COMPOSITIO MATHEMATICA

C. SABBAH

Proximité évanescente. II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques

Compositio Mathematica, tome 64, nº 2 (1987), p. 213-241
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__64_2_213_0>

Compositio Mathematica 64: 213–241 (1987)

Proximité évanescente
II. Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques

C. SABBAH
Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France

Received 2 September 1986; accepted in revised form 19 May 1987

Mots-clés: Polynôme de Bernstein, éventail, variété caractéristique, morphisme sans éclatement

Résumé. Nous exhibons des équations fonctionnelles pour l'expression $f_1^{s_1} \dots f_\kappa^{s_\kappa}$ où $f_1, \dots f_\kappa$ sont des fonctions holomorphes sur une variété analytique. Nous les relions à la géométrie du morphisme à valeurs dans $\mathbb{C}^\kappa$ défini par ces fonctions.

Abstract. We exhibit some functional equations for the formal expression $f_1^{s_1} \dots f_\kappa^{s_\kappa}$ where $f_1, \dots f_\kappa$ are holomorphic functions on some analytic manifold. We give a relation between these and the geometry of the mapping with values in $\mathbb{C}^\kappa$ defined by these functions.

Introduction

Etant donné un κ-uplet de fonctions analytiques $f = (f_1, \dots, f_\kappa)$ sur une variété analytique complexe X et une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact φ sur X, on peur définir l'intégrale

$$I_\varphi(s_1, \dots, s_\kappa) = \int_X \varphi(x) \cdot f_1^{s_1}(x) \dots f_\kappa^{s_\kappa}(x) \, \mathrm{d}x$$

comme une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^\kappa$ à pôles contenus dans une réunion d'hyperplans rationnels. Ce résultat s'obtient en utilisant la résolution des singularités des hypersurfaces $f_1 = 0, \dots, f_\kappa = 0$, si φ est à support au voisinage de $x_0 \in X$ et $f_k(x_0) = 0$ pour tout k (voir [K-K$_1$] thm 1).

Comme cette intégrale est *a priori* convergente si Re $(s_k) \gg 0$ pour tout k, on peut obtenir le même résultat comme lorsque $\kappa = 1$, c'est à dire en utilisant des équations fonctionnelles. De fait, il résulte immédiatement de

Classification *A.M.S.*: 14 B 25, 14 F 10, 14 E 40, 32 C 38, 32 C 40, 32 C 45, 35 A 27. Unité de Recherche associée au C.N.R.S. n° 169.

[S_I] que l'on a des équations fonctionnelles du type suivant, pour tout $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$:

$$\left[\prod_{L \in \mathscr{L}} b_{L,k}(L(s))\right] f^s = P_k(x, \partial_x, s) f^s \cdot f_k \tag{$*$}$$

où P_k est un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathscr{O}_X[s]$, $s = (s_1, \ldots, s_\kappa)$, $f^s = f_1^{s_1} \ldots f_\kappa^{s_\kappa}$ et $\mathscr{L}$ est un ensemble fini de formes linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls; enfin $b_{L,k}$ est un polynôme non nul à une variable. On peut aussi obtenir comme dans [K_2] des équations fonctionnelles pour $f^s \cdot u$, si u est une section locale d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome (voir §1).

Le résultat principal de cet article est que si ce $\mathscr{D}_X$-module holonome est régulier, un ensemble $\mathscr{L}$ convenable peut être calculé à partir de la géométrie de la variété caractéristique de ce module relativement à f. Supposons par exemple que $\kappa = 2$ et que $f = (f_1, f_2)$: $X \to \mathbb{C}^2$ soit sans éclatement (c'est le cas par exemple si $f^{-1}(0)$ définit une intersection complète à singularité isolée, c'est le cas aussi si f_2 est une forme linéaire générique par rapport à f_1). Cette application admet, si l'on se restreint à un voisinage assez petit de x_0, un discriminant qui est un germe de courbe dans $(\mathbb{C}^2, 0)$. L'ensemble des rapports des multiplicités d'intersection en 0 de chaque branche du discriminant avec les deux axes passant par l'origine donne les pentes d'un ensemble $\mathscr{L}$ convenable au voisinage de x_0 pour les équations $(*)_k$ (il faut y adjouter éventuellement les pentes 0 et ∞).

Ce résultat précise donc les directions des hyperplans le long desquels une fonction méromorphe comme I_φ ou, de manière analogue, une fonction obtenue en intégrant $|f_1|^{s_1} \ldots |f_\kappa|^{s_\kappa}$ a une partie polaire.

Je montre pour cela, toujours pour les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers, comment calculer la variété caractéristique relative de certains sous-$\mathscr{D}$-modules relatifs, calcul qui est crucial pour la preuve du théorème principal, et qui est analogue à celui de Kashiwara ([K_1]) ou celui fait dans [K-K_1]. Je suivrai cependant le livre de Björk ([Bj]).

Cet article fait suite à l'article [S_I] dont il reprend les notations et les définitions.

1. Equations fonctionnelles

Nous explicitons ici quelques conséquences des résultats obtenus dans [S_I]. Soient $f_1, \ldots, f_\kappa$ des fonctions analytiques sur une variété X, que nous supposerons non constantes. Soit de plus $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome et u une section locale de $\mathscr{M}$. Soit i_f: $X \to X \times \mathbb{C}^\kappa$ le plongement associé au graphe de f. Le $\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^\kappa}$-module $i_{f*}\mathscr{M} = \oplus_{\alpha\in\mathbb{N}^\kappa}\mathscr{M} \otimes \partial_t^\alpha\delta(t - f)$, où $t = (t_1, \ldots, t_\kappa)$ sont les coordonnées sur $\mathbb{C}^\kappa$, est muni d'une section locale $u \otimes \delta(t - f)$. Si u engendre $\mathscr{M}$, il en est de même pour $u \otimes \delta(t - f)$ et $i_{f*}\mathscr{M}$ et, en utilisant les notations de $[S_I]$ §2.1, nous voyons que $V.(\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^\kappa}) \cdot u \otimes \delta(t - f)$ est une bonne κ-filtration de $i_{f*}\mathscr{M}$, que nous noterons $U.(i_{f*}\mathscr{M})$.

Considérons d'autre part le $\mathscr{D}_X[s]$-module $\mathscr{N}_f = \mathscr{D}_X[s]\cdot(f^s \otimes u)$ (rappelons que $s = (s_1, \ldots, s_\kappa)$ et que $f^s = f_1^{s_1}\ldots f_\kappa^{s_\kappa}$). On peut définir la multiplication par $t_1, \ldots, t_\kappa$ en posant $t_k s_k = s_k t_k + t_k$ et $t_k\cdot(f^s \otimes u) = f_k\cdot(f^s \otimes u)$. On obtient ainsi un $\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^\kappa/\mathbb{C}^\kappa}[s]$-module coherent. Via l'identification $s_k \leftrightarrow -\partial_{t_k}t_k$ et $f^s \leftrightarrow \delta(t - f)$ c'est un $V_0(\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^\kappa})$-module cohérent isomorphe à $U_0(i_{f*}\mathscr{M})$. On peut munir $\mathscr{N}_f[1/f_1, \ldots, 1/f_\kappa]$ d'une structure de $\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^\kappa}$-module pour laquelle $s_k = -\partial_{t_k}t_k$ et on obtient un module isomorphe au localisé de $i_{f*}\mathscr{M}$ le long des hypersurfaces $\{t_1 = 0\}, \ldots, \{t_\kappa = 0\}$.

Note: Quand $\kappa \geqslant 2$, il se peut que $\mathscr{N}_f$ ne soit pas $\mathscr{D}_X$-cohérent, même si $\mathscr{M}$ est régulier, contrairement au cas où $\kappa = 1$ et où $\mathscr{M}$ est régulier.

Traduisons maintenant les résultats de $[S_I]$ à l'aide de ces isomorphismes. La proposition 3.1.1 de $[S_I]$ devient:

1.1. PROPOSITION: *Pour toute forme linéaire L sur $\mathbb{Q}^\kappa$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ premiers entre eux, il existe un polynôme non nul $b_L \in \mathbb{C}[\lambda]$ tel que l'on ait*

$$b_L(L(s))\cdot(f^s \otimes u) = \sum_{\{\sigma\in\mathbb{Z}^\kappa/L(\sigma)=1\}} P_\sigma(x, \partial_x, s)f^{s+\sigma} \otimes u \qquad \blacklozenge$$

Dans cet énoncé, $P_\sigma(x, \partial_x, s)$ est une section locale de $\mathscr{D}_X[s]$. A l'aide de $[S_I]$ 2.2.3 on obtient:

1.2. PROPOSITION. *Il existe un ensemble fini $\mathscr{L}$ de formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ premiers entre eux et, pour tout $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$ et $L \in \mathscr{L}$, un polynôme $b_{L,k}$ à une variable tels qu'on ait*

$$\left[\prod_{L\in\mathscr{L}} b_{L,k}(L(s))\right]f^s = P_k(x, \partial_x, s)f^s\cdot f_k. \qquad (*)_k$$

La preuve de cette proposition va aussi préciser la manière d'obtenir $\mathscr{L}$. Considérons la κ-filtration $U.(i_{f*}\mathscr{M})$ introduite ci-dessus. Il suffit de montrer l'existence d'un ensemble fini $\mathscr{L}$ tel que l'on ait pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^{\kappa}$:

$$\left[\prod_{L \in \mathscr{L}} b_{L,k}(L(\partial_t t + \sigma))\right] U_\sigma \subset U_{\sigma - 1_k} \qquad (**)_k$$

où 1_k est le $k$ème vecteur de base de $\mathbb{Z}^{\kappa}$.

Nous dirons qu'un ensemble $\mathscr{L}$ vérifiant la propriété ci-dessus est un *ensemble de pentes* pour la κ-filtration $U.(i_{f*}\mathscr{M})$. Nous avons alors les propriétés suivantes:

1.3. Si $\mathscr{L}$ est un ensemble de pentes pour une bonne κ-filtration (au voisinage d'un point x de X), c'est aussi un ensemble de pentes pour toute bonne κ-filtration (au voisinage de ce même point).

En effet, si U' est une autre bonne κ-filtration, il existe deux multi-entiers a et b tels que l'on ait $U_{\sigma - a} \subset U'_\sigma \subset U_{\sigma + b}$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^{\kappa}$. On en déduit $(**)_k$ pour U' par itération des inclusions $(**)_l$ pour U.

1.4. Soit Σ un éventail adapté à $U.(i_{f*}\mathscr{M})$ (nous dirons encore que Σ est un *éventail de platitude* pour $U.(i_{f*}\mathscr{M})$). Alors l'ensemble $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\Sigma)$ des formes linéaires primitives sur le 1-squelette de Σ est un ensemble de pentes pour la κ-filtration saturée $\bar{U}.(i_{f*}\mathscr{M})$ (voir [$\mathrm{S_I}$] 2.2.3 pour ces notions).

En effet, nous savons que $\bar{U}_\sigma(i_{f*}\mathscr{M}) = \bigcap_{L \in \mathscr{L}(\Sigma)} {}^{L}U_{L(\sigma)}$ et que ${}^{L}U(i_{f*}\mathscr{M}) = {}^{L}\bar{U}(i_{f*}\mathscr{M})$ pour toute forme linéaire L. L'assertion 1.4 est conséquence immédiate de [$\mathrm{S_I}$] 3.3.1.

Enfin, les assertions 1.3 et 1.4 permettent d'obtenir la proposition 1.2. ◆

Note: Un résultat moins fin a été aussi montré par **B.** Lichtin ([Li]).

Nous allons maintenant donner un critère un peu plus fin que 1.4 pour obtenir un ensemble $\mathscr{L}$. Dans la suite, nous noterons $\mathscr{M}$ ce que nous notions $i_{f*}\mathscr{M}$ plus haut et X ce que nous notions $X \times \mathbb{C}^{\kappa}$.

1.5. PROPOSITION: *Soit $U.(\mathscr{M})$ une bonne κ-filtration d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$ et Σ un éventail subdivisant le premier quadrant de $(\mathbb{Q}^{\kappa})^*$ qui vérifie la propriété suivante*:

Pour tout cône Γ de Σ, $\mathscr{R}_\Gamma(\mathscr{M})$ est un $\mathscr{R}_\Gamma(\mathscr{D}_X)$-module cohérent et relativement holonome.

Alors $\mathscr{L} := \mathscr{L}(\Sigma)$ est un ensemble de pentes pour $U.(\mathscr{M})$.

Le preuve de cette proposition serea donnée au §4. Son intéret provient du fait suivant: nous introduisons au paragraphe suivant la notion d'éventail d'équidimensionnalité pour la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ (ou éventail caractéristique) qui se calcule uniquement à partir de la géométrie de la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ relativement aux hypersurfaces $\{t_k = 0\}$. Le résultat principal de cet article, qui sera montré au §4 est

1.6. THÉORÈME: *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier et Σ un éventail caractéristique pour $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{L}(\Sigma)$ est un ensemble de pentes pour toute bonne κ-filtration de $\mathcal{M}$.*

Nous donnerons au paragraphe suivant des exemples de calculs d'éventails caractéristiques (la lecture de ce paragraphe n'est pas nécessaire pour la compréhension de la preuve de 1.6). Remarquons que si $\mathcal{M}$ n'est pas régulier, l'existence d'un éventail satisfaisant la propriété de 1.5 n'est pas toujours assurée. Par contre, si $\mathcal{M}$ est régulier, nous montrerons qu'un éventail de platitude pour une bonne κ-filtration est aussi caractéristique, la réciproque pouvant être fausse (je remercie le rapporteur de me l'avoir fait remarquer).

1.7. EXEMPLE: Soit (f_1, f_2): $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe d'application analytique sans éclatement en codimension 0 (voir [H-M-S] §4) et Δ son discriminant. On a une telle situation quand cette application définit une singularité isolée dans la fibre de 0. Si φ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ à support compact suffisamment petit et contenant 0, l'intégrale

$$J_\varphi(s_1, s_2) = \int |f_1|^{2s_1}|f_2|^{2s_2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

peut s'étendre en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^2$, à pôles le long de droites dont les pentes sont les rapports des multiplicités d'intersection des branches de Δ avec les deux axes de $\mathbb{C}^2$. L'utilisation d'une résolution des singularités de (f_1, f_2) permet de préciser que les droites polaires sont rationnelles et ne coupent pas l'ensemble $\{(s_1, s_2)/\mathrm{Re}\, s_1 > 0 \text{ et } \mathrm{Re}\, s_2 > 0\}$.

1.8. REMARQUES:

a) Je ne sais pas si il y a un ensemble $\mathcal{L}$ qui donne des équations du type $(*)_k$ et qui soit meilleur que les autres.

b) Il peut être intéressant de faire $s_2 = \lambda \cdot s$ dans 1.7 et obtenir ainsi une équation fonctionnelle pour l'expression $(f_1 \cdot f_2^\lambda)^s$ (voir aussi [Li]).

c) L'équation fonctionnelle $(*)_k$ obtenue comme dans la proposition 1.2 donne des polynômes de Bernstein $b_{L,k}$ dont les zéros sont des décalés entiers

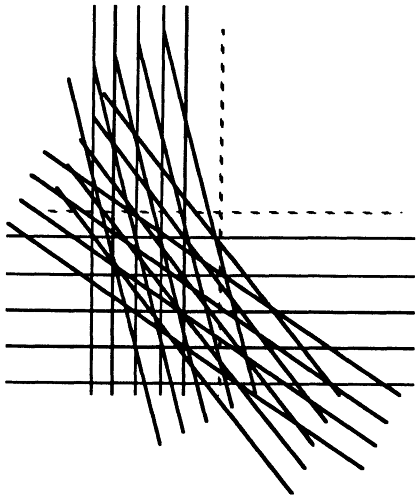


Fig. 1.

des zéros du polynôme de Bernstein de $L(\partial_t t)$ pour $U.(i_{f_*}\mathcal{M})$. En particulier, si L est une forme de coordonnée L_j, le polynôme $b_{L_j,k}$ a pour zéros des décalés entiers de ceux du polynôme de Bernstein de $f_j \otimes u$. Par contre, nous ne pouvons pas affirmer la même chose, dans le cas régulier, quand nous obtenons $(*)_k$ comme en 1.6, c'est à dire quand nous imposons à l'ensemble $\mathscr{L}$ d'être géométrique.

2. Eventails caractéristiques

Nous nous plaçons maintenant dans la situation de [S_I] §2.1. Soient $Y_1, \ldots, Y_\kappa$ des hypersurfaces lisses en position générale dans X, définies par κ fonctions $t_1, \ldots, t_\kappa$, de sorte que le morphisme $t: X \to \mathbb{C}^\kappa$ soit lisse (c'est la situation du §1 pour $X \times \mathbb{C}^\kappa$). Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique fermé irréductible. Nous avons défini dans [S_I] §2.1 un morphisme φ: $\mathscr{X} \to \mathbb{C}^\kappa$ qui est lisse, et de même pour tout cône simplicial Γ dans le premier quadrant de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ un morphisme φ_Γ: $\mathscr{X}_\Gamma \to S_\Gamma$ obtenu par changement de base du précédent à l'aide de la modification torique $S_\Gamma \to \mathbb{C}^\kappa$ définie par Γ. D'autre part on a une modification naturelle $\mathscr{X} \to X \times \mathbb{C}^\kappa$ (resp. $\mathscr{X}_\Gamma \to X \times S_\Gamma$). On notera $\mathscr{Z}$ (resp. $\mathscr{Z}_\Gamma$) le transformé strict de $Z \times \mathbb{C}^\kappa$ (resp. $Z \times S_\Gamma$) par cette modification. Comme φ (resp. φ_Γ) est lisse, nous pouvons définir l'espace conormal relatif à $\varphi|_{\mathscr{Z}}$ (resp. $\varphi|_{Z_\Gamma}$) qui est un sous-espace du fibré cotangent $T^*(\mathscr{X}/\mathbb{C}^\kappa)$ (resp. du fibré cotangent $T^*(\mathscr{X}_\Gamma/S_\Gamma)$), comme adhérence dans cet espace cotangent du fibré conormal relatif qui est bien défini sur un ouvert dense de $\mathscr{Z}$ (resp. $\mathscr{Z}_\Gamma$). On le notera $T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/\mathbb{C}^\kappa)$ (resp. $T^*_{\varphi_\Gamma|_{\mathscr{Z}_\Gamma}}(\mathscr{X}_\Gamma/S_\Gamma)$). Nous obtenons un morphisme naturel

$$T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/\mathbb{C}^\kappa) \to \mathscr{Z} \to \mathbb{C}^\kappa$$

et de même avec tout cône Γ.

2.1. DÉFINITION: Nous dirons qu'un éventail simplicial Σ subdivisant le premier quadrant de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ est un *éventail d'équidimensionnalité* (relativement à $Y_1, \ldots, Y_\kappa$) pour $T^*_Z X$, espace conormal de Z dans X, si pour tout cône Γ de Σ, les fibres du morphisme composé

$$T^*_{\varphi_\Gamma|_{\mathscr{Z}_\Gamma}}(\mathscr{X}_\Gamma/S_\Gamma) \to \mathscr{Z}_\Gamma \to S_\Gamma$$

sont de dimension constante (égale à dim X = dim $\mathscr{X}_\Gamma - \kappa$).

Dans la terminologie de [H-M-S], ceci signifie que $\varphi_{\Gamma|_{\mathscr{Z}_\Gamma}}$ est sans éclatement en codimension 0. Ceci équivaut aussi au fait que toutes les fibres du morphisme ci-dessus sont lagrangiennes. On dira alors que l'espace conormal de $\mathscr{Z}_\Gamma$ relatif à φ_Γ est *relativement lagrangien*. Soit maintenant $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome et Car $(\mathscr{M})$ sa variété caractéristique. C'est une réunion d'espaces lagrangiens homogènes $T^*_Z X$ avec Z fermé irréductible dans X.

2.2. DÉFINITION: Nous dirons que Σ est un *éventail caractéristique* pour $\mathscr{M}$ si c'est un éventail d'équidimensionnalité pour toute composante irréductible de Car $(\mathscr{M})$.

Le calcul d'un éventail caractéristique n'est pas chose aisée dans la pratique. Nous allons montrer comment, sous certaines hypothèses, on peut se ramener au calcul d'un éventail d'équidimensionnalité pour des espaces lagrangiens $T^*_{T_i}\mathbb{C}^\kappa$, ce qui est particulièrement intéressant quand $\kappa = 2$.

Soit donc $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique fermé irréductible. Nous ferons dans ce paragraphe l'hypothèse suivante:

Le morphisme $t|_Z$: $Z \to \mathbb{C}^\kappa$ *est sans éclatement en codimension* 0.

Cela signifie (voir [H–M–S] §4) que toutes les fibres du morphisme

$$T^*_{t|_Z}(X/\mathbb{C}^\kappa) \to \mathbb{C}^\kappa$$

ont la même dimension dim $X - \kappa$. Dans la suite on notera $B = \mathbb{C}^\kappa$ la base du morphisme t.

Soit x_0 un point de Z. On a alors la propriété suivante au voisinage de x_0: il existe des (germes en $t(x_0)$) de sous-ensembles analytiques fermés $(T_i)_{i \in I}$ de B tels que la projection dans T^*B de $t^*T^*B \cap T_Z^*X$ (où X désigne ici un voisinage assez petit de x_0) ait pour composantes irréductibles les ensembles $T_{T_i}^*B$. On a en fait un résultat plus précis (voir [S_1] prop. 3.3). Si l'application $t|_Z$ est ouverte, un de ces T_i n'est autre que B. Nous dirons que la réunion des $T_{T_i}^*B$ est *l'image conormale* de Z par t (au voisinage de x_0) et que cette réunion privée de la section nulle T_B^*B (si elle apparait effectivement) est le *discriminant conormal* de $(t|_Z, x_0)$.

2.3. Remarque: Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome, Car $(\mathscr{M})$ sa variété caractéristique. Si pour toute composante irréductible T_Z^*X de Car $(\mathscr{M})$, le morphisme $t|_{\mathscr{Z}}$ est sans éclatement en codimension 0, et si de plus $\mathscr{M}$ est régulier, il résulte du théorème 3.3 (voir paragraphe suivant), qu'il existe dans $\mathscr{M}$ un sous-$\mathscr{D}_{X/B}$-module $\mathscr{N}$ qui engendre $\mathscr{M}$ et qui est *relativement holonome*, c'est à dire dont la variété caractéristique est relativement lagrangienne. On peut alors appliquer le théorème d'image directe locale de [H-S] au $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}$-module $\mathscr{M}$ au voisinage de x_0: si X désigne un voisinage assez petit de x_0, le complexe $\int_t \mathscr{M}$ est à cohomologie holonome au voisinage de $t(x_0)$ et la variété caractéristique des groupes de cohomologie est contenue dans l'image conormale de Car $(\mathscr{M})$ par t.

2.4. Exemple: Supposons de plus que Z soit lisse et égal au graphe de κ fonctions analytiques $(f_1, \ldots, f_\kappa)$ sur $\mathbb{C}^n$ (au voisinage de l'origine). On a alors

$$\bigcup_{i \in I} T_{T_i}^*B = \{(y, \xi)/\exists x \in \mathbb{C}^n \quad \text{tel que} \quad f(x) = y \quad \text{et} \quad \xi \in \operatorname{Ker} J(f)(x)\},$$

où $J(f)(x)$ est la matrice jacobienne de l'application f en x. Il est clair que la réunion de certains sous-ensembles T_i est égale au discriminant usuel de $t|_Z$.

Le résultat principal de ce paragraphe affirme la possibilité de réduction dimensionnelle (ou symplectique) pour le calcul d'un éventail caractéristique:

2.5. Théorème: *Supposons que $t|_Z$ soit sans éclatement en codimension* 0. *Si Σ est un éventail d'équidimensionnalité pour le discriminant conormal de $(t|_Z, x_0)$ au voisinage de $f(x_0)$, c'est aussi un éventail d'équidimensionnalité pour T_Z^*X au voisinage de x_0.*

Remarquons qu'il est équivalent de dire que Σ est d'equidimensionnalité pour le discriminant conormal de $(t|_Z, x_0)$ ou pour l'image conormale de $(t|_Z, x_0)$ puisque tout éventail est d'équidimensionnalité pour la section nulle $T^*_B B$.

Commençons par rappeler quelques résultats concernant la géométrie des morphismes sans éclatement en codimension 0. Considérons le cône normal de $t^*T^*B \cap T^*_Z X$ dans $T^*_Z X$ (ici et dans la suite, l'intersection de deux espaces est munie de la structure analytique non nécessairement réduite donnée par la somme des idéaux de ces espaces). Pour chaque composante irréductible C_i de ce cône, soit Z_i sa projection dans Z. Sous l'hypothèse de non éclatement, C_i est la composante de dimension maximum du produit fibré $T^*_{t|_{Z_i}}(X/B) \times_{T_i} T^*_{T_i}B$, où $T_i = t(Z_i)$, et de plus $t|_{Z_i}$ est aussi sans éclatement en codimension 0 (voir [S_1] prop. 3.3). Les T_i qui interviennent ici sont les mêmes que ceux introduits plus haut.

Considérons la même situation avec paramètres. Autrement dit, soit

$$\mathscr{X} \xrightarrow{f} \mathscr{B} \xrightarrow{\psi} S$$

des morphismes lisses, posons $\varphi = \psi \circ f$, et soit $\mathscr{Z} \subset \mathscr{X}$ irréductible tel que $f|_{\mathscr{Z}}$ soit sans éclatement en codimension 0. Soit $\mathscr{C}_i$ une composante irréductible du cône normal de $f^*T^*(\mathscr{B}/S) \cap T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S)$ dans $T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S)$ et $\mathscr{Z}_i$ sa projection dans $\mathscr{Z}$.

2.6. PROPOSITION: *Le morphisme $f|_{\mathscr{Z}_i}$ est sans éclatement en codimension* 0 *et $\mathscr{C}_i$ est la composante de dimension maximum du produit fibré*

$$T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B}) \times_{\mathscr{T}_i} T^*_{\psi|_{\mathscr{E}_i}}(\mathscr{B}/S)$$

où $\mathscr{T}_i$ est l'image (*locale*) *de $\mathscr{Z}_i$ dans $\mathscr{B}$.*

Nous dirons que $\bigcup_i T^*_{\psi|_{\mathscr{E}_i}}(\mathscr{B}/S)$ est *l'image conormale relative* de $\mathscr{Z}$ par f.

2.7. COROLLAIRE: *Si $f|_{\mathscr{Z}}$ est sans éclatement en codimension* 0 *ainsi que $\psi|_{\mathscr{E}_i}$ pour tout $\mathscr{T}_i$ dans l'image conormale relative de $\mathscr{Z}$ par f, il en est de même de $\varphi|_{\mathscr{Z}}$.*

Preuve de 2.7: Sous ces hypothèses, nous voyons d'après 2.6 que pour tout i, $\mathscr{C}_i$ est à fibres équidimensionnelles au-dessus de S, et leur dimension est $\dim(\mathscr{X}/S)$. D'autre part, il existe une déformation naturelle de $T^*_{\varphi|_Z}(\mathscr{X}/S)$ sur son cône normal $\mathscr{C}$ paramétrée par $\mathbb{C}$. L'espace total $\mathscr{A}$ de cette déformation est donc muni d'une application $\mathscr{A} \to S \times \mathbb{C}$. Au-dessus de $S \times \{0\}$

nous obtenons l'application $\mathscr{C} \to S$ qui est à fibres équidimensionnelles de dimension dim $(\mathscr{X}/S)$. Par suite les fibres au-dessus de $S \times \{1\}$ sont de dimension $\leqslant$ dim $(\mathscr{X}/S)$ et ce sont les fibres de l'application $T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S) \to S$, d'où le résultat. ◆

Preuve de la proposition 2.6: On peut adapter sans mal la preuve de [S₁] (2.4.1) pour obtenir l'inclusion

$$\mathscr{C}_i \cap T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B}) \subset [T^*_{f|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/\mathscr{B})|_{\mathscr{Z}_i}]' \tag{0}$$

où "prime" désigne la réunion des composantes qui se surjectent sur $\mathscr{Z}_i$. Rappelons que $\mathscr{C}_i$ est naturellement contenu dans le produit fibré $T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B}) \times_{\mathscr{X}} f^*T^*(\mathscr{B}/S)$ et est bi-homogène par rapport à cette décomposition. Ainsi, $T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B})$ est identifié à $T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B}) \times \{0\}$. La condition de non-éclatement pour $f|_{\mathscr{Z}}$ implique que l'on a l'inclusion

$$[T^*_{f|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/\mathscr{B})|_{\mathscr{Z}_i}]' \subset T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B}).$$

2.8. Lemme: *Pour tout i tel que $\mathscr{Z}_i \neq \mathscr{Z}$, il existe un ouvert de Zariski dense $\mathscr{Z}_{i,0}$ de $\mathscr{Z}_i$ le long duquel $\mathscr{Z}$ satisfait la condition A_φ de Thom.*

Admettons ce lemme et terminons le preuve de 2.6. Nous pouvons adapter la preuve du lemma (2.4.2) de [S₁] en utilisant 2.8 pour obtenir l'assertion
On a l'égalité

$$\mathscr{C}_i \cap T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B}) = [T^*_{f|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/\mathscr{B})|_{\mathscr{Z}_i}]' = T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B}). \tag{1}$$

Il suffit en effet, pour obtenir (1), de montrer l'égalité

$$\mathscr{C}_i \cap T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B}) = T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B}) \tag{2}$$

et puisque $T^*_{f|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/\mathscr{B})$ est irréductible, il suffit de montrer (2) au point générique de $\mathscr{Z}_i$. En appelant encore $\mathscr{Z}_i$ un voisinage assez petit de ce point, on peut donc supposer que $\mathscr{T}_i = f(\mathscr{Z}_i)$ est analytique fermé dans $\mathscr{B}$. Le lemme (2.4.2) de [S₁] dans ce cadre relatif, vrai du fait de 2.8, montre que l'on a l'inclusion

$$\mathscr{C}_i \cap f^*T^*(\mathscr{B}/S) \subset [\mathscr{Z}_i \times_{\mathscr{T}_i} T^*_{\psi|_{\mathscr{T}_i}}(\mathscr{B}/S)]'. \tag{3}$$

Nous allons montrer l'égalité

$$\dim (\mathscr{C}_i \cap T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B})) = \dim T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B}) \tag{4}$$

ce qui donnera (2) et donc (1).

Rappelons que $\mathscr{C}_i$ est bi-homogène et donc $\mathscr{C}_i$ est contenu dans le produit fibré

$$[\mathscr{C}_i \cap T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B})] \times_{\mathscr{Z}_i} [\mathscr{C}_i \cap f^*T^*(\mathscr{B}/S)].$$

Par suite, on a

$$\dim [\mathscr{C}_i \cap T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B})] \geqslant \dim \mathscr{C}_i - \dim [\mathscr{C}_i \cap f^*T^*(\mathscr{B}/S)] + \dim \mathscr{Z}_i.$$

D'autre part on a

$$\dim \mathscr{C}_i = \dim T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S) = \dim (\mathscr{X}/S) + \dim \varphi(\mathscr{Z})$$

et (3) montre que

$$\begin{aligned}\dim [\mathscr{C}_i \cap f^*T^*(\mathscr{B}/S)] &\leqslant \dim T^*_{\psi|_{\mathscr{E}_i}}(\mathscr{B}/S) - \dim \mathscr{E}_i + \dim \mathscr{Z}_i \\ &= \dim (\mathscr{B}/S) + \dim \psi(\mathscr{E}_i) - \dim \mathscr{E}_i + \dim \mathscr{Z}_i.\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\dim [\mathscr{C}_i \cap T^*(\mathscr{X}/\mathscr{B})] \geqslant \dim (\mathscr{X}/\mathscr{B}) + [\dim \varphi(\mathscr{Z}) - \dim \varphi(\mathscr{Z}_i)] + \dim \mathscr{E}_i.$$

Enfin on a

$$\dim T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B}) = \dim (\mathscr{X}/\mathscr{B}) + \dim \mathscr{E}_i$$

donc l'inclusion (0) et l'inégalité ci-dessus impliquent (4). On obtient en fait plus précisément les propriétés:

a) Pour tout i, $\dim \varphi(\mathscr{Z}_i) = \dim \varphi(\mathscr{Z})$,

b) $[T^*_{f|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/\mathscr{B})|_{\mathscr{Z}_i}]' = T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B})$ et par suite $f|_{\mathscr{Z}_i}$ est sans éclatement en codimension 0.

c) Soit $\mathscr{E}_i$ l'image locale de $\mathscr{Z}_i$ par f au voisinage de x, qui est analytique au voisinage de $f(x)$, puisqu'en particulier $f|_{\mathscr{Z}_i}$ est à fibres équidimensionnelles. Alors $\mathscr{C}_i$ est la composante de dimension maximum du produit fibré

$$T^*_{f|_{\mathscr{Z}_i}}(\mathscr{X}/\mathscr{B}) \times_{\mathscr{E}_i} T^*_{\psi|_{\mathscr{E}_i}}(\mathscr{B}/S).$$

Ainsi la proposition est montrée. Il reste cependant à montrer le lemme 2.8. D'après [H] Remark 1, p. 238, il suffit de montrer *a priori* que l'on a $\dim \varphi(\mathscr{Z}_i) = \dim \varphi(\mathscr{Z})$ pour tout i. Soit $m\colon S' \to S$ une modification obtenue comme suite finie d'éclatements locaux.

2.9. Rappels. On appelle *modification* un morphisme $m\colon X' \to X$ entre deux espaces analytiques réduits pour lequel il existe un sous-ensemble analytique fermé E' de X', partout de codimension $\geqslant 1$, tel que $m\colon X'\backslash E' \to X$ soit un isomorphisme sur son image (en particulier cette image est un ouvert de X). On n'impose pas que m soit propre. Un *éclatement local* est le composé $\sigma \circ i$: $X' \to X$ où $i\colon X' \to \tilde{X}$ est une immersion ouverte et $\sigma\colon \tilde{X} \to X$ l'éclatement d'un idéal de $\mathcal{O}_X$. Un éclatement local est une modification, ainsi que le morphisme composé d'un nombre fini d'éclatements locaux successifs. Soit U un ouvert de X et $(m_i)_{i\in I}$ une famille finie de modifications $m_i\colon X_i \to X$. On dit que cette famille est *complète* au-dessus de U si pour tout compact K de U il existe des compacts K_i dans $m_i^{-1}(U)$ avec $K \subset \bigcup_{i\in I} m_i(K_i)$.

Dans la suite, si $\varphi|_{\mathscr{Z}}$ est propre, on remplace la famille complète par une seule modification propre, obtenue comme suite d'éclatements; pour la preuve du théorème ci-dessus, nous pouvons choisir une modification propre obtenue par un procédé torique. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
E'T^*_{\varphi'|_{\mathscr{Z}'}}(\mathscr{X}/S) & \longrightarrow & ET^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S) \\
\downarrow{\scriptstyle e'} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\
T^*_{\varphi'|_{\mathscr{Z}'}}(\mathscr{X}/S) & \longrightarrow & \mathrm{T}^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{Z}' & \longrightarrow & \mathscr{Z} \\
\downarrow & & \downarrow \\
S' & \xrightarrow{m} & S
\end{array}$$

où "prime" désigne le transformé strict par m et e est l'éclatement de $f^*T^*(\mathscr{B}/S) \cap T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S)$ dans $T^*_{\varphi|_{\mathscr{Z}}}(\mathscr{X}/S)$. Soit D le diviseur exceptionnel de e. C'est le projectifié du cône normal considéré. Soit D' l'image inverse de D. C'est le diviseur exceptionnel de e', et e' n'est autre que l'éclatement de $f'^*T^*(\mathscr{B}'/S') \cap T^*_{\varphi'|_{\mathscr{Z}'}}(\mathscr{X}/S)$ dans $T^*_{\varphi'|_{\mathscr{Z}'}}(\mathscr{X}/S)$. Si on choisit m pour que

1) $\varphi'(\mathscr{Z}')$ soit analytique fermé dans S' (au voisinage de l'image inverse de x et $\varphi(x)$)
2) $\varphi'|_{\mathscr{Z}'}$ soit sans éclatement en codimension 0

alors, d'après ce que nous avons vu, toute composante D_j' de D' vérifie a'), b') et c'). Si nous choisissons suffisamment de telles modifications

m_α: $S'_\alpha \to S$ pour obtenir une famille complète au-dessus d'un voisinage de $\varphi(x)$ (voir [H-L-T]), la réunion $\bigcup_\alpha D'_\alpha$ se surjecte sur D et par suite a) est satisfaite pour toute composante D_i de D.

L'existence d'une telle famille finie (m_α) est conséquence du théorème d'aplatissement local (voir [H-L-T]) ou plutôt de sa démonstration (voir [S_2]). ◆

Preuve du théorème 2.5. Reprenons les notations du début de ce paragraphe. Considérons l'application t: $X \to B$. Le morphisme φ: $\mathscr{X} \to S$ se factorise en $\varphi = \Psi \circ f$ avec f: $\mathscr{X} \to \mathscr{B}$ et Ψ: $\mathscr{B} \to S$ où par définition, Ψ est la déformation de B sur les fibrés normaux des hypersurfaces $\{t_k = 0\}$. Il en est de même pour φ_Γ si Γ est un cône. Pour un tel cône Γ notons $\mathscr{Z}_{\Gamma,i}$ les espaces associés à $\mathscr{Z}_\Gamma$ construits en 2.6. Alors, d'après a), on a $\dim \varphi(\mathscr{Z}_{\Gamma,i}) = \kappa$ et on vérifie, en se plaçant au point générique de S_Γ (où le morphisme φ_Γ: $\mathscr{X}_\Gamma \to S_\Gamma$ est localement trivial) que $\mathscr{Z}_{\Gamma,i}$ n'est autre que le transformé strict de Z_i (introduit après l'énoncé de 2.5) par le morphisme $\mathscr{X}_\Gamma \to X$. Le théorème 2.5 est alors une conséquence immédiate du corollaire 2.7 appliqué à $\mathscr{Z}_\Gamma$. ◆

Considérons maintenant un exemple. Nous supposerons ici que $\kappa = 2$ et que $t|_Z$: $Z \to \mathbb{C}^2$ est sans éclatement en codimension 0. L'image conormale de Z (au voisinage de $x \in Z$) par t est la réunion de $T^*_\Delta\mathbb{C}^2$ et éventuellement de $T^*_{\{f(x)\}}\mathbb{C}^2$ et $T^*_{\mathbb{C}^2}\mathbb{C}^2$. Ici, Δ est un germe de courbe plane en $f(x)$. Si Z est lisse, Δ est le discriminant usuel (image du lieu critique) de $t|_Z$. On déduit du théorème 3.1 que si Σ est un éventail d'équidimensionnalité pour $T^*_\Delta\mathbb{C}^2$, il est aussi d'équidimensionnalité pour $T^*_Z X$. Dans la suite, nous supposerons que $f(x)$ est l'origine de $\mathbb{C}^2$.

2.10. Corollaire: *Soit Σ l'éventail subdivisant le premier quadrant de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ dont le 1-squelette est formé, outre les formes linéaires de coordonnées, des formes linéaires $L_i(s_1, s_2) = m_i s_1 + n_i s_2$ où m_i (resp. n_i) est la multiplicité d'intersection à l'origine de Δ_i avec l'axe $\{t_1 = 0\}$ (resp. $\{t_2 = 0\}$) et $(\Delta_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des composantes irréductibles de Δ. Alors Σ est un éventail d'équidimensionnalité pour $T^*_Z X$.*

Il suffit de montrer que l'éventail dont le 1-squelette est formé, outre les formes de coordonnées, de la forme

$$L(s_1, s_2) = (C.\{t_1 = 0\})_0 s_1 + (C.\{t_2 = 0\})_0 s_2$$

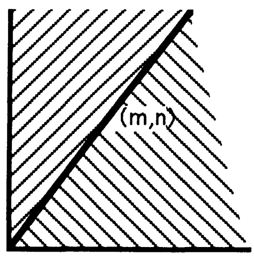
est un éventail d'équidimensionnalité pour le conormal d'un germe de courbe irréductible $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$.

Considérons une paramétrisation de C: $t_1 = \tau^m$, $t_2 = \tau^n \cdot \lambda(\tau)$ avec $\lambda(0) \neq 0$, $m = (C \cdot \{t_1 = 0\})_0$ et $n = (C \cdot \{t_2 = 0\})_0$. Ici, $\mathscr{B}$ est égal à $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ muni des coordonnées (u_1, u_2, v_1, v_2) et le transformé strict $\mathscr{C}$ de C par la modification de $\mathscr{B}$ dans le produit $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ définie par $t_1 = u_1 \cdot v_1$ et $t_2 = u_2 \cdot v_2$ est la projection dans $\mathscr{B}$ de la sous-variété de $\mathscr{B} \times \mathbb{C}$ définie par les équations

$$u_1 \cdot v_1 = \tau^m$$

$$u_2 \cdot v_2 = \tau^n \lambda(\tau).$$

Considérons maintenant Γ, l'un des deux cônes de dimension 2 de l'éventail Σ:



Remarquons qu'il suffit de vérifier que le transformé strict de $T^*_{\varphi|\mathscr{C}}(\mathscr{B}/\mathbb{C}^2)$ par le morphisme $S'_\Gamma \to \mathbb{C}^2$, où S'_Γ est un revêtement fini de S_Γ, est à fibres équidimensionnelles. Ainsi nous pouvons supposer que $S'_\Gamma = \mathbb{C}^2$ avec les coordonnées (u'_1, u'_2) et que le morphisme $S'_\Gamma \to \mathbb{C}^2$ est donné par

$$u_1 = u_1'^m \cdot u'_2, \quad u_2 = u_1'^n$$

ou bien

$$u_1 = u_1'^m, \quad u_2 = u_1'^n \cdot u'_2.$$

Dans le premier cas $\mathscr{C}_\Gamma$ est la projection dans $\mathscr{B}'_\Gamma$ de la variété d'équation

$$u'_2 \cdot v_1 = \sigma^m \quad \text{et} \quad v_2 = \sigma^n \cdot \lambda(\sigma u'_1)$$

et dans le second

$$v_1 = \sigma^m \quad \text{et} \quad u'_2 \cdot v_2 = \sigma^n \cdot \lambda(\sigma u'_1).$$

On vérifie alors qu'en tout point de $\mathscr{C}_\Gamma \cap \{u_1' = u_2' = 0\}$ avec v_1 et v_2 non tous deux nuls, il existe une unique limite d'hyperplans tangents aux fibres de $\mathscr{C}_\Gamma \to S_\Gamma'$, d'où le résultat. ◆

2.11. REMARQUE: Soit f: $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique. Si l est une forme linéaire générique, on peut vérifier que (f, l): $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ est sans éclatement en codimension 0 (utiliser par exemple le fait que les variétés polaires $P_k(f)$ sont aussi les variétés polaires $P_k(f, l)$ pour k ($=$codim P_k) $\leqslant n - 1$, voir [H-M-S]). Les courbes de l'image conormale de (f, l) sont la réunion du diagramme de Cerf de f (image du lieu critique de f privé de Sing $\{f = 0\}$) et de la droite $\{f = 0\}$ de $\mathbb{C}^2$. Les formes linéaires de l'éventail Σ ont été considérées par Lê D.T. ([Lê]). Si f est à singularité isolée, le 1-squelette est donné par les formes $(e_q + m_q)s_1 + m_q s_2$ avec les notations (e_q, m_q) de B. Teissier ([T]). Remarquons enfin que pour f à singularité isolée, on peut appliquer les résultats ci-dessus à (f, l) même si l n'est pas générique. Il suffit de supposer que $f|_{l=0}$ est aussi à singularité isolée.

3. Variétés caractéristiques de $\mathscr{D}$-modules relatifs

Nous donnons ici quelques résultats qui seront utiles à la preuve de 1.6, et qui sont intéressants par eux-mêmes. Soit φ': $X' \to S'$ un morphisme lisse entre espaces analytiques complexes. Soit $\mathscr{N}'$ un $\mathscr{D}_{X'/S'}$-module cohérent, où $\mathscr{D}_{X'/S'}$ désigne l'anneau des opérateurs differentiels relatifs à φ'. Si φ' provient par changement de base d'un morphisme φ: $X \to S$ avec X et S lisses et $S' \subset S$, le $\mathscr{D}_{X/S}$-module $\mathscr{N} = i_*\mathscr{N}'$ est cohérent, où i désigne l'inclusion de X' dans X. On a alors l'égalité $\mathscr{N}' = i^*\mathscr{N} := \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'}$. De même, pour tout sous-$\mathscr{D}_{X/S}$-module $\mathscr{F}$ de $\mathscr{N}$ on a aussi l'égalite $\mathscr{F} = i_*i^*\mathscr{F}$.

La variété caractéristique Car $\mathscr{N}$ est contenue dans l'espace cotangent relatif $T^*(X/S)$. Chaque composante irréductible est relativement involutive en ses points génériques (cela résulte de [G]). Par suite toutes les fibres de l'application naturelle Car $\mathscr{N} \to S$ sont de dimension supérieure ou égale à dim (X/S), dimension des fibres de φ.

D'autre part, on peut appliquer les résultats de [Bj] Chap. 2 §7 et Chap. 5 §6 à l'anneau $\mathscr{D}_{X/S}$ et au $\mathscr{D}_{X/S}$-module $\mathscr{N}$. Il existe par suite une filtration finie $\mathscr{F}_.(\mathscr{N})$ par des sous-$\mathscr{D}_{X/S}$-modules cohérents telle que, pour tout j, $\mathscr{F}_j/\mathscr{F}_{j-1}$ ait une variété caractéristique de dimension pure j. De plus, $\mathscr{F}_j(\mathscr{N})$ est le plus grand sous-$\mathscr{D}_{X/S}$-module de $\mathscr{N}$ dont la variété caracteristique soit de dimension $\leqslant j$. Nous en déduisons

3.1. PROPOSITION: *Soit S' un espace analytique réduit et équidimensionnel. Soit $\mathscr{N}'$ un $\mathscr{D}_{X'/S'}$-module cohérent. Supposons que $\mathscr{N}'$,* en tant que *$\mathscr{O}_{S'}$-module,* *n'ait pas de $\mathcal{O}_{S'}$-torsion. Alors toutes les composantes de* Car $\mathcal{N}'$ *sont de dimension supérieure ou égale à* dim X'.

Preuve: Le problème est local sur X' et S', aussi pouvons-nous supposer $S' \subset S$ et $X' \subset X$ avec X et S lisses et $X' = X \times_S S'$. Soit comme ci-dessus $\mathcal{N} = i_*\mathcal{N}'$. Soit j le minimum des k tel que $\mathcal{F}_k(\mathcal{N})$ soit non nul. Le $\mathcal{D}_{X/S}$-module $\mathcal{F}_j(\mathcal{N})$ a une variété caractéristique de dimension j. Soit Z_j le support de $\mathcal{F}_j(\mathcal{N})$. Si on localise la situation en un point générique de Z_j, on peut supposer que $\varphi(Z_j)$ est analytique fermé dans S. On a alors dim $\varphi(Z_j) \leqslant j -$ dim (X'/S'). Si l'on a $j <$ dim X', on en déduit que dim $\varphi(Z_j) <$ dim S' et ceci implique que $i^*\mathcal{F}_j(\mathcal{N}) = 0$ puisque formé d'éléments de $\mathcal{O}_{S'}$-torsion. Donc $\mathcal{F}_j(\mathcal{N}) = 0$, d'où une contradiction. ◆

3.2. THÉORÈME: *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier et $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ un sous-$\mathcal{D}_{X/S}$-module cohérent. Alors toute composante irréductible de* Car $\mathcal{N}$ *est égale l'espace conormal relatif de sa projection dans X, c'est à dire s'écrit $T^*_{\varphi|Z}(X/S)$ avec $Z \subset X$. De plus, Z est tel que $T^*_Z X$ soit une composante de* Car $\mathcal{M}$.

Note. Ce résultat est une généralisation de [K$_1$] prop. 5.10. La généralisation de [K$_1$] thm 5.13 est alors

3.3. COROLLAIRE: *Dans la situation du théorème 3.2, supposons de plus que $\mathcal{N}$ soit sans $\mathcal{O}_S$-torsion. Alors toute composante $T^*_{\varphi|Z}(X/S)$ de sa variété caractéristique est dimension* dim X, *c'est à dire qu'on a* dim $Z -$ dim$_\varphi Z =$ dim S.

On a noté par dim$_\varphi Z$ la dimension générique des fibres de $\varphi|_Z$. Ce corollaire est conséquence immédiate de 3.1 et 3.2 puisque l'on a

$$\dim T^*_{\varphi|Z}(X/S) \;=\; \dim X - \dim S + \dim Z - \dim_\varphi Z$$

et dim $Z -$ dim$_\varphi Z \leqslant$ dim S. ◆

Preuve du Théorème 3.2. Commençons par voir comment la deuxième assertion se déduit de la première. Supposons d'abord que toutes les composantes de Car $\mathcal{N}$ ont la même dimension. Nous pouvons supposer de plus que $\mathcal{M}$ est engendré par $\mathcal{N}$. Notons alors Car $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} T^*_{X_i}X$ et choisissons une stratification de Whitney $(Z_\alpha)_{\alpha\in A}$ de supp $\mathcal{M} =$ supp $\mathcal{N}$ adaptée aux ensembles X_i et telle que sur chaque strate φ soit de rang constant r_α. Soit r le maximum des r_α pour $\alpha \in A$ et $A_r = \{\alpha \in A / r_\alpha = r\}$. Soit $\alpha \in A_r$ et $x \in Z_\alpha$. Nous allons montrer qu'au voisinage de x on *a*

$$\mathrm{Car}\,\mathcal{N} \;=\; \bigcup_{\{i/x\in X_i\}} T^*_{\varphi|X_i}(X/S) \tag{$*$}$$

Quitte à se restreindre à des voisinages convenables de x et $\varphi(x)$, nous pouvons supposer que $\varphi(Z_\alpha) = S_\alpha$ est une sous-variété lisse de S. Au voisinage de x, $\mathscr{M}$ est à support dans $X_\alpha = \varphi^{-1}(S_\alpha)$. Si $y_1, \ldots, y_p$ sont des équations locales pour S_α dans S dans un système de coordonnées, on a $\mathscr{M} = \mathscr{M}_\alpha[\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_p}]$, où $\mathscr{M}_\alpha$ est un $\mathscr{D}_{X_\alpha}$-module holonome. La condition *a*) de Whitney pour $(Z_\beta)_{\beta \in A}$ implique que φ est non caractéristique pour $\mathscr{M}_\alpha$ au voisinage de x et donc $\mathscr{M}_\alpha$ est $\mathscr{D}_{X_\alpha/S_\alpha}$-cohérent, de variété caractéristique donnée par le deuxième membre de $(*)$.

D'autre part, $\mathscr{M}_\alpha$ est aussi un $\mathscr{D}_{X/S}$-module cohérent qui engendre $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{D}_X$. Il a par suite même variété caractéristique que $\mathscr{N}$ (la variété caractéristique d'un sous-$\mathscr{D}_{X/S}$-module cohérent de $\mathscr{M}$ engendrant $\mathscr{M}$ ne dépend que de $\mathscr{M}$, voir [H-S]), d'ou l'assertion.

Ainsi, soit $I_r = \{i \in I / \dim X_i - \dim_\varphi X_i = r\}$, où $\dim_\varphi X_i$ est la dimension générique des fibres de $\varphi|_{X_i}$. Alors Car $\mathscr{N}$ contient comme composantes irréductibles les ensembles $T^*_{\varphi|X_i}(X/S)$ avec $i \in I_r$. Montrons qu'il n'y a pas d'autre composante. Une telle autre composante C est égale à $T^*_{\varphi|Z}(X/S)$ où Z est la projection de C dans X, d'après la première partie du théorème. De plus, on a $\dim Z - \dim_\varphi Z < r$ puisque Z ne coupe aucune strate Z_α avec $\alpha \in A_r$. Par suite on a $\dim C < \dim (X/S) + r = \dim \operatorname{Car} \mathscr{N}$, et donc $C = \varnothing$ puisque Car $\mathscr{N}$ est équidimensionnelle.

Dans le cas général soit d la dimension de Car $\mathscr{N}$ et considérons la filtration $\mathscr{F}_\cdot(\mathscr{N})$ introduite plus haut. Soit $\mathscr{M}'$ le sous-$\mathscr{D}_X$-module de $\mathscr{M}$ engendré par $\mathscr{F}_{d-1}(\mathscr{N})$ et $\mathscr{M}'' = \mathscr{M}/\mathscr{M}'$. Remarquons que l'on a $\mathscr{N} \cap \mathscr{M}' = \mathscr{F}_{d-1}(\mathscr{N})$. En effet, on a $\mathscr{F}_{d-1}(\mathscr{N}) \subset \mathscr{N} \cap \mathscr{M}'$ et ces deux sous-modules de $\mathscr{M}'$ ont même variété caractéristique, puisqu'ils engendrent $\mathscr{M}'$. Par suite $\mathscr{N} \cap \mathscr{M}'$ est un sous-$\mathscr{D}_{X/S}$-module de $\mathscr{N}$ dont la variété caractéristique est de dimension $\leqslant d - 1$, donc contenu dans $\mathscr{F}_{d-1}(\mathscr{N})$. L'image $\mathscr{N}''$ de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{M}''$ est égale à $\mathscr{F}_d(\mathscr{N})/\mathscr{F}_{d-1}(\mathscr{N})$ et, d'après ce qui précède, vérifie l'assertion voulue. On obtient le résultat par récurrence sur d. ◆

Revenons maintenant à la première assertion. Remarquons que l'assertion est une propriété de $\mathscr{M}$ puisque nous avons vu que la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}_{X/S}$-module qui engendre $\mathscr{M}$ ne dépend que de $\mathscr{M}$. La preuve va se faire par récurrence sur le couple (dim (Supp $\mathscr{M}$), dim φ(Supp $\mathscr{M}$)). Rappelons que $\dim \varphi(\operatorname{Supp}(\mathscr{M})) = \max \dim \varphi(Z)$ pour Z une composante de Supp $(\mathscr{M})$ et que $\dim \varphi(Z) = \dim Z - \dim_\varphi Z$ où $\dim_\varphi Z$ est la dimension générique des fibres de $\varphi|_Z$.

Quand $\dim \varphi\, (\operatorname{Supp}(\mathscr{M})) = 0$, le support de $\mathscr{M}$ est contenu dans une fibre de φ (localement) et dans ce cas le résultat est clair. Fixons $(d, \delta) \in \mathbb{N}^2$ avec $\delta \geqslant 1$ et supposons démontré le théorème pour tout module $\mathscr{M}$ tel que (dim (Supp $\mathscr{M}$), dim φ (Supp $\mathscr{M}$)) $< (d, \delta)$ (au sens de l'ordre lexicographique). Nous allons nous ramener à une situation "à croisements normaux". Pour cela considérons la situation suivante: soit $\pi: \tilde{X} \to X$ un morphisme d'une variété lisse $\tilde{X}$ dans X tel que $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ soit lisse. Soit $\tilde{\mathscr{M}}$ un $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$-module holonome régulier contenant un sous-$\mathscr{O}_{\tilde{X}}$-module cohérent $\tilde{\mathscr{F}}$ qui l'engendre. Nous supposerons aussi que la restriction de π au support de $\tilde{\mathscr{M}}$ est propre.

3.4. LEMME: *Si $\tilde{\mathscr{M}}$ satisfait la propriété du théorème et si on a* (dim π(Supp $\tilde{\mathscr{M}}$), dim $\tilde{\varphi}$(Supp $\tilde{\mathscr{M}}$)) $\leqslant (d, \delta)$ *les images directes* $\int_\pi^* \tilde{\mathscr{M}}$ *satisfont au théorème.*

Preuve: Nous pouvons décomposer π en une immersion fermée et une projection. Comme le premier cas ne présente pas de difficulté, nous supposerons que π est lisse. Posons $\tilde{\mathscr{N}} = \mathscr{D}_{\tilde{X}/S} \cdot \tilde{\mathscr{F}}$ et

$$\int_\pi^i \tilde{\mathscr{N}} = \mathscr{H}^i(\boldsymbol{R}\pi_*(DR_{\tilde{X}/X}(\tilde{\mathscr{N}}))$$

où $DR_{\tilde{X}/X}$ désigne le complexe de de Rham relatif au morphisme π. On a un morphisme naturel

$$\int_\pi^i \tilde{\mathscr{N}} \to \int_\pi^i \tilde{\mathscr{M}}$$

dont l'image $\mathscr{N}_i$ est un $\mathscr{D}_{X/S}$-module cohérent qui engendre $\int_\pi^i \tilde{\mathscr{M}}$. Il suffit donc de vérifier que la variété caractéristique de $\mathscr{N}_i$ est une union de conormaux relatifs. On voit de plus, comme dans le cas des $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$-modules, que l'on a

$$\operatorname{Car} \mathscr{N}_i \subset \operatorname{Car} \int_\pi^i \tilde{\mathscr{N}} \subset \pi(\operatorname{Car} \tilde{\mathscr{N}} \cap \pi^* T^*(X/S)) \subset T^*(X, S).$$

3.5. LEMME: *Soit $\tilde{Z}$ analytique fermé dans $\tilde{X}$ et propre sur X. Les composantes irréductibles de dimension maximum de $\pi[T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S) \cap \pi^* T^*(X/S)]$ sont de dimension* dim (X/S) + dim $\tilde{\varphi}(\tilde{Z})$ *et sont relativement lagrangiennes.*

Pour finir la preuve de 3.4 il suffit de montrer que les composantes de dimension δ + dim (X/S) de Car $\mathscr{N}_i$ sont relativement lagrangiennes. En effet, l'inclusion ci-dessus et le lemme 3.5 montrent d'abord que δ + dim $(X/S) \geqslant$ dim Car $\mathscr{N}_i$. D'autre part, $\mathscr{F}_{\delta+\dim(X/S)-1}(\mathscr{N}_i)$ vérifie l'inégalité dim φ(Supp $\mathscr{F}_{\delta+\dim(X/S)-1}(\mathscr{N}_i)) \leqslant \delta - 1$, ce qu'on voit en se plaçant au point générique de chaque composante irréductible de

$\pi(\text{Supp } \tilde{\mathscr{M}})$. Enfin, par hypothèse de récurrence, Car $\mathscr{F}_{\delta+\dim(X/S)-1}(\mathscr{N}_i)$ est une union d'espace conormaux relatifs.

D'après le lemme 3.5 et l'inclusion ci-dessus, les composantes de dimension $\delta + \dim(X/S)$ de Car $\mathscr{N}_i$ sont parmi celles de $\pi[\text{Car } \tilde{\mathscr{N}} \cap \pi^*T^*(X/S)]$ et sont donc relativement lagrangiennes. ◆

Preuve de 3.5. La difficulté dans ce lemme provient du phénomène d'éclatement. Quand S est un point ou une courbe, on peut trouver une stratification de $T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S)$ compatible avec $\pi^*T^*(X/S)$ et qui vérifie la condition *a*) de Whitney dans le premier cas, la condition de Thom relative au morphisme $T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S) \to S$ dans le second. On en déduit que toute strate est isotrope relativement à la forme symplectique relative $\omega_{\tilde{X}/S}$. Comme sur $\pi^*T^*(X/S)$ cette forme est égale à la forme $\pi^*\omega_{X/S}$, relevée de $\omega_{X/S}$, on en déduit que toute composante de $\pi[T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S) \cap \pi^*T^*(X/S)]$ est relativement isotrope, d'où le lemme (voir [K$_1$] prop. 3.9).

Dans le cas général, une telle stratification n'existe pas nécessairement. Aussi, nous allons employer une méthode analogue à celle utilisée au §2.

Assertion. Si $\tilde{\varphi}|_{\tilde{Z}}$ est sans éclatement en codimension 0 (voir [H-M-S]), le lemme 3.5 est vrai.

En effet, on peut utiliser la version relative de [S$_1$] (2.4.2) pour obtenir que toute composante de $\pi[T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S) \cap \pi^*T^*(X/S)]$ est relativement isotrope. Une telle composante C_i est donc contenue dans un espace conormal relatif $T^*_{\varphi|Z_i}(X/S)$ avec $Z_i \subset Z = \pi(\tilde{Z})$. On a

$$\begin{aligned}\dim C_i \leqslant \dim T^*_{\varphi|Z_i}(X/S) &= \dim X/S + \dim \varphi(Z_i)\\ &\leqslant \dim X/S + \dim \tilde{\varphi}(\tilde{Z}).\end{aligned}$$

On a donc $\dim C_i = \dim X/S + \dim \tilde{\varphi}(\tilde{Z})$ si et seulement si $C_i = T^*_{\varphi|Z_i}(X/S)$ et $\dim \varphi(Z_i) = \dim \tilde{\varphi}(\tilde{Z})$. De plus, de telles composantes existent, puisque $T^*_{\varphi|Z}(X/S)$ est nécessairement une composante de $\pi[T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S) \cap \pi^*T^*(X/S)]$. On obtient ainsi 3.5 sous l'hypothèse de non éclatement.

Dans le cas général, on voit de même que $T^*_{\varphi|Z}(X/S)$ est une composante de $\pi[T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S) \cap \pi^*T^*(X/S)]$ et est de dimension $\dim X/S + \dim \tilde{\varphi}(\tilde{Z})$. Soit C_i une autre composante de cet espace et Z_i son image dans Z. Si $\dim \varphi(Z_i) = \dim \varphi(Z)$ ($=\dim \tilde{\varphi}(\tilde{Z})$), on peut appliquer le lemme (2.4.2) de [S$_1$], du fait de [H] Remark 1 p. 238, pour conclure que C_i est contenue dans $T^*_{\varphi|Z_i}(X/S)$ (c'est le même argument que dans le preuve de 2.8).

Pour démontrer le lemme, il reste donc à vérifier que si $\dim \varphi(Z_i) < \dim \varphi(Z)$, on a $\dim C_i < \dim X/S + \dim \varphi(Z)$. Pour cela, considérons une modification m: $S' \to S$ obtenue comme suite d'éclatements (ou d'éclatements locaux) de centres nulle part denses dans $\varphi(Z)$, et telle que le transformé strict $T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}_i}(\tilde{X}'/S') \to S'$ soit à fibres équidimensionnelles (l'existence d'une telle modification est montrée dans [S$_2$] en utilisant les résultats de [H-L-T], et on a en fait une famille complète de telles modifications, *cf.* 2.9).

Tout composante C_i de $\pi[T^*_{\tilde{\varphi}|\tilde{Z}}(\tilde{X}/S) \cap \pi^*T^*(X/S)]$ est l'image par l'application naturelle d'une composante C_i' de $\pi'[T^*_{\tilde{\varphi}'|\tilde{Z}'}(\tilde{X}'/S') \cap \pi'^*T^*(X'/S')]$ (ou de plusieurs, si on a choisi une famille complète de modifications). Si $\dim \varphi(Z_i) < \dim \varphi(Z)$, on a aussi $\dim \varphi'(Z_i') < \dim \varphi'(Z')$ (ici, "prime" désigne toujours le transformé strict par m) et donc

$$\dim C_i' < \dim X'/S' + \dim \varphi'(Z') = \dim X/S + \dim \varphi(Z)$$

d'après l'assertion ci-dessus. On a donc

$$\dim C_i \leqslant \dim C_i' < \dim X/S + \dim \varphi(Z). \qquad \blacklozenge$$

Terminons la preuve du théorème 3.2. Soit π: $Y \to \operatorname{supp} \mathscr{M}$ une modification propre telle que le lieu exceptionnel soit un diviseur à croisements normaux dans Y et que hors de ce lieu, le $\mathscr{D}_Y$-module $\pi^*\mathscr{M}$ soit une connexion. Nous supposerons de plus qu'on a choisi des coordonnées $t_1, \ldots, t_\kappa$ sur S identifié à $(\mathbb{C}^\kappa, 0)$ de sorte qu'il existe un diviseur à croisements normaux $D \subset Y$ tel que les composantes des diviseurs $(\varphi_1 \circ \pi)^{-1}(0), \ldots, (\varphi_\kappa \circ \pi)^{-1}(0)$ et du lieu exceptionnel de π soient des composantes de D. Le $\mathscr{D}_Y$-module $\mathscr{M}'$, localisé le long de D du module $\pi^*\mathscr{M}$ est holonome régulier (voir [K-K$_2$], [Me]). Soit $\tilde{\mathscr{M}}$ son image directe par le plongement $Y \to Y \times \mathbb{C}^\kappa$ associé au graphe de $\varphi \circ \pi$. Il suffit alors, d'après le lemme précédent et l'hypothèse de récurrence, de prouver le théorème pour $\tilde{\mathscr{M}}$. La question est maintenant locale. Dans des coordonnées locales sur Y telles que D soit une union d'hyperplans de coordonnées, on peut écrire $\varphi_k \circ \pi(x) = \lambda_k(x) \cdot g_k(x)$ où λ_k est une unité et g_k un monôme. A un isomorphisme près de $Y \times \mathbb{C}^\kappa$, on peut donc supposer que $\varphi_k \circ \pi$ est un monôme pour tout k.

D'après [G-G-M] prop. IV. 3.2, le $\mathscr{D}_Y$-module $\mathscr{M}'$ est localement isomorphe à une extension de $\mathscr{D}_Y$-modules du type $\mathscr{D}_Y/\mathscr{I}$ où $\mathscr{I}$ est l'idéal engendré par les équations

$$\partial_{x_i} \quad \text{pour} \quad i \notin I \quad \text{et} \quad x_i\partial_{x_i} - a_i \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \quad \text{pour} \quad i \in I,$$

et I est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$. On peut ainsi se ramener au cas où $\mathscr{M}'$ est un tel module. Alors le $\mathscr{D}_{Y\times\mathbb{C}^\kappa}$-module $\tilde{\mathscr{M}}$ admet un générateur

$u \otimes \delta(t - \varphi)$ satisfaisant en particulier aux relations

$$t_k \cdot u \otimes \delta(t - \varphi) = \varphi_k \cdot u \otimes \delta(t - \varphi) \quad (k \in \{1, \ldots, \kappa\})$$

et

$$x_i \partial_{x_i} \cdot u \otimes \delta(t - \varphi) = [-\Lambda_i(\partial_t t) + a_i] \cdot u \otimes \delta(t - \varphi) \quad (i \in I)$$

$$\partial_{x_i} \cdot u \otimes \delta(t - \varphi) = 0 \quad (i \notin I).$$

Ici, $\partial_t t = (\partial_{t_1} t_1, \ldots, \partial_{t_\kappa} t_\kappa)$ et Λ_i est la forme linéaire sur $\mathbb{Q}^\kappa$ telle que le coefficient de s_k soit l'exposant de x_i dans le monôme $\varphi_k \circ \pi$.

Soit $\mathcal{N}$ le $\mathcal{D}_{Y \times \mathbb{C}^\kappa/\mathbb{C}^\kappa}$-module engendré par $u \otimes \delta(t - \varphi)$. Il suffit de montrer que chaque composante C de Car $\mathcal{N}$ est de dimension égale à dim Y + dim $\varphi \circ \pi(Z)$, si Z est la projection de C dans $Y = \operatorname{supp} \tilde{\mathcal{M}} \subset Y \times \mathbb{C}^\kappa$. Soit r la dimension du sous-espace de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ engendré par les formes Λ_i $(i \in I)$. Ce n'est autre que le rang de $\varphi \circ \pi$ sur $Y \backslash D$. Soit $I_r \subset I$ tel que $\{\Lambda_i\}_{i \in I_r}$ soit une base de cet espace. L'élément $u \otimes \delta(t - \varphi)$ vérifie alors des équations du type

$$x_j \partial_{x_j} - \left[\sum_{i \in I_r} \alpha_{i,j} x_i \partial_{x_i}\right] + \beta_j = 0, \alpha_{i,j} \in \mathbb{Q}, \beta_j \in \mathbb{C}, (j \in I \backslash I_r)$$

$$\partial_{x_j} = 0 \; (j \notin I).$$

Par suite Car $\mathcal{N}$ est contenue dans l'ensemble défini par les équations suivantes

$$t_k - \varphi_k = 0 \; (k \in \{1, \ldots, \kappa\})$$

$$x_j \xi_j - \left[\sum_{i \in I_r} \alpha_{i,j} x_i \xi_i\right] = 0 \; (j \in I \backslash I_r)$$

$$\xi_j = 0 \; (j \notin I).$$

Cet ensemble est irréductible de dimension dim $Y + r$: en effet, c'est une variété lisse hors de $\bigcup_{j \in I \backslash I_r} \{x_j = \xi_j = 0\}$; de plus, toutes ses composantes sont de dimension supérieure ou égale à dim $Y + r$ vu le nombre d'équation qui le définissent; enfin la restriction de cet ensemble au-dessus de $\bigcup_{j \in I \backslash I_r} \{x_j = \xi_j = 0\}$ est de dimension $<$ dim $Y + r$, ce qu'on voit en se restreignant aux ensembles du type $\bigcup_{j \in J'} \{x_j = \xi_j = 0\} \backslash \bigcup_{j \in J''} \{x_j = \xi_j = 0\}$ avec $I \backslash I_r = J' \cup J''$. Ceci finit la preuve du théorème. ◆

Considérons maintenant un sous-ensemble analytique fermé (réduit) S' de S et soit X' son image inverse dans X. Soit $\mathcal{N}'$ un $\mathcal{D}_{X'/S'}$-module cohérent et $\mathcal{N} = i_* \mathcal{N}'$

3.6. COROLLAIRE: *Supposons que $\mathcal{N}$ soit contenu dans un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier $\mathcal{M}$. Supposons de plus que, vu comme $\mathcal{O}_{S'}$-module, $\mathcal{N}'$ soit $\mathcal{O}_{S'}$-plat. Alors $\mathcal{N}'$ est relativement holonome.*

Démontrons d'abord le résultat suivant:

3.7. LEMME: *Soit $\mathcal{N}'$ un $\mathcal{D}_{X'/S'}$-module cohérent et relativement holonome. Si $\mathcal{N}'$ est $\mathcal{O}_{S'}$-plat, pour tout point s de S', la restriction $\mathcal{N}_s = \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{S',s}} (\mathcal{O}_{S',s}/\boldsymbol{M}_s)$, où $\boldsymbol{M}_s$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S',s}$, vérifie l'egalité*

$$\operatorname{Car}(\mathcal{N}_s) = (\operatorname{Car} \mathcal{N})_s.$$

Supposons d'abord que $S' = S$. Nous allons montrer un résultat plus précis que 3.7: Soit $\operatorname{Ch}(\mathcal{N})$ le *cycle* caractéristique de $\mathcal{N}$. Il s'écrit $\Sigma\, m_i T^*_{\varphi|Z_i}(X/S)$. Notons $\operatorname{Ch}(\mathcal{N})_s$ le cycle $\Sigma\, m_i [T^*_{\varphi|Z_i}(X/S)]_s$, où $[T^*_{\varphi|Z_i}(X/S)]_s$ désigne le cycle (de dimension $\dim X - \dim S$) associé à la fibre en s du morphisme $T^*_{\varphi|Z_i}(X/S) \to S$. Nous allons montrer que l'on a en fait l'égalité de cycles

$$\operatorname{Ch}(\mathcal{N}_s) = \operatorname{Ch}(\mathcal{N})_s.$$

Remarquons d'abord que $\operatorname{Car} \mathcal{N}$ est équidimensionnelle de dimension $d = \dim S + \dim X$. En effet, avec les notations du début de ce paragraphe, on voit que $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{N})$ est contenu dans la $\mathcal{O}_S$-torsion de $\mathcal{N}$, qui est nulle puisque $\mathcal{N}$ est $\mathcal{O}_S$-plat. Montrons que, si T est un germe en s d'hypersurface lisse dans S, on a

$$\operatorname{Ch}(\mathcal{N}_T) = \operatorname{Ch}(\mathcal{N})_T.$$

avec $\mathcal{N}_T = \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$. Pour cela, soit $f \in \mathcal{O}_{S,s}$ un germe lisse définissant T. Considérons le complexe défini par la multiplication par f

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{N} \to 0$$

et soit $F.(\mathcal{N})$ une filtration bonne pour $F.(\mathcal{D}_{X/S})$ (filtration par le degré des opérateurs). Une telle filtration existe localement sur X. Ce complexe est filtré par $F.$ et, localement sur X, la suite spectrale associée dégénère en un rang fini r (voir [M] lemme 3.2 pour une démonstration analogue). Nous avons alors une égalité dans le groupe de Grothendieck des faisceaux de

$\mathcal{O}_{T^*(X/S)}$-modules cohérents à support dans Car $(\mathcal{N})_T$:

$$[gr^F(\mathcal{N}/f\mathcal{N})] = [\mathrm{Coker}\ gr^F f] - [\mathrm{Ker}\ gr^F f].$$

On voit aussi que Car $(\mathcal{N})_T$ est équidimensionnelle et on a dim (Car $\mathcal{N})_T$ = dim (Car $\mathcal{N}$) $-$ 1. En considérant alors le cycle de dimension dim (Car $\mathcal{N}$) $-$ 1 associé aux deux membres de l'égalité ci-dessus, nous obtenons l'égalité Ch $(\mathcal{N}_T)$ = Ch $(\mathcal{N})_T$. Par récurrence sur dim S, nous obtenons le résultat voulu.

Dans le cas général, soit $m: \tilde{S}' \to S'$ une résolution des singularités de S'. Soit $\tilde{\mathcal{N}}' = m^{-1}(\mathcal{N}) \otimes_{m^{-1}(\mathcal{O}_{S'})} \mathcal{O}_{\tilde{S}'}$. C'est un $\mathcal{D}_{\tilde{X}'/\tilde{S}'}$-module cohérent et relativement holonome. Sa variété caractéristique est la transformée stricte de celle de $\mathcal{N}$ par m, puisque $\tilde{\mathcal{N}}$ est $\mathcal{O}_{\tilde{S}'}$-plat et donc Car $\tilde{\mathcal{N}}$ n'a pas de composante verticale. Soit $s \in S'$. Alors Car $(\mathcal{N})_s = \bigcup_{\tilde{s} \in m^{-1}(s)} \mathrm{Car}(\tilde{\mathcal{N}})_{\tilde{s}}$. On sait, d'après ce qui précède, que Car $(\tilde{\mathcal{N}})_{\tilde{s}}$ = Car $(\tilde{\mathcal{N}}_{\tilde{s}})$ et par définition on a $\tilde{\mathcal{N}}_{\tilde{s}} = \mathcal{N}_s$. Donc Car $(\mathcal{N})_s$ = Car $(\mathcal{N}_s)$. ◆

Preuve de 3.6. Le problème est local sur X et S. Supposons d'abord que $S' = S$. Soit $m_i: S_i \to S$ une modification telle que S_i soit lisse. Posons $\mathcal{N}_i = m_i^{-1}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_i}$. C'est un $\mathcal{D}_{X_i/S_i}$-module cohérent, plat sur $\mathcal{O}_{S_i}$. Il est de plus contenu dans un $\mathcal{D}_{X_i}$-module holonome régulier: en effet, si $\mathcal{N}$ est contenu dans $\mathcal{M}$ qui est holonome régulier, posons $\mathcal{M}_i = m_i^{-1}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_i}$. On a un morphisme naturel $\mathcal{N}_i \to \mathcal{M}_i$, qui est injectif au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S_i, donc partout puisque $\mathcal{N}_i$ n'a pas de $\mathcal{O}_{S_i}$-torsion. De plus, d'après [K-K$_2$] et [Me], $\mathcal{M}_i$ est holonome régulier. Il résulte alors de 3.2 et 3.3 que Car $(\mathcal{N}_i)$ est la transformée stricte de Car $\mathcal{N}$ par m_i.

Soit $s \in S$ et $x \in \varphi^{-1}(s)$. Si Car $\mathcal{N}$ n'est pas à fibres équidimensionnelles sur S, il existe une famille finie complète $m_i: S_i \to S$ $(i \in I)$ de modifications telles que pour chaque i, la transformée stricte (Car $\mathcal{N})_i$ de Car $\mathcal{N}$ par m_i soit à fibres équidimensionnelles sur S_i (d'après le théorème d'aplatissement de [H-L-T]). Nous pouvons de plus supposer que S_i est lisse, quitte à résoudre les singularités de S_i. D'après la remarque ci-dessus, nous avons alors l'égalité

$$(\mathrm{Car}\ \mathcal{N})_i = \mathrm{Car}\ (\mathcal{N}_i).$$

D'autre part, puisque la famille $(m_i)_{i \in I}$ est complète, la fibre (Car $\mathcal{N})_s$ est réunion des fibres (Car $\mathcal{N}_i)_{s_i}$ pour $s_i \in m_i^{-1}(s)$. Enfin, pour tout i, $\mathcal{N}_i$ satisfait les hypothèses du lemme 3.7. Nous savons alors que (Car $\mathcal{N}_i)_{s_i}$ = Car $(\mathcal{N}_{i,s_i})$. Mais $\mathcal{N}_{i,s_i} = \mathcal{N}_s$ pour tout $s_i \in m_i^{-1}(s)$ et tout $i \in I$. Par suite on a Car $(\mathcal{N}_i)_{s_i}$ = Car $(\mathcal{N}_s)$ et finalement (Car $\mathcal{N})_s$ = Car $(\mathcal{N}_s)$, donc Car $\mathcal{N}$ est à fibres équidimensionnelles sur S.

Dans le cas général, soit m_i: $S_i \to S$ une modification de S qui vérifie les propriétés suivantes: S_i est lisse, le transformé strict S_i' de S' par m_i est lisse, et m_i induit une modification m_i': $S_i' \to S'$. Soit $D_i \subset S_i$ l'ensemble exceptionnel de m_i. Posons enfin $\tilde{S}_i' = m_i^{-1}(S')$ et considérons le $\mathscr{D}_{\tilde{X}_i'/\tilde{S}_i'}$-module $\tilde{\mathscr{N}}_i' = m_i^{-1}(\mathscr{N}') \otimes_{m_i^{-1}(\mathscr{O}_{S'})} \mathscr{O}_{\tilde{S}_i'}$. C'est un $\mathscr{O}_{\tilde{S}_i'}$-module plat. Soit $\tilde{\mathscr{N}}_i$ son image directe par l'inclusion $\tilde{X}_i' \to X_i$. On a alors un morphisme naturel $\tilde{\mathscr{N}}_i \to \mathscr{M}_i$ (où $\mathscr{M}_i$ est défini plus haut), et donc un morphisme naturel $\tilde{\mathscr{N}}_i \to \mathscr{M}_i[*D_i]$. Soit $\mathscr{N}_i$ son image. Alors Car $(\mathscr{N}_i)$ est la transformée stricte de Car $\mathscr{N}$ par m_i'. En effet, Car $(\mathscr{N}_i)$ est une réunion de conormaux relatifs d'après 3.2 et $\mathscr{N}_i$ n'a pas de sous-module à support dans D_i.

Assertion. Il existe une famille finie et complète de modifications m_i: $S_i \to S$, chacune vérifiant les propriétés ci-dessus, et de plus le fait que la transformée stricte Car $(\mathscr{N}_i)$ de Car $\mathscr{N}$ par m_i' soit relativement lagrangienne.

En effet, soit $(m_i')_{i\in I}$ une famille finie complète de modifications, m_i': $S_i' \to S'$, telle que la transformée stricte (Car $\mathscr{N}')_i$ de Car $\mathscr{N}'$ soit relativement lagrangienne. Le théorème d'aplatissement ([H-L-T], voir aussi [S_2]) nous donne non seulement l'existence d'une telle famille, mais aussi le fait que chaque m_i' peut être obtenue comme suite d'éclatements locaux. On peut donc trouver m_i: $S_i \to S$ telle que $m_{i|S_i'} = m_i'$. Il en est de même en ce qui concerne la résolution des singularités de S_i' et de S_i.

Choisissons une telle famille $(m_i)_{i\in I}$. Nous voyons alors que $\mathscr{N}_i$ est relativement holonome pour tout $i \in I$. De plus, si $\mathscr{N}_i'$ désigne la restriction de $\mathscr{N}_i$ à $\tilde{S}_i'$ (de sorte que $\mathscr{N}_i$ est l'image directe de $\mathscr{N}_i'$ par l'inclusion $\tilde{X}_i' \to X_i$), on a un morphisme surjectif $\tilde{\mathscr{N}}_i' \to \mathscr{N}_i'$. Son noyau est à support dans D_i. En tensorisant par $\mathscr{O}_{S_i'}$ et en utilisant la définition de $\tilde{\mathscr{N}}_i'$, nous obtenons un morphisme surjectif

$$m_i'^{-1}(\mathscr{N}') \underset{m_i'^{-1}(\mathscr{O}_{S'})}{\otimes} \mathscr{O}_{S_i'} \to \mathscr{N}_i' \underset{\mathscr{O}_{\tilde{S}_i'}}{\otimes} \mathscr{O}_{S_i'}$$

dont le noyau est à support dans $D_i \cap S_i'$, qui est partout de codimension $\geqslant 1$ dans S_i'. Comme le module de gauche est $\mathscr{O}_{S_i'}$-plat, ce noyau est nul. Finalement nous voyons que les deux modules ci-dessus sont isomorphes et relativement holonomes (puisque celui de droite l'est).

On peut alors terminer la preuve de 3.6 comme dans le cas où $S = S'$, en remplaçant $\mathscr{N}_i$ par le module de gauche ci-dessus. ◆

4. Equations fonctionnelles et éventails caractéristiques

Nous reprenons ici la situation du début du §2. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome et $U.(\mathscr{M})$ une bonne κ-filtration. Nous savons (voir [S_1] § 2.1) que l'anneau de Rees $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$, un fois tensorisé par $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, s'identifie à l'anneau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\kappa}$ des opérateurs différentiels relatifs à $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{C}^\kappa$, et on a un résultat analogue pour $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{D}_X)$, où Γ est un cône simplicial dans le premier quadrant de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$. Soit $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$ le module de Rees associé à la filtration $U.(\mathcal{M})$ (et de même $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$). Il est équivalent de dire que $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$ est $\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_\kappa]$-plat (resp. $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$-relativement holonome) ou que $\mathcal{R}_U(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\kappa}$-plat (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\kappa}$-relativement holonome). On a un résultat analogue pour $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$. Dans la suite, nous considèrerons $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$ (resp. $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$) comme un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\kappa}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}_\Gamma/S_\Gamma}$)-module via cette tensorisation.

Nous allons maintenant démontrer 1.5 et 1.6. Commençons par appliquer les résultats généraux du §3 pour obtenir.

4.1. LEMME: *Supposons que $\mathcal{M}$ soit régulier. Alors Σ est un éventail caractéristique pour $\mathcal{M}$ au voisinage d'un point x de X si et seulement si Σ satisfait la propriété de* 1.5.

Considérons le $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-module $\mathcal{M}[u, u^{-1}] \otimes_{\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, où $u = (u_1, \ldots, u_\kappa)$ sont les coordonnées sur $\mathbb{C}^\kappa$. Il s'identifie au localisé le long de l'hypersurface $\{\prod_i u_i = 0\}$ du $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-module $p^*\mathcal{M}$, où $p\colon \mathcal{X} \to X$ est la projection naturelle. Comme $p^*\mathcal{M}$ et son localisé sont holonomes réguliers si $\mathcal{M}$ l'est, nous voyons que $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$ est contenu dans un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-module holonome régulier.

De la même manière, soit Γ un cône simplicial dans le premier quadrant de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ et soit N' le réseau de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ engendré par $\Gamma \cap N$, où $N = \mathbb{Z}^\kappa$ est le réseau standard de $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$. La variété torique S'_Γ associée à Γ dans ce réseau est par suite lisse (voir [Da]) et on a un morphisme fini $S'_\Gamma \to S_\Gamma$. Alors $\mathcal{R}'_\Gamma(\mathcal{M})$, transformé strict de $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$ par ce morphisme fini, est contenu dans un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'_\Gamma}$-module holonome régulier ($\mathcal{X}'_\Gamma$ est le produit fibré de $\mathcal{X}_\Gamma$ par S'_Γ).

Le théorème 3.2 montre que la variété caractéristique de $\mathcal{R}'_\Gamma(\mathcal{M})$ est une union d'espaces conormaux relatifs au morphisme $\varphi'_\Gamma\colon \mathcal{X}'_\Gamma \to S'_\Gamma$, et puisque $\mathcal{R}'_\Gamma(\mathcal{M})$ n'a pas de $\mathcal{O}_{S'_\Gamma}$-torsion (par construction), cette variété n'a pas de composante verticale.

D'autre part, soit $\pi\colon \mathcal{X}'_\Gamma \to \mathcal{X}_\Gamma$ le morphisme fini induit par $S'_\Gamma \to S_\Gamma$. On a un morphisme naturel $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M}) \to \pi_*\mathcal{R}'_\Gamma(\mathcal{M})$ qui est injectif au-dessus du tore dense S^*_Γ, donc partout puisque $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$ n'a pas de $\mathcal{O}_{S_\Gamma}$-torsion. La variété caractéristique de $\pi_*\mathcal{R}'_\Gamma(\mathcal{M})$ est contenue dans l'image de celle de $\mathcal{R}'_\Gamma(\mathcal{M})$ par le morphisme fini naturel $T^*(\mathcal{X}'_\Gamma/S'_\Gamma) \to T^*(\mathcal{X}_\Gamma/S_\Gamma)$, qui est une réunion de conormaux relatifs. Nous voyons alors que Car $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$, contenue dans une réunion de conormaux relatifs, n'a pas de composante verticale sur S_Γ puisque $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$ n'a pas de $\mathcal{O}_{S_\Gamma}$-torsion et d'après 3.1. D'autre part, en restriction au tore dense de S_Γ, nous voyons que Car $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$ n'est autre que la réunion des espaces conormaux des espaces $\mathcal{Z}_{\Gamma,i}$ relatifs à φ_Γ, où $\mathscr{Z}_{\Gamma,i}$ est le transformé strict de Z_i par la projection $\mathscr{X}_\Gamma \to X$ et Z_i est tel que $T^*_{Z_i}X$ soit une composante de la variété caractéristique de $\mathscr{M}$. En effet, sur ce tore, toute la situation est localement triviale. Comme Car $\mathscr{R}_\Gamma(\mathscr{M})$ n'a pas de composante verticale, l'égalité a encore lieu au-dessus de S_Γ. Ceci prouve le lemme. ◆

A l'aide de ce lemme, nous voyons que 1.6 résulte directement de 1.5. Nous obtenons aussi une autre conséquence:

4.2. COROLLAIRE: *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier et $U_\cdot(\mathscr{M})$ une bonne κ-filtration de $\mathscr{M}$. Alors tout éventail de platitude pour $U_\cdot(\mathscr{M})$ (au sens de* [S$_\mathrm{I}$] 2.2.3) *est caractéristique pour $\mathscr{M}$.*

En effet, si Γ est un cône simplicial d'un éventail de platitude pour $\mathscr{M}$, $\mathscr{R}_\Gamma(\mathscr{M})$ est $\mathscr{O}_{S_\Gamma}$-plat, donc, avec les notations ci-dessus, $\mathscr{R}'_\Gamma(\mathscr{M})$ est $\mathscr{O}_{S'_\Gamma}$-plat (par changement de base) et, d'après 3.6, relativement holonome. Par suite, $\mathscr{R}_\Gamma(\mathscr{M})$ est aussi relativement holonome et donc Σ est caractéristique. ◆

Preuve de 1.5. Il n'est plus nécessaire de supposer que $\mathscr{M}$ est régulier. Soit $U_\cdot(\mathscr{M})$ une bonne κ-filtration de $\mathscr{M}$ et Σ un éventail simplicial tels que la condition de 1.5 soit satisfaite. Nous avons montré dans [S$_\mathrm{I}$] (preuve de 2.2.3) que la κ-filtration $U'(\mathscr{M})$ définie par

$$U'(\mathscr{M}) = \bigcap_{\Gamma\in\Sigma} {}^\Gamma U(\mathscr{M})$$

est bonne, et ceci quelque soit Σ. D'autre part, il est clair qu'une fois Σ fixé, on a pour cône Γ de Σ l'égalité

$${}^\Gamma U'(\mathscr{M}) = {}^\Gamma U(\mathscr{M}).$$

En effet, on a bien sûr $U'_\sigma(\mathscr{M}) \subset {}^\Gamma U_\sigma(\mathscr{M})$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^\kappa$ et donc ${}^\Gamma U'_\sigma(\mathscr{M}) \subset {}^\Gamma U_\sigma(\mathscr{M})$. D'autre part on a aussi l'inclusion $U_\sigma(\mathscr{M}) \subset U'_\sigma(\mathscr{M})$ pour tout σ et donc ${}^\Gamma U_\sigma(\mathscr{M}) \subset {}^\Gamma U'_\sigma(\mathscr{M})$.

Il suffit alors de montrer l'assertion suivante: pour tout cône Γ de Σ, on a (pour tout $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$) une équation de Bernstein

$$\left[\prod_{L\in\mathscr{L}(\Gamma)} b_{L,k}(L(\partial_t t + \sigma))\right] {}^\Gamma U_\sigma(\mathscr{M}) \subset {}^\Gamma U_{\sigma-1_k}(\mathscr{M}).$$

En effet, si cette assertion est montrée, nous en déduisons que $\mathscr{L}(\Sigma)$ $(=\bigcup_{\Gamma\in\Sigma}\mathscr{L}(\Gamma))$ est un ensemble de pentes pour $U'(\mathscr{M})$ et donc, d'après 1.3, $\mathscr{L}(\Sigma)$ est aussi un ensemble de pentes pour $U_\cdot(\mathscr{M})$.

Fixons donc un cône Γ de Σ (on suppose toujours que Σ et $U_{\cdot}(\mathscr{M})$ satisfont à la propriété de 1.5). Par un changement de réseau dans $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ nous pouvons supposer que Γ est engendré par une (partie d'une) base du réseau $\mathbb{Z}^\kappa$ et par un changement de variables que Γ est le simplexe standard, qu'on supposera aussi de dimension maximum κ. Nous sommes ainsi ramenés à démontrer l'assertion suivante:

Soit $U_{\cdot}(\mathscr{M})$ un bonne κ-filtration de $\mathscr{M}$ telle que $\mathscr{R}_U(\mathscr{M})$ soit relativement holonome. On a alors des équations fonctionnelles (pour tout $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$)

$$b_k(\partial_{k_k} t_k + \sigma_k) U_\sigma(\mathscr{M}) \subset U_{\sigma - 1_k}(\mathscr{M}).$$

Cette assertion va résulter des considérations ci-dessous. Soit, d'une manière générale, un morphisme lisse $\varphi\colon \mathscr{X} \to S$ et des hypersurfaces lisses $H_1, \ldots, H_\kappa$ dans S en position générale, avec $\kappa = \dim S$. Soit $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}_{\mathscr{X}/S}$-module cohérent relativement holonome, qui est de plus muni d'une structure de $V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}})$-module, où $V_{\cdot}(\mathscr{D}_{\mathscr{X}})$ est la κ-filtration de $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}$ associée aux hypersurfaces $\varphi^{-1}(H_1), \ldots, \varphi^{-1}(H_\kappa)$ (voir [S$_\text{I}$] §2.1). Le $\mathscr{D}_{\mathscr{X}/S}$-module $\mathscr{N}$ est alors aussi $V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}})$-cohérent (rappelons que $\mathscr{D}_{\mathscr{X}/S} \subset V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}})$). Enfin supposons aussi que $\mathscr{N}$ est muni d'un endomorphisme E (comme $V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}})$-module). Nous avons alors:

4.3. LEMME: *Dans ces conditions, E admet un polynôme minimal sur $\mathscr{N}$ au voisinage de tout point de $\mathscr{X}$.*

Preuve. Soit $\mathscr{M} := \mathscr{D}_{\mathscr{X}} \otimes_{V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}})} \mathscr{N}$. C'est un $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}$-module cohérent. De plus, comme on a $V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}}) = \mathscr{D}_{\mathscr{X}}$ en dehors de l'hypersurface $H = \bigcup_k \varphi^{-1}(H_k)$, et puisque $\mathscr{N}$ est relativement holonome, on voit que, en dehors de H, $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}$-module holonome. D'après un résultat de Kashiwara ([K$_2$]) le localisé de $\mathscr{M}$ le long de H, noté $\mathscr{M}[*H]$, est aussi holonome. Le morphisme naturel $\mathscr{N} \to \mathscr{M}[*H]$ est un isomorphisme en dehors de H. Son noyau $\mathscr{E}$ vérifie les mêmes propriétés que $\mathscr{N}$, mais est à support dans $\varphi^{-1}(H)$. Comme l'endomorphisme E de $\mathscr{N}$ s'étend en un endomorphisme de $\mathscr{M}$ comme $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}$-module, et aussi de $\mathscr{M}[*H]$, E admet un polynôme minimal sur $\mathscr{M}[*H]$. Il reste donc à voir que E admet un polynôme minimal sur $\mathscr{E}$.

Puisque $\mathscr{E}$ est à support dans H, et si on note u_k une équation locale de H_k, on voit qu'il existe un entier n tel que l'on ait $(u_1 \cdots u_\kappa)^n \cdot \mathscr{E} = 0$ au voisinage d'un point x de $\mathscr{X}$. Considérons $\mathscr{E}_k = \mathscr{E}/u_k^n\mathscr{E}$. C'est un $\mathscr{D}_{\mathscr{X}_k/H_k}$-module cohérent relativement holonome (on a posé $\mathscr{X}_k = \varphi^{-1}(H_k)$) qui est muni d'une structure de $V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}_k})$-module et d'un endomorphisme E (ici, $V_{\cdot}(\mathscr{D}_{\mathscr{X}_k})$ est la $(\kappa - 1)$-filtration de $\mathscr{D}_{\mathscr{X}_k}$ associée aux hypersurfaces $\varphi^{-1}(H_j \cap H_k)$ pour $j \neq k$).

Par récurrence sur $\kappa = \dim S$, en voit qu'il existe un polynôme b_k tel que $b_k(E) \cdot \mathscr{E}_k = 0$. Finalement, on obtient

$$\prod_k b_k(E) \cdot \mathscr{E} \subset (u_1 \ldots u_k)^n \cdot \mathscr{E} = 0$$

d'où le lemme. ◆

Terminons la preuve de 1.5. Considérons le module de Rees $\mathscr{R}_U(\mathscr{M})$. C'est un $\mathscr{D}_{\mathscr{X}/\mathbb{C}^\kappa}$-module cohérent, relativement holonome par hypothèse, et il est muni d'une structure de $V_0(\mathscr{D}_{\mathscr{X}})$-module: en fait, si l'on considère $\mathscr{R}^{\mathscr{U}}(\mathscr{M})$ comme un sous-module de $\mathscr{M}[u, u^{-1}]$, et si on se souvient que $\mathscr{M}[u, u^{-1}] = p^*\mathscr{M}[u^{-1}]$, où $p: \mathscr{X} \to X$ est la projection naturelle, $\mathscr{R}^{\mathscr{U}}(\mathscr{M})$ est $t_k\partial_{t_k} + s_k$ sur U_s.

Soit $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$ et i l'inclusion de $\{u_k = 0\}$ dans $\mathbb{C}^\kappa$. Considérons le module $i^*\mathscr{R}_U(\mathscr{M})$. On a

$$i^*\mathscr{R}_U(\mathscr{M}) = \mathscr{R}_U(\mathscr{M})/u_k\mathscr{R}_U(\mathscr{M}) = \bigoplus_{s' \in \mathbb{Z}^{\kappa-1}} \left(\bigoplus_{s_k \in \mathbb{Z}} U_s/U_{s-1_k} \right) \cdot u^{s'}$$

où $s = (s_1, \ldots, s_\kappa)$, $s' = (s_1, \ldots, \hat{s}_k, \ldots, s_\kappa)$ et 1_k est le $k$ème vecteur de base de $\mathbb{Z}^\kappa$. On peut alors appliquer le lemme précédent à $\mathscr{N} = i^*\mathscr{R}_U(\mathscr{M})$ et à l'endomorphisme $E = u_k\partial_{u_k}$. On obtient ainsi l'existence d'un polynôme b tel que $b(E) \cdot i^*\mathscr{R}_U(\mathscr{M}) = 0$, c'est à dire que pour tout $s_k \in \mathbb{Z}$, on a

$$b(t_k\partial_{t_k} + s_k) \cdot U_s(\mathscr{M}) \subset U_{s-1_k}(\mathscr{M}).$$ ◆

Acknowledgement

Je tiens à remercier le rapporteur pour ses remarques pertinentes.

Références

[Bj] J.-E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North Holland (1979).

[Da] V.I. Danilov, The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys* 33 n° 2 (1978) 97–154.

[G] O. Gabber, The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. of Math.* 103 (1981) 445–468.

[G-G-M] A. Galligo, M. Granger et P. Maisonobe, $\mathscr{D}$-modules et faisceaux pervers dont le support singulier, est un croisement normal II, *Astérisque* n° 130 (1985) 240–259.

[H] H. Hironaka, Stratifications and flatness. In: P. Holm (ed.) *Real and Complex Singularities*. Sijthoff and Noordhoff (1977).

[H-L-T] H. Hironaka, M. Lejeune et B. Teissier, Aplatissement local, *Singularités à Cargèse*, Astérisque n° 7/8 (1973).

[H-M-S] J.P.G. Henry, M. Merle et C. Sabbah, Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4ᵉ série 17 (1984) 227–268.

[H-S] C. Houzel et P. Schapira, Images directes de modules différentiels, *C.R. Acad. Sci.* 298 (1984) 461–464.

[K_1] M. Kashiwara, *B*-functions and holonomic systems, *Invent. Math.* 38 (1976) 33–53.

[K_2] M. Kashiwara, On the holonomic systems of differential equations II, *Invent. Math.* 48 (1978) 121–135.

[K_3] M. Kashiwara, Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations, *Springer Lect. Notes in Math.* n° 1016 (1983).

[K-K_1] M. Kashiwara and T. Kawai, On the holonomic systems for $\Pi(f_l + \sqrt{-1}\ 0)^{\lambda_l}$, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.* 15 (1979) 551–575.

[K-K_2] M. Kashiwara and T. Kawai, On the holonomic systems of differential equations (systems with regular singularities) III, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.* 17 (1981) 813–979.

[Lê] Lê D.T., The geometry of the monodromy theorem, Volume dédié à C.P. Ramanujam, Springer Verlag (1978).

[li] B. Lichtin, Generalized Dirichlet series and *B*-functions, preprint (1986).

[M] B. Malgrange, Sur les images directes de $\mathscr{D}$-modules, *Manuscripta Math.* 50 (1985) 49–71.

[Me] Z. Mebkhout, Une équivalence de catégories, et une autre équivalence de catégories, *Comp. Math.* 51 (1984) 55–62 et 63–68.

[Ph_1] F. Pham, Singularités des systèmes de Gauss-Manin, *Progress in Math.* 2, Birkhauser.

[S_1] C. Sabbah, Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux, *Astérisque* n° 130 (1985) 161–192.

[S_2] C. Sabbah, Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents, *Astérisque* n° 101–102 (1983) 286–319.

[S_I] C. Sabbah, Proximité évanescente, I. La structure polaire d'un $\mathscr{D}$-module, Appendice en collaboration avec F. Castro, *Comp. Math.* 62 (1987) 283–328.

[T] B. Teissier, Variétés polaires I: Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces, *Invent. Math.* 40 (1977) 267–292.