d = 3$ ou 4.

Rappelons (voir [H]; introduction) que pour Y la partie de m points du fibré affine $\mathbb{A}_k^n$ de dimension n sur k, $\omega_2(Y)$ désigne le plus bas degré d'un polynôme non nul s'annulant sur Y avec toutes ses premières dérivées et que $\omega(m) = \omega(n, m)$ désigne le maximum des $\omega_2(Y)$ lorsque Y décrit l'ensemble des parties à m points de $\mathbb{A}_k^n$. Autrement dit, $\omega_2(n, m) = \omega_2(Y_0)$ où Y_0 désigne la partie à m points génériques de $\mathbb{A}_k^n$. Vue projectivement, $\omega_2(n, m)$ est le plus bas degré d'une forme non nulle sur $\mathbb{P}_k^n$ s'annulant sur le premier voisinage infinitésimal de Y_0 considéré comme la partie de m points génériques de $\mathbb{P}_k^n$. La fonction $\omega_2'(m) = \omega_2'(n, m)$ désigne le plus petit entier d tel que $\binom{d+n}{n}$ majore strictement $m(n + 1)$.

Evidemment, la question posée ci-dessus trouve sa réponse dans la détermination des valeurs $\omega_2(n, m)$. En fait, l'interprétation cohomologique (voir [H] (1.2)) mêne à la conjecture ((1.4) loc. cit.) que pour tout n, il existe un entier $c(n)$, tel que pour tout $m \geqslant c(n)$ on a $\omega_2(n, m) = \omega_2'(n, m)$.

DEFINITION. Pour tout entier $d \geqslant 1$, soient $v_{i,n}^d$; $0 \leqslant i \leqslant n$; les entiers vérifiant:

(i) $\sum_{i=0}^{n-1} v_{i,n}^d \leqslant 1$

(ii) $\sum_{i=0}^{n} v_{i,n}^d (i+1) = \binom{n+d}{n}$

donc $v_{n,n}^d$ est la partie entière de $\binom{n+d}{n}(n+1)$. Si $\binom{n+d}{n}/(n+1)$ n'est pas entier, alors $v_{n,n}^d$ est le plus grand entier tel que $\omega_2'(n, m) = d$ et si $\binom{n+d}{n}/(n+1)$ est entier alors $v_{n,n}^d - 1$ est le plus grand entier tel que $\omega_2'(n, m) = d$.

(0.1) THEOREME. *Pour tout entier $m \geqslant v_{n,n}^5$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a*:

$$\omega_2(n, m) = \omega_2'(n, m)$$

et par conséquent, pour tout $d \geqslant 5$, le nombre maximum de points singuliers imposables génériquement à une hypersurface projective (ou affine) de degré d dans $\mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{A}^n$) est $v_{n,n}^d$ si $\binom{n+d}{n}(n+1)$ n'est pas entier et $v_{n,n}^d - 1$ si $\binom{n+d}{n}/(n+1)$ est entier.

Nous introduisons la notation suivante pour décrire les voisinages infinitésimaux d'un point dans un fibré projectif.

(0.2) DEFINITION. Soit $X \simeq \mathbb{P}_k^n$, alors nous appelons (i, l)-point de X, le i-ème voisinage infinitésimal d'une section de X sur k, où le voisinage est pris dans un sous-espace linéaire de dimension $l \leqslant n$ de X. Nous écrirons simplement 0-point, lorsqu'il s'agit d'une section de X sur k.

Compte tenu de ([H], (1) et (2)), le théorème (0.1) résulte de la proposition suivante et et de l'énoncé $E_4(n, 4)$ introduit plus bas.

(0.3) PROPOSITION. *La réunion de $v_{i,n}^d(1, i)$-points génériques de $X \simeq \mathbb{P}_k^n$; $i = 0, \ldots, n$; est rangée de niveau d pour tout $d \geqslant 5$.*

(0.4) DEFINITION. Nous désignons par $E_0(n, d)$ la proposition (0.3) pour un couple (n, d) fixe.

(0.5) Quelques remarques sur la méthode de démonstration

La démonstration de la proposition (0.3) se fait par récurrence sur le couple (n, d) par la méthode d'Horace comme elle est présentée dans [H]. C'est-à-dire, on exploite un diviseur H de X (qui dans la pratique sera à quelques exceptions près, l'hyperplan générique de X) auquel on spécialise un certain nombre des $(1, i)$-points génériques, ce qui nous permet de résoudre l'énoncé $E_0(n, d)$ en deux énoncés $E_0(n - 1, d)$ et $E_1(n, d)1)$, en dimension inférieure (la dîme, [H]) et en degré inférieur (la dègue [H]) respectivement, auxquelles on peut appliquer les hypothèses de récurrence.

Malheureusement, la nécessité d'amorcer [H] avec des courbes pour ajuster [H] dans le diviseur, fait en sorte que la dégue $E_1(n, d - 1)$ n'est plus dans le cadre de l'énoncé $E_0(n, d - 1)$. Par conséquent, nous sommes obligés d'appliquer la méthode d'Horace à l'énoncé $E_1(n, d - 1)$ pour le résoudre, lui aussi, en deux énoncés, l'une en dimension inférieure et l'autre en degré infénieur.

En bref, il y aura lieu de formuler cinq énoncés $E_i(n, d)$; $i = 0, 1, \ldots, 4$; qui fournissent cinq implications

$$E_i(n - 1, d) + E_{i+1}(n, d - 1) \Rightarrow E_i(n, d) \tag{0.5.1}$$

pour $i = 0, \ldots, 3$ et

$$E_4(n - 1, d) + E_4(n, d - 1) \Rightarrow E_4(n, d) \tag{0.5.2}$$

de la forme

"dîme" + "dègue" ⇒ "énoncé"

où l'énoncé $E_4(n, d)$ est stable pour la méthode d'Horace et n'a aucun besoin d'amorçage.

Donc généralement parlant, il nous suffit d'établir l'énoncé $E_4(n, d)$ pour $n = 1$ et tout d et pour $d = 1$ et tout n, puis de démontrer les énoncés $E_i(n, d)$; $i = 0, \ldots, 3$; pour $n = 1$ et tout d, le reste étant une conséquence des implications (0.5.1) et (0.5.2).

En réalité, tout n'est pas aussi net, puisque certains des implications (0.5.1) et (0.5.2) ne sont plus valables pour bas degré et base dimension. Ce qui a pour conséquence d'augmenter le nombre de cas initiaux qu'on sera obligé de regarder.

Dans les trois parties suivantes, nous traitons respectivement les cas $d \geqslant 7$, $d = 6$ et $d = 5$. Les deux premiers cas se distinguent du troisième dans la façon d'amorcer (amorçage avec des coniques pour $d \geqslant 6$ et amorçage avec des droites pour $d = 5$) tandis que les deux premiers cas se distinguent l'un de l'autre dans la façon d'éliminer les coniques dans la récurrence.

(1) Le cas $d \geqslant 7$

(1.0) Les énoncés

Dans cette partie, nous introduisons les quatre énoncés $E_i(n, d)$; $i = 1, \ldots, 4$. Comme l'énoncé $E_i(n, d)$ doit jouer le rôle à la fois de la dîme de $E_i(n + 1, d)$ et de la dègue de $E_{i-1}(n, d + 1)$ (voir (0.5.1) et (0.5.2)), il est dans sa formulation plus générale que ne sont la dîme et la dêgue. C'est seulement pour petit degré et petite dimension que nous nous restreignons aux cas qui se présentent dans la pratique en tant que dîme ou dègue.

(1.0.1) L'énoncé $E_1(n, d)$; $d \geqslant 6$, $n \geqslant 2$
Soit H l'hyperplan générique de $X \simeq \mathbb{P}^n$ et soient $C_1, \ldots, C_\gamma$; $0 \leqslant \gamma \leqslant n - 1$; γ coniques génériques de X munies chacune de $(d + 1)$ $(1, n)$-points à support générique dans la conique. Soient μ_0, μ_1, μ_2 trois entiers non-négatifs vérifiant

(i) sauf pour les couples $(n, d) = (3{,}5)$, $(3{,}6)$ et $(4{,}5)$

$$\binom{n}{2} \leqslant \mu_1 \leqslant \frac{1}{n}\binom{n + d}{d + 1} - \gamma/n$$

et

(a) pour $d = 5, n = 5$ ou 6, pour $d = 6, n = 4$ et pour $d = 7, 9, 10$, $n = 3$, si $\gamma > 0$ alors $\mu_1 = \binom{n}{2}$.

(b) pour $d = 8, n = 3$, si $\gamma = 1$ alors $\mu_1 = 3$ ou $\mu_1 = 18$ et si $\gamma = 0$ ou 2, alors $\mu_1 = 3$.

(ii) Pour $d = 5, n = 3$, si $\gamma = 2$ alors $\mu_1 = 2$, si $\gamma = 1$ alors $\mu_1 = 1$ ou $\mu_1 = 9$ et si $\gamma = 0$ alors $\mu_1 = 3$.

Pour $d = 6, n = 3$, si $\gamma = 2$ alors $\mu_1 = 2$ et si $\gamma = 0$ ou 1 alors $\mu_1 = 3$.

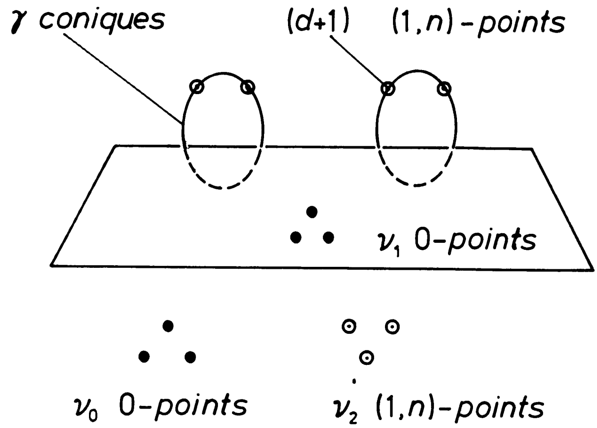
Pour $d = 5, n = 4$, si $\gamma = 2$ ou 3 alors $\mu_1 = 2$ et si $\gamma = 0$ ou 1 alors $\mu_1 = 6$.

(iii) $\mu_0 + \mu_1 + (n + 1)(\gamma(d + 1) + \mu_2) = \binom{n+d}{d} + \gamma$.

Alors pour la réunion Y de

- μ_0 0-points plus $\mu_2 (1, n)$-points génériques de X,
- μ_1 0-points génériques de H
- les $\gamma(d + 1)$ $(1, n)$-points sur les γ coniques

on a $H^0(X, I_y(d)) = 0$, où I_y est le faisceau d'idéaux de Y dans X.



La configuration pour $E_1(n, d)$

REMARQUE. La présence du facteur γ dans le terme à droite (1.0.1) (iii) est le legs de l'amorçage. En effet, le deuxième lemme d'amorçage [H] a l'effet de déplacer une des conditionns sur chacune des coniques, à l'intersection de la conique avec H, sanns que la partie du schéma qu'on regarde soit réellement déplacée. Par conséquent, dans le résiduel [H] on a γ conditions de trop dont une sur chacune des coniques, mais qui ne fournissent pas de condition effective pour la suite. Tôt ou tard il convient de les éliminer.

On aurait pu les éliminer dans la formulation de l'énoncé $E_1(n, d)$ en remplaçant un des $(1, n)$-points sur chacune des coniques, par un $(1, n - 1)$-point extraverti, mais nous avons préféré attendre l'énoncé $E_2(n, d)$ pour finalement nous débarrasser de l'inconvénient d'une configuration non-rangée.

(1.0.2) L'énoncé $E_2(n, d)$

Soit H l'hyperplan générique de X et soient $\delta, \delta', \gamma, \mu_0, \ldots, \mu_3$ des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $\delta, \delta' \leqslant 1; \quad \gamma \leqslant n - 2; \quad \mu_2 \leqslant n - 1$

$$\mu_0 + \mu_1 + (\delta' + \gamma)(d + 2) + \delta + 2\mu_2$$

$$+ (n + 1)(\delta d + \mu_3) = \binom{n + d}{d}$$

(ii) l'une des conditions suivantes

(a) $d \geqslant 5,\ n \geqslant 5; \quad d \geqslant 6,\ n \geqslant 4; \quad d \geqslant 7,\ n \geqslant 2$

$$\binom{n}{2} \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant y^d_{2,n}$$

où $y_{2,n}^d$ est le plus petit entier tel que

$$ny_{2,n}^d \geqslant \binom{n+d}{d+1} + \gamma - \binom{n}{2} - \gamma(d+2)n - 2\delta n$$

et si $\delta + \delta' > 0$ alors $\gamma = n - 2$.

(b) $d = 5, n = 4$

(1) $\delta = \delta' = \gamma = 0$ et $\mu_1 + \mu_2$ comme dans (a)

(2) $\gamma = 1, \mu_1 = 6, \mu_2 = 0$; si $\delta + \delta' > 0$ alors $\gamma = 2$

(3) $\gamma = 1, \delta = \delta' = 0, \mu_1 = 12, \mu_2 = 1$

(c) $d = 5, \ldots, 9; n = 3$

(1) $\delta = \delta' = \gamma = 0$ et $\mu_1 + \mu_2$ comme dans (a)

(2) $\gamma \geqslant 1, \mu_1 = 3, \mu_2 = 0$; si $\delta + \delta' > 0$ alors γ

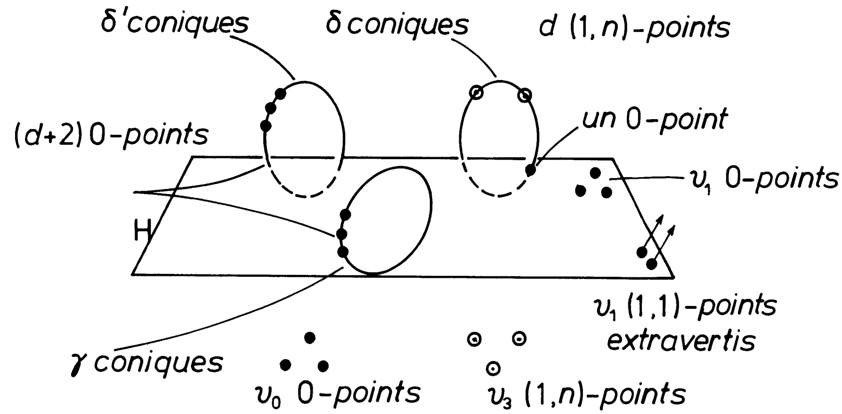
(3) $\delta' = 0$

$$\begin{array}{lllll}
d = 5 & \delta = 0, & \gamma = 1, & \mu_1 = 1, & \mu_2 = 1 \\
 & \delta = 1, & \gamma = 1, & \mu_1 = 0, & \mu_2 = 0 \\[1em]
d = 6 & \delta = 0, & \gamma = 1, & \mu_1 = 2, & \mu_2 = 2 \\
 & \delta = 1, & \gamma = 1, & \mu_1 = 0, & \mu_2 = 2 \\[1em]
d = 7 & \delta = 0, & \gamma = 1, & \mu_1 = 4, & \mu_2 = 2 \\
 & \delta = 1, & \gamma = 0, & \mu_1 = 7, & \mu_2 = 0 \\
 & \delta = 1, & \gamma = 1, & \mu_1 = 2, & \mu_2 = 2 \\[1em]
d = 8 & \delta = 0, & \gamma = 1, & \mu_1 = 7, & \mu_2 = 1 \\
 & \delta = 1, & \gamma = 1, & \mu_1 = 5, & \mu_2 = 1 \\[1em]
d = 9 & \delta = 0, & \gamma = 1, & \mu_1 = 9, & \mu_2 = 2 \\
 & \delta = 1, & \gamma = 1, & \mu_1 = 7, & \mu_2 = 2
\end{array}$$

Alors la réunion de

- μ_0 0-points plus μ_3 $(1, n)$-points génériques de X,
- μ_1 0-points génériques de H plus $\mu_2(1, 1)$-points génériques à support dans H,
- $(d + 2)$ 0-points génériques de chacune de γ coniques génériques de H,
- $(d + 2)$ 0-points génériques de δ' coniques génériques de X,
- $d(1, n)$-points génériques de δ coniques génériques de X plus un 0-point dans son intersection avec H,

est rangée de niveau d.



La configuration pour $E_2(n, d)$

REMARQUE. Les conditions détaillées dans (ii) (b) et (c) ci-dessus couvrent les dîmes de $E_2(n+1, d)$ (les cas (1) et (2)) et les dègues de $E_1(n, d+1)$ (les cas (1) et (3)).

(1.0.3) L'éconcé $E_3(n, d)$, $n \geqslant 2$, $d \geqslant 4$

Cas (1) $n \geqslant 3$, $d \geqslant 4$

Soit H l'hyperplan générique de X et soient δ, δ, $\mu_0, \ldots, \mu_3$ des entiers non négatifs vérifiant

(i) $\delta, \delta' \leqslant 1$; $\mu_2 \leqslant n-1$

(ii) $\mu_0 + \mu_1 + (\delta + \delta')(d+1) + 2\mu_2 + (n+1)\mu_3 = \binom{n+d}{d}$

(iii) l'une des conditions suivantes

(a) $d \geqslant 4$, $n \geqslant 5$; $d \geqslant 5$, $n \geqslant 4$; $d \geqslant 0$, $n = 3$;

$$\binom{n}{2} \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant y_{3,n}^{\mathrm{d}} + (n-1)$$

où $y_{3,n}^{d}$ est le plus petit entier tel que:

$$n \cdot y_{3,n}^{d} \geqslant \binom{n+d}{d+1} - \delta(d+1)n - \delta - 2\delta' - \binom{n}{2} - \sigma(n-2)(d+3)$$

où

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta + \delta' = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \delta + \delta' > 0. \end{cases}$$

(b) $d = 4, n = 4$

(1) $\delta = \delta' = 0$; $\mu_1 + \mu_2$ comme dans (1)

(2) $\delta + \delta' > 0$; $\mu_1 = 6, \mu_2 = 0$

(3) $\delta = 1, \delta' = 0$; $\mu_1 = 3, \mu_2 = 3$

(4) $\delta = 0, \delta' = 1$; $\mu_1 = 7, \mu_2 = 2$

(5) $\delta = 1, \delta' = 1$; $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1$

(c) $d = 4, \ldots, 8; n = 3$

(1) $\delta = \delta' = 0$; $\mu_1 + \mu$ comme dans (a)

(2) $d = 4, \delta = \delta' = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 0$

(3) $\delta + \delta' > 0, \mu_1 = 3, \mu_2 = 0.$

Alors la réunion de

- μ_0 0-points plus μ_3 $(1, n)$-points génériques de X
- 0-points génériques de H plus $\mu_2(1, 1)$-points génériques à support dans H
- $(d + 1)$ 0-points génériques de δ coniques génériques de H
- $(d + 1)$ 0-points génériques de δ' coniques génériques de X

est rangée de niveau d.

Cas (2) $n = 2$; $d \geqslant 4$

Soit H la droite générique de $X \simeq \mathbb{P}^2$ et soient $v, v', \delta, \delta', \mu_0, \ldots, \mu_3$ des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $\delta, \delta' \leqslant 1$; $\mu_2 \leqslant 1$

(ii) $\mu_0 + \mu_1 + \delta' \cdot v' + 2\mu_2 + 3\mu_3 = \binom{d+2}{2}$

(iii) l'une des conditions suivantes

(a) $v = d + 1, v' = d + 1$; $d \geqslant 4$

$$\mu_1 + \mu_2 = 1$$

et si $\delta' = 1$ alors $\delta = 1$.

(b) $v = d + 2, v' = d + 4, d \geqslant 8$

$$1 \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant y^d_{3,2}$$

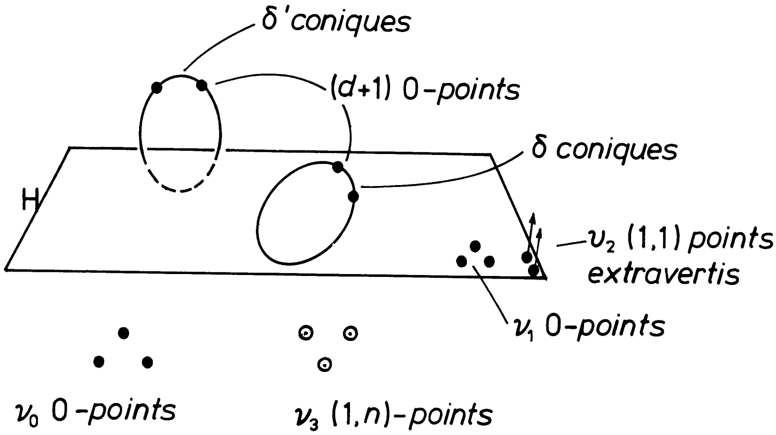
où $y^d_{3,2}$ est le plus petit entier tel que

$$2y^d_{3,2} \geqslant d + 3 - 4\delta.$$

Alors la réunion de

- μ_0 0-points plus μ_3 (1, 2)-points génériques de X,
- μ_1 0-points génériques de H plus μ_2 (1, 1)-points génériques a support dans H,
- v (resp. v') 0-points génériques de δ (resp. δ') coniques génériques de X,

est rangée de niveau d.



La configuration pour $E_3(n, d)$; $n \geqslant 3$:

(1.0.4) L'éconcé $E_4(n, d)$
Soit H l'hyperplan générique de $X \simeq \mathbb{P}^n$ et soient $\mu_0, \ldots, \mu_3$ des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $\mu_2 \leqslant n - 1$

(ii) (a) Pour $n \geqslant 3$, $d \geqslant 3$.

$$\binom{n}{2} - \beta \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant y^d_{4,n} + (n - 1)$$

où $y^d_{4,n}$ est le plus petit entier tel que

$$ny^d_{4,n} \geqslant \binom{n+d}{d+1} - \binom{n}{2}$$

et où

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad d = 3 \\ 0 & \text{pour} \quad d > 3 \end{cases}$$

(b) $n = 2$, $d \geqslant 3$

$$1 \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant d.$$

Alors la réunion de

- μ_0 0-points plus μ_3 $(1, n)$-points génériques de X
- μ_1 0-points génériques de X plus μ_2 $(1, 1)$-points génériques à support dans H,

est rangée de niveau d.

(1.0.5) Nous désignons par $E_i(1, d)$; $i = 0, \ldots, 4$; $d \geqslant 0$; l'éconcé que la réunion de μ_0 0-points plus μ_1 (1, 1)-points génériques de $X \simeq \mathbb{P}^1$ est rangée de niveau d où

$$\mu_0 + 2\mu_1 = d + 1$$

Dans la partie suivante, nous démontrons les principales implications qui lient les éconcés $E_i(n, d)$; $i = 0, \ldots, 4$.

(1.1) Les implications

(1.1.1) Proposition. *Pour $n \geqslant 2$, $d \geqslant 6$ on a*:

$$E_0(n-1, d) + E_1(n, d-1) \Rightarrow E_0(n, d).$$

Démonstration. Soient λ, ε les deux entiers vérifiant

$$\varepsilon + n\lambda = \binom{n+d-1}{d} - \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)v_{i,n}^d; \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant n-1.$$

Alors on spécialise les $v_{i,n}^d$ $(1, i)$-points; $0 \leqslant i \leqslant n-1$; plus λ des $v_{n,n}^d$ $(1, n)$-points, à l'hyperplan générique H de X. Ensuite, on spécialise $\varepsilon \cdot d$ des $v_{n,n}^d - \lambda$ $(1, n)$-points à ε coniques génériques de X dont d $(1, n)$-points à support générique dans chacune des coniques.

On invoque le second lemma d'amorçage [H] (6.2.2). La condition d'amorçage se vérifie en spécialisant un des $(1, n)$-points sur chacune des coniques à H. La trace se spécialise en une configuration du type figurant dans $E_0(n-1, d)$ donc est conséquence de ce dernier énoncé.

La dègue est dans le cadre de $E_1(n-1, d)$ pour les valeurs

$$\mu_0 \mapsto 0; \quad \mu_1 \mapsto \lambda; \quad \mu_2 \mapsto v_{n,n}^d - \lambda - \varepsilon \cdot d; \quad \gamma \to \varepsilon$$

où il nous reste à vérifier que

$$\lambda \geqslant \binom{n}{2}.$$

Or, on a:

$$n \cdot \lambda \geqslant \binom{n+d-1}{d} - (n-1) - \varepsilon$$

$$\geqslant \binom{n+d-1}{d} - 2(n-1)$$

et on démontre par récurrence sur le couple (n, d) que ce dernier majore $n\binom{n}{2}$ pour $d \geqslant 6$, $n \geqslant 2$. Le lecteur est invité à vérifier que pour les cas particuliers de (1.0.1) (ii) on a $\gamma = 0$ sauf pour $n = 3$ et $d = 3$ où on a $\gamma = 1$.

Remarque. Nous avons l'intention de démontrer $E(2, d)$, $d = 7, \ldots, 10$ comme cas initiaux.

(1.1.2) Proposition. *Pour $n \geqslant 3$, $d \geqslant 6$ et $n = 2$, $d \geqslant 8$ on a*:

$$E_1(n-1, d) + E_2(n, d-1) \Rightarrow E_1(n, d).$$

Démonstration. En spécialisant certains des μ_0 0-points en $(1, n)$-points génériques de X, on peut supposer $\mu_0 \leqslant n$.

Regardons d'abord les cas

$$n \geqslant 4,\ d \geqslant 6; \quad n = 3,\ d \geqslant 11; \quad n = 2,\ d \geqslant 8$$

On spécialise à H, $\min(\gamma, n-2)$ des γ-coniques plus deux des $(1, n)$-points sur les $\gamma - \min(\gamma, n-2)$ coniques qui restent. Soient γ, ε les deux entiers vérifiant

$$\begin{aligned} \varepsilon + n\lambda = {} & \binom{n+d-1}{d} + \min(\gamma, n-2) - \mu_1 \\ & - (d+1) \cdot n \cdot \min(\gamma, n-2) - 2n(\gamma - \min(\gamma, (n-2)) \\ & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant n-1 \end{aligned}$$

et posons

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon = 0 \\ n - \varepsilon & \text{si } \varepsilon \geqslant 1 \end{cases} \qquad \eta_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon = 0 \\ \varepsilon_0 - 1 & \text{si } \varepsilon \geqslant 1. \end{cases}$$

Alors on spécialise $\lambda - \eta_0$ des μ_2 $(1, n)$-points à H et on expulse (voir [H] (5.2)) ε_0 des μ_1 0-points par ε_0 des $\mu_3 - \lambda + \eta_0$ $(1, n)$-points de sorte qu'on ajuste dans H.

La dîme est dans le cadre de $E_1(n-1, d)$, au moins dès qu'on a spécialisé $\binom{n-1}{2}$ des $\mu_1 - \varepsilon_0$ 0-points à l'hyperplan générique de H, sauf pour $(n, d) = (4, 6)$, $\gamma \geqslant 2$ où on ne spécialise que deux des $\mu_1 - \varepsilon_0$ 0-points à l'hyperplan générique de H.

Le dègue est dans le cadre de $E_2(n, d-1)$ pour les valeurs

$$\mu_0 \to \mu_0;\quad \mu_1 \to \lambda - \eta_0;\quad \mu_2 \to \varepsilon_0;\quad \mu_3 \to \mu_3 - \lambda + \eta_0 - \varepsilon_0$$

$$\delta' \mapsto 0;\quad \delta \mapsto \gamma - \min(\gamma, n-2);\quad \gamma \mapsto \min(\gamma, n-2)$$

où, comme il y a 0-point de trop dans l'intersection dans $\gamma - \min(\gamma, n-2)$ coniques avec H (voir la remarque suivant (1.0.2)), il nous convient d'en oublier un pour que nous ne soyons plus dans le cadre d'une configuration non rangée. Bien entendu, il nous reste à vérifier que

$$\lambda - \eta_0 + \varepsilon_0 \geqslant \binom{n}{2}.$$

Pour cela, il suffit de démontrer qu'on a:

$$\lambda > \binom{n}{2} - 1$$

mais on a:

$$\begin{aligned} n\lambda &= \binom{n+d-1}{d} - \mu_1 + \min(\gamma, n-2) - (d+1)n\min(\gamma, n-2) \\ &\quad - 2n(\gamma - \min(\gamma, n-2)) - \varepsilon \\ &\geqslant \binom{n+d-1}{d} - \frac{1}{n}\binom{n+d}{d+1} + \frac{n-1}{n} + (n-2) \\ &\quad - (d+1)n(n-2) - 2n - (n-1) \\ &= \frac{d}{(d+1)!}(n+d-1)\ldots(n+1)(n-1) + \frac{n-1}{n} \\ &\quad - (d+1)n(n-2) - 2n - 1 \end{aligned}$$

et on démontre par récurrence sur le couple (n, d) que ce dernier majore strictement $n\binom{n}{2} - n$ pour $d = 6$, $n \geqslant 5$; $d \geqslant 7$, $n \geqslant 4$; $d \geqslant 11$, $n = 3$; $d > 8$, $n = 2$.

Dans le cas $n = 4$, $d = 6$ on procède de la même façon. Pour $\gamma = 0$, on vérifie l'inégalité comme ci-dessus, mais pour $\gamma = 1$, 2 ou 3, $\mu_1 = 6$, on calcule directement les valeurs de λ et ε. La dègue est dans le cadre de $E_2(4, 5)$ sauf pour $\gamma = 3, \mu_1 = 6$ et on trouve $\lambda = 4, \varepsilon = 0$. Dans ce dernier cas, on trouve $\mu_0 = 4$ et en spécialisant deux de ces 0-points à H, on revient dans le cadre de $E_2(4, 5)$ (b) (2).

Pour les cas $n = 3$; $d = 6, \ldots, 10$; on procède toujours de la même façon sauf dans le cas $d = 8$, $\gamma = 1$, $\mu_1 = 18$ où on ne spécialise pas la conique à H, mais seulement deux des $(1, 3)$-points à support dans la conique. C'est par un calcul direct qu'on vérifie qu'on tombe dans le cadre de $E_2(3, d)$ (c); $d = 5, \ldots, 9$.

Remarque. Les énoncés $E_2(3, d)$; $d = 5, \ldots, 9$; seront établis en tant que cas initiaux, donc leurs dégues ne figurent pas dans la formulation de $E_3(3, d)$; $d = 4, \ldots, 8$.

(1.1.3) Proposition. *Pour $n \geqslant 4$, $d \geqslant 4$ et pour $n = 3$, $d \geqslant 10$ on a*:

$$E_2(n - 1, d) + E_3(n, d - 1) \Rightarrow E_2(n, d).$$

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqslant n$.

Supposons d'abord $(n, d) \neq (4, 5)$.

On spécialise à H, les δ coniques plus deux des 0-points sur les δ' coniques. Soient δ, ε les deux entiers vérifiant

$$\varepsilon + n\lambda = \binom{n + d - 1}{d} - (\mu_1 + \mu_2) - \gamma(d + 2) - \delta(dn + 1) - 2\delta'$$

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant n - 1$$

et définissons ε_0, η_0 comme dans la démonstration de la proposition précédente.

Alors, sauf dans le cas où

$$n = 3; \quad \mu_1 = 1; \quad \mu_2 = 2; \quad \varepsilon = 1$$

on spécialise $\lambda - n_0$ des μ_3 $(1, n)$-points à H et on expulse ε_0 des $\mu_1 \geqslant n - 1$ 0-points par ε_0 des $\mu_3 - \lambda + \eta_0$ $(1, n)$-points. Dans le cas exceptionnel, on spécialise λ des μ_3 $(1, n)$-points à H et on introvertit un des μ_2 $(1, 1)$-points. Dans les deux cas, on arrive à ajuster dans H.

La dîme est dans le cadre de $E_2(n-1, d)$ au moins dès qu'on a spécialisé $\min(\gamma, n-3)$ des γ coniques et $\binom{n-1}{2}$ des $\mu_1 + \mu_2 - \varepsilon_0$ 0-points (resp: dans le cas exceptionnel $\binom{n-1}{2} - 1$ des $\mu_1 + \mu_2 - 1$ 0-points plus de $(1, 1)$-point) à l'hyperplan générique de H.

La dègue est dans le cadre de $E_3(n, d-1)$ pour les valeurs

$$\mu_0 \mapsto \mu_0;\quad \mu_1 \mapsto \lambda - \eta_0 + \mu_2;\quad \mu_2 \mapsto \varepsilon_0;\quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda + \eta_0 - \varepsilon_0$$

$$\delta \mapsto \delta,\ \delta' \mapsto \delta',$$

dans le cas général, et pour les valeurs

$$\mu_0 \mapsto \mu_0;\quad \mu_1 \mapsto \lambda + \mu_2 - 1;\quad \mu_2 \mapsto 0;\quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda$$

$$\delta \to \delta,\ \delta' \to \delta'$$

dans le cas exceptionnel, et il nous reste à vérifier que

$$\lambda - \eta_0 + \mu_2 + \varepsilon_0 \geqslant \binom{n}{2}$$

(resp. $\lambda + \mu_2 - 1 \geqslant \binom{n}{2}$).

Pour cela, il suffit d'établir qu'on a:

$$\lambda > \binom{n}{2} - n.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} n\lambda &= \binom{n+d-1}{d} - (\mu_1 + \mu_2) - \gamma(d+2) - \delta(dn+1) - 2\delta' - \varepsilon \\ &\geqslant \binom{n+d-1}{d} - \left(\frac{1}{n}\binom{n+d}{d+1} + \frac{\gamma}{n} - \gamma(d+2) - 2\delta \right. \\ &\qquad \left. - \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{n}\right) - \gamma(d+2) - \delta(dn+1) - 2\delta' - (n-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{(d+1)!}(n+d-1)\ldots(n+1)(n-1) - \gamma/n + \delta - 2\delta' - \delta dn$$

$$-\frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} - 1 \geqslant \frac{d}{(d+1)!}(n+d-1)\ldots(n+1)(n-1)$$

$$-\frac{n-2}{n}dn - \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} - 1$$

et on démontre par récurrence sur le couple (n, d) que ce dernier terme majore strictement $n\binom{n}{2} - n$ pour $d \geqslant 5$, $n \geqslant 5$; $d \geqslant 6$, $n \geqslant 4$; $d \geqslant 10$, $n \geqslant 3$.

Finalement, pour $(n, d) = (4, 5)$, on procède de la même façon et on calcule directement les valeurs de λ et ε. On tombe dans le cadre de $E_3(4, 4)$ sauf dans le cas où $\delta = 1$, $\delta' = 1$, $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 0$ et on trouve $\lambda = 3$, $\varepsilon_0 = 3$, $\eta_0 = 2$. On a donc $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$ dans le résiduel, mais il suffit de vérifier qu'on a $\mu_0 > 2$ pour enfin spécialiser deux de ces μ_0 0-points à H et revenir dans le cadre de $E_3(4, 4)$ (b) (3).

(1.1.4) PROPOSITION. *Pour* $n \geqslant 3$, $d \geqslant 4$ *on a*

$$E_3(n-1, d) + E_4(n, d-1) \Rightarrow E_3(n, d).$$

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqslant n$. On spécialise les δ' coniques à H. Soient λ, ε les deux entiers vérifiant

$$\varepsilon + n\lambda = \binom{n+d-1}{d} - (\mu_1 + \mu_2) - (\delta + \delta')(d+1);$$

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant n-1$$

et définissons ε_0 et η_0 comme dans les deux propositions précédentes. Alors, sauf dans le cas où,

$$n = 3, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad \varepsilon = 1$$

on spécialise $\lambda - \eta_0$ des μ_3 $(1, n)$-points à H et on expulse ε_0 des $\mu_1 \geqslant n-1$ 0-points par ε_0 des $\mu_3 - \lambda + \eta_0$ $(1, n)$-points. Dans le cas exceptionnel, on spécialise λ des μ_3 $(1, n)$-points à H et on introduit un des μ_2 $(1, 1)$-points. Dans les deux cas, on a ajusté dans H.

La dîme est dans le cadre de $E_3(n-1, d)$, au moins, pour $n \geqslant 4$, lorsqu'on spécialise min $(1, \delta + \delta')$ des coniques à l'hyperplan générique de H, plus $\binom{n-1}{2}$ des $\mu_1 + \mu_2 - \varepsilon_0$ 0-points (resp. dans le cas exceptionnel, $\binom{n-1}{2} - 1$ des $\mu_1 + \mu_2 - 1$ 0-points plus le (1, 1)-point). Ici, les cas

$$n = 4, \quad d = 4, \quad \delta = 1, \quad \delta' = 1, \quad \mu_1 = 3, \quad \mu_2 = 1$$

$$n = 3, \quad d = 4, \quad \delta = 1, \quad \delta' = 1, \quad \pi_1 = 2, \quad \mu_2 = 0$$

devront être vérifiés directement par le calcul de λ et ε.

La dègue est dans le cadre de de $E_3(n-1, d)$ pour les valeurs

$$\mu_0 \mapsto \mu_0; \quad \mu_1 \mapsto \lambda - \eta_0 + \mu_2; \quad \mu_2 \mapsto \varepsilon_0; \quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda + \eta_0 - \varepsilon_0$$

(resp.

$$\mu_0 \mapsto \mu_0; \quad \mu_1 \mapsto \lambda + \mu_2 - 1; \quad \mu_2 \mapsto 0; \quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda)$$

où il nous reste à vérifier que

$$\varepsilon_0 + \lambda - \eta_0 + \mu_2 \geqslant \binom{n}{2} - \beta$$

(resp. $\lambda + \mu_2 - 1 \geqslant \binom{n}{2} - \beta$).

Pour $d = 4, n = 3$ ou 4, cela se vérifie par un calcul direct de λ et ε. Dans tout autre cas, on a

$$n\lambda = \binom{n+d-1}{d} - (\mu_1 + \mu_2) - (\delta + \delta')(d+1) - \varepsilon$$

qui majore

$$\binom{n+d-1}{d} - \frac{1}{n}\binom{n+d}{d+1} + \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} - (n-1)$$

pour $\delta = \delta' = 0$ et on démontre par récurrence que ce dernier terme majore strictement $n\binom{n}{2} - n$. Dans le cas où $\delta + \delta' > 0$, on a:

$$n \cdot \lambda \geqslant \binom{n+d-1}{d} - \frac{1}{n}\binom{n+d}{d+1} - \delta(d+1) - \delta/n - 2\delta'/n$$
$$- \frac{n-1}{2} - \frac{(d+3)(n-2)}{n} - \frac{n-1}{n} - (n-1)$$

$$- (\delta + \delta')(d - 1) - (n - 1)$$

$$= \frac{d}{(d+1)!}(n + d - 1)\ldots(n + 1)(n - 1) + \delta/n + 2\delta'/n$$

$$+ \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{n} + \frac{(d+3)(n+2)}{n} - \delta'(d + 1) - 2(n - 1)$$

$$\geqslant \frac{d}{(d+1)!}(n + d - 1)\ldots(n + 1)(n - 1) + \frac{n+2}{n} + \frac{n-1}{2}$$

$$+ \frac{(d+3)(n+2)}{n} - (d + 1) - 2(n - 1)$$

et on démontre par récurrence sur le couple (n, d) que ce dernier terme majore strictement $n\binom{n}{2} - n$ pour $d \geqslant 4$, $n \geqslant 5$; $d \geqslant 5$, $n = 3$ ou 4.

(1.1.5) Proposition. *Pour* $n \geqslant 3$, $d \geqslant 4$ *on a*

$$E_4(n - 1, d) + E_4(n, d - 1) \Rightarrow E_4(n, d).$$

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqslant n$.

Soient λ, ε les deux entiers vérifiant $\varepsilon + n\lambda = \binom{n+d-1}{d} - (\mu_1 + \mu_2)$ et définissons ε_0 et η_0 comme dans les propositions précédentes.

On ajuste dans H per expulsion sauf dans le cas

$$n = 3, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad \varepsilon = 1,$$

où on ajuste par l'introversion d'un des μ_2 (1, 1)-points. La dîme est dans le cadre de $E_4(n - 1, d)$ au moins après la spécialisation de $\binom{n-1}{2}$ des $\mu_1 + \mu_2 - \varepsilon_0$ 0-points à l'hyperplan générique de H (ou $\binom{n-1}{2} - 1$ des $\mu_1 + \mu_2 - 1$ 0-points plus le (1, 1)-point, dans le cas exceptionnel).

Pour la dègue, on est dans le cadre de $E_4(n, d - 1)$ pour les valeurs

$$\mu_0 \mapsto \mu_0; \quad \mu_1 \mapsto \lambda - \eta_0 + \mu_2; \quad \mu_2 \mapsto \varepsilon_0; \quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda + \eta_0 - \varepsilon_0$$

(respectivement, dans le cas exceptionnel

$$\mu_0 \mapsto \mu_0; \quad \mu_1 \mapsto \lambda + \mu_2 - 1; \quad \mu_2 \mapsto 0; \quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda)$$

et il nous faut vérifier que

$$\lambda - \eta_0 + \mu_2 + \varepsilon_0 \geqslant \binom{n}{2} - \beta$$

(respectivement; $\lambda + \mu_2 - 1 \geqslant \binom{n}{2}$). Or, on a

$$n\lambda = \binom{n+d-1}{d} - (\mu_1 + \mu_2) - \varepsilon$$

$$\geqslant \binom{n+d-1}{d} - \frac{1}{n}\binom{n+d-1}{d+1} + \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} - 2(n-1)$$

$$= \frac{d}{(d+1)!}(n+d-1)\ldots(n+1)(n-1)$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{2n} - 2(n-1)$$

et on démontre par récurrence sur le couple (n, d) que ce dernier terme majore $n\binom{n}{2} - \beta n$ pour $n \geqslant 3$, $d \geqslant 4$.

(1.2) Un énoncé en degré $d = 3$

(1.2.1) Pour toute considération de configurations rangées de niveau $d = 3$, qui comporte plus de deux $(1, n)$-points, on est obligé de se rendre compte de certains amorçages canoniques et inévitables. En effet, pour $n \geqslant 2$, deux $(1, n)$-points dans $X \simeq \mathbb{P}^n$ déterminent une unique droite où s'annule toute forme cubique s'annulant sur les deux $(1, n)$-points. Par conséquent, en appliquant la méthode d'Horace, ces droites fournissent, au point de leur intersection avec le diviseur qu'on aurait choisi d'exploiter, des conditions d'annulation sur une réunion de 0-points de ce même diviseur. En ajustant dans le diviseur il faut compter ces conditions pour ne pas manquer de conditions en degré deux où en général, il n'y a pas de configuration rangée comportant plus de deux $(1, n)$-points (voir (4.1)). Cela nous oblige à considérer les configurations de 0-points déterminées dans un hyperplan H de X, par une réunion de m $(1, n)$-points génériques de X.

Supposons donnés m $(1, n)$-points génériques de X avec $m \leqslant n + 1$. Ils déterminent canoniquement $\binom{m}{2}$ droites, dont une incidente à chaque couple non-ordonné de $(1, n)$-points. Ces droites fournissent $\binom{m}{2}$ 0-points d'intersection dans tout hyperplan H en position générale. En plus, ces $\binom{m}{2}$ 0-points de H déterminent un unique sous-espace linéaire L de H de dimension $m - 2$, à savoir le plus petit espace linéaire de H contenant des $\binom{m}{2}$ 0-points. Or, dans L, les $\binom{m}{2}$ 0-points sont bien déterminés comme les points d'intersection de tout sous ensemble de $(m - 1)$ hyperplans pris dans l'ensemble de m hyperplans determiné par les m $(1, n)$-points.

(1.2.2) DEFINITION. Soit $L \simeq \mathbb{P}^{m-2}$; $m \geqslant 1$; alors on appelle m complexe de L, la réunion des $\binom{m}{2}$ points d'intersection de m hyperplans de L. Si les hyperplans sont génériques, on obtient le m-complexe générique.

EXEMPLES.
Un 1-complexe est l'espace vide
Un 2-complexe est le point de $\mathbb{P}^0$
Un 3-complexe est la réunion de trois points dans $\mathbb{P}^1$
Un 4-complexe est la réunion des six points d'intersection de quatre droites dans le plan $\mathbb{P}^2$.

On peut définir d'une façon évidente, la notion d'une m'-facette (ou d'un sous m'-complexe) d'un m-complexe pour tout $m' \leqslant m$.

(1.1.2) PROPOSITION. *Soient n, m deux entiers vérifiant $n \geqslant 0$ et $n \geqslant m - 2 \geqslant -1$. Alors toute forme quadratique sur $X \simeq \mathbb{P}^n$ qui s'annule sur un m-complexe de X, s'annule également sur le sous-espace linéaire L de X de dimension $m - 2$ canoniquement déterminé par le m-complexe.*

Démonstration. La proposition est triviale pour $m = 1$ ou 2. Pour $m \geqslant 2$, on peut supposer $n = m - 2$ et procéder par récurrence sur m. On applique la méthode d'Horance en exploitant comme diviseur, l'hyperplan de X déterminé par une $(m - 1)$-facette du m-complexe. La dîme est l'hypothèse de récurrence et la dègue dit simplement que la réunion de $n + 1 = m - 1$ 0-points non contenus dans un hyperplan est rangée de niveau $d = 1$.

(1.2.3) Signalons que nous ne sommes pas en mesure de donner à l'heure actuelle, un énoncé traitant tous les cas en degré $d = 3$, faut de méthode pour traiter les exceptions en dimension $n \geqslant 6$. En fait, la seule exception résolue jusqu'à la est celle de sept points $(1, 4)$-gros en $\mathbb{P}^4$ (voir (5.2)). On peut même dire que l'énoncé $E_4(n, 3)$ est à peu près, le meilleur résultat valable en toute dimension que nous soyons en mesure de formuler. Pour démontrer cet énoncé, nous sommes obligés de la reformuler en tenant compte de la discussion ci-dessous.

(1.2.4) DEFINITION. Nous désignons par $E_4'(n, 3)$ l'énoncé suivant.

Soit $X \simeq \mathbb{P}^n$; $n \geqslant 2$; et soit (H, L) le couple générique d'un hyperplan H de X et d'un sous-espace linéaire L de X de dimension $m - 2$; $m \leqslant (n + 2)/2$. Soient $\mu_0, \ldots, \mu_3$ des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $\mu_2 \leqslant n - 1$

(ii) $\binom{n}{2} - 1 \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant y_{4,n}^3 + (n - 1)$

où $y_{4,n}^3$ est le plus petit entier non-négatif tel que

$$n \cdot y_{4,n}^3 \geqslant \binom{n+3}{4} - \binom{n}{2}$$

(iii) $\mu_0 + \mu_1 + \binom{m}{2} + 2\mu_2 + (n + 1)\mu_3 = \binom{n+3}{3}$, alors la réunion de:

- μ_0 0-points plus μ_3 $(1, n)$-points génériques de X,
- μ_1 0-points génériques de H plus μ_2 $(1, 1)$-points génériques à support dans H.
- Le m-complexe génrique de L

est rangée de niveau $d = 3$.

En appliquant la méthode d'Horace à l'énoncé $E_4'(n, 3)$, la dègue est en général un énoncé pour une configuration non rangée (voir (4) ci-dessus) que nous décomposons en deux énoncés, l'un en dimension inférieure et l'autre de niveau $d = 1$. Voici l'énoncé en dimension inférieure.

(1.2.5) DEFINITION. Nous désignons par $E_4(n, 2)$; $n \geqslant 1$; l'énoncé suivant.

Soit $X \simeq \mathbb{P}^n$ et soit (H, L) le couple générique d'un sous-espace linéaire L de X de dimension $m - 2 \leqslant n$. Soient μ_0, μ_1, μ_2 des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $\leqslant (n + 1)/2$

(ii) $\mu_0 + \binom{m}{2} + 2\mu_1 + (n + 1)\mu_2 = \binom{n+2}{2} + \binom{\mu_3}{2}$

alors pour la réunion Y de

- μ_0 0-points, plus μ_1 $(1, 1)$-points, plus μ_2 $(1, n)$-points génériques de X
- le sous-espace linéaire L,

on a $H^0(X, I_y(2)) = 0$, où I_y est le faisceau d'idéaux de Y dans X.

(1.2.6) PROPOSITION. *Pour $n \geqslant 3$ on a*

$$E_4'(n - 1, 3) + E_4(n - 1, 2) \Rightarrow E_4'(n, 3)$$

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqslant n$, puis en spécialisant certains des μ_0 0-points à H et en expulsant certains des μ_1 0-points on peut supposer que si $\mu_0 \neq 0$ alors $\mu_1 + \mu_2$ prend sa valeur maximum.

Case (1): $\mu_1 \geqslant n - 1$ et pour $n = 3$ ou 4, $\mu_0 = 0$.

On considère la fonction suivante:

$$\begin{aligned}
C &= C(M, m, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \\
&= n(\mu_3 - M) + (\mu_1 + \mu_2) + \binom{M}{2} \\
&= \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}\left(\mu_0 + \mu_1 + 2\mu_2 + \binom{m}{2}\right) \\
&\quad + (\mu_1 + \mu_2) - nM + \binom{M}{2} \\
&= \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}(\mu_0 + \mu_2) + \frac{1}{n+1}(\mu_1 + \mu_2) \\
&\quad - \frac{n}{n+1}\binom{m}{2} - nM + \binom{M}{2}
\end{aligned}$$

qui donne le nombre des condition dans H (y compris les amorçages obligatoires) après y avoir spécialisé $(3 - M)$ des μ_3 $(1, n)$-points. On cherche un $M = m_0$ vérifiant les trois conditions suivantes

(a) $C(M = m_0) = \binom{n+2}{3} + \varepsilon;\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant n - 1$

(b) $\mu_3 - m_0 \geqslant \varepsilon$

(c) $1 \leqslant m_0 \leqslant (n + 1)/2$.

Les conditions (a) et (b) garantissent qu'on peut ajuster dans H en y spécialisant $(\mu_3 - m_0)$ des μ_3 $(1, n)$-points, dont ε servent á l'expulsion de ε des μ_1 0-points. La condition (c) nous assure que la trace reste dans le cadre de $E_4'(n - 1, 3)$ et que le résiduel se réduit facilement à $E_4(n - 1, 2)$.

Montrons d'abord que la conjonction de (a) et (c) implique (b). En effet, de (a) on a:

$$\begin{aligned}
n(\mu_3 - m_0) &= \binom{n+2}{3} - (\mu_1 + \mu_2) - \binom{m_0}{2} + \varepsilon \\
&\geqslant \binom{n+2}{3} - \frac{1}{n}\binom{n+3}{4} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{n} - \binom{m_0}{2} + \varepsilon \\
&= \binom{n+2}{3} - \frac{1}{n}\binom{n+3}{4} - \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} - \binom{m_0}{2} + \varepsilon
\end{aligned}$$

et comme $m_0 \leqslant (n+1)/2$, on vérifie que ce dernier terme majore strictement $n(n-2)$ pour $n \geqslant 4$. Dans le cas $n = 3$, ce dernier terme majore strictement $n(\varepsilon - 1)$ pour $\varepsilon = 0$ ou 1. Dans le cas $\varepsilon = 2$, on montre directement que pour $\mu_1 + \mu_2 < 6$ (sa valeur maximum) on a également $n(\mu_3 - m_0) > 3$. Regardons donc le cas $\mu_1 + \mu_2 = 6$. Comme $\mu_0 = 0$, on trouve un seul cas

$$\mu_1 = 4, \quad \mu_2 = 2, \quad m = 0, \quad \mu_3 = 3,$$

et en prenant $m_0 = 1$, on trouve $\mu_2 - m_0 = 2$, $\mu_3 - m_0 = 2$.

Pour voir qu'il existe un m_0 vérifiant (a) et (c) on considère les valeurs de $C(M = 1)$ et de $C(M = \bar{M})$ où $\bar{M}$ est la partie entière de $(n+1)/2$. L'existence de m_0 est assurée dès qu'on aura établi les deux inégalités suivantes:

(i) $C(M = 1) \geqslant \binom{n+2}{3}$

(ii) $C(M = \bar{M}) \leqslant \binom{n+2}{3} + (n-1)$.

Or, dans le cas $M = 1$, on a

$$C(M = 1) = \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}(\mu_0 + \mu_2) + \frac{1}{n+1}(\mu_1 + \mu_2) - \frac{n}{n+1}\binom{m}{2} - n$$

et, comme pour $n \geqslant 5$, on a les inégalités

$$\mu_0 + \mu_2 \leqslant 2n - 1$$

$$\mu_1 + \mu_2 \geqslant \binom{n}{2} - 1$$

on conclut que pour $n \geqslant 5$ on a:

$$C(M = 1) \geqslant \binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}(2n-1) + \frac{1}{n+1}\binom{n}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{n^2(n+2)}{8(n+1)} - n$$

qui majore $\binom{n+2}{3}$ pour $n \geqslant 5$. Dans les cas $n = 3$ ou 4, on a les inégalités suivantes

$$\mu_0 + \mu_2 \leqslant n - 1$$

$$\mu_1 + \mu_2 \geqslant \binom{n}{2} - 1$$

d'où

$$C(M = 1) \geqslant \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n(n-1)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\binom{n}{2} - \frac{1}{n+1} - \binom{m}{2}\frac{n}{n+1} + n$$

où m est la partie entière de $(n + 2)/2$. On vérifie directement que ce dernier terme majore $\binom{n+2}{2}$ pour $n = 3$ et 4.

Pour le cas $M = \bar{M}$, on a

$$\begin{aligned} C(M = \bar{M}) &= \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}(\mu_0 + \mu_2) + \frac{1}{n+1}(\mu_1 + \mu_2) \\ &\quad - \frac{n}{n+1}\binom{m}{2} - n\bar{M} + \binom{\bar{M}}{2} \\ &\leqslant \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - 0 + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n}\binom{n+3}{4}\right. \\ &\quad \left. + \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{n}\right) - n\bar{M} + \binom{M}{2} \\ &= \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{n(n+1)}\binom{n+3}{4} \\ &\quad + \frac{(n-1)}{2(n+1)} + \frac{(n-1)}{n(n+1)} - n\bar{M} + \binom{M}{2} \end{aligned}$$

qui minore strictement $\binom{n+2}{3} + n$ pour $n \geqslant 3$.

Cas (2): $n = 3$ ou 4 et $\mu_0 \neq 0$ (donc $\mu_1 + \mu_2$ et μ_2 prennent leur valeur maximum).

Pour $n = 3$, cela implique $\mu_1 + \mu_2 = 6$ et $\mu_1 + 2\mu_2 = 8$ d'où on conclut $\mu_0 = 3, m = 2, \mu_3 = 2$. On spécialise un des μ_3 (1, 3)-points plus un des μ_0 0-points à H.

Pour $n = 4$, on a

$$\mu_1 + \mu_2 = 10 \quad \text{et} \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 13$$

d'où $\mu_0 = 2, m = 0, \mu_3 = 4$ ou $\mu_0 = 4, m = 3, \mu_3 = 3$. On spécialise deux des μ_3 (1, 3)-points à H et on introvertit un des μ_2 (1, 1)-points.

Cas (3): $n = 3$ ou 4 et $\mu_1 < n - 1$.

Les hypothèses impliquent que $\mu_1 + \mu_2$ ne prend pas sa valeur maximum et par conséquent que $\mu_0 = 0$. On vérifie qu'il n'y a aucun cas à regarder pour $n = 4$ et seulement les cas $n = 3$ et

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 2, \quad \mu_3 = 4.$$

Pour ce dernier cas, on spécialise deux des μ_3 (1, 3)-points à H et on introvertit un des μ_2 (1, 1)-points.

Dans les trois cas, la dime est dans le cadre $E_4(n - 1, 3)$. Pour les dègues, on remplace le m-complexe par son sous-espace linéaire canonique (voir (1.2.2)), puis on spécialise tous les $(1, n)$-points sauf un (il y en a au moins un dans tous les cas) à H aussi bien que les μ_0 0-points et le sous-espace linéaire. Finalement, on introvertit les μ_2, (1, 1)-points. La dîme obtenue est dans le cadre de $E_4(n - 1, 2)$ et la dègue résulte du fait qu'un $(1, n)$-point est de rang maximum.

(1.3) Les cas initiaux

(1.3.1) PROPOSITION. *On a $E_4(n, 2)$ pour $n \geqslant 1$.*

Démonstration. Par la spécialisation des μ_0 0-points en (1, 1)-points, on peut supposer $\mu_0 \leqslant 1$.

On remarque d'abord que la proposition est triviale pour $n = 1$. Supposons donc $n \geqslant 2$.

Pour $\mu_2 \geqslant 1$, on spécialise tous les μ_2 $(1, n)$-points sauf un, à l'hyperplan générique H de X en introvertissant les μ_1 (1, 1)-points. La dîme est dans le cadre de $E_4(n - 1, 2)$ et la dègue résulte du fait qu'un $(1, n)$-point est de rang maximum. On peut donc supposer $\mu_2 = 0$.

Pour $\mu_0 = 1$, on a $\mu_0 + 2\mu_1 \geqslant n + 1$ et par conséquent, il existe un entier μ; $1 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$ tel que

$$\mu_0 + 2\mu = n + 1 \quad \text{ou} \quad n + 2.$$

Dans le premier cas, on spécialise tout à l'hyperplan générique H de X sauf le 0-point et μ des (1, 1)-points. Dans le second cas, on y spécialise tout sauf μ des (1, 1)-points. Le dîme est dans le cadre de $E_4(n - 1, 2)$ et la dègue est un énoncé trivial en degré un.

Pour $\mu_0 = 0$, si $\mu_1 = 0$ on a $L = X$ et la proposition est triviale. On peut donc supposer $2\mu_1 \geqslant n + 1$ et par consequent il existe un entier μ; $1 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$: tel que

$$2\mu = n + 1 \quad \text{ou} \quad n + 2$$

Dans le premier cas, on spécialise tout à l'hyperplan générique H de X sauf μ des μ_1 (1, 1)-points. Dans le second cas, on y spécialise tout sauf $(\mu - 1)$ des (1, 1)-points et un des $\mu_1 - \mu + 1$ (1, 1)-points qu'on spécialise à un (1, 1)-point générique à support dans H; c'est-à-dire extraverti. Les dîmes et dègues sont comme dans le cas précedent.

(1.3.2) Proposition. *On a $E_4(2, d)$ pour $d \geqslant 2$.*

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqslant 2$ de sorte que $\mu_3 \geqslant 1$ pour $d \geqslant 3$. Le cas $d = 2$ résulte de la proposition précédente, donc supposons $d \geqslant 3$.

Soient λ et ε les deux entiers vérifiant:

$$\varepsilon + 2\lambda = d + 1 - (\mu_1 + \mu_2); \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1;$$

alors pour $\mu_1 \geqslant 1$, on ajuste dans la droite H par la spécialisation de λ des μ_3 (1, 2)-points et l'expulsion de ε des μ_1 0-points par ε des $\mu_3 - \lambda$ (1, 2)-points.

Pour $\mu_1 = 0$, on y ajuste par la spécialisation de λ des (1, 2)-points et l'introversion de ε des $\mu_2 = 1$ (1, 1)-points. Commme $\lambda \geqslant 1$ pour $n > 3$, la dègue est bien dans le cadre de $E_4(2, d - 1)$.

(1.3.3) Proposition. *On a $E_3(2, d)$ pour $d \geqslant 4$.*

Démonstration.

$$E_3(2, d)(\text{a}); \quad v = d + 1, \; v' = d + 1, \; \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

On dégénère les deux coniques en réunion de quatre droites ayant $\delta(d + 1)$, δ', δ' et zéro 0-points respectivement. En exploitant les deux premières droites, on se ramène au cas soit de $E_4(2, d)$; soit de $E_4(2, d-1)$, soit de $E_4(2, d-2)$ suivant que soit $\delta = \delta' = 0$, soit $\delta = 1$, $\delta' = 0$, soit $\delta = 1$, $\delta' = 1$.

$$E_3(2, d)(\mathrm{b}); \quad d \geqslant 5,\ v = d + 2; \quad v' = d + 4,\ 1 \leqslant \mu_1 + \mu_2 \leqslant y$$

où y est le plus petit entier tel que $2y \geqslant d + 3 - 4\delta$.

$\delta = \delta' = 0$; On est dans le cadre de $E_4(2, d)$

$\delta = 1, \delta' = 0$; On décompose la conique en réunion de deux droites ayant respectivement $d + 1$ et 1 0-points. On exploite la première droite comme diviseur pour se ramener à une dègue dans le cadre de $E_4(2, d-1)$ où on note qu'on a

$$\mu_1 + \mu_2 \leqslant \frac{d + 3 - 4}{2} < d - 1$$

dès le départ.

$\delta = 1, \delta' = 1$ ou $\delta = 0, \delta' = 1$; on décompose les coniques en réunion de droites ayant respectivement $\delta'(d + 1)$, δd, δ' et 2δ 0-points. On exploite les deux premières droites pour se ramener à une dègue dans le cadre de $E_4(2, d-2)$ dans le premier cas et de $E_4(2, d-1)$ dans le second, où on note que

$$\mu_1 + \mu_2 \leqslant \frac{d - 1}{2} \leqslant d - 2 \quad \text{pour} \quad d \geqslant 5.$$

(1.3.4) PROPOSITION *On a $E_2(2, d)$ pour $d \geqslant 7$.*

Démonstration. Pour $\delta = \delta' = 0$, on est dans le cadre de $E_4(2, d)$. Pour $\delta = 0$, $\delta' = 1$ on est dans le cadre de $E_3(2, d)(\mathrm{b})$. Pour $\delta = 1$, $\delta' = 1$ on exploite les δ coniques pour se ramener à dègue dans le cadre de $E_3(2, d-2)(\mathrm{b})$.

(1.3.5) PROPOSITION. *On a $E_1(2, d)$ pour $d \geqslant 6$.*

Démonstration. Pour $d = 6$ ou 7, le cas $\gamma = 0$ est dans le cadre de $E_4(2, d)$ et lorsque $\mu = 1$, on exploite la conique qu'ensuite, on dégénère en réunion de droites.

Pour $d \geqslant 8$, la proposition résulte de la conjonction de (1.1.2) et de (1.3.4).

(1.3.6) PROPOSITION. *On a $E_0(2, d)$ pour $d \geqslant 7$.*

Démonstration. Résulte de (1.1.1) et de (1.3.5).

(1.3.7) PROPOSITION. *On a $E_2(3, d)$ pour $d = 5, \ldots, 9$.*

Démonstration. Lorsque $\gamma = \delta = \delta' = 0$, on est dans le cadre de $E_4(3, d)$.

$d = 5$.

$\gamma = 1$, $\delta = 0$; $\delta' = 0$.

On a $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 0$ donc $\mu_0 = 2$, $\mu_3 = 4$.

Soit H' le plan des δ-coniques et spécialisons-y deux des 0-points sur chacune des $(\gamma + \delta')$ coniques, plus un des μ_0 0-points. Pour la dîme, on exploite les δ coniques, ce qui mène à une dègue dans le cadre de $E_4(2, 3)$. Pour la dégue, on identifie les hyperplans H et H' et on y spécialise deux des cinq 0-points sur les δ' coniques, plus un des $\delta_3(1, 3)$-points. La dîme est dans le cadre de $E_4(2, 4)$ et la dègue est dans le cadre de $E_4(3, 3)$.

$\gamma = 1$, $\delta = 1$, $\delta' = 0$.

On a soit $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 0$, soit $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$.

On exploite le plan H' des δ-coniques en y spécialisant deux des 0-points sur les γ coniques plus un des μ_3 (1, 3)-points. Pour la dîme, on exploite la conique et pour la dègue, on spécialise les μ_1 0-points à $H \cap H'$ et on spécialise dans H' deux (resp. trois) des $(\mu_3 - 1)$ (1, 3)-points. La dîme est dans le cadre de $E_4(2, 4)$ et, comme les coniques et H' ne supportent plus de contraintes, la dègue est dans le cadre de $E_4(3, 3)$.

$d = 6$

$\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\delta' = 0$.

On a soit $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 0$, $\mu_0 = 1$, $\mu_3 = 11$, soit $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$, $\mu_0 = 2$, $\mu_3 = 10$. Dans les deux cas, on spécialise cinq des μ_3 (1, 3)-points à H puis, dans le premier cas, on expulse un des μ_1 0-points par un des $(\mu_3 - 5)$ (1, 3)-points et dans le second cas, on introvertit un des μ_2 (1, 1)-points. En décomposant la conique en réunion de deux droites ayant six 0-points sur l'une et deux sur l'autre, la dîme est dans le cadre de $E_4(2, 6)$ tandis que la dègue est dans le cadre de $E_4(3, 5)$.

$\gamma = 1$, $\delta = 1$, $\delta' = 1$.

On a $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 0$, $\mu_0 = 0$, $\mu_3 = 10$.

On exploite le plan H' des δ coniques en y spécialisant deux des 0-points sur chacune des $(\delta' + \gamma)$ coniques, plus deux des μ_1 0-points, plus un des μ_3 (1, 3)-points. Pour la dîme, on exploite les δ coniques qu'ensuite on dégénère en réunion de deux droites. Pour la dègue, on identifie les plans H et H' et on dégénère les δ' coniques en réunion de deux droites ayant quatre 0-points sur l'une et deux sur l'autre et on spécialise la première dans H. Finalement, on spécialise un des $\mu_3 - 1$ (1, 3)-points dans H. Pour la dîme obtenue, on dégénère les coniques en réunion de droites et pour la dègue, on spécialise tous les 0-points à H, ce qui fait trois au total, de sorte qu'on est dans le cadre de $E_4(3, 4)$.

$\gamma = 1, \quad \delta = 1, \quad \delta' = 0.$

On a soit $\mu_1 = 0, \mu_2 = 2, \mu_0 = 3, \mu_3 = 11$, soit $\mu_1 = 3, \mu_2 = 0, \mu_0 = 0, \mu_3 = 12$.

On exploite l'hyperplan H' des δ coniques. Dans le premier cas, on spécialise dans H' deux des 0-points sur les γ-coniques, plus un des μ_0 0-points, plus deux des $\mu_3(1, 3)$-points.

Pour la dîme, on exploite la conique qu'ensuite on décompose en réunion de droites. Pour la dègue, on identifie les deux plans H et H' et dans les deux cas, on y spécialise un des $(\mu_3 - 2)(1, 3)$-points et on expulse un des 0-points dans H par un deuxième. La dîme obtenue est dans le cadre de $E_3(2, 5)$ et pour la dègue, on ajuste dans H par l'introversion des (1, 1)-points est la spécialisation de quatre des $\mu_3 - 3$ (1, 3)-points. On obtient une dîme dans le cadre de $E_4(2, 5)$ et une dègue dans le cadre de $E_4(3, 4)$.

$d = 7$

Dans le cas $\delta = 1, \gamma = 0, \mu_1 = 7, \mu_2 = 0$, on spécialise les δ coniques dans H et on y ajuste par l'expulsion. La dîme est dans le cadre de $E_3(3, 6)$.

Dans tout autre cas, on exploite le plan H' des δ coniques en y spécialisant les δ' coniques, plus deux des 0-points sur les γ coniques, plus quatre ou un des μ_3 (1, 3)-points selon que $\delta' = 0$ ou $\delta' = 1$. La dîme est dans le cadre de $E_2(2, 7)$. En identifiant les plans H et H' et en y adjustant par l'expulsion, la dègue se réduit aux deux énoncés $E_3(2, 6)$ et $E_4(3, 5)$.

$d = 8$ ou 9

On procède comme pour le dernier cas de $d = 7$, mais dans la première étape, on ajuste dans H' en y spécialisant zéro, un ou deux des μ_1 0-points.

2. Le cas de $d = 6$

(2.0) Les énoncé $E_2(n, 4)$, $E_3(n, 3)$, $E_4(n, 2)$

(2.0.1) L'énoncé $E_2(n, 4)$; $n \geqq 3$

Soit H l'hyperplan générique de X, et soient $C_1, \ldots, C_\gamma$; $0 \leqq \gamma \leqq n - 2$; γ coniques génériques de H. Soit (C, C) le couple d'une conique C de X et d'une conique dégénérée générique de X ayant une droite Δ dans H. Soit Δ_c la droite complémentaire de Δ dans C.

Soient δ, δ', $\mu_0, \ldots, \mu_3$ des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $0 \leqq \delta, \delta' \leqq 1$ et si $\delta + \delta' > 0$ alors $\gamma = n - 2$

(ii) $\mu_2 \leqq n - 1$ pour $n \geqq 4$ et $\mu_2 \leqq 4$ pour $n = 4$

(iii) Pour $n \geqq 5$

$$\binom{n}{2} - 6\beta \leqq \mu_1 + \mu_2 \leqq y_{2,n}^4$$

où $y_{2,n}^4$ est le plus petit entier tel que

$$ny_{2,n}^4 \geqq \binom{n+4}{5} - \binom{n}{2} - 6\gamma n - 2\delta n$$

et où

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \gamma = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \gamma > 0 \end{cases}$$

Pour $n = 4$ on est dans des cas suivants

(a) $\delta = \delta' = \gamma = 0$ et $\mu_1 + \mu_2$ comme pour $n \geqq 5$

(b) $\gamma = 1$ ou 2; $0 \leqq \delta, \delta' \leqq 1$; $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \leqq 4$

(c) $\delta' = 0$

$$\gamma = 1, \quad \delta = 0, \quad \mu_1 = 6, \quad \mu_2 = 2$$

$$\gamma = 2, \quad \delta = 0, \quad \mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 0$$

$$\gamma = 2, \quad \delta = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0.$$

Pour $n = 3$, on est dans l'un des cas suivants

(a) $\gamma = 1$; $0 \leqq \delta, \delta' \leqq 1$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \leqq 2$.

(b) $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\delta' = 1$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 3$.

(iv) $\mu_0 + \mu_1 + 6(\gamma + \delta') + \delta + 2\mu_2 + (n+1)(4\delta + \mu_3) = \binom{n+4}{4}$.

Alors la réunion de

- μ_0 0-points plus μ_3 $(1, n)$-points génériques de X
- 0-points génériques de H plus μ_2 $(1, 1)$-points génériques à support dans H
- six 0-points génériques sur chacune des γ coniques
- 6 δ' 0-points sur les δ' coniques
- 2δ $(1, n)$-points plus δ 0-points à support générique dans Δ
- 2δ $(1, n)$-points à support générique dans Δ_c, est rangée de niveau d.

(*2.0.2*) *L'énoncé* $E_3(n, 3)$; $n \geqq 3$
Soit H l'hyperplan générique de X, et soit (C, C') le couple d'une conique générique C' de X et d'une conique dégénérée générique de X ayant une droite Δ dans H. Soit Δ_c la droite complémentaire de Δ dans C.

Soient $m, \delta, \delta', \mu_0, \ldots, \mu_3$ des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $0 \leqq \delta, \delta' \leqq 1$; $\mu_2 \leqq n - 1$; $m \leqq (n + 2)/2$

(ii) Pour $n \geqq 4$

$$\binom{n}{2} - 3 \leqq \mu_1 + \mu_2 \leqq y^3_{3,n} + (n + 1)$$

où $y^3_{3,n}$ est le plus petit entier tel que

$$ny^3_{3,n} \geqq \binom{n+3}{4} - 2\delta n - \delta - 2\delta' - 6\beta(n - 2) - \binom{n}{2} + 6\beta$$

et où

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta + \delta' = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \delta + \delta' > 0 \end{cases}$$

Pour $n = 3$; $\mu_1 + 2\mu_2 \leqq 4$.

(iii) $\mu_0 + \mu_1 + \binom{m}{2} + 4\delta' + 2\mu_2 + (n + 1)(2\delta + \mu_3) = \binom{n+3}{2}$.

Alors la réunion de

- μ_0 0-points plus μ_3 $(1, n)$-points génériques de X
- 0-points génériques de H plus μ_2 $(1, 1)$-points génériques à support dans H
- $4\delta'$ 0-points génériques de C'
- 2δ I-points à support générique dans Δ_c
- la m-complexe générique de X

est rangée de niveau d.

(*2.1*) *Les implications*

Rappelons d'abord que par la proposition (1.1.1) on a

$$E_0(n - 1, 6) + E_1(n, 5) \Rightarrow E_0(n, 6)$$

pour $n \geqq 3$. Passons donc à la proposition suivante.

(2.1.0) PROPOSITION. *Pour* $n \geqq 4$, *on a*

$$E_1(n-1) + E_2(n, 4) \Rightarrow E_1(n, 5).$$

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqq n$.
On spécialise à H, min $(\gamma, n-2)$ des γ coniques et deux des $(1, n)$-points sur les $(\gamma - \min(\gamma, n-2))$ coniques qui restent. Soient λ et ε les deux entiers vérifiant

$$\varepsilon + \lambda n = \binom{n+4}{5} + \min(\gamma, n-2) - \mu_1 - 6n \cdot \min(\gamma, n-2)$$

$$- 2n(\gamma - \min(\gamma, n-2)) \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq n-1$$

et définissons ε_0 et η_0 comme dans la démonstration de (1.0.1). On spécialise $\lambda - \eta_0$ des μ_3 $(1, n)$-points à H et on expulse ε_0 des μ_1 0-points par ε_0 des $\mu_3 - \lambda + \eta_0$ $(1, n)$-points. On a ainsi ajusté dans H.

La dîme est dans le cadre de $E_1(n-1, 5)$ au moins après avoir spécialisé à l'hyperplan générique de H:

(a) Pour $n \geqq 6$, $\binom{n+1}{2}$ des $\mu_1 - \varepsilon_0$ 0-points,

(b) Pour $n = 5$, $\gamma = 2$, 3 ou 4; deux des $\mu_1 - \varepsilon_0$ 0-points
$\gamma = 0$ ou 1; six des $\mu_1 - \varepsilon_0$ 0-points.

(c) Pour $n = 4$, aucun des $\mu_1 - \varepsilon_0$ 0-points pour $\gamma = 2$ ou 3
et trois des $\mu_1 - \varepsilon_0$ 0-points pour $\gamma = 0$ ou 4.

La dègue est dans le cadre de $E_2(n, 4)$ au moins après avoir fait la spécialisation suivante.

D'abord, on oublie un des 0-points dans l'intersection des $\gamma - \min(\gamma, n-2)$ coniques avec H. Puis on dégénère cette conique en réunion de deux droites dont une est la droite générique Δ de H, avec deux des $(1, n)$-points sur Δ_c (la droite complémentaire de Δ) et le 0-point, plus les deux $(1, n)$-points qui restent, sur Δ.

On a les valeurs suivantes:

$$\mu_0 \mapsto \mu_0; \quad \mu_1 \to \lambda - \eta_0; \quad \mu_2 \mapsto \varepsilon_0; \quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda + \eta_0 - \varepsilon_0$$

$$\delta' \mapsto 0; \quad \delta \mapsto \gamma - \min(\gamma, n-2); \quad \gamma \mapsto \min(\gamma, n-2)$$

et il nous reste à verifier que pour $n \geqq 5$

$$\lambda - \eta_0 + \varepsilon_0 \geqq \binom{n}{2} - 6\beta$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\lambda > \binom{n}{2} - 6\beta - 1.$$

Nous laissons au lecteur la tâche de vérifier que les trois cas qui se présentent pour $n = 4$ ont leurs dègues dans la cadre de $E_2(4, 4)$ (c).

Dans le cas $\gamma = 0$, cela résulte de la démonstration de (1.0.4). Supposons donc $\gamma \geqq 1$, donc $\beta = 1$.

Pour $n = 5$ ou 6, on a $\mu_1 = \binom{n}{2}$ et l'inégalité se vérifie directement. Il suffit en effet de la vérifier pour $\gamma = n - 1$, toute autre valeur de λ majorant celle de ce cas-là.

Pour $n \geqq 7$, on a

$$\begin{aligned} n\lambda &= \binom{n+4}{5} + \min(\gamma, n-2) - \mu_1 \\ &\quad - 6n \min(\gamma, n-2) - 2n(\gamma - \min(\gamma, n-2)) - \varepsilon \\ &\geqq \binom{n+4}{5} + (n-2) - \frac{1}{n}\binom{n+4}{6} \\ &\quad + \frac{n-2}{n} - 6n(n-2) - 2n - (n-1) \\ &= \frac{5}{6!}(n+4)\ldots(n+1)(n-1) + \frac{n-2}{n} - 6n(n-2) - 2n - 3 \end{aligned}$$

qui majore strictement $n\binom{n}{2} - 7n$ pour $n \geqq 7$.

(2.1.1) PROPOSITION. *Pour $n \geqq 5$ on a*

$$E_2(n-1, 4) + E_3(n, 3) \Rightarrow E_2(n, 4).$$

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqq n$.
On spécialise $2\delta'$ des $6\delta'$ 0-points sur C', à H. Soiet λ et ε les deux entiers vérifiant

$$\varepsilon + \lambda n = \binom{n+3}{4} - (\mu_1 + \mu_2) - 2\delta_n - \delta - 2\delta' - 6\gamma$$

$$0 \leqq \varepsilon \leqq n - 1$$

et définissons ε_0 et η_0 de la façon habituelle. Alors sauf pour les cas

$$n = 5 \text{ ou } 6 \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 > \mu_1$$

on ajuste dans H par l'expulsion. Dans les cas exceptionnels, on ajuste par l'introversion en remarquant que pour $n = 6$ il n'est pas nécessaire d'introvertir plus que quatre des μ_2 (1, 1)-points.

Pour la dègue, on est dans le cadre de $E_3(n, 3)$ pour les valeurs suivantes

$$\mu_0 \mapsto \mu_0; \quad \mu_1 \mapsto \lambda - \eta_0 - \mu_2; \quad \mu_2 \mapsto \varepsilon_0; \quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda + \eta_0 - \varepsilon_0$$

$$m \mapsto 1; \quad \delta' \mapsto \delta'; \quad \delta \mapsto \delta,$$

dans le cas general
et pour les valeurs suivantes

$$\mu_0 \mapsto \mu_0; \quad \mu_1 \mapsto \lambda + \mu_2 - \varepsilon; \quad \mu_2 \mapsto 0; \quad \mu_3 \mapsto \mu_3 - \lambda$$

$$m \mapsto 1; \quad \delta' \mapsto \delta'; \quad \delta \mapsto \delta$$

dans les cas exceptionnels
et il nous reste à vérifier

$$\lambda - \eta_0 + \mu_2 + \varepsilon_0 \geqq \binom{n}{2} - 3$$

dans le premier cas et

$$\lambda + \mu_2 - \varepsilon \geqq \binom{n}{2} - 3$$

dans le second cas. Pour cela, il suffit de remarquer qu'on a

$$n\lambda = \binom{n+3}{4} - (\mu_1 + \mu_2) - \delta - 2\delta' - 6\gamma - 2\delta n - \varepsilon$$

$$\geqq \binom{n+3}{4} - \frac{1}{n}\left(\binom{n+4}{5} - \binom{n}{2} - 6\gamma n - 2\delta n\right)$$

$$-\frac{n-1}{n} - \delta - 2\delta' - 6\gamma - 2\delta n - (n-1)$$

$$= \frac{4}{5!}(n+3)\ldots(n+1)(n-1)$$

$$-\frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} + \delta - 2\delta n - 2\delta'$$

$$\geqslant \frac{4}{5!}(n+3)\ldots(n+1)(n-1) - \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} - 2n - 1$$

qui majore strictement $n\binom{n}{2} - 4n$ pour $n \geqq 5$.

Pour la dîme, voyons qu'elle se spécialise en une configuration du type figurant dans $E_2(n-1, 4)$. En effet, soit C_0 la conique dégénérée générique de H ayant une droite dans l'hyperplan générique H' de H. Alors on spécialise en la droite générique de C_0 dans H'. Pais, comme l'inégalité ci-dessus implique en particulier qo'on a $\lambda \geqslant 2$, on peut spécialiser deux des $\lambda - \eta_0 + \varepsilon_0$ (resp. λ) $(1, n-1)$-points dans H, sur la droite de C_0 en dehors de H.

Ensuite, dans le cas général, on spécialise $\binom{n-1}{2} - 6\beta$ des $\mu_1 + \mu_2 - \varepsilon_0$ 0-points dans l'hyperplan générique de H. Dans le cas exceptionnels, on y spécialise les ε $(1, 1)$-points et $\binom{n-1}{2} - 6\beta - \varepsilon$ des $\mu_1 + \mu_2 - \varepsilon$ 0-points.

(2.1.2) Proposition. *Pour $n \geqq 4$, on a*

$$E_3(n-1, 3) + E_4(n, 2) \Rightarrow E_3(n, 3).$$

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqq n$, puis en spécialisant certains des μ_0 0-points à H on peut supposer que si $\mu_0 \neq 0$ alors $\mu_1 + \mu_2$ prend sa valeur maximum. Par suite, en expulsant certains des μ_1 0-points par des μ_0 0-points, on peut supposer en plus que si $\mu_0 \neq 0$, alors $\mu_2 = n - 1$.

$n \geqq 5$

Dans ce cas, on veut montrer qu'il est possible d'ajuster dans H par l'expulsion. Pour cela, on considère la fonction suivante

$$C = C(n, M, \delta, \delta', \mu_0, \ldots, \mu_3)$$

$$= n(\mu_3 + 2\delta - M) + (\mu_1 + \mu_2) + \binom{M}{2} + 2(\delta + 2\delta')$$

$$= \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}\mu_0 - \frac{n-1}{n+1}\mu_1 + \frac{1}{n+1}(\delta + 2\delta')$$
$$- \frac{n}{n+1}\binom{m}{2} - nM + \binom{M}{2}$$
$$= \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}(\mu_0 + \mu_2) + \frac{1}{n+1}(\mu_1 + \mu_2)$$
$$+ \frac{2}{n+1}(\delta + 2\delta') - \frac{n}{n+1}\binom{m}{2} - nM + \binom{M}{2} \qquad (2.1.2.1)$$

qui donne le nombre de conditionns dans H (y compris les amorçages obligatoires) après y avoir spécialisé les $(\delta + \delta')$ coniques plus $(\mu_3 - M)$ des μ_3 $(1, n)$-points. Ensuite, on cherche un $M = m_0$ vérifiant les trois conditions suivantes

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ C(M = m_0) = \tbinom{n+2}{3} + \varepsilon;\ 0 \leqq \varepsilon \leqq \mu_1 \\ &\text{(b)}\ \mu_3 - m_0 + 2\delta \geqq \varepsilon \qquad\qquad (2.1.2.2) \\ &\text{(c)}\ 1 \leqq m_0 \geqq \tbinom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Ici, les conditions (a) et (b) garantissent qu'on peut ajuster dans H en y spécialisant les δ' coniques puis la droite Δ_c plus $(\mu_3 - m_0)$ des μ_3 $(1, n)$-points, tout en expulsant ε des μ_1 0-points par ε des $(\mu_3 + 2\delta - m_0)$ $(1, n)$-points sur Δ_c, ce qui ne change rien dans la trace et le résiduel). La condition (c) nous assure que la trace reste dans le cadre de $E_3(n-1, 3)$ et que, comme $m_0 \geqq 1$, dans le résiduel on peut tout spécialiser dans H en introvertissant les μ_2 $(1, 1)$-points mais en gardant un des m_0 $(1, n)$-points en dehors de H. Cela fait, la dègue est une conséquence de $E_4(n-1, 2)$ et du fait qu'un $(1, n)$-point est rangé de niveau $d = 1$. Ainsi, pour $n \geqq 5$, le démonstration se réduit à la recherche d'un tel m_0.

Remarquons d'abord que la condition (b) résulte de la conjonction de (a) et (c). En effet, selon (a) on a

$$n(\mu_3 + 2\delta - m_0) \geqq \binom{n+2}{3} - (\mu_1 + \mu_2) - \binom{m}{2} - 2(\delta + 2\delta')$$
$$\geqq \binom{n+2}{3} - \frac{1}{n}\binom{n+3}{4} + \left(\delta/n + 2\left(\frac{1}{n} - 2\right)\delta'\right.$$
$$\left. + \frac{6\beta(n-1)}{n}\right) - \frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} - \binom{m_0}{2}$$

et comme le terme entre parenthèse majore zéro pour $n \geqq 5$, on conclut (en prenant $\delta = \delta' = 0$, $m_0 = (n + 1)/2$) qu'on a

$$n(\mu_3 + 2\delta - m_0) \geqq \binom{n+2}{3} - \frac{1}{n}\binom{n+3}{4}$$

$$- \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{n} - \frac{(n+1)(n-1)}{8}$$

Finalement, on démontre par récurrence sur n que ce dernier terme majore strictement $n(n - 2)$ pour $n \geqq 5$.
Maintenant, pour voir qu'un tel m_0 existe, on considère plusieurs cas.

CAS (1): $\mu_1 \geqq n - 1$ et $\mu_0 = 0$ pour $n = 5$ ou 6.
Notons que la condition $\mu_1 \geqq n - 1$ est automatique pour $n \geqq 6$.
On considère la valeur de $C(M = 1)$ et de $C(M = \bar{M})$ où $\bar{M}$ est la partie entière de $(n + 1)/2$. On veut démontrer qu'on a les inégalités suivantes:

$$C(M = 1) \geqq \binom{n+2}{3}$$

$$C(M = \bar{M}) \geqq \binom{n+2}{3} + (n - 1)$$

ce qui implique l'existence d'un $M = m_0$ vérifiant (a) et (c) de (2.1.2.2).
Dans le cas $M = 1$, on a

$$C(M = 1) = \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n}{n+1}(\mu_0 + \mu_2) + \frac{1}{n+1}(\mu_1 + \mu_2)$$

$$+ \frac{2}{n+1)}(\delta + 2\delta') - \frac{n}{n+1}\binom{m}{2} - n$$

et pour $n \geqq 7$, on a les inégalités suivantes

$$\mu_0 + \mu_2 \geqq 2n - 1$$

$$\mu_1 + \mu_2 \geqq \binom{n}{2} - 3$$

d'où on conclut que

$$C(M=1) = \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n(2n-1)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\binom{n}{2}$$
$$- \frac{3}{n+1} - \frac{n}{n+1}\binom{\bar{m}}{2} - n$$

où $\bar{m}$ est la partie entière de $(n+2)/2$. On démontre par récurrence sur n que cette dernière expression majore strictement $\binom{n+2}{3} - 1$ pour $n \geqq 7$.

Pour $n = 5$ ou 6, on a par hypothèse $\mu_0 = 0$ d'où

$$C(M=1) \geqq \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} - \frac{n(n-1)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\binom{n}{2}$$
$$- \frac{3}{n+1} - \frac{n}{n+1}\binom{\bar{m}}{2} - n$$

qui majore strictement $\binom{n+2}{3} - 1$ pour $n = 5$ ou 6.

Dans le cas $M = \bar{M}$ on a,

$$C(M=\bar{M}) \leqq \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n}\binom{n+3}{4} - 2\delta\right.$$
$$\left. - \frac{1}{n}(\delta + 2\delta') - \frac{6\beta(n-1)}{n} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{n}\right)$$
$$+ \frac{2}{n+1}(\delta + 2\delta') - n\bar{M} + \binom{\bar{M}}{2}$$
$$= \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{n(n+1}\binom{n+3}{4}$$
$$- \frac{1}{n+1}\left(2\delta - \frac{n-1}{n(n+1)}(\delta + 2\delta') - \frac{6\beta(n-1)}{n}\right)$$
$$+ \frac{n-1}{2(n+1)} + \frac{n-1}{n(n+1)} - n\bar{M} - \binom{\bar{M}}{2}$$

et, comme le terme entre parenthèses majore strictement zero pour $n \geqq 5$, on conclut que

$$C(M = \bar{M}) \leqslant \frac{n}{n+1}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{n(n+1}\binom{n+3}{4}$$

$$+ \frac{n-1}{2(n+1)} + \frac{n-1}{n(n+1)} - n\bar{M} + \binom{\bar{M}}{2}$$

On démontre par récurrence sur n que ce dernier terme minore strictement $\binom{n+2}{3} + n$ pour $n \geqq 5$, ce qui achève la démonstration du cas (1).

CAS (*2*): $n = 5$, $\mu_0 = 0$, $\mu_1 < 4$.
On a $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 4$ et, comme en tout cas, on a

$$\mu_1 + 2\mu_2 + 4\delta' + 2\delta + \binom{m}{2} = 6\lambda + 2, \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \geqq 0,$$

on conclut qu'il n'y a qu'on cas, à savoir

$$\delta = 1, \quad \delta' = 1, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 4.$$

On prend $m_0 = 1$.

CAS (*3*): $n = 5$ ou 6 et $\mu_0 \neq 0$

On sait que pour $\mu_0 \neq 0$ on a $\mu_2 = n - 1$ et que $\mu_1 + \mu_2$ prend sa valeur maximum.

$n = 6$

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0; \quad \mu_1 + \mu_2 = 24, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 29$$

$$\mu_0 = 3, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 7 \text{ ou } \mu_0 = 6, \quad m = 1, \quad \mu_3 = 7\ (m_0 = 1)$$

$$\delta = 1, \quad \delta' = 0; \quad \mu_1 + \mu_2 = 17, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 22$$

$$\mu_0 = 4, \quad m = 1, \quad \mu_3 = 6 \text{ ou } \mu_0 = 1, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 6\ (m_0 = 2)$$

$$\mu_0 = 5, \quad m = 4, \quad \mu_3 = 5\ (m_0 = 1)$$

$\delta = 1, \quad \delta' = 1; \quad \mu_1 + \mu_2 = 16, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 21$

$\mu_0 = 1, \quad m = 1, \quad \mu_3 = 6 \ (m_0 = 2)$

$\mu_0 = 5, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 5$ ou $\mu_0 = 2, \quad m = 4, \quad \mu_3 = 5 \ (m_0 = 1)$

$\delta = 0, \quad \delta' = 1; \quad \mu_1 + \mu_2 = 19, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 24$

$\mu_0 = 4, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 7$ ou $\mu_0 = 1, \quad m = 4, \quad \mu_3 = 7 \ (m_0 = 1)$

$n = 5$

$\delta = 0, \quad \delta' = 0; \quad \mu_1 + \mu_2 = 16, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 20$

$\mu_0 = 3, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 5 \ (m_0 = 1)$

$\delta = 1, \quad \delta' = 0; \quad \mu_1 + \mu_2 = 9, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 13$

$\mu_0 = 5 \quad m = 1, \quad \mu_3 = 4$ ou $\mu_0 = 2, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 4 \ (m_0 = 1)$

$\delta = 1, \quad \delta' = 1; \quad \mu_1 + \mu_2 = 9, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 13$

$\mu_0 = 1, \quad m = 1, \quad \mu_3 = 4 \ (m_0 = 2)$

$\delta = 0, \quad \delta' = 1; \quad \mu_1 + \mu_2 = 11, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 15$

$\mu_0 = 1, \quad m = 1, \quad \mu_3 = 6 \ (m_0 = 2)$

On passe maintenant à la considération du cas $n = 4$.

$n = 4$

On a $3 \leqq \mu_1 + \mu_2 \leqq 7$, $\mu_2 \leqq 4$ et si $\mu_0 \neq 0$, alors $\mu_1 + \mu_2 = 7$ et $\mu_2 = 4$.

Dans chacun des cas ci-dessous, m_0 désigne le nombre des μ_3 (1, 4)-points qu'on spécialise à H. On indique dans chaque cas la méthode d'ajustage – expulsion ou introversion.

Dans tous les cas, on spécialise les δ' coniques et la droite Δ_c à H.

$\delta = \delta' = 0$

$\mu_0 = 0, \quad m = 1; \quad \mu_1 + \mu_2 = 5\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 1,$	$\mu_1 + \mu_2 = 3$ ou $4,$	$\mu_3 = 6;$	$m_0 = 1$	expulsion
$\lambda = 2,$	$\mu_1 + \mu_2 = 6,$	$\mu_3 = 5;$	$m_0 = 1$	expulsion
$\lambda = 2,$	$\mu_1 + \mu_2 = 7,$	$\mu_3 = 5;$	$m_0 = 2$	expulsion

$\mu_0 = 0, \quad m = 3; \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 5\lambda - 3, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 4, \ldots, 7, \quad \mu_3 = 5; \quad m_0 = 1$ expulsion

$\mu_0 > 0; \quad \mu_1 + \mu_2 = 7, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 11$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_0 = 1, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 4 \\ \mu_0 = 4, \quad m = 1, \quad \mu_3 = 4 \end{array}\right\} m_0 = 1$$ introversion

$\delta = 1, \delta' = 0$

$\mu_0 = 0, \quad m = 1; \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 5\lambda - 2, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 3, \quad \mu_3 + 2\delta = 6, \quad m_0 = 2$ expulsion

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 4, \quad \mu_3 + 2\delta = 5, \quad m_0 = 2$ introversion

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 5, \quad \mu_3 + 2\delta = 5, \quad m_0 = 2$

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 6$ ou $7, \quad \mu_3 + 2\delta = 5, \quad m_0 = 2$ expulsion

$\mu_0 = 0, \quad m = 3; \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 5\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 3, \quad \mu_3 + 2\delta = 5, \quad m_0 = 1$ expulsion

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 4$ ou $5, \quad \mu_3 + 2\delta = 5, \quad m_0 = 1$ expulsion

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 6, \quad \mu_3 + 2\delta = 4, \quad m_0 = 1$

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 7, \quad \mu_3 + 2\delta = 4, \quad m_0 = 1$ expulsion

$\mu_0 > 0; \quad \mu_1 + \mu_2 = 7, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 11$

$\mu_0 = 2, \quad m = 1, \quad \mu_3 + 2\delta = 4; \quad m_0 = 1$ expulsion

$\delta = 1, \delta' = 1$

$\mu_0 = 0, \quad m = 1; \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 5\lambda - 1, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 3$ ou $4, \quad \mu_3 + 2\delta = 5, \quad m_0 = 2$ expulsion

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 5, 6$ ou $7, \quad \mu_3 + 2\delta = 4, \quad m_0 = 2$ expulsion

$\mu_0 = 0, \quad m = 3; \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 5\lambda + 1, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 3, 4$ ou $5, \quad \mu_3 + 2\delta = 4, \quad m_0 = 2$ introversion

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 6, \quad \mu_3 + 2\delta = 4, \quad m_0 = 1$ expulsion

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 7, \quad \mu_3 + 2\delta = 3, \quad m = 1$ expulsion

$\mu_0 > 0, \quad \mu_1 + \mu_2 = 7, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 11$

$\mu_0 = 3, \quad m = 1, \quad \mu_3 + 2\delta = 3; \quad m_0 = 1$ expulsion

$\delta = 0, \delta' = 1$

$\mu_0 = 0, \quad m = 1; \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 5\lambda + 1, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 3, 4, 5 \text{ ou } 6, \quad \mu_3 = 5; \quad m_0 = 2$ expulsion

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 7, \quad \mu_3 = 4; \quad m_0 = 1$ expulsion

$\mu_0 = 0, \quad m = 3; \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 5\lambda - 2, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\lambda = 1, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 3, \quad \mu_3 = 5; \quad m_0 = 2$

$\lambda = 2, \quad \mu_1 + \mu_2 = 4, 5, 6 \text{ ou } 7, \quad \mu_3 = 4; \quad m_0 = 1$ expulsion

$\mu_0 > 0; \quad \mu_1 + \mu_2 = 7, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 11$

$\mu_0 = 2, \quad m = 3, \quad \mu_3 = 3; \quad m_0 = 1$ introversion

(*2.2*) *Les cas initiaux*

(2.2.1) PROPOSITION. *On a* $E_3(3, 3)$.

Démonstration. Par la spécialisation de certains des μ_0 0-points à H et par l'expulsion de certains des μ_1 0-points par des μ_0 0-points, on peut supposer que si $\mu_0 \neq 0$, alors $\mu_1 = 0, \mu_2 = 3$. On considère les quadruplets $(\mu_0, \ldots, \mu_3)$.

$\delta = \delta' = 0$

Pour (0, 0, 0, 5), (0, 2, 1, 4) et (0, 0, 2, 4) on spécialise à H tous les μ_3 (1, 3)-points sauf deux et dans le dernier cas on introvertit un des μ_2 (1, 1)-points. Pour (2, 0, 3, 3) on spécialise deux des μ_3 (1, 3)-points à H et on introvertit un des μ_2 (1, 1)-point. Dans tous les cas, la trace se spécialise en une configuration de trois (1, 2)-points plus un 0-point qui en exploitant une des droites canoniques se réduit à $E_4(2, 2)$. Pour la dègue, en spécialisant et introvertissant tous les (1, 3)-points, sauf un, on se ramène à $E_4(2, 2)$.

$\delta = 1, \delta' = 0$

Pour (0, 2, 0, 2), (0, 0, 1, 2) et (0, 0, 3, 1) on spécialise les μ_3 (1, 3)-points à H, en ajustant par l'expulsion dans le premier cas et par l'introversion dans le dernier. Dans tous les cas, la trace se spécialise en trois 0-points alignés, plus un 0-point, plus deux (1, 2)-points. On exploite alors la droite canonique pour arriver dans le cadre de $E_4(2, 2)$. Pour la dègue on procède comme pour le cas ci-dessus.

$\delta = 1, \delta' = 1$

Pour (0, 2, 0, 1) et (0, 0, 1, 1) on spécialise deux des 0-points sur les δ'coniques plus les μ_3 (1, 3)-points à H en ajustant par l'introversion due (1, 1)-point dans le second cas. Dans les deux cas, la trace se spécialise en la configuration qu'onn a vue dans le cas précédent tandis que la dègue se réduit à $E_4(2, 2)$.

Pour (0, 0, 3, 0) on spécialise les δ'coniques à H. La trace se spécialise comme ci-dessus et la dègue se réduit à $E_4(2, 2)$.

$\delta = 0, \delta' = 1$

On a les cas (0, 0, 0, 4), (0, 2, 1, 3), (0, 0, 2, 3) et (2, 0, 3, 2). On spécialise la conique plus deux (resp. un, resp. un, resp. un) des μ_3 (1, 3)-points à H, tout en expulsant un (resp. un, resp. zero, resp. zero) des quatre 0-points sur la conique. Dans chaque cas la dîme se démontre en exploitant le conique comme diviseur et la dègue se réduit à $E_4(2, 2)$.

(2.2.2) PROPOSITION. *On a* $E_2(3, 4)$.

Démonstration. En spécialisant certains des μ_0 0-points en des (1, 1)-points génériques à support dans H, on peut supposer que soit $\mu_2 < 1$, $\mu_0 < 1$, $\mu_0 = 1$ soit $\mu_2 = 2$, soit on est dans le cas de $E_2(3, 4)$ (b).

On considère les triplets (μ_0, μ_2, μ_3) qui déterminent la configuration, dès que γ, δ et δ' sont fixés.

$\gamma = 1, \delta = \delta' = 0$

On a les deux cas (1, 0, 6), (1, 2, 5). On spécialise trois (resp. deux) des μ_3 (1, 3)-points à H et dans le second cas, on ajuste dans H par l'introversion d'un des μ_2 (1, 1)-points. Les dîmes se démontrent en exploitant la conique et les dègues sont dans le cadre de $E_4(3, 3)$.

$\gamma = 1, \delta = 1, \delta' = 0$

On a les deux cas (0, 0, 3), (0, 2, 2). Le second est déjà ajusté et pour le premier, on expulse un des six 0-points sur les γ coniques par un des μ_3 (1, 3)-points. Dans les deux cas, la dîme se démontre en exploitant d'abord la droite Δ puis la conique. Les dègues sont dans le cadre de $E_3(3, 3)$.

$\gamma = 1, \delta = 1, \delta' = 1$

On a les deux cas (0, 1, 1) et (0, 2, 0). Le second est déjà ajusté dans H et pour le premier, on introvertit le (1, 1)-point. Les dîmes se démontrent en exploitant d'abord la droite Δ puis la conique. Pour les dègues, on décompose les δ' coniques en réunion de deux droites avec quatre 0-points sur l'une et deux 0-points sur l'autre. Pour le second cas, on spécialise la droite ayant quatre 0-points à H et pour le premier cas on spécialise les deux droites à H.

$\gamma = 1, \delta = 0, \delta' = 1$

On a les deux cas (1, 1, 5) et (1, 3, 4). Dans les deux cas on spécialise deux des 0-points sur les δ' coniques à H. Puis pour le premier on spécialise deux des μ_3 (1, 3)-points plus les μ_0 0-points. Les dîmes se démontrent en exploitant la conique et les dégues sont dans le cadre de $E_3(3, 3)$.

(2.2.3) PROPOSITION. *On a* $E_3(3, 5)$.

Démonstration. On peut supposer $\mu_0 \leqq 3$. Pour $\gamma = 0$, c'est l'énoncé $E_4(3, 5)$. Pour $\gamma = 1, \mu_1 = 9$ cela est démontré au cours de (7.2) (Hir). Pour $\gamma = 1, \mu_1 = 1$ on spécialise la conique à H aussi bien qu'un des μ_3 (1, 3)-points. Pour la dîme, on exploite la conique qu'ensuite on spécialise en réunion de deux droites. Pour la dègue, on est dans le cadre de $E_2(3, 4)$. Reste donc le cas $\gamma = 2, \mu_1 = 2$.

Pour ce dernier cas, on exploite la quadrique générique Q de X sur laquelle on spécialise un des deux coniques (C_1 disons) plus quatre des (1, 3)-points sur l'autre (C_2) plus les $\mu_3 = 1$ (1, 3)-points et un des $\mu_1 = 2$ 0-points. Pour la dîme on exploite d'abord la conique C_1 puis la conique C_3 sur Q, déterminée par le plan de C_2, en y spécialisant le 0-point libre. Ensuite, on exploite la conique C_1 une deuxième fois en y spécialisant un des quatre 0-points sur C_3. Finalement, on exploite la conique C_3 en y spécialisant un des deux (1, 2)-points.

Pour la dègue, on exploite le plan de C_2 en y spécialisant un des six 0-points sur C_1. La dîme obtenue se démontre en exploitant la conique et la dègue en spécialisant la réunion de cinq 0-points génériques de C_1, plus un 0-point générique de X. On exploite la quadrique Q et la conique C_1 pour se ramener à un 0-point de X en degré zéro.

(2.2.4) PROPOSITION. *On a* $E_2(4, 4)$.

Démonstration. L'énoncé $E_2(4, 4)$ (a) est simplement $E_4(4, 4)$. $E_2(4, 4)$ (b); $\mu_1 = 0$.

On considère les triplets (μ_0, μ_2, μ_3) qui déterminent la configuration dès que γ, δ et δ' sont fixés. Nous donnons ci-dessous (à une exception prés) pour chaque triplet (μ_0, μ_2, μ_3), un triplet $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ où α_0 et α_2 sont respectivement le nombre des μ_0 0-points et le nombre des μ_3 (1, 4)-points à spécialiser à H et où α_1 est le nombre des μ_2 (1, 1)-points à introvertir pour ajuster dans H; tout autre ajustement étant par expulsion.

On peut supposer que soit $\mu_2 \leqq 3$ et $\mu_0 = 1$, soit $\mu_2 = 4$.

$\delta = \delta' = 0$

$\gamma = 1.$

Pour le cas (0, 2, 12), on spécialise six des μ_3 (1, 4)-points à H et on expulse un des six 0-points de la conique par un des $(\mu_3 - 6)$ (1, 4)-points.

La dîme se démontre en spécialisant la conique, plus deux des (1, 3)-points plus un des 0-points à l'hyperplan générique de H. La dègue est dans le cadre de $E_4(4, 3)$.

Reste le cas (1, 4, 11), pour lequel on prend $\alpha = (0, 1, 6)$, dont la dîme est dans le cadre de $E_2(3, 4)$ et la dègue est dans le cadre de $E_4(4, 3)$.

$\gamma = 2$

On a les cas (1, 1, 11) et (0, 4, 10) pour lesquels on prend $\alpha = (1, 1, 5)$ et $\alpha = (0, 3, 4)$ respectivement, donc la dîme est dans le cadre de $E_2(3, 4)$ et la dègue est danns le cadre de $E_3(4, 3)$. Notons que pour le deuxième cas, la dîme est précisément $E_2(3, 4)$ (b).

$\delta = 1, \delta' = 0,, \gamma = 2$

Dans le cas (1, 1, 7), (1, 3, 6), (4, 4, 5) on prend pour α: (0, 1, 3), (1, 2, 2), (0, 2, 2) et les dîmes et dègues sont comme dans le cas précédent.

$\delta = 1, \delta' = 1, \gamma = 2$

Dans le cas (1, 0, 6), (0, 3? 5), (3, 4, 4) on prend pour α: (0, 0, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 3) et les dîmes et dègues sont comme ci-dessus après avoir spécialisé dans H deux des six points sur les δ'-coniques.

$\delta = 0, \delta' = 1, \gamma = 2$

On spécialise deux des six points sur les δ' coniques à H. Dans les cas (0, 1, 10), (1, 3, 9) et (4, 4, 8) on prend pour α: (0, 0, 5), (2, 0, 4) et (0, 1, 4) et les dîmes et dègues sont comme ci-dessus.

$E_2(4, 4)$ (c)

$\gamma = 1, \delta = 0, \mu_1 = 6, \mu_2 = 2$ donc $\mu_3 = 10, \mu_0 = 4$.

On spécialise cinq des μ_3 (1, 4)-points plus un des μ_0 0-points à H.

$\gamma = 2, \delta = 0, \mu_1 = 2, \mu_2 = 0$ donc $\mu_3 = 11, \mu_0 = 1$.

On spécialise comme dans le cas précédent.

$\gamma = 2, \delta = 1, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ donc $\mu_3 = 7, \mu_0 = 2$.

On spécialise trois des μ_3 (1, 4)-points plus les $\mu_0 = 2$ 0-points à H.

Dans les trois cas, la dîme est dans le cadre de $E_2(3, 4)$ et la dègue est dans le cadre de $E_3(4, 3)$.

3. Le cas $d = 5$

(3.0) Introduisons seulement l'énoncé suivant:

$E_1(n, 4)$

Soit H l'hyperplan générique de X, et soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_\gamma$ $0 \leqq \gamma \leqq n - 1$; γ droites génériques de X, munies chacune de trois $(1, n)$-points à support générique dans la droite.

Soient μ_0, μ_1, μ_2 des entiers non-négatifs vérifiant

(i) $\binom{n}{2} \leqq \mu_1 \leqq 1/n\binom{n+4}{5} - \gamma/n$

(ii) $\mu_0 + \mu_1 + (n+1)\mu_2 = \binom{n+4}{4} + \gamma$

alors pour la réunion de

- μ_0 0-points plus μ_2 $(1, n)$-points génériques de X
- μ_1 0-points génériques de H
- les 3γ $(1, n)$-points sur les γ coniques

on a $H^0(X, I_y(4)) = 0$.

(3.1) Proposition. *Pour $n \geqq 2$, on a*

$$E_0(n-1, 5) + E_1(n, 4) \Rightarrow E_0(n, 5).$$

Démonstration. Comme pour (1.1.1) mais en amorçant avec des droites.

(3.2) Proposition. *Pour $n \geqq 2$ on a:*

$$E_4(n-1, 4) + E_4(n, 3) \Rightarrow E_1(n, 4).$$

Démonstration. On spécialise à H, un des $(1, n)$-points sur chacune des γ droites, puis on ajuste dans H par expulsion. La dîme est dans le cadre de $E_4(n-1, 4)$ après spécialisation de $\binom{n-1}{2}$ des $(\mu_1 - \varepsilon_0)$ 0-points à l'hyperplan générique H de X (où ε est le défaut pour l'ajustage dans H et ε_0 est défini commme dans la démonstration de (1.1.1).

Pour la dègue, on oublie le 0-point dans l'intersection de chaque droite avec H. Comme deux points génériques sont toujours alignés sur une droite générique on est revenu au cas de l'énoncé $E_4(n, 3)$.

(3.3) Proposition. *Pour tout $n \geqq 2$ on a $E_0(n, 5)$.*

Démonstration. Résulte des propositions précédentes et de $E_4(n, d)$ pour $d \geqq 3$.

4. Les exceptions en degré $d = 2$

(4.0) Comme un $(1, n)$-point dans $\mathbb{P}^n$ est toujours rangé de niveau $d = 1$, la proposition (0.3) est valable pour $d = 1$. Il n'en est plus le cas pour $d = 2$, 3, et 4 mais nous ne sommes pas en mesure de traiter systématiquement ces exceptions sauf pour $d = 2$ (voir ci-dessous). En degré trois on trouve la première exception en dimension $n = 4$ où il existe une hypercubique ayant sept singularités génériques (voir la partie (5) ci-dessous), mais la question reste irrésolue en dimension $n \geqq 6$ (il n'y a pas d'exception en dimension $n = 5$). Il semble raisonnable que en degré $d = 3$, la proposition (0.3) est fausse chaque fois que la forme quadratique

$$\mu_0 + \binom{v_{nn}^3 - \mu_1}{2} + (n+1)\mu_1 = \binom{n+2}{3}$$

n'a pas de solution non-négative en μ_0 et μ_1 avec

$$\mu_0 \leqq \sum_{i=0}^{n-1} v_{i,n}^3 (i+1).$$

En ce qui concerne les exceptions en degré $d = 4$, il y en a pour $n = 2$, 3 et 4 puisqu'il existe une forme quadratique non-nulle s'annulant sur 5, 9 et 14 0-points génériques de $\mathbb{P}^n$. Pour $n \geqq 5$, la question reste irrésolue.

(4.1) Voici la proposition qui résout les exceptions en degré $d = 2$.

(4.1.1) PROPOSITION. *Soit* $X \simeq \mathbb{P}_k^n$, $n \geqq 1$; *et soient* μ_0, μ_1 *deux entiers non-négatifs vérifiant*

$$\begin{aligned} &\text{(a) } 2 \leqq \mu_1 \leqq n+1 \\ &\text{(b) } \mu_0 + (n+1)\mu_1 \leqq \tbinom{n+2}{2} + \tbinom{\mu_1}{2} \end{aligned} \qquad (4.1.1.1)$$

Alors pour que le réunion de μ_0 0-points plus μ_1 $(1, n)$-points génériques de X soit de rang maximum, it faut et il suffit qu'on ait égalité dans (4.1.1.1) (b).

Démonstration. Soit k_0 le corps résiduel au point du schéma d'Hilbert de X correspondant à la réunion Y_0 de μ_1 $(1, n)$-points génériques de X. Soit E un k_0-vectoriel de rang $n + 1$ et soit $\mathbb{P}(E) \simeq X \times_k k_0 = X_0$ un isomorphisme. Soit E_0 le sous k_0-vectoriel de E, correspondant par cet isomorphisme, au sous-espace linéaire de X déterminé par $Y_{0\,\mathrm{red}}$; il est évidemment libre de rang μ_1. Finalement, soient $e_1, \ldots, e_{\mu_1}$ des sections de E_0 correspond aux μ_1 sections de Y_0 sur k_0.

Alors les sections globales de $\mathcal{O}_{X_0}(2)$ s'annulant dans $\mathcal{O}_{Y_0}(2)$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les formes quadratiques q sur E s'annulant avec toutes leurs premiéres dérivées en $e_1, \ldots, e_{\mu_1}$. Ces formes q sont caractérisées par la condition

$$E_0 \hookrightarrow \ker(q); \qquad (4.1.1.2)$$

autrement dit pour la condition

$$q(e) = 0 = \phi(e, .) \quad \text{pour tout } e \in E_0 \tag{4.1.1.3}$$

où $\phi(.\,,\,.)$ est la forme bilinéaire canoniquement associée à q.

Or, les formes quadratiques q sur E vérifiant (4.1.1.3) sont on correspondance biunivoque canonique avec les formes quadratiques sur le k_0-vectoriel $F = E/E_0$; c'est-à-dire les sections de $S^2(\check{F})$. Comme

$$\text{rang}\, F = \text{rang}\, E - \text{rang}\, E_0 = n + 1 - \mu_1 \tag{4.1.1.4}$$

on a établi que

$$h^0(X_0, I_{Y_0}(2)) = \text{rang}\,(S^2(\check{F})) = \binom{n - \mu_1 + 2}{2}. \tag{4.1.1.5}$$

Supposons maintenant que Y_0 soit la réunion de μ_0 0-points plus μ_1 $(1, n)$-points génériques de X, avecc μ_0 et μ_1 vérifiant (4.1.1.1) (a) et (b). Alors de (4.1.1.5), on conclut que

$$\begin{aligned} h^0(X_0, I_{Y_0}(2)) &= \binom{n - \mu_1 + 2}{2} - \mu_0 \\ &= \binom{n+2}{2} + \binom{\mu_1}{2} - (\mu_0 + (n+1)\mu_1) \end{aligned}$$

d'où

$$h^1(X_0, I_{Y_0}(2)) = \binom{\mu_1}{2}.$$

Par conséquent, on a $h^0(X_0, I_{Y_0}(2)) > 0$ et $h^1(X_0, I_{Y_0}(2)) > 0$ sauf dans le cas d'égalité dans (1.1.1.1) (b), où on a $h^0(X_0, I_{Y_0}(2)) = 0$. Ce qui établit la nécessité.

Pour voir que égalité dans (4.1.1.1) (b) suffit, on considère la réunion Z_0 de $\nu_1 = (n + 1)$ $(1, n)$-points plus $\nu_0 = \binom{n+3}{3} - (n + 1)\nu_1 = \binom{n+1}{3}$ 0-points génériques de X. Comme pour tout couple (μ_0, μ_1) d'entiers vérifiant

(4.1.1.1) (a) et (b), on a

$$\mu_1 \leqq n + 1$$

$$\mu_0 \leqq \binom{n - \mu_1 + 1}{2} \leqq (n + 1) - \mu_1 + \binom{n + 1}{3}$$

la réunion de μ_0 0-points plus μ_1 $(1, n)$-points génériques de X est canoniquement un sous schéma de Z_0. Par conséquent, il nous suffit de démontrer que Z_0 est rangé de niveau $d = 3$.

Pour cella, on spécialise n des $(1, n + 1)$-points plus $\binom{n}{3}$ des $\binom{n+1}{3}$ 0-points à l'hyperplan générique H de X. La dîme résulte des hypothèses de récurrence (la proposition est triviale en dimension $n = 1$) et la dègue se démontre en spécialisant tous les 0-points à H.

5. Le cas de $\mathbb{P}^4$

(Une hypercubique dans $\mathbb{P}^4$ ayant sept singularités génériques)

(5.0) On considère la réunion Y de μ_0 0-points plus μ_1 (1, 4)-points génériques de $X = \mathbb{P}^4$, pour les couples (μ_0, μ_1) suivants

$$(5.6); \quad (0, 7); \quad (1, 7); \quad (5.13); \quad (0, 14); \quad (1, 14). \tag{5.0.1}$$

On démontre que pour les couples (0, 7) et (0, 14), Y n'est pas de rang maximum, que pour les couples (5, 6) et (5, 13) Y est rangé et que pour les couples (1, 7) et (1, 14) on a

$$h^0(X, I_Y(\mathrm{d})) = 0 \tag{5.0.2}$$

où $d = 3$ et 4 respectivement; ce qui établit la proposition suivante, compte-tenu de (4.1.1.).

(5.1) Proposition. *Soit $X \simeq \mathbb{P}^4$ et soit m un entier non-négatif, alors sauf pour $m = 2, 3, 4, 7,$ et 14, la réunion de m, $(1, 4)$-points génériques de X est de rang maximum.*

Pour voir que Y est rangé pour $(\mu_0, \mu_1) = (5, 6)$ (resp. (5, 13)) il suffit de spécialiser cinq des μ_1 (1, 4)-points (resp. huit des μ_1 (1, 4)-points plus trois des μ_0 0-points à l'hyperplan générique H de X. Les dîmes sont traités dans (H(9.4)) et les dègues sont dans le cadre de $E_4(4, 2)$ et de $E_4(4, 3)$ respectivement.

Dans le cas $(\mu_0, \mu_1) = 1, 7)$, on spécialise quatre de (1, 4)-points plus un des μ_0 0-points à l'hyperplan générique H de X. La dîme et la dègue résultent respectivement de (H, (9.4)) et de $E_4(4, 2)$.

Dans le cas $(\mu_0, \mu_1) = (1, 14)$ on exploite comme diviseur l'unique hyperquadrique (elle est lisse) s'annulant sur le support des μ_1 (1, 4)-points. La dîme se démontre en exploitant la quadrique générique de l'hyperquadrique en y amorçant par la droite générique de l'hyperquadrique à laquelle on spécialise trois de μ_1 (1, 4)-points.

Pour le couple $(\mu_0, \mu_1) = (0, 14)$, comme il existe une hyperquadrique s'annulant sur Y red, son premier voisinage infinitésimal est une quadrique s'annulant sur Y_1 d'où Y n'est pas de rang maximum.

(5.2) PROPOSITION. *Il existe une hypercubique dans $X \simeq \mathbb{P}^4$ ayant sept singularités génériques.*

Démonstration. Soient $s_1, \ldots, s_6$, six 0-points génériques de X soient $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_6$ leur premier voisinage infinitésimal et soit Y la réunion de $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_6$. Alors comme Y est de rang maximum, on a

$$h^0(X, I_Y(3)) = 5. \tag{5.2.1}$$

Soient $h_1, \ldots, h_5$ une base du k-vectoriel $H^0(X, I_Y(3))$, alors les sections t de X telles qu'il existe une cubique h s'annulant sur la réunion de Y et de $\tilde{t}$ (le premier voisinage infinitésimal de t) est le support d'une section Δ de $\mathcal{O}_X(11)$ qui au-dessus de chaque fibré affine V de X est de la forme

$$\Delta_V = \det \begin{pmatrix} h_i \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} \tag{5.2.2}$$

pour une base $(x_i)_{i=1,\ldots,4}$ des formes linéaires sur V convenablement choisie. Il suffit donc de démontrer que Δ est identiquement nulle.

Pour cela, on remarque que la réunion de deux (1, 4)-points génériques de X et de cinq (1, 4)-points génériques à support dans l'hyperplan générique H de X n'est pas rangée niveau $d = 3$. En effet, il existe (voir (4.1)) une forme quadratique Q non-nulle sur X, qui s'annule sur les deux (1, 4)-points génériques de X et sur le support des cinq (1, 4)-points à support dans H. On voit que la cubique $H \cdot Q$ répond aux besoins.

Maintenant, on conclut que la forme Δ est divisible dans $\oplus_{i=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(i))$ par quinze forme linéaire distinctes, dont une pour chacun des hyperplans de X déterminé par un choix de quatre des six (1, 4)-points; ce sont les formes linéaires exprimant la restriction de t à un de ces $\binom{6}{4} = 15$ hyperplans; mais comme Δ est une section de $\mathcal{O}_X(11)$, on conclut que Δ est identiquement nulle.

6. Le cas irresolus sont $d = 3$, $n \geqq 6$ et $d = 4$, $n \geqq 5$

Le cas $d = 3$, $n = 5$ qui n'est pas couvert par les parties précédentes, se démontre facilement par la méthode d'Horace en utilisant les techniques de (1.2). On trouve qu'il n'est pas une exception et que 9 singularités est bien le nombre maximum de singularités génériques qu'on peut imposer.

Bibliographie

[H] Hirschowitz, A.: La Méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables. *Manuscripta Math.* 50 (1985) 337–388.