

COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-YVES ETESSE

Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un cristal

Compositio Mathematica, tome 66, n° 1 (1988), p. 57-120

http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__66_1_57_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un cristal

JEAN-YVES ETESSE

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 – Rennes Cédex, France

Received 15 June 1987; accepted 20 October 1987

Mots clés: complexe de De Rham–Witt, cristal de Dieudonné, cohomologie cristalline, schéma en groupes fini, groupe p -divisible, opération de Cartier et Frobenius, cohomologies plate et étale.

Table des matières

Introduction	57
I. Compléments sur le complexe de De Rham–Witt	59
1. Rappels	59
2. Filtration canonique et filtration p -adique	60
3. Frobenius	61
4. Opération de Cartier	62
II. Complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un cristal et cohomologie cristalline	65
1. Définition	66
2. Comparaison avec la cohomologie cristalline	72
3. Formalisme F, V, ∇ ; isomorphisme de Cartier	82
3.1. Frobenius F	82
3.2. <i>Verschiebung</i> V ; formulaire	85
3.3. Opérateur F'	87
3.4. Opération de Cartier	88
4. Propriétés de finitude et suite spectrale des pentes	91
III. Complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un cristal: liens avec la cohomologie plate et la cohomologie étale	94
1. Définition de $\varepsilon_n: R^1\alpha_*(G) \rightarrow \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1$	95
2. Points fixes des opérateurs de Frobenius et de Cartier	105
3. Cohomologie plate de G et cohomologie étale de G'	112
Références	118

Introduction

Cet article, où l'on construit un complexe de De Rham–Witt à coefficients, est une généralisation du travail entrepris par Illusie sur le complexe de

Code matière AMS: 14 F 30, 14 F, 14 L. – Unité Associée au CNRS n° 305.

De Rham–Witt ([21]): on y étend la comparaison avec la cohomologie cristalline, et la comparaison avec les cohomologies plate et étale. Il y a trois parties.

La première est faite de compléments sur le complexe de De Rham–Witt, notamment en vue de définir une opération de Cartier dans le cas de coefficients.

Dans la deuxième partie, nous considérons un schéma lisse X sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ et un cristal E sur X . Pour tout entier $n \geq 1$, soit $W_n(X)$ le schéma $(|X|, W_n(\mathcal{O}_X))$ de même espace sous-jacent que X et de faisceau structural, le faisceau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans \mathcal{O}_X ; posons $E_n := E_{(X, W_n(X), \delta)}$ (notation de [1]) où δ sont les puissances divisées canoniques sur l'idéal $VW_{n-1}(\mathcal{O}_X)$ de $W_n(\mathcal{O}_X)$. On construit, dans la deuxième partie, le “complexe de De Rham–Witt à coefficients dans E ”, $E_n \otimes_{W_n \mathcal{O}_X} W_n \Omega$, où $W_n \Omega$ est le complexe de De Rham–Witt de Illusie ([21]). Notons $W_n = W_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans k . Si E est localement libre ou si E est le cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G)$ ([3]) d'un p -groupe fini localement libre étale ou de type multiplicatif sur X , l'hypercohomologie de $E_n \otimes W_n \Omega$ est la cohomologie cristalline $H^*(X/W_n, E)$ de E . Le formalisme habituel du complexe de De Rham–Witt [21] s'étend à $E_n \otimes W_n \Omega$ dans le cas $E = \mathbb{D}(G)$, où G est un groupe p -divisible étale sur X (i.e., E est un F -cristal unité), ou plus généralement si G est un p -groupe fini localement libre étale sur X : les calculs de la première partie et la description des cristaux de Dieudonné [3] permettent alors d'obtenir des isomorphismes de Cartier.

La troisième partie établit les liens avec les cohomologies plate et étale. Explicitons-les dans le cas où $E = \mathbb{D}(G)$ est un F -cristal unité. Le rôle central y est tenu par les faisceaux $v(E, r)$ des points fixes des opérateurs de Frobenius et de Cartier sur le complexe de De Rham–Witt à coefficients dans E : si k est algébriquement clos et X propre et lisse sur k on a des isomorphismes

$$H_{\text{ét}}^*(X, v(\mathbb{D}(G), 0)) \simeq \varinjlim_n H_{\text{ét}}^*(X, G^\vee(n)),$$

$$H_{\text{ét}}^{*-1}(X, v(\mathbb{D}(G), 1)) \simeq \varinjlim_n H_{\text{fppf}}^*(X, G^*(n)),$$

où G^\vee (resp. G^*) est le dual de Pontryagin (resp. de Cartier) de G ; par la comparaison avec la cohomologie cristalline ces isomorphismes fournissent les liens annoncés avec les cohomologies plate et étale via les suites exactes

$$0 \rightarrow \varinjlim_n H_{\text{ét}}^*(X, G^\vee(n)) \rightarrow H_{\text{cris}}^*(X/W, \mathbb{D}(G)) \xrightarrow{1-F} H_{\text{cris}}^*(X/W, \mathbb{D}(G)) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \varinjlim_n H_{\text{ppf}}^*(X, G^*(n)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow H_{\text{cris}}^*(X/W, \mathbb{D}(G)) \otimes_W K$$

$$\xrightarrow{p-F} H_{\text{cris}}^*(X/W, \mathbb{D}(G)) \otimes_W K \rightarrow 0,$$

où K est le corps des fractions de l’anneau W des vecteurs de Witt du corps de base, et \underline{F} est induit par le Frobenius de $\mathbb{D}(G)$. Ce sont encore les faisceaux $v(\mathbb{D}(G), r)$ qui nous permettront, ailleurs [15], de construire une dualité plate à coefficients dans G , via une dualité étale pour $v(\mathbb{D}(G), r)$.

I. Compléments sur le complexe de De Rham–Witt

Dans cette partie I, X désigne un schéma lisse sur une base parfaite S de caractéristique $p > 0$. Pour le complexe de De Rham–Witt nous renvoyons à [21].

1. Rappels [21]

1.1. Soient $W_n\Omega'$ le complexe de De Rham–Witt d’indice n de X sur S , F et V les morphismes de Frobenius et de Verschiebung. Alors $F: W_{n+1}\Omega^i \rightarrow W_n\Omega^i$ et $V: W_n\Omega^i \rightarrow W_{n+1}\Omega^i$ satisfont les identités

$$FV = VF = p, \quad dF = pFd, \quad Vd = p dV, \quad FdV = d,$$

$V(Fx.y) = x.Vy$ avec $x \in W_n\Omega^i, y \in W_{n-1}\Omega^i$; par passage à la limite on a les mêmes identités sur $W\Omega'$.

1.2. On note R les homomorphismes de transition, et on pose:

$$\text{Fil}^n W_r\Omega^i := \text{Ker} (R^{r-n}: W_r\Omega^i \rightarrow W_n\Omega^i) \quad \text{si } n \leq r.$$

1.3. On a alors $\text{Fil}^n W_r\Omega^i = V^n W_{r-n}\Omega^i + dV^n W_{r-n}\Omega^{i-1}$ si $0 \leq n \leq r$.

1.4. Pour $r \geq n + 1$ les flèches canoniques

$$\text{gr}^n W\Omega' \rightarrow \text{gr}^n W_r\Omega' \rightarrow \text{gr}^n W_{n+1}\Omega' = \text{Fil}^n W_{n+1}\Omega^i$$

sont des isomorphismes.

2. Filtration canonique et filtration p -adique

PROPOSITION 2.1. *Pour $1 \leq m \leq n$, la projection canonique*

$$W_n\Omega' / p^m W_n\Omega' \rightarrow W_m\Omega' = W_n\Omega' / \text{Fil}^m W_n\Omega'$$

est un quasi-isomorphisme.

Le cas $m = 1$ est établi par Illusie ([21], I, 3.15); cf. aussi Ekedahl ([10], III, 5.6.1).

La projection de 2.1 est la composée des projections canoniques

$$W_n\Omega' / p^m W_n\Omega' \rightarrow W_{n-1}\Omega' / p^m W_{n-1}\Omega' \rightarrow \dots \rightarrow W_m\Omega' / p^m W_m\Omega' = W_m\Omega'.$$

Il revient donc au même de prouver que la projection

$$W_{n+1}\Omega' / p^m W_{n+1}\Omega' \rightarrow W_n\Omega' / p^m W_n\Omega' \quad (1 \leq m \leq n)$$

est un quasi-isomorphisme.

Par le lemme du serpent, le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{gr}^n W\Omega' & \longrightarrow & W_{n+1}\Omega' & \xrightarrow{R} & W_n\Omega' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow p^m & & \downarrow p^m \\ 0 & \longrightarrow & \text{gr}^n W\Omega' & \longrightarrow & W_{n+1}\Omega' & \xrightarrow{R} & W_n\Omega' \longrightarrow 0 \end{array}$$

fournit, via les égalités

$$\text{Ker}(p^m: W_r\Omega' \rightarrow W_r\Omega') = \text{Fil}^{r-m} W_r\Omega' \quad ([21], \text{I}, 3.4)$$

et

$$\text{Fil}^{n-m} W_n\Omega' / \text{Fil}^{n+1-m} W_n\Omega' = \text{gr}^{n-m} W_n\Omega' \simeq \text{gr}^{n-m} W\Omega'$$

(cf. 1.4), la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \text{gr}^n W\Omega' / \underline{p}^m \text{gr}^{n-m} W\Omega' \rightarrow W_{n+1}\Omega' / p^m W_{n+1}\Omega' \rightarrow W_n\Omega' / p^m W_n\Omega' \rightarrow 0;$$

comme $\underline{p}^m: \text{gr}^{n-m} W\Omega' \rightarrow \text{gr}^n W\Omega'$ est un quasi-isomorphisme ([21], I, 3.13), l'assertion (2.1) en résulte. ■

3. Frobenius

Le résultat suivant généralise ([21], I, 3.21 et 3.21.1.5; [22], II, 1.3)

PROPOSITION 3.1. *Soient n, r et i des entiers ≥ 0 ; on a*

$$d^{-1}(p^r W_n \Omega^{i+1}) = \begin{cases} F^r W_{n+r} \Omega^i, & \text{si } r \leq n, \\ F^n W_{2n} \Omega^i, & \text{si } r \geq n, \end{cases}$$

En particulier

$$(W_n \Omega^i / p^r W_n \Omega^i)_{d=0} = F^r W_{n+r} \Omega^i / p^r W_n \Omega^i.$$

D’après ([21], I, 3.21), seul le cas $1 \leq r \leq n$ demande une démonstration, et comme $dF^r = p^r F^r d$ il suffit de prouver $d^{-1}(p^r W_n \Omega^{i+1}) \subset F^r W_{n+r} \Omega^i$. Soit donc $x \in W_n \Omega^i$ tel que $dx \in p^r W_n \Omega^{i+1}$; notons \bar{x} [resp. $x_r = R^{n-r}x$] l’image de x dans le complexe $W_n \Omega^i / p^r W_n \Omega^i$ [resp. dans $W_r \Omega^i$] muni de la différentielle \bar{d} [resp. d_r]. Par définition de x_r , on a $d_r(x_r) = 0$, donc il existe $x_{n+r} \in W_{n+r} \Omega^i$ (d’image \bar{x}_{n+r} dans $W_{n+r} \Omega^i / p^r$) tel que $x_r = F^r R^{n-r}(x_{n+r})$ ([21], I, 3.21); l’injectivité du morphisme du 2.1 sur le H^i fournit $\bar{z} \in W_n \Omega^{i+1} / p^r$ tel que $\bar{x} = F^r \bar{x}_{n+r} + \bar{d}\bar{z} = F^r(\bar{x}_{n+r} + \bar{d}V^r \bar{z})$, d’où $x \in F^r W_{n+r} \Omega^i$. ■

PROPOSITION 3.2. *Soient n, r, l et i des entiers ≥ 0 ; l’itéré du Frobenius $F^r: W_{n+r} \Omega^i \rightarrow W_n \Omega^i$ induit une application*

$$\check{F}^r: W_n \Omega^i / p^l W_n \Omega^i \rightarrow F^r W_{n+r} \Omega^i / (p^l W_n \Omega^i \cap F^r W_{n+r} \Omega^i) + F^r dV^n W_r \Omega^{i-1}.$$

Résulte de $F^r(\text{Fil}^n W_{n+r} \Omega^i) = F^r dV^n W_r \Omega^{i-1}$ (1.1 à 1.3). ■

Pour n entier ≥ 1 notons ([21], I, 3.3)

$$v_n(i) := \text{Ker} \{1 - F: W_n \Omega^i \rightarrow W_n \Omega^i / dV^{n-1} \Omega^{i-1}\}, \tag{3.3}$$

et $W_n \Omega_{\log}^i$ le sous-faisceau étale “logarithmique” de $W_n \Omega^i$ ([21], I, 5.7). Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé ont montré ([7 bis] lemme 2, p. 779) que l’on a un isomorphisme

$$v_n(i) \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_{\log}^i. \tag{3.4}$$

Pour $i = 1$ on retrouve ainsi l'isomorphisme ([21], 0.2.1.24 et I, 5.7.9)

$$v_n(1) \xleftarrow{\sim_{\text{diag}}} \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n} \tag{3.5}$$

induit par la différentielle logarithmique.

4. Opération de Cartier

Soient r, n et i des entiers ≥ 0 . D'après l'égalité ([21], I, 3.21.1.4)

$$\text{Ker} \{V^r: W_n\Omega^i \rightarrow W_{n+r}\Omega^i\} = F^r dV^n W_r\Omega^{i-1},$$

l'application V^r induit une injection

$$\check{V}^r: W_n\Omega^i/F^r dV^n W_r\Omega^{i-1} \hookrightarrow W_{n+r}\Omega^i.$$

On généralise ([22], III, 1.4): il existe ([22], IV, 4.11.3) un *isomorphisme de Cartier* \check{C}^r , d'inverse \check{F}^r , rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} & F^r W_{n+r}\Omega^i/F^r dV^n W_r\Omega^{i-1} & \\ \check{C}^r \swarrow & \downarrow \check{F}^r & \\ W_n\Omega^i & \xrightarrow{p^r} & W_{n+r}\Omega^i \end{array} \quad ;$$

\check{C}^r est défini par

$$\check{C}^r(\text{Cl } F^r x) = R^r x. \tag{4.1}$$

Pour $r = n = 1$, \check{C}^n est l'isomorphisme de Cartier habituel $C: \mathcal{H}^i(\Omega^i) \xrightarrow{\sim} \Omega^i$.

DÉFINITION 4.2. Soient r, n et i des entiers ≥ 0 ; on appelle opération de Cartier itérée l'application composée

$$C^r: F^r W_{n+r}\Omega^i \xrightarrow{\text{proj. can}} F^r W_{n+r}\Omega^i/F^r dV^n W_r\Omega^{i-1} \xrightarrow{\sim_{\check{C}^r}} W_n\Omega^i.$$

Elle vérifie clairement les identités

$$\underline{p}^r C^r = V^r, \quad C^r F^r = R^r, \quad F^r C^r = R^r, \quad C^r V = VC^r,$$

$$\underline{p}C^r = C^r \underline{p}, \quad C^r d = p^r dC^r,$$

$$C^r(x.y) = C^r(x).C^r(y) \quad \text{pour } x \in F^r W_{n+r}\Omega^i, \quad y \in F^r W_{n+r}\Omega^j, \quad j \geq 0.$$

Nous allons donner une forme plus précise de l’isomorphisme de Cartier qui nous sera utile en (II, 3.4). Auparavant un lemme:

LEMME 4.3. Soient n, r, l et i des entiers ≥ 0 , $x \in W_{n-l}\Omega^i$ et $y \in W_{n+r}\Omega^i$ tels que

$$V^l x = F^r y;$$

alors il existe z et $t \in W_{n+r-l}\Omega^i$ tels que

$$x = F^r z \quad \text{et} \quad y = V^l t.$$

En particulier, pour tous n, l et $i \geq 0$, on a

$$V^l W_{n-l}\Omega^i \cap F^l W_{n+l}\Omega^i = p^l W_n \Omega^i.$$

Seul le cas $r \geq 1$ et $1 \leq l \leq n - 1$ demande une démonstration; cf. aussi ([22], IV, 4.10.1).

4.3.1. Traitons d’abord le cas $r = l = 1$; supposons $Vx = Fy$, avec $x \in W_{n-1}\Omega^i$ et $y \in W_{n+1}\Omega^i$.

Le diagramme commutatif ([21], I, 3.11.4)

$$\begin{array}{ccccc} W_{n-1}\Omega^i & \longrightarrow & W_{n-1}\Omega^i / FW_n\Omega^i & \xrightarrow{\sim} & B_{n-1}\Omega^{i+1} \\ \downarrow V & & \downarrow \bar{V} & & \downarrow \text{can} \\ W_n\Omega^i & \longrightarrow & W_n\Omega^i / FW_{n+1}\Omega^i & \xrightarrow{\sim} & B_n\Omega^i \end{array}$$

implique l’injectivité de \bar{V} , i.e., l’égalité $Vx = Fy$ donne $x = Fz$ pour un $z \in W_{n+1}\Omega^i$.

De même l'injectivité de \bar{F} dans le diagramme commutatif ([21], I, 3.11.3)

$$\begin{array}{ccccc}
 W_{n+1}\Omega^i & \longrightarrow & W_{n+1}\Omega^i/VW_n\Omega^i & \xrightarrow{\sim F^n} & Z_n\Omega^i \\
 \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow \text{can} \\
 W_n\Omega^i & \longrightarrow & W_n\Omega^i/VW_{n-1}\Omega^i & \xrightarrow{\sim F^{n-1}} & Z_{n-1}\Omega^i
 \end{array}$$

entraîne l'existence de $t \in W_n\Omega^i$ tel que $y = Vt$.

4.3.2. Cas r et l quelconques, $1 \leq l \leq n - 1$, $r \geq 1$; supposons $V^l x = F^r y$ avec $x \in W_{n-l}\Omega^i$ et $y \in W_{n+r}\Omega^i$.

Prouvons d'abord l'existence de z . D'après (4.3.1) il existe $z' \in W_n\Omega^i$ tel que $V^{l-1}x = Fz'$, puis $z'' \in W_{n-1}\Omega^i$ tel que $V^{l-2}x = Fz''$ et ainsi de suite; on obtient ainsi $z_1 \in W_{n-l+1}\Omega^i$ tel que $x = Fz_1$. Supposons alors, par hypothèse de récurrence, que $x = F^k z_k$ pour $1 \leq k \leq r - 1$ et $z_k \in W_{n-l+k}\Omega^i$. On a $V^l x = F^k V^l z_k = F^r y$. D'où ([21], I, 3.21.1.2) $V^l z_k - F^{r-k} y = V^n \omega_k$ pour un $\omega_k \in W_k\Omega^i$. On en déduit $V^l(z_k - V^{n-l}\omega_k) = F^{r-k} y$ avec $r - k \geq 1$, ce qui nous assure, par (4.3.1), de l'existence de $z_{k+1} \in W_{n-l+k+1}\Omega^i$ tel que $z_k - V^{n-l}\omega_k = Fz_{k+1}$. Par suite $x = F^k z_k = F^{k+1} z_{k+1} + F^k V^{n-l}\omega_k$. Deux possibilités se présentent: $n - l \geq k$ ou $n - l < k$.

- Si $n - l \geq k$, alors $F^k V^{n-l}\omega_k = V^{n-l-k} p^k \omega_k = 0$.
- Si $n - l < k$, on a $F^k V^{n-l}\omega_k = p^{n-l} F^{k+l-n} \omega_k = 0$, car $F^{k+l-n} \omega_k \in W_{n-l}\Omega^i$.

Dans les deux cas on a prouvé que $x = F^{k+1} z_{k+1}$, d'où, par la récurrence, $z \in W_{n-l+r}\Omega^i$ tel que

$$x = F^r z.$$

Existence de t . Compte tenu de (4.3.1), il existe $t_1 \in W_{n+r-1}\Omega^i$ tel que $y = Vt_1$. Supposons par récurrence que $y = V^k t_k$ pour $1 \leq k \leq l - 1$ et $t_k \in W_{n+r-k}\Omega^i$. Alors $F^r y = V^k F^r t_k = V^l x$, d'où $F^r t_k - V^{l-k} x = F^k dV^{n-k}\omega_k$ pour un $\omega_k \in W_k\Omega^{i-1}$ ([21], I, 3.21.1.4). On en déduit $F^r(t_k - F^k dV^{n+r-k}\omega_k) = V^{l-k} x$ avec $l - k \geq 1$, ce qui nous assure, par (4.3.1), de l'existence de $t_{k+1} \in W_{n+r-k-1}\Omega^i$ tel que $t_k - F^k dV^{n+r-k}\omega_k = Vt_{k+1}$. Par suite $y = V^k t_k = V^{k+1} t_{k+1} + dV^{n+r-k} p^k \omega_k = V^{k+1} t_{k+1}$.

La récurrence s'applique, ce qui fournit $t \in W_{n+r-l}\Omega^i$ tel que $y = V^l t$.

4.3.3. Le cas $r = l$ est clair, car $FV = VF = p$. ■

La forme plus précise de l'isomorphisme de Cartier (4.1) est la suivante:

THÉORÈME 4.4. Soient n, i, r, l et s des entiers ≥ 0 tels que $s \geq r + l$ si $l < n$ [resp. $s = r$ si $l \geq n$]. L'opération de Cartier itérée (4.2) $C^r: F^r W_{n+r} \Omega^i \rightarrow W_n \Omega^i$ satisfait l'inclusion

$$C^r(p^l W_n \Omega^i \cap F^s W_{n+s} \Omega^i) \subset p^l W_n \Omega^i, \tag{4.4.1}$$

et définit donc une application

$$\begin{aligned} \tilde{C}^r: F^s W_{n+s} \Omega^i / p^l W_n \Omega^i \cap F^s W_{n+s} \Omega^i &\rightarrow F^{s-r} W_{n+s-r} \Omega^i / p^l W_n \Omega^i \cap F^{s-r} W_{n+s-r} \Omega^i \\ \text{Cl}(F^s x) &\mapsto \text{Cl}(F^{s-r} R^r x); \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

\tilde{C}^r induit à son tour un isomorphisme, appelé isomorphisme de Cartier et noté \check{C}^r , d'inverse \check{F}^r ,

$$\begin{array}{c} F^s W_{n+s} \Omega^i / (p^l W_n \Omega^i \cap F^s W_{n+s} \Omega^i) + F^r dV^n W_r \Omega^{i-1} \\ \downarrow \check{C}^r \\ F^{s-r} W_{n+s-r} \Omega^i / p^l W_n \Omega^i \cap F^{s-r} W_{n+s-r} \Omega^i. \end{array} \tag{4.4.3}$$

Seul le cas $1 \leq l < n$ demande une démonstration, le cas $l = 0$ étant trivial et le cas $l \geq n$ (pour lequel il suffit de prendre $s = r$) vu en (4.1) et ([12], I, 3.3.1).

Pour montrer (4.4.1), supposons que $\omega_n \in W_n \Omega^i$ et $\omega_{n+s} \in W_{n+s} \Omega^i$ sont tels que $p^l \omega_n = F^s \omega_{n+s}$. On distinguera deux cas, $r \leq l$ et $r \geq l$.

Si $r \leq l$, alors $C^r p^l \omega_n = p^{l-r} R^r V^r \omega_n = V^l (R^r F^{l-r} \omega_n) = C^r F^s \omega_{n+s} = F^{s-r} (R^r \omega_{n+s})$ car $s - r \geq 0$. D'après (4.3) il existe $\omega_{n+s-r-l} \in W_{n+s-r-l} \Omega^i$ tel que $R^r F^{l-r} \omega_n = F^{s-r} \omega_{n+s-r-l}$, et par suite $C^r p^l \omega_n = p^l F^{s-r-l} \omega_{n+s-r-l}$, car $s \geq r + l$, ce qui prouve (4.4.1) dans ce cas.

Supposons $r \geq l$; cette fois $C^r p^l \omega_n = C^{r-l} C^l p^l \omega_n$ et $C^l p^l \omega_n = V^l R^l \omega_n = F^{s-l} R^l \omega_{n+s}$, car $s \geq l$; (4.3) nous fournit alors $\omega_{n+s-2l} \in W_{n+s-2l} \Omega^i$ tel que $R^l \omega_n = F^{s-l} \omega_{n+s-2l}$. D'où $C^l p^l \omega_n = V^l F^{s-l} \omega_{n+s-2l} = p^l F^{s-2l} \omega_{n+s-2l}$, car $s \geq 2l$, et $C^r p^l \omega_n = p^l F^{s-r-l} R^{r-l} \omega_{n+s-2l}$, car $s \geq r + l$; ce qui donne encore l'inclusion désirée.

Le reste est clair compte tenu de la relation $\check{C}^r F^r dV^n = dV^n R^r$. ■

II. Complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un cristal et cohomologie cristalline

Soient X un schéma lisse sur une base parfaite S de caractéristique $p > 0$ et E un cristal sur X . On construit ici (§1) le complexe de De Rham–Witt à

coefficients dans E et on établit la comparaison avec la cohomologie cristalline de E (§2).

Si l'on renforce les hypothèses sur E (§3) notre complexe satisfait au formalisme habituel du complexe de De Rham–Witt [21]: plus particulièrement encore, si E est un F -cristal unité sur X supposé propre, et lisse sur un corps parfait de caractéristique p , on obtient (§4) des propriétés de finitude et une suite spectrale des pentes tout à fait analogue aux résultats d'Illusie.

1. Définition du complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un cristal

1.1. Construction

Pour les résultats qui sont utilisés dans la construction ci-dessous, nous référons à [1] ou à [5].

LEMME 1.1.1. *Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, γ, δ deux PD-structures sur I . L'idéal J engendré par les $(\gamma_n(x) - \delta_n(x))$, $x \in I$, $n \geq 0$, est un sous-PD-idéal de I pour les deux PD-structures.*

Il suffit de prouver que pour tout $k \geq 1$, tout $n \geq 0$, tout $x \in I$

$$\gamma_k(\gamma_n(x) - \delta_n(x)) \in J.$$

Les axiomes des puissances divisées ([1], I, 1.1) entraînent que:

$$\begin{aligned} \gamma_k(\gamma_n(x) - \delta_n(x)) &= \sum_{0 \leq i \leq k} \gamma_i \circ \gamma_n(x) \cdot (-1)^{k-i} \gamma_{k-i} \circ \delta_n(x) \\ &\equiv \sum_i \gamma_i \circ \gamma_n(x) \cdot (-1)^{k-i} \delta_{k-i} \circ \delta_n(x) \pmod{J} \\ &\equiv \sum_i \gamma_i \circ \gamma_n(x) \cdot (-1)^{k-i} C_{k-i,n} \delta_{(k-i)n}(x) \pmod{J} \\ &\equiv \sum_i \gamma_i \circ \gamma_n(x) \cdot (-1)^{k-i} C_{k-i,n} \gamma_{(k-i)n}(x) \pmod{J} \\ &\equiv \sum_i \gamma_i \circ \gamma_n(x) \cdot (-1)^{k-i} \gamma_{k-i} \circ \gamma_n(x) \pmod{J} \\ &\equiv 0 \pmod{J}. \end{aligned}$$

■

On en déduit immédiatement:

COROLLAIRE 1.1.2. Avec les notations de 1.1.1, l'idéal $I/J \subset A/J$ possède une unique PD-structure telle que $(A, I) \rightarrow (A/J, I/J)$ soit un PD-morphisme pour les deux structures données sur I , et A/J est universel pour cette propriété.

1.1.3. Soient $\Lambda \rightarrow R$ un homomorphisme d'anneaux et \mathcal{I} le noyau de l'application surjective

$$R \otimes_{\Lambda} R \rightarrow R$$

$$\sum_i x_i \otimes y_i \mapsto \sum_i x_i y_i.$$

Désignons par $\mathcal{D}_{R/\Lambda}^n$ l'algèbre des parties principales à puissances divisées d'ordre n de R relativement à Λ ([5], 4.1 ou [1], I, 4.3). On obtient la suite exacte scindée

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow \mathcal{D}_{R/\Lambda}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi^n} \\ \xleftarrow{s_1, s_2} \end{array} R \rightarrow 0,$$

où K_n est le PD-idéal engendré par \mathcal{I} , et s_1, s_2 sont induites par $x \mapsto x \otimes 1$, $x \mapsto 1 \otimes x$. On en déduit donc deux décompositions $\mathcal{D}_{R/\Lambda}^n \simeq K_n \oplus R$, relatives à s_1 et s_2 .

Soient $(I, \gamma) \subset R$ un PD-idéal et $I'_n \subset \mathcal{D}_{R/\Lambda}^n$ l'image inverse de I par π^n ; des deux décompositions $I'_n \simeq K_n \oplus I$, relatives à s_1 et s_2 , on déduit deux PD-structures γ' et γ'' sur I'_n ([5], 3.12 ou [1], I, 1.6.4). Le corollaire 1.1.2 nous assure alors de l'existence d'un plus grand quotient de $\mathcal{D}_{R/\Lambda}^n$ tel que $\gamma' = \gamma''$: nous le noterons $\mathcal{D}_{R/\Lambda, \gamma}^n$.

LEMMA 1.1.4. Nous conservons les notations de 1.1.3. Alors le complexe de De Rham associé à $(R \rightrightarrows \mathcal{D}_{R/\Lambda, \gamma}^n)$ au sens de ([1], II, 3) est le complexe $\Omega_{R/\Lambda, \gamma}^i$, quotient de $\Omega_{R/\Lambda}^i$ par l'idéal différentiel gradué engendré par les éléments $(d(\gamma_m(x)) - \gamma_{m-1}(x)dx)$ pour $x \in I$.

Soit J_n l'idéal engendré par les $\gamma'_m(x) - \gamma''_m(x)$, $x \in I'_n$, de sorte que $\mathcal{D}_{R/\Lambda, \gamma}^n = \mathcal{D}_{R/\Lambda}^n / J_n$. Comme $\gamma' = \gamma''$ sur K_n , J_n est en fait engendré par les $\gamma'_m(1 \otimes x) - \gamma''_m(1 \otimes x)$ pour $x \in I$.

Par définition, si $dx = 1 \otimes x - x \otimes 1$, on a

$$\gamma''_m(1 \otimes x) = 1 \otimes \gamma_m(x)$$

$$\gamma'_m(1 \otimes x) = \gamma'_m(x \otimes 1 + dx)$$

$$= \gamma_m(x) \otimes 1 + \sum_{i \geq 1} (\gamma_{m-i}(x) \otimes 1)(dx)^{[i]}.$$

Si K'_n est l'image de K_n dans $\mathcal{D}_{R/\Lambda}^n/J_n$, le module Ω^1 relatif à $(R \rightrightarrows \mathcal{D}_{R/\Lambda, \gamma}^n)$ est par définition

$$\begin{aligned}\Omega^1 &= K'_1 \\ &= K_1/K_1 \cap J_1,\end{aligned}$$

tandis que

$$\Omega_{R/\Lambda}^1 = K_1.$$

Comme $K_1^{[2]} = 0$, $J_1 \cap K_1$ est engendré par les éléments

$$1 \otimes \gamma_m(x) - \gamma_m(x) \otimes 1 - (\gamma_{m-1}(x) \otimes 1) dx = d(\gamma_m(x)) - \gamma_{m-1}(x) dx,$$

et donc $\Omega^1 \simeq \Omega_{R/\Lambda, \gamma}^1$; le lemme en résulte. \blacksquare

PROPOSITION 1.1.5. *Soient (S, \mathcal{J}, δ) un schéma muni d'un PD-idéal, X un S -schéma, E un cristal sur X relativement à (S, \mathcal{J}, δ) , (U, t, γ) un objet de $\text{CRIS}(X/S, \mathcal{J}, \delta)$. La structure de cristal de E définit un complexe*

$$E_T \rightarrow E_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \Omega_{T/S, \gamma}^1 \rightarrow E_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \Omega_{T/S, \gamma}^2 \rightarrow \dots$$

Pour la démonstration, considérons le schéma $D_{T/S, \gamma}$ obtenu par la méthode de 1.1.3. Par définition, l'idéal de l'immersion diagonale $U \hookrightarrow D_{T/S, \gamma}$ est muni de puissances divisées telles que les deux projections $p_i: D_{T/S, \gamma} \rightrightarrows T$ soient des PD-morphismes; on obtient donc deux morphismes de $\text{CRIS}(X/S)$

$$(U, D_{T/S, \gamma}) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} (U, T),$$

d'où, E étant un cristal,

$$p_2^*(E_T) \simeq E_{(U, D_{T/S, \gamma})} \simeq p_1^*(E_T);$$

modulo $\bar{K}^{[2]}$, la différence des deux morphismes $E_T \rightarrow E_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{D}_{T/S, \gamma}$ donne comme d'habitude $\nabla: E_T \rightarrow E_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \Omega_{T/S, \gamma}^1$ (compte tenu du lemme 1.1.4). On en déduit, grâce à ([1], II), l'existence de

$$\nabla: E_T \otimes \Omega_{T/S, \gamma}^n \rightarrow E_T \otimes \Omega_{T/S, \gamma}^{n+1},$$

et il faut vérifier que $\nabla \circ \nabla = 0$. Le plus simple est de se ramener au cas standard: on plonge T (supposé affine) dans le spectre Y d'un anneau de polynômes. On en déduit des PD-morphismes

$$T \hookrightarrow D_U(Y), D_{T/S, \gamma} \hookrightarrow D_U(Y^2),$$

et des carrés commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} E_{D_U(Y)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^i & \xrightarrow{\nabla_Y} & E_{D_U(Y)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \Omega_{T/S, \gamma}^i & \xrightarrow{\nabla} & E_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \Omega_{T/S, \gamma}^{i+1}. \end{array}$$

Comme $\nabla_Y \circ \nabla_Y = 0$, on en déduit que $\nabla \circ \nabla = 0$. ■

PROPOSITION 1.1.6. *Soient X un schéma lisse sur une base parfaite S de caractéristique $p > 0$, et E un cristal sur X . Il existe un morphisme surjectif $\Omega_{W_n(\mathcal{O}_X), [1]}^i \twoheadrightarrow W_n \Omega_X^i$; si N est son noyau, l'image de $E_{W_n(X)} \otimes N$ dans $E_{W_n(X)} \otimes \Omega_{W_n(\mathcal{O}_X), [1]}^i$ est un sous-module différentiel gradué, tel que le quotient soit l'unique module différentiel gradué dont le $W_n \Omega_X^i$ -module gradué sous-jacent est $E_{W_n(X)} \otimes_{W_n \mathcal{O}_X} W_n \Omega_X^i$ et la différentielle donnée en degré zéro par*

$$E_{W_n(X)} \xrightarrow{\nabla} E_{W_n(X)} \otimes \Omega_{W_n(\mathcal{O}_X), [1]}^1 \twoheadrightarrow E_{W_n(X)} \otimes W_n \Omega_X^1.$$

Par ([21], I, 1.3) $W_n \Omega_X^i$ est un quotient de $\Omega_{W_n(\mathcal{O}_X), [1]}^i$, et la différentielle de $W_n \Omega_X^i$ vérifie ([21], I, 2.18.6): $d(x^{[i]}) = x^{[i-1]} dx$ pour tout $x \in \mathcal{V}W_{n-1}(\mathcal{O}_X)$. Le noyau N est alors un idéal différentiel gradué, et le reste de la proposition est clair d'après 1.1.5. ■

DÉFINITION 1.1.7. Le complexe $E_{W_n(X)} \otimes W_n \Omega_X^i$ de 1.1.6 sera appelé complexe de De Rham–Witt de cran n à coefficients dans le cristal E , et noté $E_n \otimes W_n \Omega^i$; ∇ désignera encore sa différentielle.

1.2. Premières propriétés

Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce travail, on supposera que

S est un schéma parfait de caractéristique $p > 0$, et X est un S -schéma lisse. (1.2.0)

Soit E un cristal sur X . La projection $R^r: W_{n+r}(\mathcal{O}_X) \rightarrow W_n(\mathcal{O}_X)$ définit un morphisme de schémas

$$u: W_n(X) := (|X|, W_n(\mathcal{O}_X)) \rightarrow W_{n+r}(X) \quad (1.2.1)$$

induisant le morphisme

$$(\text{Id}, u): (X, W_n(X)) \rightarrow (X, W_{n+r}(X))$$

de $\text{CRIS}(X/W)$. Comme E est un cristal, l'isomorphisme

$$u^*(E_{n+r}) \xrightarrow{\sim} E_n \quad (1.2.2)$$

fournit l'isomorphisme

$$E_{n+r} \otimes_{W_{n+r}, \mathcal{O}} u_*(M) \xrightarrow{\sim} u_*(E_n \otimes_{W_n, \mathcal{O}} M) \quad (1.2.3)$$

pour tout $n \geq 1$, $r \geq 0$ et tout $W_n \mathcal{O}$ -module M .

DÉFINITION 1.2.4. Soient $i \geq 0$ et $n \geq 1$ des entiers; nous noterons encore R l'application

$$R: E_{n+1} \otimes_{W_{n+1}, \mathcal{O}} W_{n+1} \Omega^i \rightarrow E_n \otimes_{W_n, \mathcal{O}} W_n \Omega^i, \sum_j x_j \otimes \omega_j \mapsto \sum_j u^*(x_j) \otimes R\omega_j.$$

Pour $r \geq 0$, nous posons

$$\text{Fil}^r(E_{n+r} \otimes_{W_{n+r}, \mathcal{O}} W_{n+r} \Omega^i) = \text{Ker} \{R^r: E_{n+r} \otimes_{W_{n+r}, \mathcal{O}} W_{n+r} \Omega^i \rightarrow E_n \otimes_{W_n, \mathcal{O}} W_n \Omega^i\},$$

ce qui définit une filtration, dite canonique, sur $E_{n+r} \otimes_{W_{n+r}, \mathcal{O}} W_{n+r} \Omega^i$.

Par la fonctorialité de sa construction R définit un morphisme

$$E_{n+1} \otimes_{W_{n+1}, \mathcal{O}} W_{n+1} \Omega^i \rightarrow E_n \otimes_{W_n, \mathcal{O}} W_n \Omega^i,$$

semi-linéaire par rapport à $R: W_{n+1} \Omega^i \rightarrow W_n \Omega^i$, qui fait de $E \otimes_{W, \mathcal{O}} W \Omega^i$ un pro-complexe.

DÉFINITION 1.2.5. Le pro-complexe $E \otimes_{W, \mathcal{O}} W \Omega^i$ sera appelé pro-complexe de De Rham–Witt à coefficients dans le cristal E ; sa limite projective $\varprojlim E_n \otimes_{W_n, \mathcal{O}} W_n \Omega^i$, avec pour différentielle la limite projective des différentielles, s'era appelée complexe de De Rham–Witt à coefficients dans le cristal E .

Posons $E_{W(X)} = \varinjlim E_n$. Soit i un entier ≥ 0 ; les flèches canoniques $E_{W(X)} \otimes_{W\mathcal{O}} W\Omega^i \rightarrow E_n \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\Omega^i$ vérifient des compatibilités naturelles avec les flèches de transition du système projectif $(E_n \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\Omega^i)_n$, d'où une flèche

$$E_{W(X)} \otimes_{W\mathcal{O}} W\Omega^i \rightarrow \varinjlim_n (E_n \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\Omega^i). \tag{1.2.6}$$

PROPOSITION 1.2.7. *Le morphisme (1.2.6) est un isomorphisme dans chacun des deux cas suivants:*

- (1.2.7.1) *X est muni de la topologie de Zariski, et E est localement libre de type fini.*
- (1.2.7.2) *X est muni de la topologie étale, et E est le cristal de Dieudonné ([3] et [4]) $\mathbb{D}(G)$ d'un p-groupe fini localement libre de type multiplicatif ou étale sur X.*

Puisque la limite projective commute aux sommes directes finies, (1.2.7.1) est clair.

Prouvons (1.2.7.2). Soit m un entier ≥ 0 . Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec } A$ de X , on a $H^q(U, p^m W_n\Omega^i) = 0$ pour tout n et tout $q > 0$, et le système projectif $\Gamma(U, p^m W_n\Omega^i)_n = (p^m W_n\Omega^i_A)_n$ a des flèches de transition surjectives, donc vérifie la condition de Mittag–Leffler; d'où par le lemme ([5], 7.20) $R^1 \varinjlim p^m W_n\Omega^i = 0$, et, compte tenu de ce que $W\Omega^i$ est sans p -torsion, un isomorphisme

$$W\Omega^i/p^m W\Omega^i \simeq \varinjlim_n (W_n\Omega^i/p^m W_n\Omega^i). \tag{1.2.7.3}$$

Soit maintenant G comme en (1.2.7.2); d'après ([3], 4.1) on a, localement pour la topologie étale sur X , un isomorphisme $\mathbb{D}(G)_{W(X)} \simeq \bigoplus_{1 \leq j \leq s} W\mathcal{O}/p^m W\mathcal{O}$, ce qui fournit (1.2.7.2) via (1.2.7.3). ■

REMARQUE 1.2.8. Soient $r \geq 0$ et $n \geq 1$ des entiers. La multiplication par p^r sur $E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i$ est la composée de R^r (itérée de la projection canonique) et d'un morphisme

$$\underline{p}^r: E_n \otimes W_n\Omega^i \rightarrow E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i,$$

car $\text{Fil}^n(E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i)$ est l'image de $E_{n+r} \otimes \text{Fil}^n W_{n+r}\Omega^i$ dans $E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i$ et $p^r \text{Fil}^n W_{n+r}\Omega^i = 0$ ([21], I, 3.4).

(1.2.8.1) Si E est localement libre \underline{p}^r est injective ([21], I, 3.4).

(1.2.8.2) Par contre, si E n'est pas localement libre, \underline{p}^r n'est pas nécessairement injective. En effet si $E = \mathbb{D}(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$, $1 \leq l \leq r$, on a $E_{n+r} = W_{n+r}\mathcal{O}/p^l W_{n+r}\mathcal{O}$ ([3], 4.1) et p^r est l'application nulle, par suite \underline{p}^r est nulle puisque R est surjective.

2. *Comparaison avec la cohomologie cristalline*

Notons $W = W(S) := (|S|, \mathcal{W}(\mathcal{O}_S))$ et $W_n = W_n(S)$ pour $n \geq 1$. Soient E un cristal sur le S -schéma lisse X et $u_{X/W_n}^{\bar{\cdot}}$ (resp. $u_{X/W_n}^{\text{ét}}$) le morphisme de petits topos zariskiens

$$u_{X/W_n}^{\bar{\cdot}}: (X/W_n)_{\text{cris,Zar}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$$

(resp. de petits topos étales

$$u_{X/W_n}^{\text{ét}}: (X/W_n)_{\text{cris,ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}):$$

on notera u_{X/W_n} l'un quelconque de ces deux morphismes, le contexte précisant duquel il s'agit; de même $E_n \otimes W_n \Omega^{\cdot}$ désignera encore l'extension naturelle de $E_n \otimes W_n \Omega^{\cdot}$ au petit site étale de X . On va définir, pour tout $n \geq 1$, un morphisme

$$\mathbb{R}u_{X/W_n*}(E) \rightarrow E_n \otimes W_n \Omega^{\cdot} \quad (2.0.1)$$

de $D(\pi^{-1}(W_n(\mathcal{O}_S)))$, où $\pi: X \rightarrow S$ est la projection, de la manière suivante.

Supposons d'abord qu'on puisse plonger X , par une immersion fermée, dans un schéma formel Y lisse sur W , muni d'un W -morphisme $F: Y \rightarrow Y^{(\sigma)} := Y \times_W (W, \sigma)$ relevant le Frobenius de $Y \times_W S$. Pour $n \geq 1$, posons $Y_n = Y \times_W W_n$ et notons \bar{Y}_n l'enveloppe à puissances divisées de X dans Y_n . On sait ([21], 0.3.2.4) qu'on a un isomorphisme canonique de $D(\pi^{-1}(W_n(\mathcal{O}_S)))$

$$\mathbb{R}u_{X/W_n*}(E) \simeq E_{\bar{Y}_n} \otimes \Omega_{Y_n/W_n}^{\cdot} \simeq E_{\bar{Y}_n} \otimes \Omega_{\bar{Y}_n, [1]}^{\cdot}, \quad (2.0.2)$$

pour la topologie de Zariski, ou la topologie étale. Si t_F est le PD-morphisme ([21], II, 1.1.5) $\mathcal{O}_{\bar{Y}_n} \rightarrow W_n \mathcal{O}_X$, la flèche

$$t_F^{\cdot}: \Omega_{\bar{Y}_n, [1]}^{\cdot} \rightarrow W_n \Omega^{\cdot} \quad (2.0.3)$$

de ([21], II, 1.1.6) induit, par tensorisation avec le cristal E , un morphisme \tilde{t} de complexes

$$\begin{aligned} \tilde{t}: E_{\bar{Y}_n} \otimes \Omega_{\bar{Y}_n, [1]}^{\cdot} &\rightarrow E_n \otimes W_n \Omega^{\cdot} \\ x \otimes \omega &\mapsto t_F^*(x) \otimes t_F(\omega) \end{aligned} \quad (2.0.4)$$

puisque $t_F^*(E_{\bar{Y}_n}) \simeq E_{W_n(X)} = E_n$.

Nous définirons (2.0.1) comme le composé de (2.0.2) et (2.0.4); ce composé est indépendant de (Y, F) ([21], II, 1.1.7 et 1.1.8).

Dans le cas général où le plongement de X dans Y n'existe pas, on définit le morphisme (2.0.1) par descente cohomologique suivant la méthode d'Illusie ([21], II, 1.1.9 à 1.1.12).

Le but de ce §2 est le théorème:

THÉORÈME 2.1. *Le morphisme (2.0.1)*

$$\mathbb{R}u_{X/W_n^*}(E) \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega$$

est un isomorphisme de $D(\pi^{-1}(W_n(\mathcal{O}_S)))$ lorsque l'une des conditions suivantes est réalisée:

(2.1.1) *X est muni de la topologie de Zariski et E est un cristal localement libre (pas nécessairement de type fini).*

(2.1.2) *X est muni de la topologie étale et $E = \mathbb{D}(G)$, où G est un p -groupe fini localement libre de type multiplicatif ou étale sur X .*

Un petit mot sur les hypothèses du théorème. Dans le premier cas (2.1.1), le fait que E soit localement libre va nous permettre par dévissage de ramener la démonstration à un énoncé sur le complexe de De Rham–Witt $W\Omega$ (cf. (2.5.7.2) et (2.5.7.3)). Pour le second cas (2.1.2), le dévissage précédent ne convient plus, mais on sait alors expliciter E_n localement pour la topologie étale (cf. 2.3) et on se ramène grâce à (I, 2.1) au cas $E = \mathcal{O}_{X/W}$ d'Illusie ([21], II, 1.4).

2.1.3. La démonstration est une question locale sur X , donc on peut supposer X et S affines, $X = \text{Spec } A$, $S = \text{Spec } k$, et choisir: a) un relèvement de A en une algèbre B plate sur $W = W(k)$, p -adiquement séparée et complète; b) un relèvement de l'endomorphisme de Frobenius de A en un endomorphisme F de B sur W , compatible à l'automorphisme de Frobenius σ de W . Pour définir (2.0.1), utilisons le plongement de X dans $Y = \text{Spf } B$, muni de F . Posons $B_n = B/p^n B$, $X_n = \text{Spec } B_n$; notons que $A = B/pB = B_n/pB_n$. Puisque $\bar{B}_n = B_n$, et par suite $\Omega_{\bar{B}_n, [\cdot]} = \Omega_{B_n}^*$, (2.0.2) s'écrit

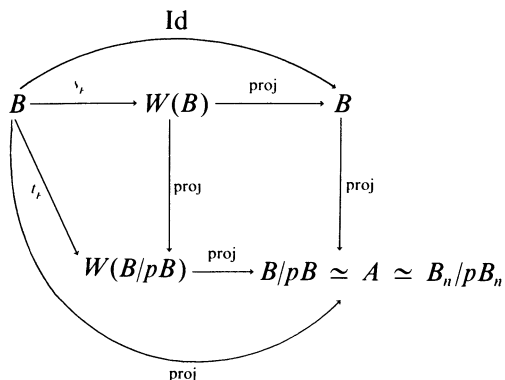
$$\mathbb{R}u_{X/W_n^*}(E) \simeq E_{B_n} \otimes \Omega_{B_n}^*$$

et (2.0.4) devient

$$\tilde{t}: E_{B_n} \otimes \Omega_{B_n}^* \rightarrow E_{W_n(A)} \otimes W_n\Omega_A^*, x \otimes \omega \mapsto t_F^*(x) \otimes t_F(\omega).$$

Il s'agit donc de prouver que ce dernier homomorphisme est un quasi-isomorphisme.

2.2. REMARQUE. Le diagramme suivant d'homomorphismes d'anneaux est commutatif ([21], 0.1.3.16):



où proj désigne les diverses projections, Id est l'identité et s_F la flèche décrite par Illusie ([21], 0.1.3.16). La projection $B_n \rightarrow B_n/pB_n$ se factorise donc par t_F :

$$B_n \xrightarrow{t_F} W_n(A) \xrightarrow{\text{proj}} A = B_n/pB_n.$$

On en conclut que si un élément $x \in A$ (resp. $x \in A^* = \{\text{éléments inversibles de } A\}$) est relevé en $x_n \in B_n$ (resp. $x_n \in B_n^*$), alors $t_F(x_n) \in W_n(A)$ (resp. $t_F(x_n) \in W_n(A)^*$) relève x .

2.3. Rappelons quelques résultats [3]

2.3.1. Si G est un p -groupe fini localement libre ou un groupe p -divisible sur X , on notera $\mathbb{D}(G)$ son cristal de Dieudonné, G^* son dual de Cartier, et G^\vee son dual de Pontryagin si G est étale. On a les isomorphismes suivants de faisceaux étales sur T :

- si G est étale: $\mathbb{D}(G)_{(U,T)} \simeq G^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T$,
- si G est de type multiplicatif: $\mathbb{D}(G)_{(U,T)} \simeq G^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T$.

2.3.2. Soit G un p -groupe fini localement libre sur X . Localement pour la topologie étale, on a les isomorphismes suivants:

- si G est étale: $G \simeq \bigoplus_i \mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}$,
- si G est de type multiplicatif: $G \simeq \bigoplus_i \mu_{p^{n_i}}$, d'où dans les deux cas, d'après 2.3.1,

$$\mathbb{D}(G) \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_{X/W}/p^{n_i}\mathcal{O}_{X/W}, \tag{2.3.2.1}$$

localement pour la topologie étale. En particulier, on en déduit les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(G)_{B_n} &\simeq \bigoplus_i B_n/p^{n_i} B_n, \\ \mathbb{D}(G)_{W_n(A)} &\simeq \bigoplus_i W_n(A)/p^{n_i} W_n(A), \end{aligned} \tag{2.3.2.2}$$

comme modules à connexions.

2.4. *Démonstration du cas 2.1.2 du théorème 2.1*

Que G soit étale ou de type multiplicatif, on obtient d’après (2.3.2.2), localement pour la topologie étale, des isomorphismes:

$$\begin{aligned} E_{B_n} \otimes \Omega_{B_n}^i &\simeq \bigoplus_i ((B_n/p^{n_i} B_n) \otimes_{B_n} \Omega_{B_n}^i) \simeq \bigoplus_i \Omega_{B_n}^i/p^{n_i} \Omega_{B_n}^i \\ &\simeq (\bigoplus_{n_i \leq n} \Omega_{B_n}^i) \oplus (\bigoplus_{n_i > n} \Omega_{B_n}^i), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_{W_n(A)} \otimes W_n \Omega_A^i &\simeq \bigoplus_i [(W_n A/p^{n_i} W_n A) \otimes_{W_n A} W_n \Omega_A^i] \simeq \bigoplus_i W_n \Omega_A^i/p^{n_i} W_n \Omega_A^i \\ &\simeq (\bigoplus_{n_i \leq n} W_n \Omega_A^i/p^{n_i} W_n \Omega_A^i) \oplus (\bigoplus_{n_i > n} W_n \Omega_A^i). \end{aligned}$$

Or si $n_i \leq n$, on a les quasi-isomorphismes (qis en abrégé)

$$\Omega_{B_{n_i}}^i \xrightarrow[\text{qis}([21], 11.1.4)]{\overset{r_F}{\sim}} W_{n_i} \Omega_A^i \xleftarrow[\text{qis}(1.2.1)]{\sim} W_n \Omega_A^i/p^{n_i} W_n \Omega_A^i;$$

la conclusion en résulte immédiatement. ■

2.5. *Démonstration du cas 2.1.1*

Soit E un cristal localement libre sur X . Introduisons les filtrations suivantes:

$$\mathcal{F}_n^m = \text{Im} (E_{B_n} \otimes_{B_n} p^m \Omega_{B_n}^i \rightarrow E_{B_n} \otimes_{B_n} \Omega_{B_n}^i) \tag{2.5.0.1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^m &= \text{Im} (E_{W_n A} \otimes_{W_n A} \text{Fil}^m W_n \Omega_A^i \rightarrow E_{W_n A} \otimes_{W_n A} W_n \Omega_A^i) \\ &= \text{Fil}^m (E_n \otimes W_n \Omega^i) \end{aligned} \tag{2.5.0.2}$$

appelées respectivement filtration p-adique de $E_{B_n} \otimes \Omega_{B_n}$, et filtration canonique (1.2.4) de $E_n \otimes W_n \Omega$. Puisque E est localement libre, on a $\mathcal{F}_n'^m = E_{B_n} \otimes_{B_n} p^m \Omega_{B_n}$ et $\mathcal{F}_n^m = E_{W_n A} \otimes_{W_n A} \text{Fil}^m W_n \Omega_A$. Il est clair que $\mathcal{F}_n^m = \mathcal{F}_n'^m = 0$ pour $m \geq n$.

2.5.1. Soit $n \geq 1$. On sait que la différentielle sur $E_{B_n} \otimes \Omega_{B_n}$ est compatible à $\mathcal{F}_n'^m$; montrons que la différentielle ∇ sur $E_n \otimes_{W_n A} W_n \Omega$ est compatible à \mathcal{F}_n^m .

Soient $i \geq 0$, $x \in E_n$, $\omega \in \text{Fil}^m W_n \Omega_A^i$; nous écrivons $x \otimes \omega \in \mathcal{F}_n^{m,i}$. On a $\nabla(x \otimes \omega) = \nabla(x) \cdot \omega + x \otimes d\omega$. Posons $\nabla(x) = \sum_j x_j \otimes \omega_j$, avec $x_j \in E_n$, $\omega_j \in W_n \Omega_A^1$; comme $\text{Fil}^m W_n \Omega_A^i$ est un idéal différentiel gradué, il vient $\omega_j \omega \in \text{Fil}^m W_n \Omega_A^{i+1}$ et $\nabla(x) \cdot \omega \in \mathcal{F}_n^{m,i+1}$. De même $d\omega \in \text{Fil}^m W_n \Omega_A^{i+1}$. D'où $\nabla(x \otimes \omega) \in \mathcal{F}_n^{m,i+1}$, ce qui prouve

$$\nabla(\mathcal{F}_n^{m,i}) \subset \mathcal{F}_n^{m,i+1}; \tag{2.5.1.1}$$

par passage au quotient ∇ définit une différentielle

$$\nabla: \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^{m,i} \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^{m,i+1}. \tag{2.5.1.2}$$

2.5.2. De $t_F(p^m B_n) \subset V^m W_{n-m}(A)$ ([21], p. 509) on déduit $t_F(p^m \Omega_{B_n}) \subset \text{Fil}^m W_n \Omega_A$; d'où $\tilde{t}(\mathcal{F}_n'^m) \subset \mathcal{F}_n^m$, et, par passage au quotient, \tilde{t} induit un morphisme de complexes, encore noté $\tilde{t}: \text{gr}_{\mathcal{F}_n'}^m \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m$. Comme les filtrations $\mathcal{F}_n'^m$ et \mathcal{F}_n^m sont finies, il nous suffit donc, pour obtenir le quasi-isomorphisme du théorème, de montrer que:

$$\tilde{t} \text{ induit un quasi-isomorphisme de } \text{gr}_{\mathcal{F}_n'}^m \text{ dans } \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m \text{ pour } m \leq n - 1. \tag{2.5.2.1}$$

Examinons le cas $m = 0$:

LEMME 2.5.2.2. \tilde{t} induit un quasi-isomorphisme de $\text{gr}_{\mathcal{F}_n'}^0$ dans $\text{gr}_{\mathcal{F}_n}^0$.

En effet, le morphisme

$$\begin{array}{c} \text{gr}_{\mathcal{F}_n'}^0 = E_{B_n} \otimes_{B_n} (\Omega_{B_n}/p\Omega_{B_n}) \simeq E_{B_n} \otimes_{B_n} \Omega_A \simeq E_A \otimes_A \Omega_A \\ \downarrow \tilde{t} \\ \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^0 = E_n \otimes_{W_n A} \text{gr}^0 W_n \Omega_A \simeq E_n \otimes_{W_n A} W_1 \Omega_A \simeq E_1 \otimes_A \Omega_A \end{array}$$

est l'identité d'après la remarque 2.2. ■

2.5.3. Donnons les expressions de $\text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m$ et $\text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m$ pour $0 \leq m \leq n - 1$.

Le morphisme du site cristallin $(\text{Id}, v): (X, X) \rightarrow (X, X_n)$, où v est déduit de la projection $B_n \rightarrow A$, fournit l'isomorphisme $E_{B_n} \otimes_{B_n} A = v^*(E_{B_n}) \simeq E_A$ puisque E est un cristal; d'autre part, la flèche $\underline{p}^m: \Omega_A^i \rightarrow p^m \Omega_{B_n}^i / p^{m+1} \Omega_{B_n}^i$ qui associe à $\omega \in \Omega_A^i$ la classe de $p^m \omega_n$, où $\omega_n \in \Omega_{B_n}^i$ relève ω , est un isomorphisme; on obtient:

LEMME 2.5.3.1. *Pour $0 \leq m \leq n - 1$, on a les isomorphismes*

$$\text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m \simeq E_{B_n} \otimes_{B_n} (p^m \Omega_{B_n}^i / p^{m+1} \Omega_{B_n}^i) \xleftarrow{\sim} E_1 \otimes_A \Omega_A^i \simeq E_{B_n} \otimes_{B_n} \Omega_A^i.$$

On obtient de même:

LEMME 2.5.3.2. *Pour $0 \leq m \leq n - 1$, on a les isomorphismes*

$$\begin{aligned} \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m &\simeq E_n \otimes_{W_n A} \text{gr}^m W \Omega_A^i \simeq E_{m+1} \otimes_{W_{m+1} A} \text{gr}^m W_{m+1} \Omega_A^i \\ &\simeq E_{m+1} \otimes_{W_{m+1} A} \text{Fil}^m W_{m+1} \Omega_A^i. \end{aligned}$$

L'injection $\underline{p}: \text{Fil}^m W_{m+1} \Omega_A^i \hookrightarrow \text{Fil}^{m+1} W_{m+2} \Omega_A^i$ nous permet de définir, via 2.5.3.2, un morphisme de complexes (cf. 1.2.8)

$$\begin{array}{ccc} E_{m+1} \otimes_{W_{m+1} A} \text{Fil}^m W_{m+1} \Omega_A^i & \hookrightarrow & E_{m+2} \otimes_{W_{m+2} A} \text{Fil}^{m+1} W_{m+2} \Omega_A^i \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{p}: \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m & \hookrightarrow & \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^{m+1}. \end{array} \tag{2.5.4}$$

2.5.5. Le carré

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{B_n}^i & \xrightarrow{t'_F} & W_n \Omega_A^i \\ \text{proj.} \downarrow & & \downarrow \text{proj.} \\ \Omega_A^i & \xrightarrow{t'_F = \text{Id}} & \Omega_A^i, \end{array}$$

où les deux flèches verticales sont les projections canoniques, est commutatif, les deux composés étant des homomorphismes d'algèbres différentielles graduées induisant la projection $B_n \rightarrow A$ en degré 0. Il en résulte, pour

tout $n \geq 1$, un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 E_{B_n} \otimes_{B_n} \Omega_{B_n}' & \xrightarrow{\tilde{t}} & E_n \otimes_{W_n A} W_n \Omega_A' \\
 \text{proj} \downarrow & & \downarrow R^{n-1} \\
 E_A \otimes_A \Omega_A' & \xrightarrow{\tilde{t} = \text{Id}} & E_1 \otimes_A \Omega_A',
 \end{array}$$

et donc, pour $0 \leq m \leq n - 1$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 E_A \otimes_A \Omega_A' & \xrightarrow{\tilde{t} = \text{Id}} & E_1 \otimes_A \Omega_A' \\
 \downarrow 1 \otimes \underline{p}^m \wr & & \downarrow \underline{p}^m \\
 E_{B_n} \otimes_{B_n} (p^m \Omega_{B_n}' / p^{m+1} \Omega_{B_n}') & \xrightarrow{\tilde{t}} & E_n \otimes_{W_n A} (\text{Fil}^m W_n \Omega_A' / \text{Fil}^{m+1} W_n \Omega_A') \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m & & \text{gr}_{\mathcal{F}_n}^m
 \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est un isomorphisme d'après 2.5.3.1, la flèche verticale de droite, l'itérée de (2.5.4), et la flèche horizontale supérieure, l'identité. Pour obtenir le quasi-isomorphisme (2.5.2.1), et donc le théorème, il nous suffit de montrer que la flèche verticale de droite, \underline{p}^m , est un quasi-isomorphisme, ce qui résultera de la proposition:

PROPOSITION 2.5.6. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un cristal localement libre sur X (X vérifiant 1.2.0); alors le morphisme de complexes*

$$E_{n+1} \otimes_{W_{n+1} \mathcal{O}} \text{gr}^n W \Omega' \xrightarrow{\underline{p}} E_{n+2} \otimes_{W_{n+2} \mathcal{O}} \text{gr}^{n+1} W \Omega',$$

$$\sum_i R(x_i) \otimes \omega_i \mapsto \sum_i x_i \otimes \underline{p} \omega_i,$$

est un quasi-isomorphisme.

2.5.7. La démonstration de 2.5.6 est une question locale sur X ; on reprend donc les hypothèses 2.1.3 et on va suivre la méthode développée par Illusie dans ([21], I, 3.13). Considérant la suite exacte de complexes (puisque E est

localement libre)

$$0 \rightarrow E_{n+1} \otimes_{W_{n+1}(A)} \text{gr}^n W\Omega_A \xrightarrow{p} E_{n-2} \otimes_{W_{n+2}(A)} \text{gr}^{n+1} W\Omega_A \\ \rightarrow E_{n+2} \otimes_{W_{n+2}(A)} (\text{gr}^{n+1} W\Omega_A / \underline{p} \text{gr}^n W\Omega_A) \rightarrow 0,$$

il s'agit de prouver l'acyclicité du quotient K' . Pour ce faire, utilisons une base locale (e_i) de E_{n+2} ; tout élément de $E_{n+2} \otimes_{W_{n+2}(A)} \text{gr}^{n+1} W\Omega_A$ s'écrivant sous la forme $\sum_i e_i \otimes u_i$, avec $u_i \in \text{gr}^{n+1} W\Omega_A = \text{Fil}^{n+1} W_{n+2}\Omega_A^q$, on a

$$\nabla \left(\sum_i e_i \otimes u_i \right) = \sum_i (\nabla(e_i) \cdot u_i + e_i \otimes du_i);$$

et en posant $\nabla(e_i) = \sum_j e_j \otimes \omega_{j,i}$ avec $\omega_{j,i} \in W_{n+2}\Omega_A^1$, on obtient

$$\nabla \left(\sum_i e_i \otimes u_i \right) = \sum_i e_i \otimes \left(\sum_j \omega_{ij} u_j + du_i \right). \quad (2.5.7.1)$$

Comme E est localement libre, l'acyclicité (à prouver) de K' signifie, grâce à (2.5.7.1), que si l'on a

$$du_i + \sum_j \omega_{i,j} u_j \in \underline{p} \text{gr}^n W\Omega_A^{q+1} \text{ pour tout } i, \quad (2.5.7.2)$$

alors

$$\text{pour tout } i, u_i = dv_i + \sum_j \omega_{i,j} v_j \text{ mod } \underline{p} \text{gr}^n W\Omega_A^q \text{ avec } v_j \in \text{gr}^{n+1} W\Omega_A^{q-1} \\ \text{pour tout } j. \quad (2.5.7.3)$$

Supposons donc que (2.5.7.2) soit vérifié, avec $u_i \in \text{gr}^{n+1} W\Omega_A^q$ et $\omega_{i,j} \in W_{n+2}\Omega_A^1$, pour tout i et tout j . Puisque

$$\underline{p} \text{gr}^n W\Omega_A^{q+1} = p \text{Fil}^n W_{n+2}\Omega_A^{q+1} \subset pW_{n+2}\Omega_A^{q+1},$$

et que

$$F^{n+1} pW_{n+2}\Omega_A^{q+1} \subset p\Omega_A^{q+1} = 0,$$

on obtient

$$F^{n+1} \left(du_i + \sum_j \omega_{i,j} u_j \right) = 0 \text{ pour tout } i. \quad (2.5.7.4)$$

Explicitons cette égalité: écrivons

$$u_j = V^{n+1}a_j + dV^{n+1}b_j \in \text{gr}^{n+1}W\Omega_A^q \simeq \text{Fil}^{n+1}W_{n+2}\Omega_A^q$$

avec $a_j \in \Omega_A^q$, $b_j \in \Omega_A^{q-1}$. D'où $F^{n+1}(du_i) = da_i$ (car $FdV = d$, I, 1.1), et $F^{n+1}(u_j) = p^{n+1}a_j + db_j = db_j$ (car $FV = p$ et $pa_j = 0$); comme $dF = pFd$ (I, 1.1) on a $d(F^{n+1}\omega_{ij}) = p^{n+1}F^{n+1}(d\omega_{ij}) = 0$ (car $F^{n+1}(d\omega_{ij}) \in W_1\Omega_A^2$) et compte tenu du fait que $F^{n+1}\omega_{ij} \in W_1\Omega_A^1$ est de degré 1, on obtient

$$\begin{aligned} d[(F^{n+1}\omega_{ij}) \cdot b_j] &= d(F^{n+1}\omega_{ij}) \cdot b_j - F^{n+1}(\omega_{ij}) db_j \\ &= -F^{n+1}(\omega_{ij}) db_j. \end{aligned}$$

La relation (2.5.7.4) s'écrit donc $d[a_i - \sum_j F^{n+1}(\omega_{ij}) \cdot b_j] = 0$ pour tout i ; par l'isomorphisme $C^{-1}: \Omega_A^q \xrightarrow{\sim} \Omega_{A,d=0}^q/d\Omega_A^{q-1}$, on en déduit, pour tout i , l'existence de $\alpha_i \in \Omega_A^q$ tel que $C^{-1}(\alpha_i) = a_i - \sum_j F^{n+1}(\omega_{ij}) \cdot b_j \text{ mod } d\Omega_A^{q-1}$. Or, de la relation $\check{V}C^{-1} = \underline{p}$ (cf. I, 4.1), on tire

$$\begin{aligned} \underline{p}\alpha_i &= \check{V}C^{-1}(\alpha_i) = \check{V}\left(a_i - \sum_j F^{n+1}(\omega_{ij}) \cdot b_j \text{ mod } d\Omega_A^{q-1}\right) \\ &= V\left(a_i - \sum_j F^{n+1}(\omega_{ij}) \cdot b_j\right) \text{ (cf. I, 4),} \end{aligned}$$

et comme le carré

$$\begin{array}{ccc} \Omega_A^q & \xrightarrow{\underline{p}} & W_2\Omega_A^q \\ \downarrow V^n & & \downarrow V^n \\ W_{n+1}\Omega_A^q & \xrightarrow{\underline{p}} & W_{n+2}\Omega_A^q \end{array}$$

commute, on obtient

$$V^{n+1}\left(a_i - \sum_j F^{n+1}(\omega_{ij}) \cdot b_j\right) = V^n \underline{p}\alpha_i = \underline{p}V^n\alpha_i \in \underline{p}V^n W_1\Omega_A^q;$$

compte tenu de l'inclusion $\underline{p}V^n W_1\Omega_A^q \subset \underline{p}\text{Fil}^n W_{n+1}\Omega_A^q = \underline{p}\text{gr}^n W\Omega_A^q$ et de $V(Fx \cdot y) = x \cdot Vy$ (cf. I, 1.1), il en résulte que pour tout i on a

$$t_i = V^{n+1}(a_i) + \sum_j \omega_{ij} \cdot V^{n+1}(b_j) \in \underline{p}\text{gr}^n W\Omega_A^q.$$

En remarquant que u_i s'écrit

$$u_i = V^{n+1}a_i + dV^{n+1}b_i = dV^{n+1}b_i + \sum_j \omega_{ij} V^{n+1}(b_j) + t_i,$$

il suffit dans (2.5.7.3) de prendre $v_i = V^{n+1}(b_i)$, puisque

$$V^{n+1}(b_i) \in V^{n+1}\Omega_A^{q-1} \subset \text{Fil}^{n+1}W_{n+2}\Omega_A^{q-1} = \text{gr}^{n+1}W\Omega_A^{q-1}.$$

L'acyclicité de K^\cdot est ainsi établie, ce qui prouve la proposition 2.5.6 et achève, par là même, la démonstration de 2.1. ■

2.6. Tirons quelques conséquences de 2.5.6 portant sur la filtration canonique et la filtration p -adique de $E_n \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\Omega^\cdot$.

Compte tenu de 2.5.6 on démontre par un procédé analogue à (I, 2.1) le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2.6.1. *Soient E un cristal localement libre (pas nécessairement de type fini) sur X , $n \geq 1$, $1 \leq m \leq n$. La projection canonique*

$$E_n \otimes W_n\Omega^\cdot / p^m E_n \otimes W_n\Omega^\cdot \rightarrow E_m \otimes W_m\Omega^\cdot \simeq E_n \otimes W_n\Omega^\cdot / \text{Fil}^m(E_n \otimes W_n\Omega^\cdot)$$

est quasi-isomorphisme.

COROLLAIRE 2.6.2. *Si E est un cristal localement libre de type fini sur X , et $n \geq 1$, les flèches naturelles de systèmes projectifs*

$$p^n(E. \otimes W. \Omega^\cdot) \rightarrow \text{Fil}^n(E. \otimes W. \Omega^\cdot),$$

$$E. \otimes W. \Omega^\cdot / p^n(E. \otimes W. \Omega^\cdot) \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^\cdot$$

sont des quasi-isomorphismes, et la flèche canonique

$$E_{W(X)} \otimes W\Omega^\cdot / p^n(E_{W(X)} \otimes W\Omega^\cdot) \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^\cdot$$

est un quasi-isomorphisme.

Résulte de 2.6.1 et ([21], I, 3.17.3) via (1.2.7.1). ■

2.7. Conséquence pour la cohomologie cristalline

2.7.1. **COROLLAIRE DU THÉORÈME 2.1.** *Avec les mêmes hypothèses sur E que dans 2.1, et la topologie de Zariski sur X , il existe, pour tout $n \geq 1$, un isomorphisme*

$$H^i((X/W_n)_{\text{cris}}, E) \simeq \mathbb{H}^i(X, E_n \otimes W_n\Omega^\cdot).$$

Le corollaire résulte de 2.1 en prenant les sections, grâce au fait que E et $E_n \otimes W_n \Omega^i$ sont quasi-cohérents ([25], III, 3.8). ■

Le théorème 2.1 et ce corollaire 2.7.1 généralisent ainsi le théorème de comparaison d'Illusie ([21], II, 1.4) qui concernait le cas $E = \mathcal{O}_{X/W}$.

2.7.2. REMARQUE. Quand nous aurons établi le résultat 4.1.1 au §4, nous pourrons, sous les hypothèses de 2.7.1 avec en plus X propre et lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et E de type fini, en déduire par passage à la limite l'isomorphisme

$$H^i(X/W, E) \simeq H^i(X, E_{W(X)} \otimes W\Omega^i).$$

3. Formalisme F, V, ∇ ; isomorphisme de Cartier

3.0. Notation. Dorénavant, étant donné un F -cristal E sur X , nous noterons Φ_E (ou Φ , ou Φ_E) l'homomorphisme linéaire $E_r^\sigma \rightarrow E_r$ donné avec le cristal E et nous réserverons l'écriture F_E à l'endomorphisme σ -semi-linéaire de E_r qui s'en déduit, de sorte que, si W est l'homomorphisme d'extension des scalaires $E_r \rightarrow E_r^\sigma = (F_{W_r(X)})^*(E_r)$ l'on ait $F_E = \Phi \circ W$ et $F_{E^\sigma} = W \circ \Phi$.

3.1. Frobenius F

DÉFINITION 3.1.1. Soient E un F -cristal sur X , $n \in \mathbb{N}$ et $u: W_n(X) \rightarrow W_{n+1}(X)$ le morphisme 1.2.1. Définissons le Frobenius F par

$$F: E_{n+1} \rightarrow E_n, x \mapsto u^*(F_E(x)) = RF_E(x) \quad (\text{cf. 1.2.4}),$$

et pour $i \geq 1$, par

$$F: E_{n+1} \otimes W_{n+1} \Omega^i \rightarrow E_n \otimes W_n \Omega^i, \sum_j x_j \otimes \omega_j \mapsto \sum_j F(x_j) \otimes F\omega_j.$$

F est semi-linéaire par rapport à l'homomorphisme $RF: W_{n+1} \mathcal{O} \rightarrow W_n \mathcal{O}$ ([21], I, 2.17).

3.1.2. Autre expression de F . Notons $\varrho: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ l'endomorphisme de Frobenius de $W_n \mathcal{O}$, et posons $M = E_n$ (resp. $N = W_n \Omega^i$) considéré comme \mathcal{A} -module (resp. \mathcal{B} -module). L'isomorphisme d'associativité

$$1: (M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{A}} \varrho_* N$$

est un isomorphisme de $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$ bimodules; ι^{-1} est semi-linéaire si on munit $M \otimes_{\mathcal{A}} \varrho_* N$ de sa structure de \mathcal{A} -module et $(M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} N$ de sa structure de \mathcal{B} -module.

Soient $1 \otimes F$ l'application \mathcal{A} -linéaire

$$1 \otimes F: E_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^i \rightarrow E_n \otimes F_* W_n\Omega^i, \sum_j x_j \otimes \omega_j \mapsto \sum_j R(x_j) \otimes F(\omega_j)$$

et $\Phi \otimes 1$ l'application \mathcal{B} -linéaire

$$\Phi \otimes 1: E_n^\sigma \otimes W_n\Omega^i \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^i, \sum_j x'_j \otimes \omega'_j \mapsto \sum_j \Phi(x'_j) \otimes \omega'_j;$$

F , défini en 3.1.1, est l'application ϱ -semi-linéaire

$$F = (\Phi \otimes 1) \circ \iota^{-1} \circ (1 \otimes F).$$

LEMME 3.1.3. Notons $\nabla_r: E_r \otimes W_r\Omega^i \rightarrow E_r \otimes W_r\Omega^{i+1}$ la différentielle au cran r . Alors on a $\nabla_n F = pF\nabla_{n+1}$.

Pour la démonstration, considérons $x \in E_{n+1}$, $\omega \in W_{n+1}\Omega^i$; on a $\nabla_n(F(x \otimes \omega)) = \nabla_n(F(x)) \cdot F\omega + pF(x) \otimes F(d\omega)$, puisque $dF = pFd$ (cf. I, 1.1). Supposons pour l'instant le lemme établi dans le cas $i = 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \nabla_n(F(x \otimes \omega)) &= pF(\nabla_{n+1}(x)) \cdot F\omega + pF(x) \otimes F(d\omega) \\ &= pF(\nabla_{n+1}(x)) \cdot \omega + x \otimes d\omega \\ &= pF\nabla_{n+1}(x \otimes \omega); \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Établissons le lemme pour $i = 0$. Dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} E_{n+1} \otimes_{W_{n+1}\mathcal{O}} W_{n+1}\Omega^1 & \xrightarrow{(R \circ W) \otimes pF} & E_n^\sigma \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\Omega^1 & \xrightarrow{\Phi \otimes 1} & E_n \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\Omega^1 \\ \uparrow \nabla_{n+1} & & \uparrow \nabla_n^\sigma & & \uparrow \nabla_n \\ E_{n+1} & \xrightarrow{R \circ W} & E_n^\sigma & \xrightarrow{\Phi} & E_n \end{array},$$

le carré de gauche est commutatif : ceci résulte de la définition de ∇_n^σ et de ce que le Frobenius $RF: W_{n+1}\mathcal{O} \rightarrow W_n\mathcal{O}$ induit $pF: W_{n+1}\Omega^1 \rightarrow W_n\Omega^1$ ($dF = pFd$,

cf. I, 1.1); quant au carré de droite, il est clair qu'il commute. Donc, pour $x \in E_{n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_n(F(x)) &= (\Phi \otimes 1) \circ ((R \circ W) \otimes pF)(\nabla_{n+1}(x)) \\ &= ((R \circ F_E) \otimes pF)(\nabla_{n+1}(x)) = pF(\nabla_{n+1}(x)); \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. ■

PROPOSITION 3.1.4. *Soient n et $i \geq 0$, et E un F -cristal sur X . Alors:*

$$(3.1.4.1) \quad F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i) \subset (E_n \otimes W_n\Omega^i)_{\nabla=0} := \text{Ker}(\nabla: E_n \otimes W_n\Omega^i \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^{i+1}).$$

(3.1.4.2) *Si E est le cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G)$ (cf. [3]) d'un p -groupe fini localement libre G de type multiplicatif ou étale sur X , on a*

$$(\mathbb{D}(G)_n \otimes W_n\Omega^i)_{\nabla=0} \subset F(\mathbb{D}(G)_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^i).$$

(3.1.4.3) *Pour $0 \leq r \leq n$, on a*

$$F^r(\text{Fil}^n(E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i)) \subset \nabla(E_n \otimes W_n\Omega^{i-1}).$$

(3.1.4.4) *Si E est localement libre et $\Phi: E^\sigma \rightarrow E$ est surjectif, l'inclusion (3.1.4.1) devient égalité.*

Avant de faire la démonstration remarquons que F^n induit une application

$$\tilde{F}^n: E_n \otimes W_n\Omega^i \rightarrow \mathcal{H}^i(E_n \otimes W_n\Omega^i), \quad (3.1.5)$$

et que sous l'hypothèse (3.1.4.2) on a l'égalité

$$(\mathbb{D}(G)_1 \otimes \Omega^i)_{\nabla=0} = F(\mathbb{D}(G)_2 \otimes W_2\Omega^i). \quad (3.1.6)$$

Par contre, pour $n > 1$, les inclusions (3.1.4.1) et (3.1.4.2) sont strictes en général: pour (3.1.4.1) considérer le cas $E = \mathbb{D}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, et pour (3.1.4.2) le cas $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Démonstration de 3.1.4. L'assertion (3.1.4.1) résulte de $\nabla F^n = p^n F^n \nabla$ (3.1.3).

Prouvons (3.1.4.2). D'après (2.3.2.1) on a un isomorphisme local pour la topologie étale

$$\mathbb{D}(G)_n \otimes W_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_j W_n\Omega^i/p^j W_n\Omega^i,$$

qui envoie un élément x de la source sur $\bigoplus_j (x_j \bmod p^j W_n\Omega^i)$. Dire que $\nabla x = 0$, signifie $dx_j \in p^j W_n\Omega^{i+1}$ pour tout j , i.e., par (I, 3.1) il existe

$y_j \in W_{n+l_j} \Omega^i$ tel que $x_j = F^{l_j} y_j$, d'où $x \in F(\mathbb{D}(G)_{n+1} \otimes W_{n+1} \Omega^i)$, puisque $l_j \geq 1$ pour tout j .

Pour (3.1.4.3) notons que $\text{Fil}^n(E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i)$ est engendré par les éléments $x \otimes \omega$ avec $x \in E_{n+r}$ et $\omega \in \text{Fil}^n W_{n+r} \Omega^i$. Soient deux tels éléments x et $\omega = V^n \omega_1 + dV^n \omega_2$ où $\omega_1 \in W_r \Omega^i$ et $\omega_2 \in W_r \Omega^{i-1}$ (cf. I, 1.3). On a $F^r(x \otimes \omega) = F^r(x) \otimes (V^{n-r} p^r \omega_1 + dV^{n-r} \omega_2) = F^r(x) \otimes dV^{n-r} \omega_2$. Or $\nabla(F^r(x) \otimes V^{n-r} \omega_2) = \nabla(F^r(x)) \cdot V^{n-r} \omega_2 + F^r(x) \otimes dV^{n-r} \omega_2$, et comme $\nabla(F^r(x)) \cdot V^{n-r} \omega_2 = F^r(\nabla(x)) \cdot V^{n-r}(p^r \omega_2) = 0$, car $p^r \omega_2 = 0$, on obtient $F^r(x \otimes \omega) = \nabla(F^r(x) \otimes V^{n-r} \omega_2)$; d'où l'énoncé.

Démontrons (3.1.4.4). Comme Φ est surjective, il en est de même de la linéarisée de F_E^n . On peut donc choisir une base de E_n de la forme $e_j = F_E^n R^n(y_j) = F^n(y_j)$ avec $y_j \in E_{2n}$. D'où $\nabla(e_j) = p^n F^n \nabla(y_j) = 0$ puisque $F^n(\nabla(y_j)) \in E_n \otimes W_n \Omega^1$; ce qui donne $\nabla(\sum_j e_j \otimes \omega_j) = \sum_j e_j \otimes d\omega_j$. Donc si $\nabla(\sum_j e_j \otimes \omega_j) = 0$ on en déduit, puisque E est localement libre, que $d\omega_j = 0$, i.e., par ([21], I, 3.21) que $\omega_j = F^n \omega'_j$ pour un $\omega'_j \in W_{2n} \Omega^i$; d'où $\sum_j e_j \otimes \omega_j = F^n(\sum_j y_j \otimes \omega'_j)$. ■

3.2. Verschiebung V ; formulaire reliant F, V, ∇, p

Désormais, et sauf mention du contraire, nous supposons que le F -cristal E est tel que $\Phi: E^\sigma \rightarrow E$ soit un isomorphisme. (3.2.0)

La raison pour laquelle nous faisons cette hypothèse c'est que notre définition du Verschiebung V (cf. ci-dessous) utilise explicitement Φ^{-1} de façon à satisfaire le formulaire habituel du complexe de De Rham–Witt ([21], I, 2.18).

Soient n et $i \geq 0$; considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \otimes 1: E_n \otimes W_n \Omega^i &\rightarrow E_n^\sigma \otimes W_n \Omega^i \\ \sum_j y_j \otimes \omega_j &\mapsto \sum_j \Phi^{-1}(y_j) \otimes \omega_j, \end{aligned}$$

et l'application linéaire (dont la source est un $W_{n+1} \mathcal{O}$ -module via

$$R: W_{n+1} \mathcal{O} \rightarrow W_n \mathcal{O})$$

$$\begin{aligned} 1 \otimes V: E_n \otimes_{W_n \mathcal{O}} F_* W_n \Omega^i &\rightarrow E_{n+1} \otimes_{W_{n+1} \mathcal{O}} W_{n+1} \Omega^i \\ &\downarrow \wr \\ (E_{n+1} \otimes_{W_{n+1} \mathcal{O}} W_n \mathcal{O}) \otimes_{W_n \mathcal{O}} F_* W_n \Omega^i & \\ \sum_j u^*(x_j) \otimes \omega_j &= \sum_j R(x_j) \otimes \omega_j \mapsto \sum_j x_j \otimes V\omega_j, \end{aligned}$$

où $u: W_n(X) \rightarrow W_{n+1}(X)$ est le morphisme (1.2.1).

DÉFINITION 3.2.1. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \geq 0$, nous appellerons *Verschiebung* l'application

$$V: E_n \otimes W_n \Omega^i \rightarrow E_{n+1} \otimes W_{n+1} \Omega^i$$

définie par $V = (1 \otimes V) \circ \iota \circ (\Phi^{-1} \otimes 1)$, où ι est décrit en 3.1.2.

PROPOSITION 3.2.2. *Avec les définitions précédentes, on a les identités:*

$$(3.2.2.1) \quad FV = VF = p$$

$$(3.2.2.2) \quad \nabla F = pF\nabla$$

$$(3.2.2.3) \quad V\nabla = p\nabla V$$

$$(3.2.2.4) \quad F\nabla V = \nabla$$

$$(3.2.2.5) \quad V(F(x), \omega) = x \cdot V\omega, \text{ avec } x \in E_n \otimes W_n \Omega^i, \omega \in W_{n-1} \Omega^j, i \text{ et } j > 0.$$

$$(3.2.2.6) \quad V(F(x) \otimes \omega) = x \otimes V\omega, \text{ avec } x \in E_n, \omega \in W_{n-1} \Omega^j, j > 0.$$

Si de plus E est localement libre de type fini (resp. E est le cristal de Dieudonné d'un p -groupe fini localement libre étale sur X), le formulaire précédent s'applique aux opérateurs F, V, ∇ de $E_{W(X)} \otimes W\Omega$ définis comme la limite projective des opérateurs aux crans n .

La 2^e relation a été établie en (3.1.3), la 1^{ère}, la 5^{ème} et la 6^{ème} résultent des définitions et des propriétés correspondantes pour le complexe de De Rham–Witt (I, 1); la 3^{ème} est une conséquence de la 1^{ère} et de la 4^{ème}. La relation 4 s'établit en remarquant que $F_E(E_n)$ engendre E_n et que $\nabla F = pF\nabla$, $FdV = d(I, 1)$. Le reste est clair. ■

COROLLAIRE 3.2.3. *Soient n, r, i des entiers ≥ 0 . Sous les hypothèses (3.2.0) on a*

$$\text{Fil}^n(E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i) = V^n(E_r \otimes W_r \Omega^i) + \nabla V^n(E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}).$$

Tout élément de $\text{Fil}^n(E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i)$ peut s'écrire (pour un choix arbitraire de $s \in \mathbb{N}$) $\sum_j F^s(e_j) \otimes \omega_j$, avec $e_j \in E_{n+r+s}$, $\omega_j \in \text{Fil}^n W_{n+r} \Omega^i$, puisque $F^s(E_{n+r+s})$ engendre E_{n+r} . Or (I, 1) $\omega_j = V^n a_j + dV^n b_j$, avec $a_j \in W_r \Omega^i$ et $b_j \in W_r \Omega^{i-1}$, et (3.2.2.2) $\nabla F^s(e_j) = 0$ pour $s \geq 0$. D'où, par (3.2.2.6) et avec $s \geq 0$:

$$F^s(e_j) \otimes \omega_j = V^n(F^{s+n}(e_j) \otimes a_j) + \nabla V^n(F^{s+n}(e_j) \otimes b_j).$$

L'inclusion opposée est évidente. ■

REMARQUE 3.2.4. Supposons E localement libre de type fini. De la relation $\nabla F = pF\nabla$, il résulte l'existence d'un endomorphisme \underline{F} de $E_{W(X)} \otimes W\Omega$ défini en degré i par $p^i F$. Compte tenu de la functorialité de l'isomorphisme (2.0.1) en X et en E , cet endomorphisme \underline{F} coïncide via (2.0.1) avec l'endomorphisme de $H^*(X/W, E)$ déduit par functorialité du Frobenius de E (cf. [21], II, 1.2).

3.3. Opérateur \check{F}^r

La proposition suivante raffine la définition de \check{F}^n vue en (3.1.5).

PROPOSITION 3.3.1. *Pour $i \geq 0$ on a l'égalité*

$$F^r(\text{Fil}^n(E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i)) = F^r \nabla V^n(E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}). \quad (3.3.1.1)$$

Le Frobenius itéré $F^r: E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^i$ induit une application

$$\begin{aligned} \check{F}^r: E_n \otimes W_n\Omega^i &\rightarrow F^r(E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i)/F^r \nabla V^n(E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}) \\ R^r x &\mapsto \text{Cl}(F^r x). \end{aligned} \quad (3.3.1.2)$$

Pour $r = n$ et $i = m$ (= dimension de X sur S), \check{F}^n définit une surjection

$$\check{F}^n: E_n \otimes W_n\Omega^m \twoheadrightarrow \mathcal{H}^m(E_n \otimes W_n\Omega^m). \quad (3.3.1.3)$$

L'égalité (3.3.1.1) résulte de 3.2.3 et 3.2.2, d'où \check{F}^r . La dernière assertion, $(E_n \otimes W_n\Omega^m)_{\nabla=0} = F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^m)$, provient de ([21], I, 3.7 et 3.21) car $F^n(E_{2n})$ engendre E_n . ■

REMARQUE 3.3.2. Si $i < m$, l'application composée

$$E_n \otimes W_n\Omega^i \xrightarrow{\check{F}^n} F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i)/\nabla(E_n \otimes W_n\Omega^{i-1}) \xrightarrow{c^i} \mathcal{H}^i(E_n \otimes W_n\Omega^i),$$

où j est déduit de l'injection (3.1.4.1), ne définit pas nécessairement une surjection. En effet l'inclusion j peut être stricte: pour $E = \mathbb{D}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $i = 0$ et $n > 1$, j est l'inclusion

$$(F^n W_{2n}\mathcal{O})/pW_n\mathcal{O} \xrightarrow{\neq} (W_n\mathcal{O}/pW_n\mathcal{O})_{d=0} = (FW_{n+1}\mathcal{O})/pW_n\mathcal{O}$$

(cf. I, 3.1).

3.4. Opération de Cartier et isomorphisme de Cartier généralisé

On se bornera dorénavant aux deux cas suivants (qui vérifient (3.2.0)): le cas où le F -cristal E est localement libre avec $\Phi: E^\sigma \xrightarrow{\sim} E$, et celui où E est le cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G')$ d'un p -groupe fini localement libre étale sur X . (3.4.0)

Pour r, n et $i \geq 0$, l'itéré du Verschiebung

$V^r: E_n \otimes W_n \Omega^i \rightarrow E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i$ induit une application $\check{V}^r: E_n \otimes W_n \Omega^i / F^r \nabla V^n(E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}) \rightarrow E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i$, car $V^r F^r = p^r$ annule $E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}$.

THÉORÈME 3.4.1. Soient r, n et $i \geq 0$ et E un F -cristal localement libre sur X tel que $\Phi: E^\sigma \rightarrow E$ soit un isomorphisme. Pour la topologie de Zariski sur X il existe un isomorphisme \check{C}^r ; dit de Cartier généralisé, d'inverse \check{F}^r , rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc}
 & F^r(E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i) / F^r \nabla V^n(E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}) & \\
 \check{C}^r \nearrow & & \downarrow \check{V}^r \\
 E_n \otimes W_n \Omega^i & \xrightarrow{p^r} & E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i \quad ;
 \end{array}
 \tag{3.4.1.1}$$

\check{C}^r est défini par

$$\check{C}^r(\text{Cl}(F^r(x))) = R^r x.
 \tag{3.4.1.2}$$

Pour $r = n$, les applications $\check{F}^n = \tilde{F}^n$ et \check{C}^n sont des isomorphismes

$$\begin{aligned}
 \check{F}^n: E_n \otimes W_n \Omega^i &\xrightarrow{\sim} F_*^n(\mathcal{H}^i(E_n \otimes W_n \Omega^i)) \\
 \check{C}^n: F_*^n(\mathcal{H}^i(E_n \otimes W_n \Omega^i)) &\xrightarrow{\sim} E_n \otimes W_n \Omega^i,
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1.3}$$

$W_n \mathcal{O}$ -linéaires et inverses l'un de l'autre.

Lorsque $E = \mathbb{D}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (i.e., $E = \mathcal{O}_{X|W}$, muni du Frobenius usuel), \check{C}^r est l'isomorphisme de Cartier de 1.4.1.

Pour définir \check{C}^r , soit $\text{Cl}(y) = \text{Cl}(F^r x)$ un élément de la source de \check{V}^r ; on a $\check{V}^r(\text{Cl}y) = V^r F^r x = p^r R^r x$. Par l'injectivité de p^r (1.2.8.1) $R^r x$ ne dépend que de $\text{Cl}y$ et sera noté $\check{C}^r(\text{Cl} F^r x)$. Que \check{C}^r et \check{F}^r soient inverses l'un de l'autre est immédiat.

Le cas $E = \mathbb{D}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ résulte de ce qu'alors $E_n \simeq W_n\mathcal{O}$ et que, dans cet isomorphisme, les Frobenius se correspondent. ■

DÉFINITION 3.4.2. Sous les mêmes hypothèses qu'en 3.4.1, on appellera opération de Cartier itérée la composée

$$\begin{aligned} \tilde{C}^r: F^r(E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i) &\xrightarrow{\text{proj.}} F^r(E_{n+r} \otimes W_{n+r}\Omega^i)/F^r\nabla V^n(E_r \otimes W_r\Omega^{i-1}) \\ &\xrightarrow{\check{C}^r} E_n \otimes W_n\Omega^i, \\ F^r(x) &\longmapsto R^r x. \end{aligned}$$

Dans le second cas qui nous intéresse, $E = \mathbb{D}(G')$ (cf. 3.4.0), la non injectivité (en général: cf. 1.2.8.2) de \underline{p}^r va nous amener à définir d'abord \check{C}^r pour n'en déduire qu'ensuite l'isomorphisme \tilde{C}^r .

THÉORÈME 3.4.3. Soient $E = \mathbb{D}(G')$ le cristal de Dieudonné d'un p -groupe fini localement libre G' étale sur X et l le plus petit des entiers $m \geq 0$ tels que $p^m G' = 0$. Soient i, r, n et s des entiers ≥ 0 tels que $s \geq \text{Inf}(r + l, r + n - 1)$. Alors il existe **une opération de Cartier itérée** \check{C}^r :

$$\begin{aligned} F^s(E_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^i) &\xrightarrow{\check{C}^r} F^{s-r}(E_{n+s-r} \otimes W_{n+s-r}\Omega^i) \\ F^s x &\longmapsto F^{s-r} R^r x, \end{aligned} \tag{3.4.3.1}$$

et celle-ci induit, pour la topologie étale sur X , un isomorphisme \check{C}^r dit “de Cartier généralisé”, d'inverse F^r :

$$\begin{aligned} F^s(E_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^i)/F^r\nabla V^n(E_r \otimes W_r\Omega^{i-1}) \\ \downarrow \check{C}^r \\ F^{s-r}(E_{n+s-r} \otimes W_{n+s-r}\Omega^i). \end{aligned} \tag{3.4.3.2}$$

Avant de prouver le théorème, notons qu'il résulte de celui-ci que pour tout entier $n \geq 1$, \tilde{C} est bien définie sur

$$\begin{aligned} F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i) &\subset (E_n \otimes W_n\Omega^i)_{\mathbb{V}=0}: \\ \tilde{C}: F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i) &\rightarrow F^{n-1}(E_{2n-1} \otimes W_{2n-1}\Omega^i). \end{aligned} \tag{3.4.3.3}$$

Pour la démonstration on dispose d'isomorphismes locaux pour la topologie étale (cf. 2.3.2.1):

$$G' \simeq \bigoplus_j \mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}(G')_n \simeq \bigoplus_j W_n \mathcal{O}/p^l W_n \mathcal{O}.$$

Le théorème (I, 4.4) traite déjà le cas $G' = \mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z}$; dans le cas général les vérifications nécessaires pour montrer que $F^{s-r} R^r x$ ne dépend que de $y = F^s x$, et non du choix de x , sont locales, ce qui permet de se ramener à $G' = \mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z}$. ■

REMARQUE 3.4.4. Soit H un groupe p -divisible étale sur X . Le noyau $H(n)$ de la multiplication par p^n sur H est un p -groupe fini localement libre étale sur X . On sait par ([3], théorème 2 p. 23) et ([4], 3.3.3.1) que $\mathbb{D}(H)_n \simeq \mathbb{D}(H(n))_n \simeq \bigoplus_1^h W_n \mathcal{O}$ localement pour la topologie étale, où h est la hauteur de H . Si $E = \mathbb{D}(H(n))$ dans le théorème 3.4.3 on peut en fait prendre $s = r$ pour définir le \tilde{C}^r de (3.4.3.1), et ce \tilde{C}^r coïncide avec celui de 3.4.2 (où $E = \mathbb{D}(H)$).

REMARQUE 3.4.5. Contrairement au cas E localement libre de 3.4.1 on peut s'étonner de voir apparaître sur l'image de l'homomorphisme $\check{C}^r = (F^r)^{-1}$ de (3.4.3.2) des puissances non nulles de F . Donnons-en la raison sur un exemple: pour $r = n$ et $E = \mathbb{D}(\mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z})$, avec $1 \leq l \leq n$, cela provient du fait que l'isomorphisme

$$\check{F}^n: F^l(E_{n+l} \otimes W_{n+l} \Omega^i) \xrightarrow{\sim} F^{n+1}(E_{2n+l} \otimes W_{2n+l} \Omega^i) / \nabla(E_n \otimes W_n \Omega^{i-1})$$

ne s'étend pas en un isomorphisme

$$\check{F}^n: E_n \otimes W_n \Omega^i \rightarrow F^n(E_{2n} \otimes W_{2n} \Omega^i) / \nabla(E_n \otimes W_n \Omega^{i-1}); \quad (3.4.5.1)$$

a fortiori la composée (cf. 3.1.6)

$$\tilde{F}^n: E_n \otimes W_n \Omega^i \xrightarrow{\check{F}^n} F^n(E_{2n} \otimes W_{2n} \Omega^i) / \nabla(E_n \otimes W_n \Omega^{i-1}) \hookrightarrow \mathcal{H}^i(E_n \otimes W_n \Omega^i) \quad (3.4.5.2)$$

n'est pas un isomorphisme.

La vérification est laissée au lecteur: il faut utiliser les isomorphismes

$$E_n \otimes W_n \Omega^i \simeq W_n \Omega^i / p^l W_n \Omega^i.$$

3.4.6. *Convention d'écriture.* Pour n'avoir plus à distinguer les deux cas E localement libre et $E = \mathbb{D}(G')$ (cf. 3.4.0), nous supposons toujours que la source et le but de \tilde{C}^r (resp. \check{C}^r) sont ceux de (3.4.3.1) (resp. 3.4.3.2), mais avec $s = r$ dans le cas E localement libre, et la convention de (3.4.3) pour s dans le cas $E = \mathbb{D}(G')$ (sauf mention du contraire).

Mentionnons pour mémoire les deux propositions immédiates:

PROPOSITION 3.4.7. *L'opération de Cartier itérée \tilde{C}^r vérifie les identités $\tilde{C}^r F^r = R^r$, $F^r \tilde{C}^r = R^r$, $\tilde{C}^r V = V \tilde{C}^r$, $\tilde{C}^r \nabla = p^r \nabla \tilde{C}^r$, et est telle que, pour tout $x \in F^s(E_{n+s} \otimes W_{n+s} \Omega^i)$, tout $\omega \in F^s W_{n+s} \Omega^j$ ($j \in \mathbb{N}$) on ait*

$$\tilde{C}^r(x.\omega) = \tilde{C}^r(x).\tilde{C}^r(\omega).$$

PROPOSITION 3.4.8. *Soient i et $r \geq 0$, $n \geq 1$ et E comme en (3.4.0). Si E est localement libre soit $s = r$, et si $E = \mathbb{D}(G')$ soit s un entier $\geq \text{Inf}(r + l, r + n)$ où l est le plus petit entier ≥ 0 tel que $p^l E = 0$. Les isomorphismes \check{C}^r s'insèrent dans les carrés commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} F^r(E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i) / F^r \nabla V^n(E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}) & \xrightarrow{\check{C}^r} & F^{n-r}(E_{n+r-r} \otimes W_{n+r-r} \Omega^i) \\ \downarrow \underline{p} & & \downarrow V \\ F^{r+1}(E_{n+r+2} \otimes W_{n+r+2} \Omega^i) / F^{r+1} \nabla V^n(E_{r+1} \otimes W_{r+1} \Omega^{i-1}) & \xrightarrow{\check{C}^{r+1}} & F^{n-r-1}(E_{n+r+1-r} \otimes W_{n+r+1-r} \Omega^i), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} F^r(E_{n+r} \otimes W_{n+r} \Omega^i) / F^r \nabla V^n(E_r \otimes W_r \Omega^{i-1}) & \xrightarrow{\check{C}^r} & F^{n-r}(E_{n+r-r} \otimes W_{n+r-r} \Omega^i) \\ \uparrow R & & \uparrow F \\ F^{r+1}(E_{n+r+2} \otimes W_{n+r+2} \Omega^i) / F^{r+1} \nabla V^n(E_{r+1} \otimes W_{r+1} \Omega^{i-1}) & \xrightarrow{\check{C}^{r+1}} & F^{n-r-1}(E_{n+r+1-r} \otimes W_{n+r+1-r} \Omega^i), \end{array}$$

où \underline{p} est induit par l'application \underline{p} de 1.2.8.

4. Propriétés de finitude et suite spectrale des pentes

Dans ce numéro S est le spectre d'un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, X un schéma propre et lisse de dimension m sur S et, sauf mention du contraire, E un F -cristal localement libre de type fini sur X , tel que $\Phi: E^\sigma \rightarrow E$ soit un isomorphisme: il est bien connu qu'un tel cristal E est le cristal de Dieudonné d'un groupe p -divisible étale H ([26], VI, 3.1.2.1).

Désignons par K le corps des fractions de $W = W(k)$. Si L est un complexe de faisceaux abéliens sur X , on écrira $H^i(L)$ pour $H^i(X, L)$.

Sous ces hypothèses, de nombreux résultats d'Illusie [21] demeurent valables pour $E \otimes W\Omega^i$ et $E_{W(X)} \otimes W\Omega^i$, grâce notamment au formulaire 3.2.2. On établit les analogues de ([21], I, 3.8, 3.9, 3.11 et 3.18 à 3.20) en remarquant que les opérateurs F, V, ∇ que nous avons définis s'identifient localement à des sommes directes des opérateurs F, V et d de Illusie.

Nous aurons besoin, d'autre part, de résultats généralisant ([21], II): les démonstrations sont celles d'Illusie, compte tenu de ce que $E = \mathbb{D}(H)$ est localement libre de rang fini. La vérification des détails est laissée au lecteur; pour un exposé complet, voir [11].

4.1. Propriétés de finitude

Parmi les analogues de ([21], II, 2.1 à 2.5), qui sont tous vrais, mentionnons:

PROPOSITION 4.1.1. *Soient $i, j \in \mathbb{Z}$. Pour tout n , $H^j(E_n \otimes W_n\Omega^i)$ est de longueur finie, et la flèche canonique*

$$H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i) \rightarrow \varinjlim_n H^j(E_n \otimes W_n\Omega^i) \tag{4.1.1.1}$$

est un isomorphisme.

Cette proposition vaut aussi pour le cas $E = \mathbb{D}(G')$, où G' est un p -groupe fini localement libre étale sur X .

COROLLAIRE 4.1.2. *$H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i)$ est séparé et complet pour la topologie p -adique (resp. V -adique) [définie par les sous-groupes $p^n H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i)$, resp. $V^n H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i)$].*

On a l'analogie crucial de ([21], II, 2.13):

THÉORÈME 4.1.3. *Quels que soient i, j , le sous-module de p -torsion T^{ij} de $H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i)$ est annihilé par une puissance de p et $H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i)/T^{ij}$ est un W -module libre de type fini.*

Comme en ([21], II, 2.17 à 2.19) on a:

PROPOSITION 4.1.4.

- (i) *Pour tout i , $H^0(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i)$ est un W -module libre de type fini.*
- (ii) *Pour tout j , $H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^m)$ est un W -module de type fini, dont F est un automorphisme (m est la dimension de X sur k).*
- (iii) *$H^1(E_{W(X)})$ est un W -module de type fini.*

Par contre, contrairement à ([21], II, 2.19), on ne peut pas conclure que $H^1(E_{W(X)})$ est un W -module libre.

4.2. Suite spectrale des pentes

4.2.1. *Dégénérescence modulo torsion.* Grâce à 4.1.1 et 2.7.2, la filtration de $E_{W(X)} \otimes W\Omega'$ par les $E_{W(X)} \otimes W\Omega^{\geq i}$ donne naissance à une suite spectrale

$$E_1^{i,j} = H^i(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i) \Rightarrow H^*(X/W, E) \simeq H^*(E_{W(X)} \otimes W\Omega'), \tag{4.2.1.1}$$

appelée suite spectrale des pentes.

On peut, comme dans le cas sans coefficients, définir un endomorphisme \underline{F} de $E_{W(X)} \otimes W\Omega'$, égal à $p^i F$ en degré i ; il induit un endomorphisme \underline{F} de la suite spectrale (4.2.1.1) et coïncide sur l'aboutissement (via l'isomorphisme 2.0.1) avec l'endomorphisme de Frobenius \underline{F} de $H^*(X/W, E)$ (cf. 3.2.5).

Compte tenu de 4.1.3 et du fait que V est topologiquement nilpotent (4.1.2), on a l'analogie suivant de ([21], II, 3.2):

THÉORÈME 4.2.1.2. *La suite spectrale (4.2.1.1) dégénère en E_1 modulo torsion, c'est-à-dire: pour tout $r \geq 1$, la différentielle*

$$\nabla_r \otimes K: E_r^{i,j} \otimes K \rightarrow E_r^{i+r,j-r+1} \otimes K$$

est nulle.

COROLLAIRE 4.2.1.3. *Pour tout i , on a*

$$H^0(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i) = E_\infty^{i,0}.$$

COROLLAIRE 4.2.1.4. *Pour tout i , on a un isomorphisme canonique*

$$H^{*-i}(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i) \otimes_w K \xrightarrow{\simeq} (H^*(X/W, E) \otimes_w K)_{[i, i+1]}.$$

4.2.2. Dégénérescences partielles

PROPOSITION 4.2.2.1. *On a $E_\infty^{0,1} \xrightarrow{\simeq} E_1^{0,1} = H^1(E_{W(X)})$ et une suite exacte de W -modules de type fini*

$$0 \rightarrow H^0(E_{W(X)} \otimes W\Omega^1) \rightarrow H^1(X/W, E) \rightarrow H^1(E_{W(X)}) \rightarrow 0.$$

PROPOSITION 4.2.2.2. *Soit m la dimension de X sur S . Pour tout i , on a*

$$\mathcal{H}^i(E_{W(X)} \otimes W\Omega^m) = E_1^{m,i} \leftarrow E_\infty^{m,i}.$$

COROLLAIRE 4.2.2.3. *Si X est une surface, la seule différentielle éventuellement non nulle de la suite spectrale des pentes est*

$$\nabla_1^{0,2}: H^2(E_{W(X)}) \rightarrow H^2(E_{W(X)} \otimes W\Omega^1).$$

Pour $(j, i) \neq (2, 0), (2, 1)$, $H^j(E_{W(X)} \otimes W\Omega^i)$ est de type fini sur W . On a une suite exacte canonique

$$0 \rightarrow H^0(E_{W(X)} \otimes W\Omega^2) \rightarrow H^2(E_{W(X)} \otimes W\Omega^{\geq 1}) \rightarrow H^1(E_{W(X)} \otimes W\Omega^1) \rightarrow 0.$$

Si $H^2(E_{W(X)})$ est de type fini sur W la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 .

REMARQUE 4.2.3. On peut retrouver les résultats précédents sur la suite spectrale des pentes en utilisant les propriétés des R -modules cohérents (où R est l'anneau de Raynaud: cf. [21 bis], [22]) étudiées par Illusie–Raynaud [22] et Ekedahl [10]: avec les notations de ([21 bis], 2.4) cela résulte de

$$\mathbb{R}\Gamma(X, E_{W(X)} \otimes W\Omega^i) \in D_c^b(R). \quad (4.2.3.1)$$

On démontre (4.2.3.1) par le critère ([21 bis], 2.4.7) suivant les lignes de ([21 bis], 3.1.1) puisque E est localement libre de type fini et que $\Phi: E^\sigma \rightarrow E$ est un isomorphisme.

III. Complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un cristal: liens avec la cohomologie plate et la cohomologie étale

Les comparaisons que nous souhaitons établir vont reposer sur deux choses: la théorie de Dieudonné cristalline ([3] et [4]) et notre complexe de De Rham–Witt à coefficients muni de ses opérations de Frobenius et de Cartier. La théorie de Dieudonné cristalline fournira les morphismes nécessaires aussi bien pour la comparaison avec la cohomologie plate (via le morphisme ε_n dans le paragraphe 1) que pour la comparaison avec la cohomologie étale: ces morphismes auront grosso modo pour but le complexe de De Rham–Witt à coefficients. On affinera ensuite (§2) ce but en ne considérant que les

points fixes des opérations de Frobenius et de Cartier: on obtiendra alors l'exacte mesure de la source (i.e., la cohomologie plate ou la cohomologie étale).

Dans ce III, S est un schéma parfait de caractéristique $p > 0$, et X un S -schéma lisse; on note $W = W(S)$, $W_n = W_n(S)$.

1. Définition de $\varepsilon_n: R^1\alpha_*(G) \rightarrow \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1$

Soit G un p -groupe fini localement libre (pas nécessairement de type multiplicatif pour l'instant) sur le S -schéma lisse X . Nous considérerons les morphismes suivants entre (gros) topos fppf et (petits) topos étales:

$$\begin{aligned} u_{X/W_n}: (X/W_n)_{\text{cris,ét}} &\rightarrow X_{\text{ét}} \text{ ([1], III, 3.2.3),} \\ \alpha_{X/W_n}: (X/W_n)_{\text{cris,fppf}} &\rightarrow (X/W_n)_{\text{cris,ét}}, \\ i_{X/W_n}: X_\tau &\rightarrow (X/W_n)_{\text{cris,\tau}}, \text{ où } \tau \text{ est la topologie fppf ou la topologie étale;} \\ &\text{rappelons que } i_{X/W_n^*}(G), \text{ noté } \underline{G}, \text{ est défini, sur un objet } (U, T, \delta) \text{ de} \\ &\text{CRIS}(X/W_n), \text{ par } \underline{G}(U, T, \delta) = G(U) \text{ (cf. [3], 2.1 p. 22) et que} \\ &\underline{G} \simeq \mathbb{R}i_{X/W_n^*}(G) \text{ ([4], 1.1.8).} \end{aligned}$$

Dans la catégorie des faisceaux abéliens sur $\text{CRIS}(X/W_n)$ il existe un morphisme canonique ([3], 5.2 p. 33)

$$\varrho_G: i_{X/W_n^*}(G) = \underline{G} \rightarrow \mathbb{D}(G^*),$$

où G^* est le dual de Cartier de G . Comme $\mathbb{D}(G^*)$ est un cristal quasi-cohérent on a $\mathbb{R}\alpha_{X/W_n^*}(\mathbb{D}(G^*)) \simeq \mathbb{D}(G^*)$, et puisque le diagramme suivant commute ([1], III, 3.3.3)

$$\begin{array}{ccc} (X/W_n)_{\text{cris,fppf}} & \xleftarrow{i_{X/W_n}} & X_{\text{fppf}} \\ \downarrow \alpha_{X/W_n} & & \downarrow \alpha \\ X_{\text{ét}} & \xleftarrow{u_{X/W_n}} & (X/W_n)_{\text{cris,ét}} \xleftarrow{i_{X/W_n}} X_{\text{ét}} \end{array},$$

Id.

l'image de ϱ_G par $\mathbb{R}\alpha_{X/W_n}$ et $\mathbb{R}u_{X/W_n}$ est une flèche

$$\mathbb{R}\alpha_*(G) \rightarrow \mathbb{R}u_{X/W_n^*}(\mathbb{D}(G^*)),$$

qui en degré un fournit un morphisme

$$\chi_n: R^1\alpha_*(G) \rightarrow R^1u_{X/W_n^*}(\mathbb{D}(G^*)). \tag{1.1}$$

Nous allons expliciter χ_n dans le cas $G = \mu_{p^l}$, $1 \leq l \leq n$. Les conventions de signes seront celles de [3]. Tout d'abord nous choisirons l'identification

$$R^1\alpha_*(\mu_{p^l}) \simeq \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l} \quad (1.1.1)$$

déduite de la suite de cohomologie relative à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_{p^l} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p^l} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0.$$

Explicitons également les isomorphismes

$$\mathbb{D}(\mu_{p^l}^*) \simeq \mathcal{O}_{X/W}/p^l\mathcal{O}_{X/W} \simeq \mathcal{O}_{X/W_n}/p^l\mathcal{O}_{X/W_n} \quad (n \geq l \geq 1) \quad (1.1.2)$$

que nous allons utiliser. La suite exacte de faisceaux abéliens sur $\text{CRIS}(X/W)$

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p^l} \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

fournit une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{X/W}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{X/W}) &\xrightarrow{p^l} \mathcal{H}om_{X/W}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{X/W}) \xrightarrow{\partial_0} \mathcal{E}xt_{X/W}^1(\underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{X/W}) \\ &\longrightarrow \mathcal{E}xt_{X/W}^1(\underline{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{X/W}), \end{aligned}$$

et donc un isomorphisme

$$\partial_0: \mathcal{O}_{X/W}/p^l\mathcal{O}_{X/W} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}xt_{X/W}^1(\underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{X/W}) = \mathbb{D}(\mu_{p^l}^*).$$

Dans (1.1.2) nous choisissons l'identification fournie par $-(\partial_0)^{-1}$.

L'expression de χ_n étant une question locale sur X , on supposera désormais X et S affines et X relevé en un schéma lisse \tilde{X} sur W , et on posera $X_n = \tilde{X} \times_W W_n$. Dans ce cas on a ([21], 0.3.2.4)

$$R^1u_{X_n/W_n*}(\mathbb{D}(G^*)) \simeq \mathcal{H}^1(\mathbb{D}(G^*)_n \otimes \Omega_{X_n/W_n}^1). \quad (1.1.3)$$

PROPOSITION 1.2. *Avec les hypothèses et identifications précédentes, le morphisme*

$$\chi_n: R^1\alpha_*(G) \rightarrow R^1u_{X_n/W_n*}(\mathbb{D}(G^*))$$

s'explícite, lorsque $G = \mu_{p^l}$, $1 \leq l \leq n$, comme l'application

$$\chi_n: \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l} \rightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_{X_n}^1/p^l\Omega_{X_n}^1)$$

$$\text{Cl } x \mapsto (\text{dlog } x_n \bmod p^l\Omega_{X_n}^1) \bmod \text{d}(\mathcal{O}_{X_n}/p^l\mathcal{O}_{X_n}),$$

où $x_n \in \mathcal{O}_{X_n}^*$ relève $x \in \mathcal{O}_X^* = \mathcal{O}_{X_n}^*/(1 + p\mathcal{O}_{X_n})$.

1.3. Pour démontrer la proposition 1.2 nous allons procéder de la façon suivante:

(i) Par définition χ_n provient de la factorisation du morphisme

$$\begin{aligned} u_{X/W_n*} \circ \alpha_{X/W_n*}(f): \mathcal{O}_X^* &\longrightarrow R^1\alpha_*(\mu_{p^l}) \simeq \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l} \\ &\xrightarrow{\chi_n} \mathcal{H}^1(\Omega_{X_n}^1/p^l) \simeq \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^1), \end{aligned}$$

où f est le morphisme composé

$$f: \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow \underline{\mu}_{p^l}[1] \xrightarrow{e_{\mu_{p^l}[1]}} \mathbb{D}(\mu_{p^l}^*)[1] \xrightarrow[-\tilde{e}_0^{-1}[1]]{\sim} \mathcal{O}_{X/W_n}/p^l\mathcal{O}_{X/W_n}[1],$$

déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\mu}_{p^l} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_m \xrightarrow{p^l} \underline{\mathbb{G}}_m \longrightarrow 0.$$

Pour $n \geq 1$ nous identifierons dans la suite $\mathcal{O}_{X/W_n}/p^l\mathcal{O}_{X/W_n}$ à \mathcal{O}_{X/W_l} via l'isomorphisme

$$i_{\text{CRIS}*}(\mathcal{O}_{X/W_l}) \simeq \mathcal{O}_{X/W_n}/p^l\mathcal{O}_{X/W_n},$$

où i_{CRIS} est le morphisme de topos $(X/W_l)_{\text{CRIS}} \rightarrow (X/W_n)_{\text{CRIS}}$.

(ii) Nous montrons en 1.4.7 que f est le morphisme canonique $g: \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l}[1]$ déduit de l'extension ([3], 5.2, p. 33)

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow 0.$$

(iii) Puis, en 1.5.1, nous établissons que la projection de $g: \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l}[1]$ par $u_{X/W_l*} \circ \alpha_{X/W_l*}$ induit la différentielle logarithmique $\text{dlog}: \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^1)$, ce qui démontrera la proposition 1.1.

1.4. Pour relier f à g nous aurons besoin de deux nouveaux homomorphismes cobords relatifs à des extensions sur $\text{CRIS}(X/W_l)$.

Montrons d'abord un lemme. Soit $l \geq 1$; le faisceau \mathcal{J}_{X/W_l} sur $\text{CRIS}(X/W_l)$ est défini par $(\mathcal{J}_{X/W_l})_{(U,T)} = \text{Ker}(\mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_U)$ pour tout objet (U, T, δ) de $\text{CRIS}(X/W_l)$.

LEMME 1.4.1. *On a*

$$(1 + \mathcal{J}_{X/W_l})^{p^l} = 1.$$

Il suffit de montrer que, pour $x \in \mathcal{J}_{X/W_l}$, on a $(1 + x)^{p^l} \equiv 1 \pmod{p^l}$. Soit $x \in \mathcal{J}_{X/W_l}$, on a $(1 + x)^p \equiv 1 \pmod{p}$, grâce à la relation $x^p = p!x^{[p]}$. Or on voit par récurrence sur r que si $a \equiv b \pmod{p}$, alors $a^{p^r} \equiv b^{p^r} \pmod{p^{r+1}}$, d'où le lemme.

La suite exacte de faisceaux abéliens sur $\text{CRIS}(X/W_l)$

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p^l} \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \tag{1.4.2}$$

fournit une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{X/W_l}(\underline{\mathbb{Z}}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}) &\xrightarrow{p^l} \mathcal{H}om_{X/W_l}(\underline{\mathbb{Z}}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}) \\ \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}xt_{X/W_l}^1(\underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}) &\longrightarrow \mathcal{E}xt_{X/W_l}^1(\underline{\mathbb{Z}}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}) = 0, \end{aligned}$$

d'où un isomorphisme

$$\partial: 1 + \mathcal{J}_{X/W_l} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt_{X/W_l}^1(\underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}), \tag{1.4.3}$$

puisque $(1 + \mathcal{J}_{X/W_l})^{p^l} = 1$.

De même, la suite exacte de cohomologie déduite de l'extension

$$0 \rightarrow 1 + \mathcal{J}_{X/W_l} \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l}^* \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow 0 \tag{1.4.4}$$

sur $\text{CRIS}(X/W_l)$ (cf. [3], p. 33), donne l'homomorphisme cobord

$$\partial': \underline{\mu}_{p^l} = \mathcal{H}om_{X/W_l}(\underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{G}}_m) \rightarrow \mathcal{E}xt_{X/W_l}^1(\underline{\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}). \tag{1.4.5}$$

Appliquant, d'autre part, l'homomorphisme $1 + \mathcal{J}_{X/W_l} \xrightarrow{\log} \mathcal{O}_{X/W_l}$ à l'extension (1.4.4), on obtient, par functorialité, l'extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow 0, \tag{1.4.6}$$

considérée plus haut, qui définit le morphisme canonique $g: \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l}[1]$.

PROPOSITION 1.4.7. *Le morphisme composé*

$$f: \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow \underline{\mu}_{p'}[1] \xrightarrow{e_{\mu_{p'}[1]}} \mathbb{D}(\mu_{p'}^*)[1] \xrightarrow[-(\partial_0)^{-1}[1]]{\sim} \mathcal{O}_{X/W_1}[1]$$

est le morphisme canonique g .

Pour expliciter g , définissons tout d’abord une flèche $\underline{\mathbb{G}}_m \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_{X/W_1}^*$ de la façon suivante: soit $\zeta \in \underline{\mathbb{G}}_m$ relevé arbitrairement en $\zeta' \in \mathcal{O}_{X/W_1}^*$ grâce à l’extension (1.4.4); on pose

$$\Phi(\zeta) = \zeta'^{p'}. \tag{1.4.7.1}$$

Ceci est indépendant du relèvement ζ' de $\zeta \in \underline{\mathbb{G}}_m = \mathcal{O}_{X/W_1}^*/1 + \mathcal{J}_{X/W_1}$ par (1.4.1). La restriction de Φ à $\underline{\mu}_{p'}$, encore notée Φ , est d’image contenue dans $1 + \mathcal{J}_{X/W_1}$, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mu}_{p'} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{G}}_m & \xrightarrow{p'} & \underline{\mathbb{G}}_m \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & 1 + \mathcal{J}_{X/W_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X/W_1}^* & \longrightarrow & \underline{\mathbb{G}}_m \longrightarrow 0 \end{array}$$

montre que le composé $\underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow \underline{\mu}_{p'}[1] \xrightarrow[\Phi[1]]{} (1 + \mathcal{J}_{X/W_1})[1] \xrightarrow[\log[1]]{} \mathcal{O}_{X/W_1}[1]$ est le morphisme canonique g .

Il suffit donc, pour démontrer la proposition 1.4.7, que le carré

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mu}_{p'} & \xrightarrow{\Phi} & 1 + \mathcal{J}_{X/W_1} \\ \downarrow e & & \downarrow \log \\ \mathbb{D}(\mathbb{Z}/p') & \xrightarrow[-(\partial_0)^{-1}]{\sim} & \mathcal{O}_{X/W_1} \end{array}$$

(où $q = q_{\mu_{p'}}$) soit anti-commutatif. Or le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{E}xt^1(\mathbb{Z}/p', 1 + \mathcal{J}_{X/W_1}) & \xrightarrow[\sim]{\partial^{-1}} & \mathcal{H}om(\mathbb{Z}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_1}) = 1 + \mathcal{J}_{X/W_1} \\ & \nearrow \partial & \downarrow & & \downarrow \log \\ \underline{\mu}_{p'} & & \mathbb{D}(\mathbb{Z}/p') & \xrightarrow[\sim]{\partial_0^{-1}} & \mathcal{H}om(\mathbb{Z}, 1 + \mathcal{O}_{X/W_1}) = \mathcal{O}_{X/W_1} \\ & \searrow e & & & \downarrow \log \end{array}$$

par définition de $\varrho = \varrho_{\mu_{p^l}}$ ([3], 5.6, p. 33). Donc il suffit que

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{E}xt^1(\underline{\mathbb{Z}}/p^l, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}) & \xrightarrow{\partial^{-1}} & 1 + \mathcal{J}_{X/W_l} \\
 \nearrow \partial' & & & \nearrow \Phi \\
 \underline{\mu}_{p^l} & & &
 \end{array}$$

anti-commute; c'est-à-dire qu'il faut montrer

$$\partial'(\zeta) = -\partial \circ \Phi(\zeta) \quad \text{pour } \zeta \in \underline{\mu}_{p^l}. \tag{1.4.7.2}$$

Explicitons sous une autre forme la définition de Φ donnée en (1.4.7.1). Soit $\varphi \in \underline{\mu}_{p^l} = \mathcal{H}om(\underline{\mathbb{Z}}/p^l, \underline{\mathbb{G}}_m)$; on relève localement φ en $\varphi' : \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l}^*$ et on complète le diagramme commutatif ci-dessous par φ'' :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{p^l} & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}/p^l \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varphi'' & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi \\
 0 & \longrightarrow & 1 + \mathcal{J}_{X/W_l} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X/W_l}^* & \longrightarrow & \underline{\mathbb{G}}_m \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

D'après (1.4.7.1), $\Phi(\varphi(1)) = (\varphi'(1))^{p^l} = \varphi'(p^l) = \varphi''(1)$, égalité que l'on écrira $\Phi(\varphi) = \varphi''$.

Considérons les homomorphismes cobords relatifs aux lignes (exactes) du diagramme précédent

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}om(\underline{\mathbb{Z}}, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}) &\xrightarrow{\partial} \mathcal{E}xt^1(\underline{\mathbb{Z}}/p^l, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}), \\
 \mathcal{H}om(\underline{\mathbb{Z}}/p^l, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}) &\xrightarrow{\partial'} \mathcal{E}xt^1(\underline{\mathbb{Z}}/p^l, 1 + \mathcal{J}_{X/W_l}).
 \end{aligned}$$

Un résultat général d'algèbre homologique nous donne alors l'égalité

$$\partial(\varphi'') + \partial'(\varphi) = 0 \tag{1.4.7.3}$$

(cf. [7], exercice 18 p. 125, pour un cas particulier de ce résultat). D'où $\partial'(\varphi) = -\partial(\varphi'') = -\partial(\Phi(\varphi))$, ce qui établit (1.4.7.2) et 1.4.7. ■

PROPOSITION 1.5. *La projection du morphisme $g: \underline{\mathbb{G}}_m \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_l}[1]$ défini en 1.3 (ii) induit la différentielle logarithmique*

$$\mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\text{dlog}} \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^i) = \mathcal{H}^1(\Omega_{X_n}^i/p^l\Omega_{X_n}^i) \quad (1 \leq l \leq n).$$

Des isomorphismes $\mathbb{R}u_{X/W_i*} \circ \mathbb{R}\alpha_{X/W_i*}(\underline{\mathbb{G}}_m) \simeq \underline{\mathbb{G}}_m$ et $\mathbb{R}\alpha_{X/W_i*}(\mathcal{O}_{X/W_i}) \simeq \mathcal{O}_{X/W_i}$, il découle que $\bar{g} = \mathbb{R}u_{X/W_i*} \circ \mathbb{R}\alpha_{X/W_i*}(g)$ est le composé:

$$\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{R}u_{X/W_i*} \circ \mathbb{R}\alpha_{X/W_i*}(1 + \mathcal{J}_{X/W_i}) [1] \xrightarrow{\log[1]} \mathbb{R}u_{X/W_i*}(\mathcal{O}_{X/W_i}) [1].$$

Le morphisme \bar{g} s'insère dans le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{g}: \mathbb{G}_m & \rightarrow & \mathbb{R}u_{X/W_i*} \circ \mathbb{R}\alpha_{X/W_i*}(1 + \mathcal{J}_{X/W_i}) [1] & \xrightarrow{\log[1]} & \mathbb{R}u_{X/W_i*}(\mathcal{O}_{X/W_i}) [1] \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{O}_X^* & \xrightarrow{\delta} & [1 + p\mathcal{O}_{X_l} \xrightarrow{d \log} \Omega_{X_l}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{X_l}^2 \rightarrow \dots][1] & \xrightarrow{\log[1]} & [\mathcal{O}_{X_l} \xrightarrow{d} \Omega_{X_l}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{X_l}^2 \rightarrow \dots][1]; \end{array}$$

on va expliciter δ . Posons $\Omega_{X_l, d=0}^1 = \text{Ker}(\Omega_{X_l}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{X_l}^2)$; δ est défini par le diagramme du serpent:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X^* &\simeq \mathcal{O}_{X_l}^*/1 + p\mathcal{O}_{X_l} \xrightarrow{\delta} \Omega_{X_l, d=0}^1/d\log(1 + p\mathcal{O}_{X_l}) \\ \delta(x_l \bmod (1 + p\mathcal{O}_{X_l})) &= d\log x_l \bmod d\log(1 + p\mathcal{O}_{X_l}). \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

De plus, en composant δ avec la projection

$$\Omega_{X_l, d=0}^1/d\log(1 + p\mathcal{O}_{X_l}) \rightarrow \Omega_{X_l, d=0}^1/d\mathcal{O}_{X_l} = \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^1)$$

il advient que la projection \bar{g} de g induit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_n}^*/(1 + p\mathcal{O}_{X_n}) &= \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^1) = \mathcal{H}^1(\Omega_{X_n}^1/p^l\Omega_{X_n}^1) \quad (1 \leq l \leq n) \\ x_n \bmod (1 + p\mathcal{O}_{X_n}) &\mapsto (d\log x_n \bmod p^l\Omega_{X_n}^1) \bmod d(\mathcal{O}_{X_n}/p^l\mathcal{O}_{X_n}); \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

d'où l'assertion 1.5.

Ceci achève la démonstration de 1.2 (cf. 1.3). ■

Composé avec l'isomorphisme (II, 2.0.1)

$$R^1u_{X/W_n*}(\mathbb{D}(G^*)) \simeq \mathcal{H}^1(\mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1),$$

χ_n fournit un morphisme

$$\varepsilon'_n: R^1\alpha_{X*}(G) \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1).$$

On supposera dorénavant que G est de type multiplicatif.

PROPOSITION 1.7. *Soient $n \geq 1$, tel que $p^n G = 0$, et $s \geq 0$. L'image du morphisme ε'_n est contenue dans $F^s(\mathbb{D}(G^*)_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^1)/\nabla(\mathbb{D}(G^*)_n)$. Pour $G = \mu_{p^l}$ ($1 \leq l \leq n$), avec les identifications $R^1\alpha_*(G) \simeq \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l}$ et $\mathbb{D}(\mu_{p^l}^*) \simeq \mathcal{O}_{X/W_n}/p^l\mathcal{O}_{X/W_n}$ de (1.1.1) et (1.1.2), le morphisme ε'_n s'explique comme l'application*

$$\varepsilon'_n: \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l} \rightarrow \mathcal{H}^1(W_n\Omega^1/p^l W_n\Omega^1)$$

$$\text{Cl } x \mapsto (\text{dlog } \underline{x}_{\leq n} \text{ mod } p^l W_n\Omega^1 + \text{d}W_n\mathcal{O}),$$

où $\underline{x}_{\leq n} = (x, 0, \dots, 0)$ est le représentant de Teichmüller de x dans $W_n\mathcal{O}$.

Traisons d'abord le cas $G = \mu_{p^l}$, avec $1 \leq l \leq n$. L'expression de ε'_n étant une question locale sur X , on supposera X et S affines et X relevé en \tilde{X} lisse sur W , et on posera $X_n = \tilde{X} \times_w W_n$. Compte tenu des isomorphismes canoniques

$$R^1u_{X/W_n*}(\mathbb{D}(G^*) \simeq \mathcal{H}^1(\Omega_{X_n}^1/p^l\Omega_{X_n}^1) \simeq \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^1),$$

et

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1) \simeq \mathcal{H}^1(W_n\Omega^1/p^l W_n\Omega^1) \xrightarrow[(1.2.1)]{\sim} \mathcal{H}^1(W_l\Omega^1),$$

ε'_n s'explique comme le composé de

$$\chi_n: \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l} \rightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^1)$$

$$\text{Cl } x \mapsto (\text{dlog } x_l \text{ mod } \text{d}\mathcal{O}_{X_l}),$$

où $x \in \mathcal{O}_X^* \simeq \mathcal{O}_{X_l}^*/(1 + p\mathcal{O}_{X_l})$ est relevé en $x_l \in \mathcal{O}_{X_l}^*$, et de

$$\mathcal{H}^1(t_F): \mathcal{H}^1(\Omega_{X_l}^1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^1(W_l\Omega^1) \quad (\text{II, 2.0.3})$$

avec $\mathcal{H}^1(t_F)(\text{dlog } x_l \text{ mod } \text{d}\mathcal{O}_{X_l}) = \text{dlog } (t_F(x_l)) \text{ mod } \text{d}W_l\mathcal{O}$, pour $x_l \in \mathcal{O}_{X_l}^*$.

LEMME 1.7.1. *Si $y \in \mathcal{O}_X^*$ et si y' et y'' appartenant à $(W_n\mathcal{O})^*$ relèvent y , alors*

$$\text{d}y'/y' \equiv \text{d}y''/y'' \text{ mod } \text{d}W_n\mathcal{O}.$$

En effet: de $\mathcal{O}_X^* \simeq (W_n\mathcal{O})^*/(1 + VW_n\mathcal{O})$, on tire $y'' = y'(1 + z)$ où $z \in VW_n\mathcal{O}$, qui est un idéal à puissances divisées, ce qui permet de définir $\log(1 + z)$. Alors $\text{d}y''/y'' = \text{d}y'/y' + \text{d}z/(1 + z) = \text{d}y'/y' + \text{dlog}(1 + z)$; d'où le lemme.

Soit donc $x \in \mathcal{O}_X^*$ relevé en $x_l \in \mathcal{O}_{X_l}^*$; on dispose (cf II, 2.2) des deux relèvements $t_F(x_l)$ et $\underline{x}_{\leq l} = (x, 0, \dots, 0)$ de x dans $(W_l\mathcal{O})^*$; d'après le lemme 1.7.1, on a donc

$$\mathrm{dlog}(t_F(x_l)) \equiv \mathrm{dlog}(\underline{x}_{\leq l}) \pmod{\mathrm{d}W_l\mathcal{O}},$$

et ε'_n est l'application

$$\varepsilon'_n: \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l} \rightarrow \mathcal{H}^1(W_l\Omega^*) \simeq \mathcal{H}^1(W_n\Omega^*/p^l W_n\Omega^*)$$

$$\mathrm{Cl} x \mapsto \mathrm{dlog} \underline{x}_{\leq l} \pmod{\mathrm{d}W_l\mathcal{O}} \equiv \mathrm{dlog} \underline{x}_{\leq n} \pmod{p^l W_n\Omega^1 + \mathrm{d}W_n\mathcal{O}}.$$

(1.7.2)

D'après ([21], I, 5.7.2) on a, pour tout $s \geq 0$,

$$F^s(\mathrm{dlog} \underline{x}_{\leq n+s}) = \mathrm{dlog} \underline{x}_{\leq n} \quad \text{avec} \quad x \in \mathcal{O}_X^*,$$

et comme F commute à p , il en résulte l'expression requise:

$$\varepsilon'_n(\mathrm{Cl} x) = F^s(\mathrm{dlog} \underline{x}_{\leq n+s} \pmod{p^l W_n\Omega^1}) \pmod{\mathrm{d}(W_n\mathcal{O}/p^l W_n\mathcal{O})}. \quad (1.7.3)$$

Le cas général s'en déduit en décomposant, localement pour la topologie étale, G en somme directe de groupes μ_{p^l} . ■

PROPOSITION 1.8. *Soient n et s des entiers ≥ 1 tels que $p^n G = 0$ et $s \geq 2n$. Avec les mêmes identifications qu'en 1.7 le morphisme composé*

$$\begin{aligned} \varepsilon_n: R^1\alpha_*(G) &\xrightarrow{\varepsilon'_n} F^s(\mathbb{D}(G^*)_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^1)/\mathbb{V}(\mathbb{D}(G^*)_n) \\ &\xrightarrow{\check{C}^n} F^{s-n}(\mathbb{D}(G^*)_s \otimes W_s\Omega^1) \end{aligned}$$

vérifie $\check{C}(\varepsilon_n(x)) = \varepsilon_n(x)$ pour tout $x \in R^1\alpha_*(G)$. De plus, lorsque $G = \mu_{p^l}$, avec $1 \leq l \leq n$, ε_n s'explique comme l'application

$$\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^l} \rightarrow (F^{s-n} W_s\Omega^1)/p^l W_n\Omega^1$$

$$\mathrm{Cl} x \mapsto \mathrm{dlog} \underline{x}_{\leq n} \pmod{p^l W_n\Omega^1}.$$

Les vérifications nécessaires à la démonstration de la 1^{ère} assertion étant locales, on est ramené au cas $G = \mu_{p^l}$, avec $1 \leq l \leq n$. Dans ce cas on déduit de (1.7.3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\text{Cl } x) &= \check{C}^n(\varepsilon'_n(\text{Cl } x)) = F^{s-n}R^n(\text{dlog } \underline{x}_{\leq n+s} \bmod p^l W_{n+s}\Omega^1) \\ &= \text{dlog } \underline{x}_{\leq n} \bmod p^l W_n\Omega^1. \end{aligned}$$

Il est alors clair que $\check{C}(\varepsilon_n(\text{Cl } x)) = \varepsilon_n(\text{Cl } x)$ (cf. II, 3.4.3.3). ■

1.9. Mentionnons les compatibilités de ε_n à F et V .

Cas d'un groupe p -divisible. Pour un groupe p -divisible H (de hauteur h) de type multiplicatif sur X , l'injection canonique $H(n) \hookrightarrow H(n + 1)$ [resp. la projection canonique $H(n + 1) \twoheadrightarrow H(n)$] induit une application

$$i: R^1\alpha_*(H(n)) \rightarrow R^1\alpha_*(H(n + 1))$$

$$[\text{resp. } p: R^1\alpha_*(H(n + 1)) \twoheadrightarrow R^1\alpha_*(H(n))]$$

qui fait commuter le carré

$$\begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(H(n)) & \xrightarrow{\varepsilon_n} & \mathbb{D}(H^*)_n \otimes W_n\Omega^1 \\ \downarrow i & & \downarrow V \\ R^1\alpha_*(H(n + 1)) & \xrightarrow{\varepsilon_{n+1}} & \mathbb{D}(H^*)_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^1 \end{array} \tag{1.9.1}$$

[resp. le carré

$$\begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(H(n)) & \xrightarrow{\varepsilon_n} & \mathbb{D}(H^*)_n \otimes W_n\Omega^1 \\ \uparrow p & & \uparrow F \\ R^1\alpha_*(H(n + 1)) & \xrightarrow{\varepsilon_{n+1}} & \mathbb{D}(H^*)_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^1. \end{array} \tag{1.9.2}$$

Ceci résulte immédiatement de la définition de ε_n et de (II, 3.4.8), compte tenu des isomorphismes $\Phi: \mathbb{D}(H^*)^\sigma \simeq \mathbb{D}(H^*)$ et $\mathbb{D}(H^*(n))_n \simeq \mathbb{D}(H^*)_n$ ([4], 3.3.3.1; [3], théorème 2).

Cas d'un groupe fini. Pour le p -groupe fini localement libre G de type multiplicatif sur X , on établit de même la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc}
 R^1\alpha_*(G) & \xrightarrow{\epsilon_n} & F^s(\mathbb{D}(G^*)_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^1) \\
 \parallel & & \uparrow F \\
 R^1\alpha_*(G) & \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} & F^s(\mathbb{D}(G^*)_{n+s+1} \otimes W_{n+s+1}\Omega^1),
 \end{array} \tag{1.9.3}$$

avec $s \geq n$ si $n > 1$ [resp. $s \geq 0$ si $n = 1$].

2. Points fixes des opérateurs de Frobenius et de Cartier

2.0. Soient G et H des groupes comme en 1.9 et E de la forme $\mathbb{D}(G^*)$ ou $\mathbb{D}(H^*)$. Considérons les faisceaux suivants, pour la topologie étale sur X .

DÉFINITION 2.1

$$\tilde{v}_n(E, i) = \text{Ker} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \tilde{F}: E_n \otimes W_n\Omega^i \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^i / \nabla(E_n \otimes W_n\Omega^{i-1}) \\ Rx \mapsto \text{Cl}(Rx - Fx) \end{array} \right\},$$

$$v'_n(E, i) = \text{Ker} \left\{ \begin{array}{l} \check{F}: E_n \otimes W_n\Omega^i \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^i / \nabla V^{n-1}(E_1 \otimes \Omega^{i-1}) \\ Rx \mapsto \text{Cl}(Rx - Fx) \end{array} \right\},$$

$$v''_n(E, i) = \text{Ker} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{C} - 1: F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i) \rightarrow F^{n-1}(E_{2n-1} \otimes W_{2n-1}\Omega^i) \\ F^n x \mapsto F^{n-1}Rx - F^n x \end{array} \right\},$$

(cf. II, 3.4.3.3); pour E localement libre (i.e., $E = \mathbb{D}(H^*)$) soit

$$v'''_n(E, i) = \text{Ker} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{C} - 1: F(E_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^i) \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^i \\ Fx \mapsto Rx - Fx \end{array} \right\}.$$

Il est clair que $v'_n(E, i) \subset \tilde{v}_n(E, i)$.

PROPOSITION 2.2. On a des isomorphismes de faisceaux étales

$$v'_n(E, i) \simeq v''_n(E, i) (\simeq v'''_n(E, i) \text{ si } E = \mathbb{D}(H^*)). \tag{2.2.1}$$

En notant $v_n(E, i)$ ces faisceaux on a

$$R(v_{n+1}(E, i)) = v_n(E, i), \tag{2.2.2}$$

$$v_n(E, i) \subset F^s(E_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^i) \tag{2.2.3}$$

pour tout entier $s \geq 0$, et des suites exactes de faisceaux pour la topologie étale sur X :

$$0 \rightarrow v_n(E, i) \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^i \xrightarrow{1-\check{F}} E_n \otimes W_n\Omega^i/\nabla V^{n-1}(E_1 \otimes \Omega^{i-1}) \rightarrow 0 \tag{2.2.4}$$

$$0 \rightarrow v_n(E, i) \rightarrow F^s(E_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^i) \xrightarrow{\check{c}^{-1}} F^{s-1}(E_{n+s-1} \otimes W_{n+s-1}\Omega^i) \rightarrow 0, \tag{2.2.5}$$

où $s \geq 1$ (resp. $s = n$) si $E = \mathbb{D}(H^*)$ (resp. $E = \mathbb{D}(G^*)$).

REMARQUE 2.2.6. Pour $E = \mathcal{O}_{X/W}$ la 1^{ère} suite exacte est dans ([7 bis], lemme 2 p. 779) et la 2^e dans Kato ([22 bis], 4.1.6).

Prouvons d'abord que $R(v'_{n+1}(E, i)) = v'_n(E, i)$. L'application $R - F: E_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^i \rightarrow E_n \otimes W_n\Omega^i$ est surjective pour la topologie étale: le cas $E = \mathbb{D}(H^*)$ résulte de ([21], I, 3.2.6) et le cas $E = \mathbb{D}(G^*)$ s'en déduit par les descriptions locales $E_n \simeq \bigoplus_r W_n\mathcal{O}_X/p^{nr}W_n\mathcal{O}_X$. Soit N_{n+1} le noyau de $R - F$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N_{n+1} & \rightarrow & E_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^i & \xrightarrow{R-F} & E_n \otimes W_n\Omega^i \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow R & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & v'_n(E, i) & \rightarrow & E_n \otimes W_n\Omega^i & \xrightarrow{1-\check{F}} & E_n \otimes W_n\Omega^i/\nabla V^{n-1}(E_1 \otimes \Omega^{i-1}) \rightarrow 0, \end{array}$$

où la surjectivité de $1 - \check{F}$ résulte de celle de $R - F$. Comme $(R - F)(\text{Ker } R) = \nabla V^{n-1}(E_1 \otimes \Omega^{i-1})$ (II, 3.2.4), on a $R(N_{n+1}) = v'_n(E, i)$. Pour montrer que $R(v'_{n+1}(E, i)) = v'_n(E, i)$, il nous suffit dnc d'établir l'inclusion $N_{n+1} \subset R(N_{n+2}) + \text{Ker } R$. Celle-ci étant vraie pour $E = \mathcal{O}_{X/W}$ ([21], I, 5.7.4), elle le demeure pour $E = \mathbb{D}(H^*)$: il nous reste à la montrer pour $E = \mathcal{O}_{X/W}/p^s\mathcal{O}_{X/W}$ ($s \in \mathbb{N}$). Pour cette démonstration réservons la notation

N_n au cas $E = \mathcal{O}_{X/W}$ et la notation N'_n au cas $E = \mathcal{O}_{X/W}/p^s \mathcal{O}_{X/W}$. L'image de $N_{n+1}/p^s N_{n+1}$ dans $W_{n+1}\Omega^i/p^s W_{n+1}\Omega^i$ est N'_{n+1} . Or on a une flèche

$$\begin{array}{ccc}
 N_{n+1}/p^s & \rightarrow & [R(N_{n+2})]/p^s + [\text{Ker } R]/p^s \\
 & & \downarrow \wr \\
 & & R(N_{n+2}/p^s) \\
 & & \downarrow \\
 & & R(N'_{n+2}) \quad + \quad \text{Ker } (R/p^s) \subset W_{n+1}\Omega^i/p^s;
 \end{array}$$

d'où $N'_{n+1} \subset R(N'_{n+2}) + \text{Ker } (R/p^s)$, ce qui démontre $R(v'_{n+1}(E, i)) = v'_n(E, i)$.

Puisque $v'_{n+1}(E, i) \subset N_{n+1}$ on a $R = F$ sur $v'_{n+1}(E, i)$, d'où $F^s(v'_{n+s}(E, i)) = v'_n(E, i) \subset F^s(E_{n+s} \otimes W_{n+s}\Omega^i)$ pour tout entier $s \geq 0$. On en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & v'_n(E, i) & \rightarrow & F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i) & \xrightarrow{1-\check{F}} & F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i)/\nabla V^{n-1}(E_1 \otimes \Omega^{i-1}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \wr \check{c} \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

$$0 \rightarrow v''_n(E, i) \rightarrow F^n(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i) \xrightarrow{\check{c}-1} F^{n-1}(E_{2n-1} \otimes W_{2n-1}\Omega^i) \rightarrow 0;$$

d'où $v'_n(E, i) \simeq v''_n(E, i)$. Il reste à prouver que $v'_n(E, i) \simeq v'''_n(E, i)$ dans le cas $E = \mathbb{D}(H^*)$: ceci résulte du triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 F(E_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^i) & \xrightarrow{1-\check{F}} & F(E_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^i)/\nabla V^{n-1}(E_1 \otimes \Omega^{i-1}) \\
 & \searrow \check{c}-1 & \downarrow \wr \check{c} \\
 & & E_n \otimes W_n\Omega^i.
 \end{array}$$

COROLLAIRE 2.3. *Si X est un schéma propre et lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, et E un cristal sur X comme en 2.0, alors on a*

$$H^j(X_{\text{ét}}, v_n(E, i)) = 0 \text{ pour } j > \dim X + 1.$$

Résulte de la suite de cohomologie associée à la suite exacte (2.2.4) puisque les faisceaux $E_n \otimes W_n\Omega^i$ et $E_n \otimes W_n\Omega^i/\nabla V^{n-1}(E_1 \otimes \Omega^{i-1})$ sont cohérents et que la cohomologie de Zariski de l'espace noethérien X à coefficients dans un faisceau abélien s'annule en dimension $> \dim X$. ■

Notons $E_n \otimes W_n \Omega^{\geq i}$ le tronqué naïf

$$0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_n \otimes W_n \Omega^i \xrightarrow{v} E_n \otimes W_n \Omega^{i+1} \longrightarrow \dots,$$

où $E_n \otimes W_n \Omega^i$ est placé en degré i , et F_i l'endomorphisme de $E. \otimes W. \Omega^{\geq i}$ donné par $p^{i-j}F$ en degré j .

LEMME 2.4. *On a des suites exactes de pro-faisceaux pour la topologie étale sur X*

$$0 \longrightarrow v.(E, i) \longrightarrow E. \otimes W. \Omega^i \xrightarrow{1-F} E. \otimes W. \Omega^i \longrightarrow 0, \quad (2.4.1)$$

$$0 \longrightarrow v.(E, i)[-i] \longrightarrow E. \otimes W. \Omega^{\geq i} \xrightarrow{1-F_i} E. \otimes W. \Omega^{\geq i} \longrightarrow 0. \quad (2.4.2)$$

Avec les notations de 2.2 la suite

$$0 \longrightarrow N_n \longrightarrow E_n \otimes W_n \Omega^i \xrightarrow{1-F} E_{n-1} \otimes W_{n-1} \Omega^i \longrightarrow 0$$

est exacte pour la topologie étale: il suffit donc, pour (2.4.1), de prouver que $N. \xrightarrow{R} v.(E, i)$ est un isomorphisme de pro-objets, ce qui est clair (cf. la démonstration de 2.2) car l'inverse de R est $v.(E, i) \hookrightarrow N. .$ Pour $r \geq 1$ et tout i on démontre comme Illusie ([21], I, 3.30) que $1 - p^r F$ est un automorphisme du pro-objet $E. \otimes W. \Omega^i$, et ceci que E soit de la forme $\mathbb{D}(H^*)$ ou $\mathbb{D}(G^*)$; d'où (2.4.2). ■

Soient maintenant G' (resp. H') un p -groupe fini localement libre (resp. un groupe p -divisible) étale sur X , G'^{\vee} (resp. H'^{\vee}) son dual de Pontryagin. On sait ([3]) que

$$\mathbb{D}(G'^{\vee}) \simeq \underline{G}' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W} \text{ (resp. } \mathbb{D}(H'^{\vee}) \simeq \underline{H}' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W});$$

on dispose donc, pour tout entier $n \geq 1$ tel que $p^n G' = 0$ (resp. pour tout entier $n \geq 1$) d'une application canonique dans la catégorie des faisceaux abéliens sur le site étale de X :

$$\delta_n: G' \rightarrow \mathbb{D}(G'^{\vee})_n \text{ (resp. } \delta_n: H' \rightarrow \mathbb{D}(H'^{\vee})_n).$$

PROPOSITION 2.5. *Soit n un entier ≥ 1 (resp. tel que $p^n G = p^n G' = 0$) et munissons X de la topologie étale. On a des isomorphismes de faisceaux étales*

$$R^1 \alpha_* (H(n)) \xrightarrow{\sim} v_n(\mathbb{D}(H^*), 1), \quad (2.5.1)$$

$$H'(n) \xrightarrow{\sim} v_n(\mathbb{D}(H'^{\vee}), 0) \quad (2.5.2)$$

[resp.

$$R^1\alpha_*(G) \xrightarrow{\varepsilon_n} v_n(\mathbb{D}(G^*), 1), \tag{2.5.3}$$

$$G' \xrightarrow{\delta_n} v_n(\mathbb{D}(G'^\vee), 0]. \tag{2.5.4}$$

D’après ([7 bis], lemme 2 p. 779) on a des isomorphismes locaux pour la topologie étale

$$\begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(H(n)) & \xrightarrow{\varepsilon_n} & v_n(\mathbb{D}(H^*), 1) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ (\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n})^h & \xrightarrow[\oplus \text{dlog}]{\sim} & (W_n\Omega_{\log}^1)^h, \end{array}$$

où h est la hauteur du groupe p -divisible H ; d’où (2.5.1).

De même on a les isomorphismes locaux

$$\begin{aligned} H'(n) \xrightarrow{\delta_n} v_n(\mathbb{D}(H'^\vee), 0) &= \text{Ker} \{ \mathbb{D}(H'^\vee)_n \xrightarrow{1-F} \mathbb{D}(H'^\vee)_n \} \\ &\simeq \text{Ker} \{ (W_n\mathcal{O})^h \xrightarrow{1-F} (W_n\mathcal{O})^h \}, \end{aligned}$$

où h est la hauteur de H' ; d’où (2.5.2).

Dès que l’entier n vérifie $p^n G = 0$, on a, d’après 1.8, un morphisme $\varepsilon_n: R^1\alpha_*(G) \rightarrow v_n(\mathbb{D}(G^*), 1)$; pour montrer que c’est un isomorphisme on se ramène au cas $G = \mu_{p^l}$, $1 \leq l \leq n$.

L’injectivité de ε_n résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(\mu_{p^l}) & \xrightarrow{\varepsilon_n} & v_n(\mathbb{D}(\mu_{p^l}^*), 1) \\ \parallel & & \downarrow R^{n-l} \\ R^1\alpha_*(\mu_{p^l}) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_l} & v_l(\mathbb{D}(\mu_{p^l}^*), 1), \end{array}$$

où ε_l est un isomorphisme (2.5.1). La surjectivité de ε_n va résulter du lemme suivant:

LEMME 2.5.5. *Si G est un p -groupe fini localement libre de type multiplicatif sur X , on a un isomorphisme de pro-objets*

$$R^1\alpha_*(G) \xrightarrow{\sim} v_*(\mathbb{D}(G^*), 1).$$

La zéro-suite de pro-faisceaux

$$0 \longrightarrow R^1\alpha_*(G) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{D}(G^*) \otimes W.\Omega^1 \xrightarrow{1-F} \mathbb{D}(G^*) \otimes W.\Omega^1 \longrightarrow 0$$

est isomorphe localement à la zéro-suite de pro-faisceaux

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i W_n.\Omega_{\log}^1 \longrightarrow \bigoplus_i W.\Omega^1/p^n.W.\Omega^1 \xrightarrow{1-F} \bigoplus_i W.\Omega^1/p^n.W.\Omega^1 \longrightarrow 0;$$

puisque $W.\Omega^1$ est sans p -torsion, cette dernière est exacte grâce à l'isomorphisme de pro-objets ([21], I, 5.7.5)

$$W_n.\Omega_{\log}^j \leftarrow W.\Omega_{\log}^j/p^n.W.\Omega_{\log}^j \text{ pour tout entier } j \geq 0;$$

d'où le lemme d'après (2.4.1).

Vu l'injectivité de ε_n , le lemme 2.5.5 signifie que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in v_{n+r}(\mathbb{D}(G^*), 1)$, on a $R^r x \in \text{Image}(\varepsilon_n)$: or $R^r: v_{n+r}(\mathbb{D}(G^*), 1) \rightarrow v_n(\mathbb{D}(G^*), 1)$ est surjective (2.2.2); d'où la surjectivité de ε_n , ce qui établit (2.5.3).

Pour (2.5.4) il faut d'abord vérifier que δ_n est d'image contenue dans $v_n(\mathbb{D}(G'^\vee), 0)$; pour ça on se ramène à $G' = \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$, avec $1 \leq l \leq n$, et l'assertion est claire compte tenu de la suite exacte

$$\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_n} \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_n\mathcal{O} \xrightarrow{1-F} \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_n\mathcal{O}.$$

La surjectivité de δ_n dans (2.5.4) en résulte. L'injectivité de δ_n provient de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} & \xrightarrow{\delta_n} & v_n(\mathbb{D}((\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^\vee), 0) \\ \parallel & & \downarrow R^{n-l} \\ \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} & \xrightarrow{\delta_l} & v_l(\mathbb{D}((\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^\vee), 0) = \text{Ker} \{W_l\mathcal{O} \xrightarrow{1-F} W_l\mathcal{O}\}. \end{array} \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 2.6. Pour tout entier $n \geq 1$, les carrés suivants commutent

$$\begin{array}{ccc}
 R^1\alpha_*(H(n)) & \xrightarrow{\sim \epsilon_n} & v_n(\mathbb{D}(H^*), 1) \\
 \downarrow i & & \downarrow V=\underline{p} \\
 R^1\alpha_*(H(n+1)) & \xrightarrow{\sim \epsilon_{n+1}} & v_{n+1}(\mathbb{D}(H^*), 1),
 \end{array} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{array}{ccc}
 R^1\alpha_*(H(n)) & \xrightarrow{\sim \epsilon_n} & v_n(\mathbb{D}(H^*), 1) \\
 \uparrow p & & \uparrow F=R \\
 R^1\alpha_*(H(n+1)) & \xrightarrow{\sim \epsilon_{n+1}} & v_{n+1}(\mathbb{D}(H^*), 1),
 \end{array} \tag{2.6.2}$$

où i et p sont induits respectivement par l'injection $H(n) \hookrightarrow H(n+1)$ et la surjection $p: H(n+1) \twoheadrightarrow H(n)$.

De plus, si l'entier n est tel que $p^n G = 0$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 R^1\alpha_*(G) & \xrightarrow{\sim \epsilon_{n+1}} & v_{n+1}(\mathbb{D}(G^*), 1) \\
 \parallel & & \downarrow F=R \\
 R^1\alpha_*(G) & \xrightarrow{\sim \epsilon_n} & v_n(\mathbb{D}(G^*), 1).
 \end{array} \tag{2.6.3}$$

Le corollaire résulte de 1.9 et 2.5. ■

On déduit de la proposition 2.5 et du lemme 2.4 le corollaire:

COROLLAIRE 2.7. Avec la topologie étale sur X et les mêmes hypothèses que ci-dessus pour G, H, G', H' , on a des suites exactes de pro-faisceaux

$$0 \longrightarrow R^1\alpha_*(G) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathbb{D}(G^*) \otimes W.\Omega^1 \xrightarrow{1-F} \mathbb{D}(G^*) \otimes W.\Omega^1 \longrightarrow 0, \tag{2.7.1}$$

$$0 \longrightarrow R^1\alpha_*(H(\cdot)) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathbb{D}(H^*) \otimes W.\Omega^1 \xrightarrow{1-F} \mathbb{D}(H^*) \otimes W.\Omega^1 \longrightarrow 0, \tag{2.7.2}$$

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{\delta} \mathbb{D}(G' \vee) \otimes W.\Omega' \xrightarrow{1-F} \mathbb{D}(G' \vee) \otimes W.\Omega' \longrightarrow 0, \tag{2.7.3}$$

$$0 \longrightarrow H'(\cdot) \xrightarrow{\delta} \mathbb{D}(H' \vee) \otimes W.\Omega' \xrightarrow{1-F} \mathbb{D}(H' \vee) \otimes W.\Omega' \longrightarrow 0, \tag{2.7.4}$$

où \underline{F} est donné par $p^i F$ en degré i .

Notons aussi:

LEMME 2.8. *Soient m, n, i des entiers ≥ 0 et E un F -cristal unité sur X (i.e. $E = \mathbb{D}(H^*)$ ou $\mathbb{D}(H' \vee)$). On a une suite exacte canonique de faisceaux étales sur X :*

$$0 \rightarrow v_m(E, i) \xrightarrow{p^n} v_{m+n}(E, i) \xrightarrow{R^m} v_n(E, i) \rightarrow 0,$$

où \underline{p}^n est l'application (II, (1.2.8.1)).

La multiplication par p étant injective sur le pro-objet $E \otimes W.\Omega^i$ ([21], I, 3.5) elle l'est aussi sur $v.(E, i)$, d'où une suite exacte

$$0 \rightarrow v.(E, i)/p^m \xrightarrow{p^n} v.(E, i)/p^{m+n} \xrightarrow{R^m} v.(E, i)/p^n \rightarrow 0.$$

Or la flèche canonique

$$v.(E, i)/p^m v.(E, i) \rightarrow v_m(E, i), \tag{2.8.1}$$

est un isomorphisme de pro-objets compte tenu de ([21], I, 5.7.5) et de l'isomorphisme local $v_m(E, i) \simeq (W_m \Omega_{\log}^i)^h$, où h est la hauteur de H ; d'où le lemme. ■

3. Cohomologie plate de G et cohomologie étale de G'

Dans ce numéro, X est un schéma propre et lisse sur $S = \text{Spec } k$, où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, G (resp. G') un p -groupe fini localement libre de type multiplicatif (resp. étale) sur X , et H (resp. H') un groupe p -divisible de type multiplicatif (resp. étale) sur X .

3.1. Préliminaires

Nous avons regroupé ici un certain nombre de résultats extraits de l'article de Milne [24] (voir aussi l'exposé de Berthelot [2]).

On désigne par S_{parf} le topos des faisceaux sur le site parfait de S , dont les objets sont les S -schémas parfaits et la topologie, la topologie étale.

On notera $\mathcal{G}(p^n)$ la catégorie des S -groupes parfaits algébriques affines (quasi-algébriques dans la terminologie de Serre [27]) annihilés par p^n , $\mathcal{G}(p^\infty) = \bigcup_n \mathcal{G}(p^n)$, \mathcal{F} la catégorie des faisceaux abéliens de S_{parf} , $\mathcal{F}(p^n)$ la sous-catégorie pleine des faisceaux annihilés par p^n , et $D^b(\mathcal{G}(p^\infty))$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $D(\mathcal{F})$, formée des complexes bornés dont la cohomologie est dans $\mathcal{G}(p^\infty)$.

On désigne par $(X/S)_{\text{parf}}$ le topos des faisceaux sur le site ayant pour objets les couples (T, Y) où T est un S -schéma parfait, et Y un schéma étale sur $X_T = X \times_S T$, la topologie étant encore la topologie étale.

Il existe un morphisme de topos $\pi: (X/S)_{\text{parf}} \rightarrow S_{\text{parf}}$ pour lequel l'image directe d'un faisceau \mathcal{E} sur $(X/S)_{\text{parf}}$ est définie par $\Gamma(T, \pi_*(\mathcal{E})) = \Gamma((T, X_T), \mathcal{E})$.

Pour un cristal E sur X , on notera encore $E_n \otimes W_n \Omega$ le complexe de faisceaux de $(X/S)_{\text{parf}}$ défini par

$$\Gamma((T, Y), E_n \otimes_{W_n c} W_n \Omega) = \Gamma(Y, E_{W_n(Y)} \otimes_{W_n c_Y} W_n \Omega_{Y/T}). \tag{3.1.1}$$

On dispose du diagramme commutatif de morphismes de topos ([2], 2.7)

$$\begin{array}{ccccccc} X_{\text{fppf}} & \xrightarrow{\alpha_s} & X_{\text{Et}} & \xrightarrow{\beta_s} & (X/S)_{\text{parf}} & \xrightarrow{\gamma_s} & X_{\text{ét}} \\ \pi_{\text{fppf}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\text{Et}} & & \downarrow \pi & & \\ S_{\text{fppf}} & \xrightarrow{\alpha_s} & S_{\text{Et}} & \xrightarrow{\beta_s} & S_{\text{parf}} & & \end{array} \tag{3.1.2}$$

jusqu'à présent nous avons noté α le morphisme composé $\gamma_X \beta_X \alpha_X$ (cf. III, 1), dorénavant α désignera aussi le composé $\beta_X \alpha_X$, le contexte précisant duquel il s'agit. Avec ces notations il existe un isomorphisme

$$\mathbb{R}(\beta_s \circ \alpha_s)_* \circ \mathbb{R}\pi_{\text{fppf}*}(G) \simeq \mathbb{R}\pi_*(R^1\alpha_*(G))[-1]; \tag{3.1.3}$$

ceci résulte du fait que, G étant de type multiplicatif, on ait

$$\mathbb{R}\alpha_*(G) \simeq (R^1\alpha_*(G))[-1].$$

On notera également G' (resp. $v_n(E, i)$) la restriction de G' (resp. l'extension de $v_n(E, i)$) à $(X/S)_{\text{parf}}$.

LEMME 3.1.4. *Si k est algébriquement clos et $E = \mathbb{D}(H^*)$ ou $\mathbb{D}(H'^\vee)$, il existe, pour tous i, j, n entiers, des isomorphismes*

$$H^i(X_{\text{fppf}}, G) \simeq \Gamma(S_{\text{parf}}, R^{j-1}\pi_*(R^1\alpha_*(G))),$$

$$H^i(X_{\text{ét}}, G') \simeq \Gamma(S_{\text{parf}}, R^j\pi_*(G')),$$

$$H^i(X_{\text{ét}}, v_n(E, i)) \simeq \Gamma(S_{\text{parf}}, R^j\pi_*(v_n(E, i))).$$

En effet, si k est algébriquement clos, $\Gamma(S_{\text{parf}}, -)$ est exact et 3.1.4 résulte de 3.1.3 en prenant les sections. ■

THÉORÈME 3.1.5. *Soit n un entier ≥ 1 .*

(3.1.5.1) *Si E est un F -cristal unité (i.e., $E = \mathbb{D}(H^*)$ ou $\mathbb{D}(H'^\vee)$) alors pour tout entier i les complexes $\mathbb{R}\pi_*(E_n \otimes W_n\Omega^i)$ et $\mathbb{R}\pi_*(v_n(E, i))$ appartiennent à $D^b(\mathcal{G}(p^\infty))$.*

(3.1.5.2) *Les complexes $\mathbb{R}\pi_*(R^1\alpha_*(G(n)))$ et $\mathbb{R}\pi_*(G'(n))$ appartiennent à $D^b(\mathcal{G}(p^\infty))$.*

On rappelle que pour un p -groupe \mathcal{H} , la notation $\mathcal{H}(n)$ désigne le noyau de la multiplication par p^n .

Compte tenu de 2.8 et (2.2.4), l'assertion (3.1.5.1) se démontre comme ([22], IV, 3.2.2).

Quant à (3.1.5.2), comme $\mathcal{G}(p^\infty)$ est stable par extensions, il suffit, en vertu des suites exactes de la forme

$$0 \rightarrow R^1\alpha_*(G(n)) \rightarrow R^1\alpha_*(G(n+1)) \xrightarrow{p^n} R^1\alpha_*(p^n G(n+1)) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow G'(n) \hookrightarrow G'(n+1) \xrightarrow{p^n} p^n G'(n+1) \rightarrow 0,$$

de prouver ce résultat pour $n = 1$. Suivant la méthode de ([2], 2.9) cela résultera des suites de cohomologie associées aux suites exactes du lemme suivant:

LEMME 3.1.6. *Pour la topologie étale sur X , on a les suites exactes:*

$$0 \rightarrow R^1\alpha_*(G(1)) \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathbb{D}(G(1)^*)_1 \otimes \Omega^1 \xrightarrow{1-\check{F}} \mathbb{D}(G(1)^*)_1 \otimes \Omega^1/\mathbb{V}(\mathbb{D}(G(1)^*)_1) \rightarrow 0, \quad (3.1.6.1)$$

$$0 \rightarrow G'(1) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{D}(G'(1)^\vee)_1 \xrightarrow{1-F} \mathbb{D}(G'(1)^\vee)_1 \rightarrow 0. \quad (3.1.6.2)$$

Le lemme résulte de (2.2.4), (2.5.1) et (2.5.2). ■

Supposons jusqu'à la fin de ce paragraphe 3.1 que E soit un F -cristal unité.

Nous noterons $\underline{H}^j(X, E_n \otimes W_n \Omega^i)$ (resp. $\underline{H}^j(X, v_n(E, i)) \in \mathcal{O}b(\mathcal{G}(p^n))$) le groupe quasi-algébrique $R^j \pi_*(E_n \otimes W_n \Omega^i)$ (resp. $R^j \pi_*(v_n(E, i))$) et $\underline{H}^j(X, E. \otimes W. \Omega^i)$ (resp. $\underline{H}^j(X, v.(E, i)) \in \mathcal{O}b \text{ pro-}\mathcal{G}(p^\infty)$) le groupe pro-algébrique défini par le système projectif des $\underline{H}^j(X, E_n \otimes W_n \Omega^i)$ (resp. $\underline{H}^j(X, v_n(E, i))$).

Si k est algébriquement clos $H^j(X, v_n(E, i))$ (resp. $H^j(X, \hat{v}(E, i)) := \varprojlim H^j(X, v_n(E, i))$) est l'ensemble des k -points de $\underline{H}^j(X, v_n(E, i))$ (resp. $\underline{H}^j(X, v.(E, i))$) (cf. 3.1.4).

La suite exacte (2.4.1) fournit une suite exacte longue de pro- $\mathcal{G}(p^\infty)$

$$\dots \rightarrow \underline{H}^j(X, v.(E, i)) \rightarrow \underline{H}^j(X, E. \otimes W. \Omega^i) \xrightarrow{1-F} \underline{H}^j(X, E. \otimes W. \Omega^i) \rightarrow \dots$$

et, compte tenu de (II, (4.2.3.1)), on démontre comme dans ([22], IV, 3.3):

PROPOSITION 3.1.7. *L'endomorphisme $1 - F$ de $\underline{H}^j(X, E. \otimes W. \Omega^i)$ est surjectif, donc on a un isomorphisme*

$$\underline{H}^j(X, v.(E, i)) \simeq \underline{H}^j(X, E. \otimes W. \Omega^i)^F,$$

où l'exposant F signifie que l'on prend les points fixes sous F .

3.2. Suites exactes fondamentales

On suppose de plus k algébriquement clos et que E est l'un des quatre cristaux $\mathbb{D}(G^*)$, $\mathbb{D}(H^*)$, $\mathbb{D}(G'^\vee)$ ou $\mathbb{D}(H'^\vee)$: les $E_n \otimes W_n \Omega^i$ sont quasi-cohérents sur le schéma $W_n(X)$, donc la projection canonique $X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$ induit des isomorphismes ([25], III, 3.8)

$$H^*(X_{\text{Zar}}, E_n \otimes W_n \Omega^i) \simeq H^*(X_{\text{ét}}, E_n \otimes W_n \Omega^i). \tag{3.2.1}$$

D'autre part on a un isomorphisme

$$H^*(X_{\text{fppf}}, G) \simeq H^{*-1}(X_{\text{ét}}, R^1 \alpha_*(G)); \tag{3.2.2}$$

on omettra les indices fppf ou ét, s'il n'en résulte pas de confusion.

THÉORÈME 3.2.3. *Supposons E localement libre, alors:*

(3.2.3.1) *On a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^j(X, \hat{v}(E, i)) \longrightarrow H^j(X, E_{W(X)} \otimes W \Omega^i) \\ &\xrightarrow{1-F} H^j(X, E_{W(X)} \otimes W \Omega^i) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

et $H^j(X, \hat{v}(E, i)) = 0$ pour $j > \dim X$.

(3.2.3.2) *Le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $H^j(X, \hat{v}(E, i)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est de dimension finie et l'on a des isomorphismes*

$$H^j(X, \hat{v}(E, i)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq (H^j(X, E_{W(X)} \otimes W\Omega^i) \otimes_W K)^F,$$

$$H^j(X, \hat{v}(E, i)) \otimes K \simeq (H^{i+j}(X/W, E) \otimes_W K)_{[i]}.$$

La suite exacte de (3.2.3.1) résulte de 3.1.7 et 3.1.5 car la catégorie $\mathcal{G}(p^\infty)$ est artiniennne ([27]). De plus, puisque $E_n \otimes W_n\Omega^i$ est cohérent et que X est noethérien on a

$$\begin{aligned} H^j(X, E_{W(X)} \otimes W\Omega^i) &= \varinjlim_n H^j(X_{\text{ét}}, E_n \otimes W_n\Omega^i) \\ &= \varinjlim_n H^j(X_{\text{zar}}, E_n \otimes W_n\Omega^i) \\ &= 0 \text{ pour } j > \dim X; \end{aligned}$$

d'où (3.2.3.1). On démontre (3.2.3.2) comme ([22], IV, 3.6). ■

Les théorèmes suivants généralisent ([21], II, 5.2 et 5.5):

THÉORÈME 3.2.4. *Les suites de cohomologie associées aux suites exactes (2.7.1) et (2.7.2) fournissent les suites exactes*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \varinjlim_n H_{\text{fppf}}^{i+1}(X, H(n)) \longrightarrow H^i(X, \mathbb{D}(H^*)_{W(X)} \otimes W\Omega^1) \\ \xrightarrow{1-F} H^i(X, \mathbb{D}(H^*)_{W(X)} \otimes W\Omega^1) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.2.4.1}$$

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_{\text{fppf}}^{i+1}(X, G) \longrightarrow H^i(X, \mathbb{D}(G^*)_{W(X)} \otimes W\Omega^1) \\ \xrightarrow{1-F} H^i(X, \mathbb{D}(G^*)_{W(X)} \otimes W\Omega^1) \longrightarrow \dots, \end{aligned} \tag{3.2.4.2}$$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \varinjlim_n H_{\text{fppf}}^i(X, H(n)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \longrightarrow H^i(X/W, \mathbb{D}(H^*)) \otimes_W K \\ \xrightarrow{p-F} H^i(X/W, \mathbb{D}(H^*)) \otimes_W K \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.2.4.3}$$

où \underline{F} est induit par functorialité par le Frobenius de $\mathbb{D}(H^*)$.

THÉORÈME 3.2.5. *Les suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes (2.7.3) et (2.7.4) fournissent les suites exactes*

$$0 \longrightarrow \varinjlim_n H_{\text{ét}}^i(X, H'(n)) \longrightarrow H^i(X, \mathbb{D}(H'^\vee)_{W(X)})$$

$$\xrightarrow{1-F} H^i(X, \mathbb{D}(H'^\vee)_{W(X)}) \longrightarrow 0, \tag{3.2.5.1}$$

$$\dots \longrightarrow H_{\text{ét}}^i(X, G') \longrightarrow H^i(X, \mathbb{D}(G'^\vee)_{W(X)}) \xrightarrow{1-F} H^i(X, \mathbb{D}(G'^\vee)_{W(X)}) \longrightarrow \dots$$

$$\tag{3.2.5.2}$$

$$0 \rightarrow \varinjlim_n H_{\text{ét}}^i(X, H'(n)) \rightarrow H^i(X/W, \mathbb{D}(H'^\vee)) \xrightarrow{1-F} H^i(X/W, \mathbb{D}(H'^\vee)) \rightarrow 0,$$

$$\tag{3.2.5.3}$$

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, G') \rightarrow H^i(X/W, \mathbb{D}(G'^\vee)) \xrightarrow{1-F} H^i(X/W, \mathbb{D}(G'^\vee)) \rightarrow 0,$$

$$\tag{3.2.5.4}$$

où F est induit par functorialité par les Frobenius de $\mathbb{D}(H'^\vee)$ et $\mathbb{D}(G'^\vee)$.

L'exactitude de (3.2.4.1), (3.2.4.3) et (3.2.5.1) est une conséquence de 2.5 et 3.2.3.

Pour les autres il faut vérifier que l'on peut passer à la limite projective dans les suites de cohomologie citées, ce qui est licite d'après 3.1.4 et 3.1.5 (la catégorie des groupes quasi-algébriques est artinienne: Serre [27]) et le fait que les systèmes projectifs $\mathbb{H}^*(X, E_n \otimes W_n \Omega^i)$, $H^*(X, E_n \otimes W_n \Omega^i)$ vérifient la condition Mittag–Leffler. On obtient ainsi les suites exactes (3.2.4.2) et (3.2.5.2). Quant aux deux dernières suites (3.2.5.3) et (3.2.5.4), elles sont obtenues en “cassant” les suites longues limites grâce au lemme suivant ([21], II, 5.3), compte tenu de l'isomorphisme (II, 2.1) $H^i(X/W_n, E) \simeq \mathbb{H}^i(X, E_n \otimes W_n \Omega^i)$:

LEMME 3.2.6. *Soit F un endomorphisme σ -linéaire d'un W -module de type fini M (où σ est l'automorphisme de Frobenius de W). Alors $1 - F: M \rightarrow M$ est surjectif.* ■

Remarquons que l'exactitude de (3.2.4.1) et (3.2.5.1) aurait pu s'obtenir pour certaines valeurs de i grâce aux résultats de finitude de II 4, donc indépendamment de 3.2.3.

Compte tenu du (II, 4) les résultats suivants concernant $\varinjlim H_{\text{fppf}}^i(X, H(n))$, $\varinjlim H_{\text{ét}}^i(X, H'(n))$ et $H_{\text{ét}}^i(X, G')$ sont une conséquence du lemme:

LEMME 3.2.7 ([21], II, 5.11). *Si F est un endomorphisme σ -linéaire d'un W -module de type fini M , alors $\text{Ker} \{1 - F: M \rightarrow M\}$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini.*

(3.2.8) $\varinjlim H_{\text{fppf}}^i(X, H(n)) = 0$ si $i = 0$, ou si X est une surface et que $i \geq 4$ ([17 bis] p. 316).

(3.2.9) $\varinjlim H_{\text{fppf}}^i(X, H(n))$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini si $i = 1, 2$, ou si $i = 3$ et que X est une surface telle que $H^2(X, \mathbb{D}(H^*)_{W(X)})$ est de type fini sur W .

(3.2.10) $\varinjlim H_{\text{ét}}^i(X, H'(n))$ et $H_{\text{ét}}^i(X, G')$ sont des \mathbb{Z}_p -modules de type fini pour tout i .

REMARQUE 3.2.11. Lorsque X est une surface, on peut avoir des renseignements plus précis sur $\varinjlim H_{\text{fppf}}^2(X, H(n))$ que (3.2.4.3), i.e., sans négliger la torsion: dans ce cas on peut relier la suite exacte (3.2.4.1) (avec $i = 1$) à la suite exacte (cf. 2.4.2)

$$0 \longrightarrow \varinjlim_n H_{\text{fppf}}^2(X, H(n)) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{D}(H^*)_{W(X)} \otimes W\Omega^{\geq 1})$$

$$\xrightarrow{1-F_1} H^2(X, \mathbb{D}(H^*)_{W(X)} \otimes W\Omega^{\geq 1}) \longrightarrow 0$$

par un diagramme analogue à ([21], II, 5.22.2).

Remerciements

Ce travail m'a été suggéré par Pierre Berthelot. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude pour le temps qu'il a bien voulu consacrer à guider et encourager mes premiers pas dans la recherche.

Je remercie également Luc Illusie pour l'intérêt porté à mes recherches et l'ambiance stimulante du Séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay; c'est son article [21] qui a servi de base à mes généralisations.

Références

1. P. Berthelot, Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, *Lecture Notes in Math.*, No. 407, Springer Verlag (1974).
2. P. Berthelot, Le théorème de dualité plate pour les surfaces, d'après J.S. Milne, dans *Surfaces algébriques, Séminaire de Géométrie algébrique d'Orsay, 1976-1978, Lecture Notes in Math.*, No. 868, Springer Verlag (1981).

3. P. Berthelot et W. Messing, Théorie de Dieudonné cristalline I, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, Juillet 1978, Astérisique No. 63 (1979) 17–38.
4. P. Berthelot, L. Breen et W. Messing, Théorie de Dieudonné cristalline II, *Lecture Notes in Math.*, No. 930, Springer Verlag (1982).
5. P. Berthelot et A. Ogus, *Notes on Crystalline Cohomology*, *Mathematical Notes*, No. 21, Princeton University Press (1978).
6. L. Breen, Extensions du groupe additif sur le site parfait, dans *Surfaces algébriques, Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay, 1976–1978*, *Lecture Notes in Math.*, No. 868, Springer Verlag (1981).
7. H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press (1956).
- 7 bis. J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* 50, 3 (1983) 763–801.
8. M. Demazure, Lectures on p-divisible groups, *Lecture Notes in Math.*, No. 302, Springer Verlag (1972).
9. M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, t 1, Masson, Paris et North-Holland Pub. Co (1970).
10. T. Ekedahl, On the multiplicative properties of the De Rham–Witt complex, *Arkiv för mat.* 22, 2 (1984) 185–239.
11. J.-Y. Etesse, Complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un F-cristal unité et dualité plate pour les surfaces, Thèse de 3e cycle, Université de Rennes I (1981).
12. J.-Y. Etesse, Complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un cristal, *C.R. Acad. Sci., Paris* 294, série I (1982) 581–584.
13. J.-Y. Etesse, Cohomologie du complexe de De Rham–Witt à coefficients dans un F-cristal unité et dualité plate pour les surfaces, *C.R. Acad. Sci., Paris* 294, série I (1982) 621–624.
14. J.-Y. Etesse, Dualité plate pour les surfaces, à coefficients dans un groupe fini de type multiplicatif, Preprint I.H.E.S., mai 1983.
15. J.-Y. Etesse, Dualité plate pour les surfaces, à coefficients dans un groupe fini de type multiplicatif (à paraître au Bulletin de la S.M.F.).
16. R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann (1964).
17. A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique*; EGA I, *Grundlehren* No. 166, Springer Verlag (1971); EGA II, *Pub. Math. I.H.E.S.*, vol 8; EGA III, *Pub. Math. I.H.E.S.*, vol 11 et 17; EGA IV, *Pub. Math. I.H.E.S.*, vol. 20, 24, 28 et 32.
- 17 bis. A. Grothendieck, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, exposé IX, North-Holland, Masson (1968).
18. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math., No. 52, Springer Verlag (1977).
19. R. Hartshorne, *Residues and Duality*, *Lecture Notes in Math.*, No. 20, Springer Verlag (1966).
20. R. Hartshorne, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *Pub. Math. I.H.E.S.* 45 (1975) 5–99.
21. L. Illusie, Complexe de De Rham–Witt et cohomologie cristalline, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4e série, t. 12 (1979) 501–661.
- 21 bis. L. Illusie, Finiteness, duality, and Künneth theorems in the cohomology of the De Rham–Witt complex, dans *Algebraic geometry Proceedings*, Tokyo/Kyoto 1982, *Lecture Notes in Math.*, No. 1016, Springer Verlag (1983).
22. L. Illusie et M. Raynaud, Les suites spectrales associées au complexe de De Rham–Witt, *Pub. Math. I.H.E.S.* 57 (1983) 73–212.
- 22 bis. K. Kato, Duality theories for the p-primary étale cohomology I, Algebraic and topological theories I. Kinokuniya (1985) 127–148.
23. N. Katz, Nilpotent connections and the Monodromy Theorem, *Pub. Math. I.H.E.S.* 39 (1970) 175–232.

24. J.-S. Milne. Duality in the flat cohomology of a surface, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4e série, t. 9 (1976) 171–202.
25. J.-S. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton University Press (1980).
26. N. Saavedra Rivano, *Catégories Tanakiennes*, *Lecture Notes in Math.*, No. 265, Springer Verlag (1972).
27. J.-P. Serre, Groupes proalgébriques, *Pub. Math. I.H.E.S.* 7 (1960).
28. SGA 4, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Lecture Notes in Math.*, Nos. 269, 270, 305, Springer (1972–1973).