M. BRION

Classification des espaces homogènes sphériques

Compositio Mathematica, tome 63, nº 2 (1987), p. 189-208
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__63_2_189_0>

Compositio Mathematica 63: 189–208 (1987)

Classification des espaces homogènes sphériques

M. BRION
Unitersité de Grenoble I, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques associé au CNRS, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères, France

Received 11 December 1985; accepted in revised form 21 January 1987

0. Introduction

Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit H un sousgroupe algébrique de G. L'espace homogène G/H ou le couple (G, H) est dit *sphérique* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes:

(i) Il existe un sous-groupe de Borel B de G tel que BH soit ouvert dans G (un tel sous-groupe de Borel sera dit "opposé à H").
(ii) Quel que soit le G-module rationnel simple M, et le caractère χ de H, l'espace vectoriel des éléments de M de poids χ sous H, est de dimension au plus 1.
(iii) Soit X une variété algébrique (irréductible) sur laquelle G opère régulièrement. S'il existe une G-immersion ouverte $G/H \hookrightarrow X$, alors X ne contient qu'un nombre fini de G-orbites (cf. [A]).

Lorsque G/H est quasi-affine, (ii) équivaut à

(ii)′ Quel soit le G-module rationnel simple M, la dimension de l'espace ${}^HM$ des points fixes de H dans M, est au plus 1.

(Pour plus de détails, voir [BLV] et [B1]).

Il est clair que le fait que G/H soit sphérique ne dépend que des algèbres de Lie de G et H. La liste des couples sphériques (G, H), où G est simple et simplement connexe, et H est réductif connexe, a été établie par M. Krämer (cf. [K]). Le but de ce travail est de décrire tous les couples sphériques. Pour cela, on se ramène d'abord au cas où H est réductif (c'est l'objet de la première partie). Puis on classe les couples sphériques (G, H) où G est simplement connexe et H est réductif connexe, généralisant les résultats de Krämer: dans la deuxième partie, on détermine les couples (G, H) comme ci-dessus, tels que tout sous-groupe entre H et G soit réductif (faute de mieux, un tel H sera dit "trés réductif" dans G). Les couples restants sont classés dans la troisième partie.

Une partie des résultats a été annoncée dans [B2]. Après avoir terminé ce travail, j'ai appris que la classification des couples sphériques (G, H) avec H réductif, avait déjà été obtenue par *I.V. Mikityuk*, en avril 1985; ses résultats ont été publiés dans [M]. Comme le point de vue de Mikityuk (les systèmes hamiltoniens complètement intégrables sur les espaces homogènes; voir aussi [GS]) et ses méthodes sont différentes des miennes, je crois que ce qui suit présente encore quelque intérêt.

Résumons le résultats de cette classification. Il est clair que si (G', H') et (G'', H'') sont des couples sphériques, alors $(G' \times G'', H' \times H'')$ est aussi sphérique. One peut donc se borner à classer les couples sphériques "indécomposables". De plus, on peut supposer que G est semi-simple d'après [K], §4.

THEOREME. *La liste suivante est celle des couples sphériques indécomposables* (G, H) (*avec G semi-simple simplement connexe, et H réductif connexe*):

1) *G est simple et H figure dans la table de* [K].
2) *H est simple et $G = H \times H$ où H est plongé diagonalement dans $H \times H$.*
3) *$H \simeq SL(2)$ et $G = H \times H \times H$ où H est plongé diagonalement.*
4) *Il existe troise groupes réductifs G', H', K' tels que $G = H' \times G'$ et $H = H' \times K'$ où $H' \times K' \overset{i}{\hookrightarrow} G'$ et H est plongé dans G par*

$$H' \times K' \to H' \times G'$$
$$(u, v) \to (u, i(u, v)).$$

De plus, G', H', K' est l'une triplets suivants

$$Sp(2n+2), SL(2), Sp(2n); \quad Sp(2n+4), Sp(4), Sp(2n)$$
$$SO(n+1), SO(n)\ \{1\}; \quad SO(8), Spin(7), \{1\}.$$

5) *$G = Sp(2m+2) \times Sp(2n+2)$ et $H = SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$, où H est plongé dans G par $(t, u, v) \to (t \oplus u, t \oplus v)$.*
6) *$G = Sp(4) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2)$ et $H = SL(2) \times SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$, où H est plongé dans G par $(t, u, v, w) \to (t \oplus u, t \oplus v, u \oplus w)$.*
7) *$G = Sp(2l+2) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2)$ et $H = SL(2) \times Sp(2l) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$, où H est plongé dans G par $(t, u, v, w) \to (t \oplus u, t \oplus v, t \oplus w)$.*
8) *$G = SL(n) \times SL(n+1)$ et $H = SL(n) \times k^*$, où H est plongé dans G par $(u, \lambda) \to (u, \lambda u \oplus \lambda^{-n})$.*

9) $G = SL(m+2) \times Sp(2n+2)$ *et* $H = SL(2) \times SL(m) \times Sp(2n)$ *ou* $H = SL(2) \times SL(m) \times Sp(2n) \times k^*$, *où* H *est plongé dans* G *par* $(u, v, w, \lambda) \to (\lambda^m u \oplus \lambda^{-2} v, u \oplus w)$.

REMARQUE. *Les couples sphériques* (G, H) *où* H *est réductif connexe du même range que* G, *sont les produits des couples des types suivants*:

(i) G *est simple et* H *est le centralisateur d'un élément d'ordre deux de* G.
(ii) $G = SO(2n+1)$ *et* $H = GL(n)$.
(iii) $G = Sp(2n)$ *et* $H = k^* \times Sp(2n-2)$.
(iv) G *est de type* G_2 *et* $H = SL(3)$.

Dans ces énoncés et par la suite, on se livre à de nombreux abus de notations, qui consistent à identifier des groupes isogènes. Bien sûr, ces abus auraient été évités en énonçant tous les résultats en termes d'algèbres de Lie, mais cela aurait (encore) alourdi la présentation.

I. Comment se ramener aus cas d'un sous-groupe reductif

I.1. PROPOSITION. *Soit* H *un sous-groupe algébrique de* G. *Soit* $H = H^u K$ *une décomposition de Levi de* H (*i.e.* H^u *est le radical unipotent de* H, *et* K *est un sous-groupe réductif maximal de* H). *Soit* P *un sous-groupe parabolique de* G, *avec une décomposition de Levi* $P = P^u L$, *tel que* $H^u \subset P^u$ *et* $K \subset L$ (*un tel sous-groupe existe d'après* [Hu] 30.3) *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) H *est spérique dans* G.
2) *Un sous-groupe de Borel* B_L *de* L *a une orbite ouverte dans* P/H.
3) K *a une orbite ouverte dans* P^u/H^u *et le* K-*stabilisateur générique de* P^u/H^u *est sphérique dans* L.
4) K *est sphérique dans* L *et si* B_L *est un sous-groupe de Borel de* L *opposé à* K, *alors* $B_L \cap K$ *a une orbite ouverte dans* P^u/H^u.

(Dans le cas où P est un sous-groupe de Borel de G, ce résultat a aussi été obtenu, indépendamment, par F. Knop).

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Soit B un sous-groupe de Borel de G tel que BH soit ouvert dans G. Alors BP est ouvert dans G, donc il existe un sous-groupe de Levi L' de P tel que $B \cap P = B_{L'}$ soit un sous-groupe de Borel de L'. Soit $P' = BL'$: alors P' est un sous-groupe parabolique de G, et $P \cap P' = L'$. La multiplication dans G induit des isomorphismes $P'^u \times B_{L'} \xrightarrow{\sim} B$ et $P'^u \times P \xrightarrow{\sim} BP$, d'où $P'^u \times B_{L'}H \xrightarrow{\sim} BH$. Comme BH est ouvert dans G, on voit que $B_{L'}H$ est ouvert dans P. Comme L et L' sont conjugués dans P, le groupe B_L a une orbite ouverte dans P/H.

2) $\Rightarrow$ 3). Le morphisme $\begin{matrix} L \times P^u/H^u \to P/H \\ (l, uH^u) \to luH \end{matrix}$ se factorise en un L-isomorphisme $L \times_K P^u/H^u \xrightarrow{\sim} P/H$, où K opère sur $L \times P^u/H^u$ par $k \cdot (l, uH^u) = (lk^{-1}, kuk^{-1}H^u)$. L'hypothèse 2) revient à dire que $B_L \times K$ a une orbite ouverte dans $L \times P^u/H^u$; en particulier K a une orbite ouverte dans P^u/H^u. De plus, si $x \in P^u/H^u$ est tel que $K \cdot x$ est ouvert dans P^u/H^u, alors B_L a une orbite ouverte dans $L \times_K K \cdot x \simeq L/K_x$, i.e. K_x est sphérique dans L.

3) $\Rightarrow$ 4). Avec les notations précédentes, on peut choisir B_L tel que $(B_L \times K) \cdot (1, x)$ soit ouvert dans $L \times P^u/H^u$. En considérant la première projection $L \times P^u/H^u \to L$, on voit que B_LK est ouvert dans L, et que $(B_L \cap K) \cdot x$ est ouvert dans la fibre P^u/H^u.

4) $\Rightarrow$ 1). Soient P' un sous-groupe parabolique de G tel que $P' \cap P = L$, et $B = P'^u B_L$. Alors B est un sous-groupe de Borel de G, et la multiplication dans G induit un isomorphisme $P'^u \times B_L \xrightarrow{\sim} BH$. Il suffit donc de montrer que B_L a une orbite ouverte dans $P/H \simeq L \times_K P^u/H^u$, ce qui résulte facilement des hypothèses.

I.2. Proposition. *On conserve les mêmes notations. Soit H vérifiant l'une des conditions* 1) *à* 4). *Soit B un sous-groupe de Borel de G tel que $B \cap P = B_L$ soit un sous-groupe de Borel de L, opposé à K. Soit $K \cdot x$ l'orbite ouverte de K dans P^u/H^u: alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{G/H} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{L/K_x} \\ \| & & \| \\ \left\{\begin{matrix}\text{vecteurs propres de} \\ B \times H \text{ dans } k(G)\end{matrix}\right\} & & \left\{\begin{matrix}\text{vecteurs propres de } B_L \times K_x \\ \text{dans } k(L)\end{matrix}\right\} \\ f & \longrightarrow & f|_L \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

(On note $k(G)$ le corps des fonctions rationnelles sur G: les éléments de $\mathcal{P}_{G/H}$ s'interprètent termes de vecteurs propres de H dans les G-modules simples; voir [BLV] §2).

Démonstration. Soit P' un sous-groupe parabolique de G tel que $B \subset P'$ et $P' \cap P = L$. Si $f \in \mathcal{P}_{G/H}$, alors f est invariante par P'^u à gauche et par H^u à droite . Comme la multiplication dans G induit une immersion ouverte de $P'^u \times P$ dans G, la restriction à P induit un isomorphisme de groupes

$$\mathcal{P}_{G/H} \xrightarrow{\sim} \{\text{vecteurs propres de } B_L \times K \text{ dans } k(L \times P^u/H^u)\}.$$

Comme $k(L \times P^u/H^u) \simeq k(L \times K \cdot x) \simeq k(L \times K/K_x)$, la proposition 1.2 en résulte aussitôt.

I.3. REMARQUE. Il existe une $(G \times k^*)$-variété X et un $(G \times k^*)$-morphisme plat $p: X \to \mathbb{A}^1(k)$ (où G opère trivialement sur $\mathbb{A}^1(k)$ et k^* opère par homothéties) tels qu'on ait des G-isomorphismes: $p^{-1}(0) \simeq G/P^u K_x$ et $p^{-1}(t) \simeq G/H$ pour tout $t \in k^*$. Autrement dit, l'espace homogène G/H est une déformation G-équivariante de $G/P^u K_x$ (Dans [B1] une construction analogue est utilisée pour montrer que B n'a qu'un nombre fini d'orbites dans G/H).

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver l'énoncé analogue lorsque G est remplacé par P. Soit λ un sous-groupe à un paramètre du centre de L tel que $G(\lambda) = P$. Soit R l'algèbre des fonctions régulières sur la variété affine P/H. On définit une filtration décroissante de R par

$$R_n = \{f \in R \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t) t^{-n} f \text{ existe dans } R\}.$$

Cette filtration est stable par P, et P^u opère trivialement sur l'algèbre graduée asociée S (car $P = G(\lambda)$). De plus $R \simeq S$ comme L-algèbres (car $L = C_G(\lambda)$). On a donc une $P \times k^*$-variété Y, et un $P \times k^*$-morphisme plat $p: Y \to \mathbb{A}^1(k)$ tels que $p^{-1}(0) \simeq \operatorname{Spec} S$ et $p^{-1}(1) \simeq \operatorname{Spec} R$ comme P-variétés. De plus P a une orbite ouverte dans Spec S (car B_L a une orbite ouverte dans Spec R). On peut donc prendre pour X la réunion des P-orbites de dimension maximale dans Y.

I.4. Les propositions I.1. et I.2. permettent de classer les espaces homogènes sphériques par "induction". Pour cela, il faut préciser la proposition 1.

DEFINITION. *Le sous-groupe algébrique H de G est appelé "très réductif" si tout sous-groupe de G contenant H est réductif.*

LEMME. *Soit H un sous-groupe algébrique de G, avec une décomposition de Levi $H = H^u K$. Il existe alors un sous-groupe parabolique P de G, avec une décomposition de Levi $P = P^u L$, tel que $H^u \subset P^u$ et que K soit très réductif dans L. Si Q est un autre sous-groupe parabolique de G vérifiant les mêmes conditions, alors $P \cap Q$ contient un sous-groupe de Levi de P et Q.*

DÉMONSTRATION. Soit $P = P^u L$ tel que $H^u \subset P^u$, que $K \subset L$ et que P soit minimal pour ces propriétés. Montrons que P convient: en effet si K n'est pas très réductif dans L, alors K est inclus dans un sous-groupe non réductif de L, donc dans un sous-groupe de Levi $\tilde{L}$ d'un sous-groupe parabolique propre de L. On peut choisir un sous-groupe parabolique $\tilde{P}$ de G tel que $\tilde{P} \subsetneqq P$ et $\tilde{P} \cap L \supset \tilde{L}$. Alors $H^u \subset P^u \subset \tilde{P}^u$ et $K \subset \tilde{L}$, ce qui contredit la minimalité de P. Soit Q un sous-groupe parabolique de G vérifiant les conditions du lemme. Soit M un sous-groupe de Levi de Q tel que K soit très réductif dans M. Comme K n'est inclus dans aucun sous-groupe parabolique de M, on voit comme précédemment que Q est minimal tel que $H^u \subset Q^u$ et $K \subset M$. De plus $Q' = Q^u(P \cap Q)$ est un sous-groupe parabolique de G (cf. [BT], Proposition 4.4); on a $H^u \subset Q'^u$ et $H \subset Q' \subset Q$ donc $Q' = Q$. Par suite, $P \cap Q$ contient un sous-groupe de Levi de Q. De même, $P \cap Q$ contient un sous-groupe de Levi de P. Le lemme est démontré.

I.5. La proposition I.1 et le lemme I.4 ramènent la classification des espaces homogènes sphériques au cas où H est réductif; de plus on a le

COROLLAIRE. *Pour un sous-groupe réductif H de G, les conditions suivantes sont équivalents*:

1) *H est sphérique dans G.*
2) *Il existe un sous-groupe parabolique P de G, et un sous-groupe de Levi L de P, tels que H soit sphérique et très réductif dans L, et que si B_L est un sous-groupe de Borel de L opposé à H, alors $B_L \cap H$ a une orbite ouverte dans P^u.*

Un tel sous-groupe L de G est alors sphérique dans G. On va classer les couples (G, L) possibles, dans le cas où G est simplement connexe (on peut toujours s'y ramener; cf. [K], Satz 1).

PROPOSITION. *Soit L un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G. Ecrivons $G = \Pi_{i=1}^r G_i$ où chaque G_i est simple; alors $L = \Pi_{i=1}^r L_i$ où $L_i = L \cap G_i$.*

Pour que L soit sphérique dans G, il faut et il suffit que chaque (G_i, L_i) figure dans la liste suivante:

G	L	Lie (P^u) comme L-module
$SL(m+n)$	$G \cap (GL(m) \times GL(n))$	$k^m \otimes (k^n)^*$
$Sp(2n)$	$k^* \times Sp(2n-2)$	$k \oplus k^{2n-2}$
$Sp(2n)$	$GL(n)$	$S^2 k^n$
$SO(n)$, $n \geqslant 5$	$k^* \times SO(n-2)$	k^{n-2}
$SO(2n)$	$GL(n)$	$\Lambda^2 k^n$
$SO(2n+1)$	$GL(n)$	$k^n \oplus \Lambda^2 k^n$
E_6	$k^* \times D_5$	représentation spinorielle irréductible de D_5
E_7	$k^* \times E_6$	représentation irréductible de dimension 27 de E_6

(dans la dernière colonne on indique l'action de la partie semi-simple de L sur l'algèbre de Lie de P^u, le centre de L opère par homothéties).

DÉMONSTRATION. Pour que L soit sphérique dans G, il faut et il suffit que chaque L_i soit sphérique dans G_i. Comme L_i est un sous-groupe réductif du groupe simple G_i, le couple (G_i, L_i) figure dans la table de [K], et on about it immédiatement à la liste ci-dessus.

II. Classification des sous-groupes sphériques "très réductifs" des groupes réductifs

II.1. On va classer les espaces homogènes sphériques G/H, où H est connexe et très réductif dans le groupe (simplement connexe) G.

Dans cette classification, la "hauteur" de H, définie ci-dessous, va jouer un rôle important.

DEFINITION. *Le sous-groupe connexe H est de hauter au plus n dans G s'il existe une décomposition: $G = \Pi_{i=1}^r G_i$ et $H = \Pi_{i=1}^r H_i$ avec $H_i = H \cap G_i$ et toute chaîne de sous-groupes connexes distincts entre H_i et G_i est de longueur au plus n.*

On va prouver que si H est sphérique et très réductif dans G, alors H est de hauteur au plus 3 dans G; on va aussi déterminer successivement les couples (G, H) de hauteur 1, 2 et 3.

II.2. PROPOSITION. *Les couples sphériques (G, H) où H est très réductif de hauteur* 1 *dans G, sont les produits directs des couples des types suivants*:

a) *G est simple et H est un sous-groupe sphérique réductif, maximal, de G (de tels couples sont énumérés dans la table de* [K]).
b) *H est simple et $G = H \times H$ avec H plongé diagonalement.*

DÉMONSTRATION. Il existe un décomposition $G = \Pi_{i=1}^r G_i$ et $H = \Pi_{i=1}^r H_i$ où chaque H_i est un sous-groupe maximal de G_i. D'après [D], Theorem 15.1, le couple (G, H) est du type a) ou b). Par ailleurs, un couple du type b) est toujours sphérique, car symétrique (cf. [He], Chap. VIII, Thm 5.3 et Thm 5.4).

II.3. PROPOSITION. *Les couples sphériques (G, H) où H est très réductif de hauteur* 2 *dans G, sont les produits directs des couples de types suivants*:

c) *$H \simeq SL(2)$ et $G = H \times H \times H$ où H est plongé diagonalement.*

d) *Il existe trois groupes réductifs G', H', K' tels que $G = H' \times G'$ et $H = H' \times K'$ où $H' \times K' \xhookrightarrow{i} G'$ et H est plongé dans G par $H = H' \times G' \to H' \times G' = G$.*

$$(h', k') \to (h', i(h', k'))$$

De plus, (G', H', K') figure dans la liste suivante:

G'	H'	K'
$Sp(2n+2)$	$SL(2)$	$Sp(2n)$
$Sp(2n+4)$	$Sp(4)$	$Sp(2n)$
$SO(n+1)$	$SO(n)$	$\{1\}$
$SO(8)$	$Spin(7)$	$\{1\}$

e) *$G = Sp(2m+2) \times Sp(2n+2)$ et $H = Sp(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$, où H est plongé dans G par $(t, u, v) \to (t \oplus u, t \oplus v)$.*

DÉMONSTRATION. Si H est très réductif de hauteur 2 dans G, alors H est un sous-groupe maximal d'un sous-groupe $\tilde{H}$ de hauteur 1 de G, ou (G, H) se décompose en produit de tels couples. Donc d'après [D], loc. cit., (G, H) est produit de couples des types suivants:

(i) H est plongé diagonalement dans $H \times H \times H = G$; on peut supposer que H est simple.

(ii) H est un sous-groupe maximal de $\tilde{H}$; on plonge diagonalement $\tilde{H}$ dans $\tilde{H} \times \tilde{H} = G$. On peut supposer $\tilde{H}$ simple.

(iii) (G, H) est de type d), où on peut supposer G' simple.

(iv) Il existe des groupes réductifs H', K_1, K_2, G_1, G_2 tels que $H' \times K_i$ soit un sous-groupe maximal de G_i pour $i = 1, 2$, et que $H = H' \times K_1 \times K_2$ soit plongé dans $G = G_1 \times G_2$ par $(h', k_1, k_2) \to (h'k_1, h'k_2)$. On peut supposer que $G_i \neq H' \times K_i$ pour $i = 1$ et 2 (sinon on est dans le cas précédent).

(v) H est de hauteur 2 dans le groupe simple G.

Dans le cas (i), d'après [K], §4, on a $H = SL(2)$. Dans le cas (ii), H n'est jamais sphérique dans G (sauf si G est un tore). En effect, soit M un $\tilde{H}$-module simple tel que $\dim M \geqslant 2$ et $\dim {}^H M = 1$. Alors $M \otimes M^*$ est un G-module simple et $\dim^H(M \otimes M^*) \geqslant 2$.

On vérifie facilement sur la table de [K] que le cas (v) ne se produit pas (i.e. tout sous-groupe réductif sphérique non maximal d'un groupe simple est inclus dans un sous-groupe parabolique).

Pour traiter le cas (iii), on utilise le lemme suivant:

LEMME. *Soient G', H', K' comme dans la proposition* II.3. *Soit $B_{H'}$ un sous-groupe de Borel de H'. Alors $H' \times K'$ est sphérique dans $H' \times G'$ si et seulement si $B_{H'} \times K'$ est sphérique dans G'.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. On vérifie immédiatement que l'application

$$(H' \times G')/(H' \times K') \to G'/K'$$

$$(x, y)(H' \times K') \to yx^{-1}K'$$

est bien définie, et identifie $(H' \times G')/(H' \times K')$ à G'/K', où G' opère par translations à gauche, et H' opère par translations à droite (en effet H' normalise K'). Soit $B_{G'}$ un sous-groupe de Borel de G': alors $H' \times K'$ est sphérique dans $H' \times G'$ si et seulement si $B_{H'} \times B_{G'}$ a une orbite ouverte dans $(H' \times G')/(H' \times K') \simeq G'/K'$, c'est-à-dire si $B_{G'}$ a une orbite ouverte dans $G'/(B_{H'} \times K')$; d'où le lemme.

Les triplets (G', H', K') vérifiant le lemme sont donc soumis à la condition: $(*)$ $\dim (B_{H'} \times K') \geqslant \dim B^u_{G'}$ (cf. [K], Satz 4). De plus, $H' \times K'$ est un sous-groupe sphérique de hauteur 1 du groupe simple G'. En testant la condition $(*)$ sur les couples de la table de [K], on trouve les possibilités suivantes:

G'	H'	K'
$Sp(2m+2n)$	$Sp(2m)$	$Sp(2n)$
$SO(m+n)$	$SO(m)$	$SO(n)$
$SO(8)$	$Spin(7)$	$\{1\}$
$SO(8)$	$SL(2)$	$Sp(4)$
E_6	A_1	A_5
E_7	A_1	D_6
E_8	A_1	E_7

Il n'est pas nécessaire d'étudier les cas de $SO(8)$, $Spin(7)$, $\{1\}$ ni de $SO(8)$, $SL(2)$, $Sp(4)$ puisqu'ils se déduisent par automorphismes extérieurs des cas de $SO(8)$, $SO(7)$, $\{1\}$ et $SO(8)$, $SO(3)$. $SO(5)$ respectivement.

Cas de $Sp(2m+2n)$, $Sp(2m)$, $Sp(2n)$

Le groupe $B_{H'} \times K'$ est inclus dans le sous-groupe parabolique P, stabilisateur dans G' d'un drapeau d'espaces isotropes de dimensions $1, 2, \ldots, m$. De plus $B_{H'} \times K'$ contient un sous-groupe de Levi L de P, isomorphe à $(k^*)^m \times Sp(2n)$, et $(B_{H'} \times K')^u = B^u_{H'}$. On voit facilement que la L-variété $P^u/B^u_{H'}$ est isomorphe à $k^m \otimes k^{2n}$, où $(k^*)^m$ opère sur k^m, et $Sp(2n)$ opère sur k^{2n}, de façon naturelle. D'après la proposition I.1 et le lemme 2.3, le couple $(H' \times G', H' \times K')$ est sphérique si et seulement si le L-module $k^m \otimes k^{2n}$ contient une B_L-orbite ouverte, i.e. si $m \leqslant 2$. (cf. [B3], §2).

Cas de $SO(m + n)$, $SO(m)$, $SO(n)$

Comme précédemment, le groupe $B_{H'} \times K'$ est inclus dans le sous-groupe parabolique P, stabilisateur d'un drapeau d'espaces isotropes de dimensions $1, 2, \ldots, r = [m/2] = rg\ SO(m)$. Un sous-groupe de Levi K de $B_{H'} \times K'$ est isomorphe à $(k^*)^r \times SO(n)$, et la K-variété $P^u/B^u_{H'}$ est isomorphe au K-module $k^r \otimes k^n$.

Si m est pair, alors K est un sous-groupe de Levi de P et $r = m/2$. D'après la proposition I.1 et le lemme II.3, $H' \times K'$ est sphérique dans $H' \times G'$ si et seulement si le K-module $k^r \otimes k^n$ contient une B_K-orbite ouverte, i.e. si $r = 1$ ou $n = 1$. Pour $r = 1$, on a $SO(2) \times SO(m) \subset SO(m + 2)$ et on n'est pas dans le cas très réductif. Le cas de $n = 1$ figure dans la liste de la proposition II.3.

Si m est impair, alors K est inclus dans un sous-groupe de Levi L de P, et $L \simeq (k^*)^r \times SO(n + 1)$. Pour que $B_{H'} \times K'$ soit sphérique dans G', il faut d'après la proposition I.1, 3), que $(k^*)^r \times SO(n)$ ait une orbite ouverte dans $k^r \otimes k^n$, i.e. que $r = 1$ ou $n = 1$. Pour $n = 1$, on a $L \simeq (k^*)^r \times SO(2) \simeq (k^*)^{r+1}$ donc tout sous-groupe de L est sphérique dans L; d'après la proposition I.1, 3), $H' \times K'$ est sphérique dans $H' \times G'$. Pour $r = 1$, le K-stabilisateur générique de k^n est le stabilisateur dans $L = k^* \times SO(n + 1)$ de deux droites non isotropes distinctes de k^{n+1}, et n'est donc pas sphérique dans L. Par suite $H' \times K'$ n'est pas sphérique dans $H' \times G'$.

Cas de E_6, A_1, A_5

Le groupe $B_{H'} \times K'$ est inclus dans le sous-groupe parabolique P de type A_5 de E_6, et contient un sous-groupe de Levi L de P; on a $L \simeq k^* \times A_5$. On vérifie que la L-variété $P^u/B^u_{H'}$ est isomorphe au L-module $\Lambda^3 k^6$ où k^* opère par homothéties et $A_5 \simeq SL(6)$ opère naturellement. D'apres [Ka], Theorem 3, B_L n'a pas d'orbite ouverte dans $P^u/B^u_{H'}$, donc ce cas est exclu.

Cas de E_7, A_1, D_6

Le groupe $B_{H'} \times K'$ est inclus dans P sous-groupe parabolique de type D_6 de E_7, et contient un sous-groupe de Levi L de P; on a $L \simeq k^* \times D_6$. La

L-variété $P^u/B^u_{H'}$ est isomorphe à une représentation spinorielle irréductible de D_6, sur laquelle k^* opère par homothéties. D'après [Ka], Theorem 3, ce cas est exclu.

Cas de E_8, A_1, E_7

Le groupe $B_{H'} \times K'$ est inclus dans P sous-groupe parabolique de type E_7 de E_8, et contient un sous-groupe de Levi L de P; on a $L \simeq k^* \times E_7$. La L-variété $P^u/B^u_{H'}$ est isomorphe au E_7-module simple de dimension 56, sur lequel k^* opère par homothéties. D'après [Ka], Theorem 3, ce cas est exclu.

Traitons enfin le *cas* (*iv*). Puisque H est sphérique dans G, il est clair que $H' \times K_1 \times K_2$ est sphérique dans $G_1 \times H' \times K_2$, donc les couples $(H' \times G_i, H' \times K_i)$ sont du type (iii). En utilisant les résultats précédents, on voit facilement que la seule possibilité est $H = SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$ et $G = Sp(2m + 2) \times Sp(2n + 2)$.

En effet, montrons par exemple que $H = Sp(4) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$ n'est pas sphérique dans $Sp(2m + 4) \times Sp(2n + 4) = G$. Pour tout entier $l > 0$, notons E_l la représentation irréductible non triviale de $Sp(2l)$ contenue dans $\Lambda^2 k^{2l}$. Alors $E_{m+2} \otimes E_{n+2}$ est un G-module simple, et $(E_{m+2} \otimes E_{n+2})^H = (E_{m+2}^{Sp(2m)} \otimes E_{n+2}^{Sp(2n)})^{Sp(4)} = ((E_2 \oplus k) \otimes (E_2 \oplus k))^{Sp(4)}$ est de dimension 2.

Montrons enfin que $SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$ est sphérique dans $Sp(2m + 2) \times Sp(2n + 2)$. En effet, on peut voir que si $B' \times B_m$ est un sous-groupe de Borel de $SL(2) \times Sp(2m + 2)$ opposé à $SL(2) \times Sp(2m)$, alors $(B' \times B_m) \cap (SL(2) \times Sp(2m))$ est le produit direct d'un tore central par un sous-groupe de Borel de $Sp(2m - 2) \subset Sp(2m)$. On en déduit que $(B_m \times B_n) \cap (SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n))$ est de dimension $m^2 - m + n^2 - n + 1$. Un calcul de dimensions montre alors que $BH = (B_m \times B_n) \cdot (SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n))$ est ouvert dans $G = Sp(2m + 2) \times Sp(2n + 2)$.

II.4. PROPOSITION. *Les couples sphériques* (G, H) *avec* H *très réductif de hauteur* 3 *dans* G, *sont les produits directs des couples des types*

- $G = Sp(4) \times Sp(2m + 2) \times Sp(2n + 2)$ et $H = SL(2) \times SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$, où H est plongé dans G par $(t, u, v, w) \to (t \oplus u, t \oplus v, u \oplus w)$.
- $G = Sp(2l + 2) \times Sp(2m + 2) \times Sp(2n + 2)$ et $H = SL(2) \times Sp(2l) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$, où H est plongé dans G par $(t, u, v, w) \to (t \oplus u, t \oplus v, t \oplus w)$.

DÉMONSTRATION. Soit (G, H) sphérique avec H très réductif de hauteur 3 dans G. Alors H est un sous-groupe de hauteur 1 d'un sous-groupe $\tilde{H}$

sphérique très réductif de hauteur 2 dans G. D'après la proposition II.3, quitte à décomposer (G, H) en produit direct, on est dans l'une des cas suivants:

1) $\tilde{H}$ est de type d), i.e. H est un sous-groupe maximal de $H' \times K' \subset H' \times G' = G$. Il faut de plus que le couple (G', H) soit sphérique et très réductif. Mais on vérifie sur la table de [K] que les couples $(G', H' \times K')$ de la proposition II.3 sont sphériques, très réductifs minimaux. On a donc $H = \tilde{H}$, et ce cas est exclu.
2) $\tilde{H}$ est de type c); alors $H \subsetneq SL(2) \subset SL(2) \times SL(2) \times SL(2) = G$ donc $\tilde{H}$ n'est pas très réductif dans G.
3) Il existe un couple sphérique $(G', SL(2) \times K)$ tel que
$$\begin{aligned} H = SL(2) \times K &\hookrightarrow (SL(2))^3 \times G' = G \\ (u, v) &\mapsto (u, u, u, i(u, v)) \end{aligned}$$
ou i est l'inclusion de $SL(2) \times K$ dans G'.

Soient alors N un G'-module simple, P un $SL(2)$-module simple et n un entier positif. Il existe trois $SL(2)$-modules simples M_1, M_2, M_3 et un $SL(2)$-morphisme injectif de P^n dans $M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$. Le G-module $M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \otimes N$ est simple donc

$$1 \geqslant \dim (M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \otimes N)^H = \dim (M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \otimes N^K)^{SL(2)}$$

d'où $\dim (P^n \otimes N^K)^{SL(2)} \leqslant 1$.

Cette inégalité étant vraie pour P et n quelconques, on en déduit que $N^K = \{0\}$ pour tout G'-module simple N, donc que $K = G'$, ce qui est absurde.

4) On a $H = H' \times K' \hookrightarrow H' \times G' \times G'' = G$
$$(h', k') \to (h', i(h', k'), h')$$

où G', H', K', i vérifie la proposition II.3 d), et où (G'', H'') est sphérique très réductif de hauteur 1. L'inclusion de H dans G se factorise par

$$\begin{array}{cccc} H = H' \times K' \subset & H' \times H' \times K' \subset & H' \times H' \times H' \times K' \subset & H' \times G'' \times G' \\ (h', k') \to & (h', h', k') \to & (h', h', h', k') \to & (h', h', i(h', k')). \end{array}$$

En particulier, $H' \times K'$ est sphérique dans $H' \times H' \times H' \times K'$, donc $H' = SL(2)$ d'après [K], §4. Soient M un G''-module simple et n un H'-module simple. Alors $N \otimes M$ est un G-module simple (sur lequel G' opère trivialement) et $(N \otimes M)^H \simeq (N \otimes M)^{H'}$ est de dimension au plus 1. Donc tout G''-module simple est un H'-module sans multiplicité. D'après [K'], on a $G'' = SL(2) \times SL(2)$ (où H' est plongé diagonalement) ou $G'' = H'$.

Dans le premier cas, on a $H = SL(2) \times K' \subset (SL(2))^3 \times G' = G$ et on est ramené au cas 3). Dans le second cas, on a

$$H = SL(2) \times K' \subset SL(2) \times SL(2) \times G' = G.$$

LEMME. *Soit k^* un tore maximal de $SL(2)$. Avec les notations précédentes, H est sphérique dans G si et seulement si $k^* \times K'$ est sphérique dans G'.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soient M, N deux $SL(2)$-modules simples, et P un G'-module simple. Alors $(M \otimes N \otimes P)^H = (M \otimes N \otimes P^{K'})^{SL(2)}$. Pour que H soit sphérique dans G, il faut et il suffit que pour tous M, N, P, on ait dim $(M \otimes N \otimes P^{K'})^{SL(2)} \leqslant 1$, i.e. que le k^*-module $P^{K'}$ soit sans multiplicité pour tout G'-module simple P. Cette dernière condition équivaut au fait que $k^* \times K'$ est sphérique dans G', d'où le lemme.

Il ne reste plus qu'à trouver les triplets $(G', SL(2), K')$ de la proposition II.3, tels que $k^* \times K'$ soit sphérique dans G'. D'après la table de [K], la seule possibilité est $(Sp(2n + 2), SL(2), Sp(2n))$.

5) On a $H = H' \times K' \subset H' \times K' \times G' = G$
$$(h, k) \to (h, k, i(h, k))$$

où G', H', K', i vérifie les conditions de la proposition II.3. Un raisonnement analogue à celui du lemme ci-dessus montre que H est sphérique dans G si et seulement si tout G'-module simple est un H-module sans multiplicité. D'après la proposition II.3 et les résultats de [K'], ce cas est exclu.

6) Il existe un couple sphérique très réductif (G', H'), de hauteur au plus 2, tel que H soit un sous-groupe de hauteur 1 de $\tilde{H} = SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n) \times H' \subset Sp(2m + 2) \times 2p(2n + 2) \times G' = G$. On peut supposer que H est maximal dans $\tilde{H}$; on vérifie alors que H contient $Sp(2m) \times Sp(2n)$, et que H' est de la forme $SL(2)^p \times H''$ avec $H = SL(2)^{p-1} \times H'' \times Sp(2m) \times Sp(2n)$. En utilisant le fait que (G, H) est indécomposable, on montre que deux cas se présentent:

.p $= 1$ et $H'' = Sp(2l)$, $G' = Sp(2l + 2)$;

$$H = SL(2) \times Sp(2l) \times Sp(2m) \times Sp(2n).$$

.p $= 2$ et $H'' = \{1\}$; $G' = Sp(4)$;

$$H = SL(2) \times SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n).$$

Pour prouver que ces deux couples sont sphériques, on procède de même qu'en II.3, (iv).

II. 5. PROPOSITION. *Il n'existe pas de couple sphérique* (G, H) *avec* H *très réductif de hauteur au moins* 4 *dans* G.

DÉMONSTRATION. Soit (G, H) un couple sphérique très réductif de hauteur 4. On peut supposer que H est un sous-groupe maximal de $\tilde{H}$ sphérique très réductif de hauteur 3 dans G. On est alors dans l'un des cas suivants:

1) H est un sous-groupe maximal de $SL(2) \times SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n) \subset Sp(4) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2) = G$. On voit aisément que H contient $Sp(2m) \times Sp(2n)$, donc $H = SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n)$ où $SL(2)$ est plongé diagonalement dans $SL(2) \times SL(2)$. Mais alors $S^2k^4 \otimes k^{2m+2} \otimes k^{2n+2}$ est un G-module simple, dont l'ensemble des points fixes par H est $(S^2(k^2 \oplus k^2) \otimes k^2 \otimes k^2)^{SL(2)}$, qui est de dimension 3. Ce cas est donc exclu.
2) H est un sous-groupe maximal de $SL(2) \times Sp(2l) \times Sp(2m) \times Sp(2n) \subset Sp(2l+2) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2)$. Ce cas est analogue au précédent.
3) $H = SL(2) \times SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n) \subset SL(2) \times Sp(4) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2) = G$, où H est plongé dans G par $(t, u, v, w) \to (t, t \oplus u, t \oplus v, u \oplus w)$. Alors $k^2 \otimes k^4 \otimes k^{2m+2} \otimes k^{2n+2}$ est un G-module simple, dont l'ensemble des points fixes par H est $(k^2 \otimes (k^2 \oplus k^2) \otimes k^2 \otimes k^2)^{SL(2)}$, qui est de dimension 2.

   On élimine de même le cas où $H = SL(2) \times Sp(2l) \times Sp(2m) \times Sp(2n) \subset SL(2) \times Sp(2l+2) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2) = G$.
4) $H = SL(2) \times SL(2) \times Sp(2m) \times Sp(2n) \subset Sp(4) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2) \times Sp(2m) = G$; H est plongé dans G par $(t, u, v, w) \to (t \oplus u, t \oplus v, u \oplus w, v)$. Ce cas est exclu car $H \subset Sp(4) \times Sp(2n+2) \times Sp(2m) \subset Sp(4) \times Sp(2n+2) \times Sp(2m+2) \times Sp(2m)$ et $Sp(2m)$ n'est pas sphérique dans $Sp(2m+2) \times Sp(2m)$ (cf. II.3). On élimine de même le cas de $H = SL(2) \times Sp(2l) \times Sp(2m) \times Sp(2n) \subset Sp(2l+2) \times Sp(2l) \times Sp(2m+2) \times Sp(2n+2) = G$.

III. Fin de la classification

III.1. On va maintenant déterminer les couples (G, H) sphériques, avec H réductif mais pas très réductif dans G. D'après le corollaire I.5, il existe un sous-groupe de Levi L de P sous-groupe parabolique de G, tel que H soit très réductif dans L. De plus, si B_L est un sous-groupe de Borel de L opposé à H, alors $B_L \cap H$ a une orbite ouverte dans P^u. L'opération de L dans P^u est linéarisable; on va donc commencer par déterminer les L-modules contenant une orbite ouverte sous $B_L \cap H$.

LEMME. *Soit E un L-module* (rationnel de dimension finie) *tel que $B_L \cap H$ ait une orbite ouverte dans E. On suppose que (L, H) est produit direct de (L_1, H_1) et (L_2, H_2) et que E contient $E_1 \otimes E_2$* (où chaque E_i est un L_i-module). *Alors $k^* \times (B_{L_i} \cap H)$ opère sur E_i avec une orbite ouverte* (où k^* opère par homothéties).

DÉMONSTRATION. Il est clair que $B_L \cap H = (B_{L_1} \cap H_1) \times (B_{L_2} \cap H_2)$ a une orbite ouverte dans $E_1 \otimes E_2$. D'après [BLV], théorème 3.4, il existe pour $1 \leqslant i \leqslant 2$, un sous-groupe réductif M_i de L_i tel que $B_{L_i} \cap H$ soit un sous-groupe de Borel de M_i. Soit $k[E_1 \otimes E_2]$ l'algèbre graduée des fonctions polynomiales sur $E_1 \otimes E_2$; c'est un $(M_1 \times M_2)$-module sans multiplicité d'après ce qui précède. Or pour tout $n \geqslant 0$,

$$k[E_1 \otimes E_2]_n \supset k[E_1]_n \otimes k[E_2]_n$$

donc le M_i-module $k[E_i]_n$ est sans multiplicité. Cela signifie que le $(k^* \times M_i)$-module $k[E_i]$ est sans multiplicité, d'où le lemme.

III.2. LEMME. *Soit (L, H) un couple sphérique indécomposable, avec H très réductif dans L. Soit E un L-module tel que $k^* \times (B_L \cap H)$ ait une orbite ouverte dans E. Alors $E = \{0\}$ ou k, et $B_L \cap H$ opère trivialement sur E, sauf dans l'un des cas de la liste suivante*:

L	$SL(2n)$	$Sp(2m+2n)$	$SL(n) \times SL(n)$	$SL(2) \times Sp(2n+2)$
H	$Sp(2n)$	$Sp(2m) \times Sp(2n)$	$SL(n)$	$SL(2) \times Sp(2n)$
E sous-module de:	$k^{2n} \oplus k$ ou $(k^{2n})^* \oplus k$	$k^{2m+2n} \oplus k$	k^n ou $(k^n)^*$	k^2

DÉMONSTRATION. On vérifie cas par cas. Si r est la plus petit dimension des L-modules simples non triviaux, et si E est non trivial, alors $r \leqslant \dim E \leqslant \dim k^* \times (B_L \cap H) = 1 + \dim (B_L \cap H)$. On voit ansi que E est trivial dans les cas suivants:

$SO(n) \subset SL(n)$; $Spin(7) \subset SO(9)$; $G_2 \subset SO(7)$; $G_2 \subset SO(8)$;
$SO(2) \times Spin(7) \subset SO(10)$; $SL(3) \subset G_3$; $SL(2) \times SL(2) \subset G_2$;
$B_4 \subset F_4$; $C_3 \times A_1 \subset F_4$; $C_4 \subset E_6$; $F_4 \subset E_6$; $A_5 \times A_1 \subset E_6$;
$A_7 \subset E_7$; $D_6 \times A_1 \subset E_7$; $D_8 \subset E_8$; $A_1 \times E_7 \subset E_8$; $SL(2) \subset (SL(2))^3$;
$SO(n) \subset SO(n) \times SO(n+1)$.

Dans les autres cas, on utilisera les notations suivantes: B_L est un sous-groupe de Borel de L opposé à H, et $P_L = \{s \in L | sB_LH = B_LH\}$. Alors P_L est un sous-groupe parabolique de L, et on peut choisir un sous-groupe de Levi M de P_L tel que $(M, M) \subset P_L \cap H \subset M$ (cf. [BLV] théorème 3.4). Donc $B_L \cap H$ contient un sous-groupe de Borel de (M, M).

Cas de $Sp(2n) \subset SL(2n)$, $n \geqslant 2$. Alors $P_L \cap H$ est de type $(A_1)^n$ et $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M), comme on le vérifie facilement par un calcul de dimensions. De plus $\dim E \leqslant 1 + \dim (B_L \cap H) = 2n + 1$ donc $E \subset k^{2n} \oplus k$ ou $(k^{2n})^* \oplus k$, qui conviennent.

Cas de $SO(2m) \times SO(2n) \subset SO(2m + 2n)$, $2 \leqslant m \leqslant n$. Alors $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $D_{n-m} \subset SO(2n)$. Il faut donc que $B_{SO(2n-2m)}$ ait une orbite ouverte dans E, donc E est trivial.

Cas de $SO(2m) \times SO(2n + 1) \subset SO(2m + 2n + 1)$, $2 \leqslant m \leqslant n$. Alors $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $B_{n-m} \subset SO(2n + 1)$, et on conclut comme précédemment.

Cas de $SO(2m + 1) \times SO(2n) \subset SO(2m + 2n + 1)$, $0 \leqslant m < n$. Alors $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $B_{n-m-1} \subset SO(2n)$. Pour que E soit non trivial, il faudrait donc que $m = 0$. Mais alors on vérifie facilement que si E est un $SO(2n + 1)$-module simple non trivial, alors E ne contient pas d'orbite ouverte sous $k^* \times B_{SO(2n-1)}$.

Cas de $SO(2m + 1) \times SO(2n + 1) \subset SO(2m + 2n + 2)$, $0 \leqslant m \leqslant n$. Alors $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $D_{n-m} \subset SO(2n + 1)$. On vérifie, comme dans le cas précédent, que E est trivial.

Cas de $Sp(2m) \times Sp(2n) \subset Sp(2m + 2n)$, $m \leqslant n$. Alors $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $(A_1)^m \times C_{n-m}$. De plus E contient un orbite ouverte sous $k^* \times B_{Sp(2m+2n)}$ donc d'après [Ka], Theorem 3, tout facteur simple non trivial de E est isomorphe à $k^{2m+2n} \oplus k$, qui convient.

Cas de $H \subset H \times H = L$, où H est simple. Alors $B_L \cap H = T$ est un tore maximal de H. Il faut que $T \times k^*$ ait une orbite ouverte dans E, donc que H soit un sous-groupe de rang maximal de $SL(E)$. Comme H est simple, on a forcément $H = SL(E)$.

Cas de $SL(2) \times Sp(2n) \subset SL(2) \times Sp(2n + 2)$. On vérifie que $B_L \cap H$ est produit d'un tore central de dimension 1 par un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $C_{n-1} \subset Sp(2n + 2)$; de plus $B_L \cap H$ n'est pas inclus dans $Sp(2n + 2)$. Donc la seule possibilité pour E est k^2, qui convient.

Cas de $Sp(4) \times Sp(2n) \subset Sp(4) \times Sp(2n + 4)$. Alors $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $C_{n-2} \subset Sp(2n + 4)$. Donc E est forcément trivial.

Cas de $SL(2) \times Sp(2n) \subset SL(2) \times SL(2) \times Sp(2n + 2)$. Alors $B_L \cap H$ est un sous-groupe de Borel de (M, M) où M est de type $C_{n-1} \subset Sp(2n + 2)$. De même E est trivial.

Le cas de couples de hauteur 3 est exclu pour les mêmes raisons.

III.3. PROPOSITION. *Soit H un sous-groupe sphérique très réductif de L; soit G réductif connexe tel que $G \supset L$ et que H soit sphérique dans G. Alors (G, H) est produit de couples déjà classés, ainsi que de couples des types suivants*:

G	L	H
$SL(n) \times SL(n+1)$	$SL(n) \times k^* \times SL(n)$	$SL(n) \times k^*$
$SL(m+2) \times Sp(2n+2)\,(n \geqslant 0)$	$SL(2) \times SL(m) \times k^* \times Sp(2n+2)$	$SL(2) \times SL(m) \times Sp(2n)\,(\times k^*)$

Dans le premier cas, on plonge H dans L en envoyant diagonalement $SL(n)$ dans $SL(n) \times SL(n)$; on plonge L dans G en envoyant $k^* \times SL(n)$ dans $SL(n + 1)$. Dans le deuxième cas, l'inclusion de H dans L provient del'inclusion de $SL(2) \times Sp(2n)$ dans $SL(2) \times Sp(2n + 2)$ (cf. proposition II.3).

DÉMONSTRATION. D'après les lemmes III.1 et III.2, on peut supposer qu'il existe des couples sphériques (L', H') et (L'', H'') tels que $H = H' \times H'' \subset L' \times L'' = L$ et que (L'', H'') figure dans la liste du lemme III.2. On va examiner successivement les cas de cette liste. On supposera que (G, H) est indécomposable.

Il est utile de remarquer que si G est simple et si L est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G tel que L soit sphérique dans G, alors le diagramme de Dynkin de G s'obtient à partir de L en rajoutant un sommet (cf. proposition I.5).

Cas de $Sp(2n) \subset SL(2n)$. Alors $H = Sp(2n) \times H' \subset SL(2n) \times L' = L \subset G$. Comme (G, H) est indécomposable, on voit que G est simple, donc ce cas a été étudié dans [K].

Cas de $Sp(2m) \times Sp(2n) \subset Sp(2m + 2n)$. Alors $H = Sp(2m) \times Sp(2n) \times H' \subset Sp(2m + 2n) \times L' = L \subset G$ et de même que précédemment, G est simple donc ce cas est classé dans [K].

Cas de $SL(n) \subset SL(n) \times SL(n)$. Alors $H = SL(n) \times H' \subset SL(n) \times SL(n) \times L' = L \subset G$. Comme L est sphérique dans G, on voit en utilisant la liste de la proposition I.5 que l'on est dans un de cas suivants:

(i) $L' = SL(m) \times k^*$ et $G = SL(n) \times SL(n + m)$.

La L-variété P^u est alors isomorphe à $k^n \otimes (k^m)^*$, et doit contenir une orbite ouverte sous $B_L \cap H = T \times (B_{L'} \cap H')$, où T est un tore maximal de $SL(n)$. Donc $n \leqslant 2$ ou $m = 1$.

Si $m = 1$, alors $H' \subset k^* = L'$ et $T \times H'$ doit avoir une orbite ouverte dans k^n. Donc $H' = k^*$ et on obtient
$H = SL(n) \times k^* \subset SL(n) \times SL(n) \times k^* = L \subset SL(n) \times SL(n + 1) = G$, qui convient.

Si $n \leqslant 2$, alors on peut supposer que $n = 2$. Il faut que $T \times (B_{L'} \cap H')$ ait une orbite ouverte dans $k^2 \otimes (k^m)^*$. On voit alors, comme dans la démonstration du lemme III.1, que $k^* \times (B_{L'} \cap H')$ a une orbite ouverte dans k^m. D'après le lemme III.2, $H' \supset SL(m)$ sauf peut-être si m est pair, égal à $2r$, et $H' = Sp(2r) \times k^*$. Montrons que ce cas est exclu: en effet il faudrait que $T \times (B_{L'} \cap H') \simeq (k^*)^2 \times B_{(A_1)^r}$ ait une orbite ouverte dans $k^2 \otimes k^{2r}$, où $(k^*)^2$ opère diagonalement dans k^2, et $(A_1)^r$ opère dans $(k^2)^r$. Mais alors
$\dim (k^2 \otimes k^{2r}) \leqslant \dim T \times (B_{L'} \cap H')$ i.e., $4r \leqslant 2 + 2r$ donc $r = 1$, ce qui est exclu.

Enfin, si $H' \supset SL(m)$, il est clair que $T \times (B_{L'} \cap H')$ a une orbite ouverte dans $k^2 \otimes (k^m)^*$. On obtient ainsi

$$H = SL(2) \times SL(m)(\times k^*) \subset L = SL(2) \times SL(m) \times SL(2) \times k^* \subset G$$
$$= SL(2) \times SL(m + 2)$$

ce qui est le deuxième cas de la liste (avec $n = 0$).

(ii) $L' = k^*$ et $G = SL(n) \times SO(2n)$ (resp. $SO(2n+1)$; $Sp(2n)$); $n \geqslant 2$. Alors la L-variété P^u est isomorphe à $\Lambda^2 k^n$ (resp. $k^n \oplus \Lambda^2 k^n$ et doit contenir une orbite ouverte sous $T \times k^*$, où T est un tore maximal de $SL(n)$. Donc $\dim P^u \leqslant n$, d'où immédiatement $n \leqslant 3$ et $P^u \simeq \Lambda^2 k^n$.

Si $n = 2$, on a affaire à

$$\begin{aligned} H &= SL(2) \times k^* \subset L = SL(2) \times SL(2) \times k^* \subset G \\ &= SL(2) \times SO(4) \simeq SL(2)^3 \end{aligned}$$

donc (G, H) est produit de $(SL(2) \times SL(2), SL(2))$ et de $(SL(2), k^*)$.

Si $n = 3$, on obtient

$$\begin{aligned} H &= SL(3) \times k^* \subset L = SL(3) \times SL(3) \times k^* \subset G \\ &= SL(3) \times SO(6), \end{aligned}$$

qui n'est autre que le cas (déjà étudié) de

$$SL(3) \times k^* \subset SL(3) \times SL(4).$$

Cas de $SL(2) \times Sp(2n) \subset SL(2) \times Sp(2n+2)$. Alors $H = SL(2) \times Sp(2n) \times H' \subset SL(2) \times Sp(2n+2) \times L' = L \subset G$. On voit facilement que l'on est dans l'un des cas suivants:

(i) $L' = k^*$ et $G = SL(2) \times Sp(2n+4)$. La L-variété P^u est alors isomorphe à $k \oplus k^{2n+2}$, où le groupe $B_L \cap H = k^* \times B_{Sp(2n-2)}$ doit avoir une orbite ouverte; ce cas est donc exclu.

(ii) $L' = k^* \times SL(m)$ et $G = Sp(2n+2) \times SL(m+2)$. La L-variété P^u est isomorphe à $k^2 \otimes k^m$, où le groupe $T \times (B_{L'} \cap H')$ doit avoir une orbite ouverte. Comme dans le cas de $SL(n) \subset SL(n) \times SL(n)$, (i), on en déduit que $H' \supset SL(m)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} H &= SL(2) \times SL(m) \times Sp(2n)(\times k^*) \\ &\subset L = SL(2) \times SL(m) \times k^* \times Sp(2n+2) \\ &\subset G = SL(m+2) \times Sp(2n+2). \end{aligned}$$

(iii) $L' = k^*$ et $G = Sp(4)$. La L-variété P^u est alors de dimension 3, et $Sp(2n + 2)$ opère trivialement sur P^u. De plus, $B_L \cap H/B_L \cap Sp(2n)$ est un tore de dimension $\leqslant 2$ (car ce groupe s'identifie au produit d'un tore maximal de $SL(2)$, et de H'). Ce cas est donc exclu, ce qui termine la classification.

References

[A] D.N. Ahiezer: Actions with a finite number of orbits. *Funct. Analysis Appl.* 19 (1985) 1–4.

[BLV] M. Brion, D. Luna and Th. Vust: Espaces homogènes sphériques. *Inventiones Math.* 84 (1986) 617–632.

[B1] M. Brion: Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques. *Manuscripta Math.* 55 (1986) 191–198.

[B2] M. Brion: Classification des espaces homogènes sphériques. *C.R.A.S. Paris*, t. 301, série 1, n 18 (1985) 813–816.

[B3] M. Brion: Représentations exceptionnelles des groupes semi-simples. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* t. 18 (1985) 345–387.

[BT] A. Borel and J. Tits: Groupes réductifs. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.* no 27 (1965) 55–150.

[D] E.B. Dynkin: Semisimple subalgebras of semisimple algebras. *A.M.S. Translations series* 2, vol. 6, pp. 11–244.

[GS] V. Guillemin et S. Sternberg: Multiplicity-free spaces. *J. Diff. Geom.* 19 (1984) 31–56.

[He] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.* Academic Press (1978).

[Hu] J.E. Humphreys: *Linear algebraic groups. Graduate Text in Mathematics* no 21 (Springer-Verlag).

[K] M. Krämer: Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. *Compositio Math.* 38 (1979) 129–153.

[K′] M. Krämer: Multiplicity-free subgroups of compact connected Lie groups. *Arch. Math.* (Basel) 27 (1976) 28–36.

[Ka] V. Kac: Some remarks on nilpotent orbits. *J. of Alg.* 64 (1980) 190–213.

[M] I.V. Mikityuk: On the integrability of invariant hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces (en russe). *Math. Sbornik* 129 (171) (1986) 514–534.