

COMPOSITIO MATHEMATICA

J. M. CORDIER

**Sur les limites homotopiques de diagrammes
homotopiquement cohérents**

Compositio Mathematica, tome 62, n° 3 (1987), p. 367-388

http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__62_3_367_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les limites homotopiques de diagrammes homotopiquement cohérents

J.M. CORDIER

*Université de Picardie, U.F.R. de Maths & d'Informatique, 33, Rue St. Leu,
80039 Amiens Cédex, France*

Received 9 August 1982; accepted in revised form 8 January 1987

Le problème de la caractérisation des théories de forme forte [E-H] a récemment montré la nécessité d'un développement de l'étude des phénomènes de cohérence homotopique. C'est en premier lieu dans l'étude des limites homotopiques que ces cohérences d'homotopie peuvent être mises en évidence. Des objets limites homotopiques ont ainsi été décrits par Bousfield-Kan [B-K] dans un sens restreint (fonctoriel) et par Vogt [V] pour des diagrammes homotopiquement cohérents. Ces deux approches ont été comparées par Vogt dans le cas fonctoriel. Nous allons préciser dans ce texte le lien qui existe entre ces deux types d'objets limites pour un diagramme homotopiquement cohérent. Nous considérons pour cela la forme généralisée des limites de Bousfield-Kan introduite dans [B-C].

La comparaison, faite par Thomason [T], des objets limites de Bousfield-Kan aux objets limites 2-cohérents (lax-limites) d'un foncteur 2-cohérent (op-lax-foncteur), a conduit Gray à donner dans [G] une formalisation des limites de Bousfield-Kan basée sur la notion de limite indéxée dans les catégories simpliciales (catégories simplicialement enrichies). C'est dans ce cadre que sont définis les objets limites homotopiques de [B-C].

Nous montrons ici que, comme pour les lax-limites ou les limites homotopiques de Bousfield-Kan, les objets limites homotopiques de Vogt exprimés par rapport à l'objet monoïde (X) , $*$ donne 0 de $*$ dans $[0, 1]$ et (t, t') donne $\sup(t, t')$ de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$, admettent également une indexation. Si \mathcal{A} est une catégorie et $S\mathcal{A}$ la catégorie simpliciale de Dwyer-Kan associée, il est montré dans [C] que $Re_* S\mathcal{A} = W\mathcal{A}$ où Re est le foncteur réalisation topologique d'un ensemble simplicial, $W\mathcal{A}$ étant la catégorie topologique de Vogt exprimée par rapport à l'objet monoïde (X) . La donnée d'un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top (catégorie des espaces compactement engendrés) correspond alors à la donnée d'un foncteur simplicial de $S\mathcal{A}$ dans Top , (la structure de catégorie simpliciale naturellement définie sur Top). De cette caractéristique, nous obtenons, par exemple, la

limite inverse d'homotopie de Vogt d'un diagramme cohérent F , $\underline{\text{holim}}_{\nu} F$, comme la limite indéxée,

$$\underline{\text{holim}}_{\nu} F = \int_B [\underline{\text{lim}}_A \nabla X(A, B), FB],$$

où $[-, -]$ est le foncteur cotensorisation de la catégorie simpliciale Top_s , $\nabla X(A, B)$ étant l'objet total de Artin-Mazur [A-M] du bisimplicial $X(A, B)$ défini par

$$X(A, B)_{n,-} = \prod_{A_0, \dots, A_n} \mathcal{A}(A, A_0) \times \underline{S}\mathcal{A}(A_0, A_1) \times \dots \times \underline{S}\mathcal{A}(A_n, B).$$

La forme duale $X'(A, B)$ du bisimplicial $X(A, B)$ et le foncteur tensorisation, $- \otimes -$ de Top_s , nous donnent l'objet limite directe d'homotopie de Vogt $\underline{\text{holim}}_{\nu} F$, comme la limite indéxée,

$$\underline{\text{holim}}_{\nu} F = \int^A \underline{\text{lim}}_B \nabla X'(A, B) \otimes FA.$$

Ces indexations permettent de mettre en évidence une comparaison naturelle entre, par exemple, $\underline{\text{holim}}_{\nu} F$ et l'objet limite, $\underline{\text{holim}} F$ de [B-C], donnée par la diagonale du bisimplicial $X'(A, B)$. Nous considérons pour cela des foncteurs rectifications, \check{F} et \hat{F} , liés aux indexations, tels que $\underline{\text{holim}} F = \underline{\text{lim}} \check{F}$ et $\underline{\text{holim}} F = \underline{\text{lim}} \hat{F}$.

Nous faisons une utilisation, dans ce texte, des notions de fins et cofins de foncteurs au niveau enrichi (simplicialement) ou non enrichi. Le texte de Gray [G] en développe un certain nombre de points suffisants pour l'étude des limites homotopiques.

Dans le chapitre 1 sont donnés les éléments nécessaires à la description d'un diagramme cohérent comme un foncteur simplicial, le chapitre 2 débutant par quelques rappels sur les limites indéxées qui peuvent également être trouvées dans [G] ou [B-C].

Nous notons par $\mathcal{S} = \text{Fonc}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$, la catégorie des ensembles simpliciaux, Δ étant la catégorie ayant pour objets les ensembles ordonnés $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ et pour morphismes les applications croissantes au sens large; nous noterons en particulier par δ_i^n de $[n - 1]$ dans $[n]$ l'injection qui oublie i et par σ_i^n de $[n + 1]$ dans $[n]$ la surjection qui répète i .

I. Les diagrammes cohérents

Nous présentons dans ce chapitre les éléments de base intervenant dans la caractérisation des diagrammes cohérents comme foncteurs simpliciaux.

1. Récemment Dwyer et Kan [D-K] dans leur étude de la localisation simpliciale ont considéré la catégorie simpliciale $S\mathcal{A}: \Delta^{op} \rightarrow 0\text{-Cat}$, pour $\mathcal{A} \in 0\text{-Cat}$ (la catégorie ayant pour objets les catégories de classe d'objets 0 et pour morphismes les foncteurs qui sont l'identité sur les objets) définie par la résolution standard d'une comonade (F, ϕ, ψ) sur Cat où $F\mathcal{A}$ est la catégorie libre qui a un générateur Ff pour chaque morphisme f non-identité et où ϕ et ψ sont définis par:

$$\begin{aligned} \phi: F\mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}, & \psi: F\mathcal{A} &\rightarrow F^2\mathcal{A} \\ Ff &\rightarrow f & Ff &\rightarrow F(Ff). \end{aligned}$$

Cette catégorie simpliciale admet la description suivante:

Pour A et B objets de \mathcal{A} , étant donné un $(n + 1)$ -uple de morphismes composables de A dans B , $f = (f_0, \dots, f_n)$, considéré comme la donnée d'un foncteur $f: [n + 1] \rightarrow \mathcal{A}$, nous disons que $g = (g_0, \dots, g_p)$ de A dans B est lié à f par un processus d'insertion de parenthèses s'il existe une injection $\delta: [p + 1] \hookrightarrow [n + 1]$ telle que $\delta(0) = 0$, $\delta(p + 1) = n + 1$ et $f\delta = g$.

Un m -simplexe de $S\mathcal{A}(A, B)$ est alors la donnée d'un $(n_m + 1)$ -uple $f: [n_m + 1] \rightarrow \mathcal{A}$, où $f_i \neq id$ pour tout i , et de m processus d'insertion de parenthèses $\delta^1, \dots, \delta^m$, soit

$$[n_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} \dots [n_{m-1} + 1] \xrightarrow{\delta^m} [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A}.$$

Les morphismes dégénérescences s_i associent $(\delta^1, \dots, \delta^i, id, \delta^{i+1}, \dots, \delta_m; f)$ à $(\delta^1, \dots, \delta^m; f)$, les morphismes faces d_0 et d_i pour $i < m$ étant respectivement définis par $(\delta^2, \dots, \delta^m; f)$ et $(\delta^1, \dots, \delta^{i+1}\delta^i, \dots, \delta^m; f)$. Pour le morphisme face d_m , nous considérons $f\delta^m$. Comme $f\delta^m$ peut faire apparaître des identités par composition, soit $g: [n'_m + 1] \rightarrow \mathcal{A}$ le foncteur obtenu de f par élimination des identités. Cette opération élimination est définie par une surjection $\sigma^{m-1}: [n_{m-1} + 1] \twoheadrightarrow [n'_{m-1} + 1]$ telle que $g\sigma^{m-1} = f\delta^m$. Nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} [n_0 + 1] & \xrightarrow{\delta^1} & \dots & [n_{m-2} + 1] & \xrightarrow{\delta^{m-1}} & [n_{m-1} + 1] & \xrightarrow{f\delta^m} & \mathcal{A} \\ \downarrow \sigma^0 & & & \downarrow & & \downarrow \sigma^{m-1} & \searrow & \\ [n'_0 + 1] & \xrightarrow{\delta^1} & \dots & [n'_{m-2} + 1] & \xrightarrow{\delta^{m-1}} & [n'_{m-1} + 1] & \xrightarrow{g} & \mathcal{A} \end{array}$$

Le morphisme d_m est alors défini par $d_m(\delta^1, \dots, \delta^m; f) = (\delta^1, \dots, \delta^{m-1}; g)$. La loi de composition de $S\mathcal{A}$ associe, à $x = (\delta^1, \dots, \delta^m; f) \in S\mathcal{A}(A, B)_m$

et $x' = (\delta'^1, \dots, \delta'^m; f') \in \underline{S\mathcal{A}}(B, C)_m$, le m -simplexe $x' * x$ de $\underline{S\mathcal{A}}(A, C)_m$ défini par

$$x' * x = [n_0 + n'_0 + 2] \xrightarrow{\delta'^1 * \delta^1} \dots \xrightarrow{\delta'^m * \delta^m} [n_m + n'_m + 2] \xrightarrow{f' * f} \mathcal{A}$$

où

$$\delta'^1 * \delta^1 = \begin{cases} \delta^1(i) & \text{pour } i \leq n_0 + 1 \\ \delta^1(i - n_0 - 1) + n_1 + 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de même pour $\delta'^i * \delta^i$ et $f' * f$.

Un exemple immédiat nous est donné par la catégorie $[n + 1]$. Nous avons:

PROPOSITION 1([C]). *La catégorie simpliciale $S[n + 1]$ est telle que*

$$\underline{S[n + 1]}(0, n + 1) = \Delta[1]^n = \text{Ner}[1]^n.$$

Preuve. Soit $v = (0, p_1, \dots, p_r, n + 1)$ et $v' = (0, p'_1, \dots, p'_r, n + 1)$ deux suites strictement croissantes d'entiers. On note $v \leq v'$ si la suite v est extraite de v' . Alors un m -simplexe de $\underline{S[n + 1]}(0, n + 1)$ est simplement une suite $v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_m$. Posons

$$v_i = (0, p_1^i, \dots, p_{r(i)}^i, n + 1), 0 < p_1^i < \dots < p_{r(i)}^i < n + 1.$$

Nous définissons une application de $\underline{S[n + 1]}(0, n + 1)$ dans $\Delta[1]^n$ associant au m -simplexe $v_0 \leq \dots \leq v_m$, le m -simplexe $\mu: [m] \rightarrow [1]^n$ de $\Delta[1]^n$ suivant

$$\text{soit } a_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \{p_1^i, \dots, p_{r(i)}^i\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

on pose $\mu(i) = (a_1(i), \dots, a_n(i))$. C'est la bijection cherchée. ■

Pour A et B objets de \mathcal{A} , soit $\underline{Z\mathcal{A}}(A, B)$ l'ensemble simplicial ayant pour m -simplexes les classes d'équivalence, des données de m -processus d'insertion de parenthèses $(\delta^1, \dots, \delta^m)$ de $(n_m + 1)$ -uple $f = (f_0, \dots, f_{n_m})$ où les

f_i sont quelconques, par la relation d'équivalence engendrée par: $(\delta^1, \dots, \delta^m; f)$ est en relation avec $(\delta'^1, \dots, \delta'^m; f')$ si il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 [n_0 + 1] & \xrightarrow{\delta^1} & [n_1 + 1] & \cdots & \xrightarrow{\delta^m} & [n_m + 1] & \\
 \uparrow \sigma^0 & & \uparrow \sigma^1 & & & \uparrow \sigma^m & \searrow f \\
 [p_0 + 1] & \xrightarrow{\quad} & [p_1 + 1] & \cdots & \xrightarrow{\quad} & [p_m + 1] & \longrightarrow \mathcal{A} \\
 \downarrow \sigma^0 & & \downarrow \sigma^1 & & & \downarrow \sigma^m & \swarrow f' \\
 [n'_0 + 1] & \xrightarrow{\delta'^1} & [n'_1 + 1] & \cdots & \xrightarrow{\delta'^m} & [n'_m + 1] &
 \end{array} \quad (*)$$

Nous avons

PROPOSITION 2. Pour A et B objets de \mathcal{A} , les ensembles simpliciaux $\underline{S}\mathcal{A}(A, B)$ et $\underline{Z}\mathcal{A}(A, B)$ sont identiques.

Preuve. A la classe d'équivalence de $[n_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^m} [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$ est associée l'unique élément de cette classe, $[n'_0 + 1] \xrightarrow{\delta'^1} \cdots \xrightarrow{\delta'^m} [n'_m + 1] \xrightarrow{g} \mathcal{A}$, où g est obtenu de f par l'opération élimination des identités de f , $\sigma^m: [n_m + 1] \rightarrow [n'_m + 1]$, telle que $g\sigma^m = f$ et $\sigma^m \delta^m \dots \delta^1 = \delta'^m \dots \delta'^1 \sigma^0$. ■

2. Soit $d: \Delta^{op} \rightarrow \Delta$ le foncteur défini par $d([n]) = [n + 1]$ et

$$d(\sigma_i^{n-1}) = \delta_{i+1}^{n+1}: [n] \rightarrow [n + 1]$$

$$d(\delta_i^n) = \sigma_i^n: [n + 1] \rightarrow [n]$$

Pour A et B objets d'une catégorie \mathcal{A} , soit $C(A, B) = C$, l'ensemble cosimplicial défini par, $C(A, B)^n$ est l'ensemble des foncteurs $f: [n + 1] \rightarrow \mathcal{A}$ tels que $f(0) = A$ et $f(n + 1) = B$, les morphismes cofaces $C^{\delta_i}: C^{n-1} \rightarrow C^n$ étant définis par $C^{\delta_i}(f) = f d(\delta_i) = f \sigma_i$ et codégénérescences $C^{\sigma_i}: C^{n+1} \rightarrow C^n$ par $C^{\sigma_i}(f) = f d(\sigma_i) = f \delta_{i+1}$.

Nous avons défini l'opération insertion de parenthèses dans un $(m + 1)$ -uplet $f = (f_0, f_1, \dots, f_m)$ par la donnée d'une injection $\delta: [n + 1] \rightarrow [m + 1]$ telle que $\delta(0) = 0$ et $\delta(n + 1) = m + 1$. Soit $\tilde{\delta}: [m] \rightarrow [n]$ la surjection associée à δ définie par,

$$\tilde{\delta}(k) = i \text{ pour } \delta(i) \leq k < \delta(i + 1).$$

Nous avons

$$f\delta = C^\delta(f).$$

Notons que à toute surjection $\sigma: [m] \twoheadrightarrow [n]$ est associée une insertion $\tilde{\sigma}: [n + 1] \hookrightarrow [m + 1]$, donnant une correspondance bijective entre les insertions de $[n + 1]$ dans $[m + 1]$ et les surjections de $[m]$ sur $[n]$. Si p est la section de σ définie par $p(i) = \sup \sigma^{-1}(i)$, $\tilde{\sigma}$ est définie par

$$\tilde{\sigma}(i) = p(i - 1) + 1.$$

Pour l'opération élimination des identités, nous avons considéré les surjections $\sigma: [m + 1] \twoheadrightarrow [n + 1]$. Soit $\hat{\sigma}: [n] \rightarrow [m]$ l'injection définie par $\hat{\sigma}(i) = \sup \sigma^{-1}(i)$, nous avons

$$f\sigma = C^{\hat{\sigma}}(f).$$

Il existe alors également une correspondance bijective définie pour $\delta: [n] \rightarrow [m]$ par $\hat{\delta}: [m + 1] \twoheadrightarrow [n + 1]$, où $\hat{\delta}(k) = 0$ pour $k \leq \delta(0)$, $\hat{\delta}(k) = i + 1$ pour $\delta(i) < k \leq \delta(i + 1)$ et $\hat{\delta}(k) = n + 1$ pour $k > \delta(n)$.

Si S est le foncteur qui à toute catégorie \mathcal{A} associe la catégorie simpliciale $S\mathcal{A}$, le foncteur Sd induit alors un foncteur $P: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Fonc}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ défini par

$$P([n]) = \underline{S[n + 1]}(0, n + 1) = \Delta[1]^n,$$

les morphismes faces d_i^n et dégénérescences s_i^n étant définies par,

$$d_i^n(\mu_1, \dots, \mu_n) = \begin{cases} (\mu_2, \dots, \mu_n) & \text{pour } i = 0 \\ (\mu_1, \dots, \sup(\mu_{i+1}, \mu_i), \dots, \mu_n) & \text{pour } 0 < i < n \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) & \text{pour } i = n \end{cases}$$

$$s_i^n(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\mu_1, \dots, \mu_i, 0, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n).$$

3. Pour un ensemble simplicial $X = (X_n, d_i^n, s_i^n)$, soit $X^* = (X_n, d_i^{*n}, s_i^{*n})$ l'ensemble simplicial défini par $d_i^{*n} = d_{n-i}^n$ et $s_i^{*n} = s_{n-i}^n$. Soit Δ^+ la sous-catégorie de Δ formée des surjections de Δ et soit $[n]/\Delta^+$ la catégorie comma des objets de Δ^+ sous $[n]$. Nous avons:

PROPOSITION 3 ([C]). *Les ensembles simpliciaux $\underline{S[n + 1]}(0, n + 1) = \Delta[1]^n$ et $\text{Ner}([n]/\Delta^+)^*$ sont identiques.*

Preuve. A $[n] \xrightarrow{\sigma^n} [n_m] \xrightarrow{\sigma^m} [n_{m-1}] \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma^1} [n_0]$ de $\text{Ner}([n]/\Delta^+)^*$ correspond de façon biunivoque le m -simplexe $v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_m$ de $\underline{S}[n+1](0, n+1)$ défini par:

si $\sigma^i = \sigma^{i+1} \dots \sigma^m \sigma^m : [n] \rightarrow [n_i]$, $v_i = (0, p_1 + 1, \dots, p_{n_i} + 1, n + 1)$ où $0 \leq p_1 < \dots < p_{n_i}$ est l'ensemble des $p \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ tels que $\sigma^i(p) \neq \sigma^i(p + 1)$. ■

De la proposition 2, nous déduisons alors assez directement la représentation suivante de $\underline{S}\mathcal{A}(A, B)$,

PROPOSITION 4 ([C]). *Soit \mathcal{A} une catégorie, pour A et B objets de A , l'ensemble simplicial $\underline{S}\mathcal{A}(A, B)$ est tel que*

$$\underline{S}\mathcal{A}(A, B) = \int^{n \in |\Delta|} \underline{S}[n+1](0, n+1) \times C(A, B)^n.$$

Preuve. Comme $\underline{S}[n+1](0, n+1) = \text{Ner}([n]/\Delta^+)^*$, à $x = [n_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^m} [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$ est associé la classe d'équivalence $[l(x)]$, dans $\int^n \text{Ner}([n]/\Delta^+)^* \times C(A, B)^n$, de $l(x) = ([n_m] \xrightarrow{\text{id}} [n_m] \xrightarrow{\delta^m} [n_{m-1}] \dots \xrightarrow{\delta^1} [n_0]; f)$. Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} x = [n_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^m} [n_m + 1] & \xrightarrow{f} & \mathcal{A} \\ \downarrow \sigma^0 & & \downarrow \sigma^m \\ x' = [n'_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^m} [n'_m + 1] & \xrightarrow{f'} & \mathcal{A} \end{array}$$

Comme de façon générale $\delta\sigma = \sigma'\delta'$ implique $\tilde{\delta}'\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma}\tilde{\delta}$ et comme $f'\sigma^m = C^{\tilde{\sigma}^m}(f') = f$, nous avons

$$\begin{aligned} \text{Ner}(\hat{\sigma}^m/\Delta^+)([n_m] \xrightarrow{\text{id}} [n_m] \xrightarrow{\delta^m} \dots \xrightarrow{\delta^1} [n_0]) = \\ [n'_m] \xrightarrow{\text{id}} [n'_m] \xrightarrow{\delta^m} \dots \xrightarrow{\delta^1} [n'_0]. \end{aligned}$$

On a alors $[l(x)] = [l(x')]$. L'application l induit une correspondance bijective dont l'inverse associe

$$\begin{aligned} [n_0 + 1] \xrightarrow{\tilde{\sigma}^1} \dots \xrightarrow{\tilde{\sigma}^m} [n_m + 1] \xrightarrow{C^{\tilde{\sigma}^m}(f)} \mathcal{A} \\ \text{à } ([n] \xrightarrow{\sigma^m} [n_m] \xrightarrow{\sigma^m} \dots \xrightarrow{\sigma^1} [n_0]; f). \end{aligned}$$

La compatibilité avec les relations d'équivalences est vérifiée sachant que pour $\mu = \delta\sigma$

$$\text{Ner } (\mu/\Delta^+)^*(\sigma^m, \sigma'^m, \dots, \sigma'^1) = (\bar{\sigma}^m\sigma, \bar{\sigma}'^m, \dots, \bar{\sigma}'^1)$$

où

$$\sigma'^1 \dots \sigma'^m \sigma^m \delta = \bar{\delta} \bar{\sigma}'^1 \dots \bar{\sigma}'^m \bar{\sigma}^m. \quad \blacksquare$$

Un diagramme homotopiquement cohérent d'une catégorie \mathcal{A} dans Top est défini par Vogt [V] comme la donnée d'un Top-foncteur d'une certaine catégorie topologique $W\mathcal{A}$ dans Top. Soit $Re \dashv \text{Sin}$ l'adjonction classique entre Top et $\mathcal{S} = \text{Fonc}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ où Re est le foncteur réalisation topologique d'un ensemble simplicial et Sin le foncteur complexe singulier. L'adjonction $Re \dashv \text{Sin}$ s'étend en une adjonction $Re_* \dashv \text{Sin}_*$ entre Top-Cat la catégorie des catégories topologiques et $\mathcal{S}\text{-Cat}$ la catégorie des catégories simpliciales. Nous avons alors l'équivalence suivante pour la détermination d'un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top,

$$\begin{array}{ccc} S\mathcal{A} \rightarrow \text{Top}, & \text{foncteur simplicial} \\ \updownarrow & \\ Re_* S\mathcal{A} = W\mathcal{A} \rightarrow \text{Top} & \text{top-foncteur.} \end{array}$$

Pour A et B , objets de \mathcal{A} , nous avons

$$\begin{aligned} Re \underline{S\mathcal{A}}(A, B) &= \int^m \Delta_m \times \underline{S\mathcal{A}}(A, B)_m \\ &= \int^m \Delta_m \times \int^n \underline{S[n+1]}(0, n+1)_m \times C(A, B)^n \\ &= \int^n \left(\int^m \Delta_m \times \underline{S[n+1]}(0, n+1)_m \right) \times \mathcal{A}^{n+1}(A, B) \\ &= \int^n [0, 1]^n \times \mathcal{A}^{n+1}(A, B) = \underline{W\mathcal{A}}(A, B). \end{aligned}$$

$W\mathcal{A}$ est ici la catégorie topologique de Vogt [V] exprimée par rapport à l'objet monoïde dans Top

$$\begin{aligned} * &\rightarrow [0, 1], \quad [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \\ * &\rightarrow 0 \quad (t, t') \rightarrow \sup(t, t'). \end{aligned}$$

EXEMPLE. Soit $x = (g_0, s_1, g_1, s_2, g_2, s_3, g_3, s_4, g_4)$ l'unique élément irréductible d'une classe d'équivalence $[f_0, t_1, f_1, \dots, t_n, f_n] \in \underline{W}\mathcal{A}(A, B)$ c'est-à-dire $g_i \neq id$ pour $0 \leq i \leq 4$ et $s_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq 4$.

Comme $[0, 1]^4 = Re \underline{S}[5](0, 5)$, les éléments du 4-cube $[0, 1]^4$ sont repérés par leur ordre dans la triangulation définie par $\underline{S}[5](0, 5)$; ainsi si (s_1, s_2, s_3, s_4) est tel que

$$0 < s_3 = s_1 < s_2 < s_4 < 1,$$

(s_1, s_2, s_3, s_4) est repéré dans la triangulation par $[\alpha, V] \in \int^n \Delta_n \times \underline{S}[5](0, 5)_n$ où $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \Delta_4$ et $V = (v_0 < v_1 < v_2 < v_3 < v_4) \in \underline{S}[5](0, 5)_4$

$$\begin{array}{l} s_1 = \alpha_4 \\ 0 = \alpha_3 \\ s_2 - s_1 = \alpha_2 \\ s_4 - s_2 = \alpha_1 \\ 1 - s_4 = \alpha_0 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & . & 4 & 5 \\ 0 & . & 2 & . & 4 & 5 \\ 0 & . & . & . & 4 & 5 \\ 0 & . & . & . & . & 5 \end{array} \right. \begin{array}{l} = v_4 \\ = v_3 \\ = v_2 \\ = v_1 \\ = v_0 \end{array}$$

Alors à $[x] = [f_0, t_1, f_1, \dots, t_n, f_n] \in \underline{W}\mathcal{A}(A, B)$ est associé l'élément suivant de $Re \underline{S}\mathcal{A}(A, B) = \int^n \Delta_n \times \underline{S}\mathcal{A}(A, B)_n$,

$$[(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4); (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)] = [(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4); (w_0, w_1, w_2, w_4)]$$

où (w_0, w_1, w_2, w_4) est le 3-simplexe de $\underline{S}\mathcal{A}(A, B)$ défini par

$$\begin{array}{ccccccc} w_4 A & \xrightarrow{g_0} & A_1 & \xrightarrow{g_1} & A_2 & \xrightarrow{g_2} & A_3 & \xrightarrow{g_3} & A_4 & \xrightarrow{g_4} & B \\ w_2 A & \longrightarrow & & & A_2 & \longrightarrow & & & A_4 & \longrightarrow & B \\ w_1 A & \longrightarrow & & & & \uparrow & & & & & B \\ w_0 A & \longrightarrow & & & & \uparrow & & & & & B \end{array}$$

REMARQUE. La définition première de la catégorie simpliciale $\underline{S}\mathcal{A}$ est donnée par la résolution standard d'une certaine comonade (F, ϕ, ψ) . Si nous prenons la comonade donnée par l'adjonction graphe sous-jacent, catégorie libre des chemins d'une catégorie, nous obtenons une catégorie simpliciale $\underline{S}^+\mathcal{A}$ qui admet la représentation suivante:

$$\underline{S}^+\mathcal{A}(A, B) = \int^{n \in |\Delta^+|} \underline{S}[n + 1](0, n + 1) \times C(A, B)^n.$$

En notant par G le foncteur catégorisation d'un ensemble simplicial, l'adjonction $G \dashv \text{Ner}$ nous donne une 2-catégorie $\Delta \mathcal{A} = G_* S^+ \mathcal{A}$ et $S^+ \mathcal{A} = \text{Ner}_* \Delta \mathcal{A}$. Il est connu que la donnée d'un 2-foncteur de $\Delta \mathcal{A}$ dans Cat détermine un op-lax-foncteur ou foncteur 2-cohérent de \mathcal{A} dans Cat . ([St, 2]).

II. Limite indexée et rectification.

1. L'un des problèmes posés depuis l'introduction des limites homotopiques par Bousfield–Kan dans le cas simplicial et par Vogt dans le cas topologique a été la nature de ces limites et le lien existant entre ces limites.

Ainsi Vogt travaillant avec l'objet monoïde dans Top

$$* \rightarrow [0, 1], \quad [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$* \rightarrow 1 \quad (t, t') \rightarrow t \cdot t'$$

montre que pour un foncteur $F: \mathcal{A} \rightarrow \text{Top}$, ses objets limites homotopiques pour F sont homéomorphes à la version topologique des objets limites de Bousfield–Kan $\underline{\text{holim}} F$ (resp. $\underline{\text{holim}} F$). Ces objets limites $\underline{\text{holim}} F$ et $\underline{\text{holim}} F$ font intervenir la structure simpliciale Top_s et les foncteurs cotensorisation $[-, T]$ et tensorisation $- \otimes T$. Pour $T \in |\text{Top}|$, et $S \in |\mathcal{S}|$, nous avons $[S, T] = \underline{\text{Top}}(\text{Re } S, T)$ et $S \times T = \text{Re}(S) \times T$, les objets limites étant définis par

$$\underline{\text{holim}} F = \int_A [\text{Ner}(\mathcal{A}/A), FA]$$

et

$$\underline{\text{holim}} F = \int^A \text{Ner}(A/\mathcal{A}) \otimes FA.$$

De même le lien au niveau fonctoriel des objets limites de Bousfield-Kan dans le cas simplicial et des limites 2-cohérentes (lax-limites) a été étudié par Thomason [T] et formalisé par Gray [G] en utilisant l'adjonction $G_* \dashv \text{Ner}_*$ entre $\mathcal{S}\text{-Cat}$ et 2-Cat .

Le cadre unificateur reliant les notions de limites simples et les notions de limites faisant intervenir des cohérences comme les lax-limites et les limites homotopiques, est celui des limites indexées [Bo-Ke].

Ainsi si \mathcal{A} est une catégorie simpliciale et $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ un foncteur simplicial on appelle foncteur ϕ -cône indexée d'un foncteur simplicial F de \mathcal{A}

dans une catégorie simpliciale \mathcal{B} le foncteur noté

$$[[\phi, F]]: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$$

défini par

$$[[\phi, F]]B = \int_A \mathcal{S}(\phi A, \underline{\mathcal{B}}(B, FA)).$$

Le foncteur simplicial F est dit admettre une ϕ -limite indexée si $[[\phi, F]]$ est représentable, c'est-à-dire s'il existe un objet, $\phi\text{-lim } F$, de \mathcal{B} tel que

$$[[\phi, F]]B = \underline{\mathcal{B}}(B, \phi\text{-lim } F).$$

En fait si \mathcal{B} est une catégorie simpliciale cotensorisée et admettant des limites simples (catégorie complète), alors

$$\phi\text{-lim } F = \int_A [\phi A, FA].$$

Notons que les ϕ -colimites indexées sont obtenues comme les ϕ -limites indexées dans \mathcal{B}^{op} .

Dans [St 1] Street associe à un op-lax-foncteur d'une catégorie \mathcal{A} dans Cat , un foncteur \hat{F} connu comme rectification d'Eilenberg Moore ou deuxième construction de Street ([T]), tel que $\underline{\lim} \hat{F} = 1 \underline{\lim} F$ (lax-limite de F).

En partant de cette idée de rectification d'un foncteur 2-cohérent nous appellerons, si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des catégories simpliciales et $\psi: \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ (resp. $\psi: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$) un foncteur simplicial, *rectification* (resp. *corectification*) *indexée par* ψ d'un foncteur simplicial F de \mathcal{B} dans Top_s , le foncteur simplicial \hat{F} (resp. \check{F}) de \mathcal{A} dans Top_s défini par:

$$\hat{F}A = \int_B [\psi(A, B), FB] \left(\text{resp } \check{F}A = \int^B \psi(B, A) \otimes FB \right).$$

Pour une catégorie \mathcal{A} , la donnée d'un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top correspondant à la donnée d'un foncteur simplicial de $S\mathcal{A}$ dans Top_s , le parallèle avec les diagrammes 2-cohérents conduit naturellement à la question de l'existence d'une indexation $X: S\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$, donnant les objets limites homotopiques de Vogt comme limites indexées; par exemple

$$\underline{\text{holim}}_{\nu} F = \int_{A \in |S\mathcal{A}|} [XA, FA] = X\text{-lim } F.$$

De même ce parallèle, conduit à la question de l'existence d'un foncteur simplicial $\psi: S\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$ tel que

$$\begin{aligned} \underline{\text{holim}}_{\nu} F &= \lim_{\leftarrow A} \hat{F}A = \lim_{\leftarrow A} \int_B [\psi(A, B), FB] \\ &= \int_B [\underline{\lim}_{\rightarrow A} \psi(A, B), FB]. \end{aligned}$$

Remarquons que pour un foncteur F d'une catégorie \mathcal{A} dans Top , nous avons un exemple immédiat de cette situation donnée par le holim F de Bousfield-Kan. En effet, soit $\psi: \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ le foncteur défini par $\psi(A, B)_n = \{f: [n + 2] \rightarrow \mathcal{A} \mid f(0) = A, f(n + 2) = B\}$, les morphismes faces d_i et dégénérescences s_i étant donnés respectivement par $f\delta_{i+1}$ et $f\sigma_{i+1}$. Nous avons pour \hat{F} la rectification de F indexée par ψ ,

$$\hat{F} = \text{Tot } R'(F) \text{ et } \underline{\lim} \hat{F} = \underline{\lim} \text{Tot } R'(F) = \underline{\text{holim}} F,$$

où

$$\text{Tot } R'(F) = \int_n [\Delta_n, R^n F],$$

$R'(F)$ étant la résolution cosimpliciale de F définie par $R^n(F)A = \prod_{A \rightarrow A_0 \dots \rightarrow A_n} F A_n$. Il est immédiat que $\underline{\lim}_{\rightarrow A} \psi(A, B) = \text{Ner}(\mathcal{A}/B)$.

2. Le problème d'une indexation pour un diagramme cohérent étant lié à l'existence d'un foncteur simplicial $\psi: \mathcal{A}^{\text{op}} \times S\mathcal{A}$ ou de $(S\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathcal{A}$ dans \mathcal{S} , l'idée première pour prendre en compte les cohérences est de considérer l'application qui à (A, B) associe $\underline{S\mathcal{A}}(A, B)$. Cette application n'est pas fonctorielle par rapport à \mathcal{A} en A et B par suite de l'effacement des identités qui peuvent apparaître par composition. Nous allons 'épaissir' $\underline{S\mathcal{A}}(A, B)$ de façon à avoir cette fonctorialité.

Pour cela soit $\underline{Z\mathcal{A}^d}(A, B)$ l'ensemble simplicial ayant pour m -simplexes les classes d'équivalences, des données de m processus d'insertion de parenthèses de $(n_m + 1)$ -uple $f = (f_0, \dots, f_{n_m}), [n_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^m} [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$, par la relation d'équivalence engendrée par:

$$(\delta^1, \dots, \delta^m; f) \text{ et } (\delta'^1, \dots, \delta'^m; f')$$

sont en relation si il existe, comme pour $\underline{Z\mathcal{A}}(A, B)$, un diagramme $(*)$ tel que

$$\sigma^m(p_m) = n_m \text{ et } \sigma'^m(p_m) = n'_m$$

(on a alors $\sigma^i(p_i) = n_i$ pour $i = 0, \dots, m - 1$).

Les opérateurs faces d_0, d_j, d_m et dégénéscences s_i associent respectivement $(\delta^2, \dots, \delta^m; f)$, $(\delta^1, \dots, \delta^{i+1}, \delta^i, \dots, \delta^m; f)$, $(\delta^1, \dots, \delta^{m-1}; f\delta_m)$ et $(\delta^1, \dots, \delta^i, id, \delta^{i+1}, \dots, \delta^m; f)$, modulo les relations, à $(\delta^1, \dots, \delta^m; f)$.

Comme pour $\underline{Z}\mathcal{A}^d(A, B)$, chaque classe d'équivalence de $\underline{Z}\mathcal{A}^d(A, B)$ à un unique représentant $[n_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^m} [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$ où ici $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n_m})$ est tel que $f_i \neq id$ pour $i < n_m$, f_{n_m} étant quelconque. L'ensemble de ces éléments forme alors l'ensemble des m -simplexes d'un ensemble simplicial $\underline{S}\mathcal{A}^d(A, B)$ identique à $\underline{Z}\mathcal{A}^d(A, B)$.

L'application ψ , définie par $\psi(A, B) = \underline{S}\mathcal{A}^d(A, B)$ est alors un foncteur simplicial $\psi: (S\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ où pour $h: B \rightarrow B'$, $\psi(A, h)$ associe $(\delta^1, \dots, \delta^m; (f_0, \dots, f_{n_m-1}, hf_{n_m}))$ à $x = (\delta^1, \dots, \delta^m; f) \in \underline{S}\mathcal{A}^d(A, B)_m$. On obtient de même un foncteur simplicial $\psi: \mathcal{A}^{op} \times S\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ en considérant l'ensemble simplicial $\underline{Z}\mathcal{A}^s(A, B)$ obtenu à partir des diagrammes $(*)$ tels que $\sigma^m(1) = 1$ et $\sigma'^m(1) = 1$.

Soit Δ^d la sous-catégorie de Δ ayant pour morphismes les $\mu: [n] \rightarrow [p]$ avec $\mu(n) = p$. Nous avons

PROPOSITION 1. *Soit \mathcal{A} une catégorie, pour A et B objets de \mathcal{A} , l'ensemble simplicial $\underline{S}\mathcal{A}^d(A, B)$ est tel que*

$$\underline{S}\mathcal{A}^d(A, B) = \int^{n \in |\Delta^d|} \underline{S}[n + 1](0, n + 1) \times C(A, B)^n.$$

Preuve. D'après les Propositions 2 et 3 du chapitre précédent, un m -simplexe de $\underline{S}[n + 1](0, n + 1)$ correspond à la donnée de la classe d'équivalence $[x_n]$ d'un élément $x_n = [n_0 + 1] \rightarrow \dots \rightarrow [n_m + 1] \xrightarrow{f} [n + 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(n_m + 1) = n + 1$. Soit $y_n \in C(A, B)^n$, $y_n: [n + 1] \rightarrow \mathcal{A}$. De l'identité entre $\underline{S}\mathcal{A}^d(A, B)$ et $\underline{Z}\mathcal{A}^d(A, B)$, à $([x_n], y_n)$ est associé la classe de $z = [n_0 + 1] \rightarrow \dots \rightarrow [n_m + 1] \xrightarrow{y_n f} \mathcal{A}$. Sachant que si $y_n = C^\mu(y'_p)$, $\mu = \delta\sigma: [p] \rightarrow [n]$ appartenant à Δ^d , on a $C^\mu(y'_p) = y'_p \tilde{\sigma} \tilde{\delta}$, il est immédiat de voir que la classe de z , ne dépend que de la classe de $([x_n], y_n)$. L'application ainsi définie donne l'isomorphisme cherchée, dont l'inverse associe, à la classe de $[n_0 + 1] \rightarrow \dots \rightarrow [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$, la classe de $([x], y)$ où $x = [n_0 + 1] \rightarrow \dots \rightarrow [n_m + 1] \xrightarrow{id} [n_m + 1]$ et $y: [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$. ■

COROLLAIRE. *Soit \mathcal{A} une catégorie, $\psi: (S\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ le foncteur simplicial défini par $\psi(A, B) = \underline{S}\mathcal{A}^d(A, B)$ et soit \check{F} la corectification indexée par ψ d'un diagramme homotopiquement cohérent F de \mathcal{A} dans Top .*

Alors, pour B objet de \mathcal{A} , $\check{F}B$ admet la description suivante: $\check{F}B$ est le quotient de l'espace topologique $\coprod_A \coprod_n [0, 1]^n \times \mathcal{A}^{n+1}(A, B) \times FA$ par la

relation d'équivalence telle que si, $[f_0, t_1, f_1, \dots, t_n, f_n; x]$ est la classe d'équivalence de $(f_0, t_1, f_1, \dots, t_n, f_n; x)$,

$$\begin{aligned}
 & [f_0, t_1, f_1, \dots, t_n, f_n; x] \\
 = & \begin{cases} [f_1, t_2, \dots, t_n, f_n; x] & \text{si } f_0 = id \\ [f_0, t_1, \dots, \sup(t_i, t_{i+1}), \dots, t_n, f_n; x] \\ & \text{si } f_i = id \quad 1 \leq i < n \\ [f_0, t_1, \dots, f_i f_{i-1}, \dots, t_n, f_n; x] & \text{si } t_i = 0 \\ [f_i, t_{i+1}, \dots, t_n, f_n; F_{AA_i}[f_0, t_1, \dots, t_{i-1}, f_{i-1}; x]] & \text{si } t_i = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Preuve. Par définition de la corectification indexée par ψ , on a

$$\begin{aligned}
 \check{F}B &= \int^A \underline{S\mathcal{A}^d}(A, B) \otimes FA \\
 &= \int^A Re \left(\int^{n \in |\Delta^d|} \underline{S[n+1]}[0, n+1] \times C(A, B)^n \right) \times FA \\
 &= \int^A \int^{n \in |\Delta^d|} [0, 1]^n \times \mathcal{A}^{n+1}(A, B) \times FA.
 \end{aligned}$$

Une simple étude de ces cofins nous donne la description présentée pour $\check{F}B$. ■

PROPOSITION 2. *La limite directe d'homotopie de Vogt, d'un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top exprimée par rapport à l'objet monoïde*

$$\begin{aligned}
 * &\rightarrow [0, 1], \quad [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \\
 (*) & \\
 * &\rightarrow 0 \quad (t, t') \rightarrow \sup(t, t')
 \end{aligned}$$

est une colimite simpliciale indexée par le foncteur simplicial

$$\varinjlim_B \underline{S\mathcal{A}^d}(-, B): (S\mathcal{A})^{op} \rightarrow \mathcal{S}.$$

Preuve. D'après le corollaire précédent, $\varinjlim_B \check{F}B$ est le quotient de l'espace topologique $\coprod_n \coprod_{A,B} [0, 1]^n \times \mathcal{A}^n(A, B) \times \check{F}A$ par la relation d'équivalence

telle que si, $[f_0, t_1, f_1, \dots, f_{n-1}, t_n; x]$ est la classe d'équivalence de $(f_0, t_1, f_1, \dots, f_{n-1}, t_n; x)$,

$$\begin{aligned}
 & [f_0, t_1, \dots, f_{n-1}, t_n; x] \\
 &= \begin{cases} [f_1, t_2, \dots, f_{n-1}, t_n; x] \text{ si } f_0 = id \\ [f_0, t_1, \dots, \sup(t_i, t_{i+1}), \dots, t_n; x] \\ \quad \text{si } f_i = id, \quad 1 \leq i \leq n - 1 \\ [f_0, t_1, \dots, f_i f_{i-1}, \dots, t_n; x] \text{ si } t_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n - 1 \\ [f_0, t_1, \dots, f_{n-2}, t_{n-1}; x] \text{ si } t_n = 0 \\ [f_i, t_{i+1}, \dots, f_{n-1}, t_n; F_{AA_i}[f_0, t_1, \dots, t_{i-1}, f_{i-1}; x]] \text{ si } t_i = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient la description de l'objet limite directe d'homotopie de Vogt [V], $\underline{\text{holim}}_\nu F$, exprimée par rapport à l'objet monoïde $(*)$. On a donc,

$$\underline{\text{holim}}_\nu F = \varinjlim_B \check{F}B = \int^A (\varinjlim_B \underline{S\mathcal{A}^d}(A, B)) \otimes FA. \quad \blacksquare$$

Par dualité, à toute catégorie \mathcal{A} est associée un foncteur simplicial $\psi: \mathcal{A}^{\text{op}} \times S\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ où, pour A et B objets de \mathcal{A} , $\psi(A, B) = \underline{S\mathcal{A}^g}(A, B)$ est l'ensemble simplicial obtenu à partir de l'ensemble simplicial $\underline{Z\mathcal{A}^g}(A, B)$. A tout diagramme cohérent F de A dans Top est alors associé un foncteur rectification $\hat{F}: \mathcal{A} \rightarrow \text{Top}$ défini par

$$\hat{F}A = \int_B [\underline{S\mathcal{A}^g}(A, B), FB],$$

tel que

$$\underline{\text{holim}}_\nu F = \varinjlim_A \hat{F}A = \int_B [\varinjlim_A \underline{S\mathcal{A}^g}(A, B), FB].$$

III. Comparaison

1. Pour un foncteur simplicial F d'une catégorie simpliciale \mathcal{A} dans une catégorie simpliciale \mathcal{B} cocomplète et tensorisée (ou complète et cotentorisée), la forme généralisée des limites de Bousfield-Kan, introduite dans [B-C], est définie par

$$\underline{\text{holim}} F = \int^{A \in |\mathcal{A}|} DYA \otimes FA \quad (\text{ou } \underline{\text{holim}} F = \int_{A \in |\mathcal{A}^{\text{op}}|} [DYA, FA]);$$

DX est la diagonale d'un bisimplicial X telle que $(DX)_n = X_{n,n}$ et $(DX)_\mu = X_{\mu,\mu} : X_{n,n} \rightarrow X_{m,m}$ pour $\mu: [m] \rightarrow [n]$, et $Y(-): \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fonc}(\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ est le foncteur simplicial qui associe à A objets de \mathcal{A} ,

$$(YA)_{n,-} = \coprod_{A_0, \dots, A_n} \underline{\mathcal{A}}(A, A_0) \times \dots \times \underline{\mathcal{A}}(A_{n-1}, A_n).$$

Il est clair que si \mathcal{A} est simplement une catégorie, nous avons l'indexation des limites de Bousfield-Kan, $DYA \stackrel{\sim}{=} \text{Ner}(A/\mathcal{A})$.

Si nous partons d'un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top , c'est-à-dire d'un foncteur simplicial F de $S\mathcal{A}$ dans Top_* , soit $X(-, -): (S\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Fonc}(\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ le foncteur simplicial tel que pour A et B objets de \mathcal{A} , $X(A, B)$ est le bisimplicial défini par

$$X(A, B)_{n,-} = \coprod_{A_0, \dots, A_n} \underline{S\mathcal{A}}(A, A_0) \times \dots \times \underline{S\mathcal{A}}(A_{n-1}, A_n) \times \mathcal{A}(A_n, B).$$

Les morphismes faces $d_i'': X(A, B)_{n,m} \rightarrow X(A, B)_{n,m-1}$ associent à (x_0, \dots, x_n, f_n) le $(n, m - 1)$ -simplexe $(d_i x_0, \dots, d_i x_n, f_n)$ pour $0 \leq i \leq m$ et $d_i': X(A, B)_{n,m} \rightarrow X(A, B)_{n-1,m}$ associent le $(n - 1, m)$ -simplexe $(x_0, \dots, x_{i+1} * x_i, \dots, x_n, f_n)$ pour $0 \leq i < n$. Pour d_n' , soit $\pi: S\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ le foncteur simplicial qui à un m -simplexe $x = (\delta^1, \dots, \delta^m; (f_0, \dots, f_m))$ de $\underline{S\mathcal{A}}(A, B)$ associe $\pi x = f_m \cdot \dots \cdot f_0$; alors par d_n' est associé le $(n - 1, m)$ -simplexe

$$(x_0, \dots, x_{n-1}, f_n \pi x_n).$$

Pour les morphismes dégénérescences nous avons

$$s_i''(x_0, \dots, x_n, f_n) = (s_i x_0, \dots, s_i x_n, f_n)$$

$$s_i'(x_0, \dots, x_n, f_n) = (x_0, \dots, x_i, {}^1A_i, x_{i+1}, \dots, x_n, f_n).$$

Soit $\check{F}_D: \mathcal{A} \rightarrow \text{Top}$ la corectification de F indexée par $DX(-, -)$ de $(S\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathcal{A}$ dans $\text{Fonc}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$, nous avons

$$\begin{aligned} \check{F}_D B &= \int^A DX(A, B) \otimes FA \\ &= \int^A \left(\int^n \Delta[n] \times \coprod_{A_0, \dots, A_n} \underline{S\mathcal{A}}(A, A_0) \times \dots \times \underline{S\mathcal{A}}(A_{n-1}, A_n) \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{A}(A_n, B) \right) \otimes FA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int^n \Delta_n \times \coprod_{A_0, \dots, A_n} \left(\int^A \underline{W\mathcal{A}}(A, A_0) \times \dots \times \underline{W\mathcal{A}}(A_{n-1}, A_n) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathcal{A}(A_n, B) \times FA \right) \\
 &= \int^n \Delta_n \times \coprod_{A_0, \dots, A_n} FA_0 \times \underline{W\mathcal{A}}(A_0, A_1) \times \dots \times \underline{W\mathcal{A}}(A_{n-1}, A_n) \\
 &\quad \times \mathcal{A}(A_n, B),
 \end{aligned}$$

où $\int^A \underline{W\mathcal{A}}(A, A_0) \times FA = \int^A \underline{S\mathcal{A}}(A, A_0) \otimes FA = FA_0$.

Le foncteur $\check{F}_D: \mathcal{A} \rightarrow \text{Top}$ apparaît comme le foncteur extension $\pi_* F$ de Segal [S] du foncteur topologique $F: W\mathcal{A} \rightarrow \text{Top}$, le long de $\pi: W\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. La limite directe de ce foncteur \check{F}_D nous donne l'objet $\underline{\text{holim}} F$ généralisé, puisque $\varinjlim_B DX(A, B) = DYA$ et

$$\begin{aligned}
 \varinjlim_B \check{F}_D B &= \int^A \varinjlim_B DX(A, B) \otimes FA \\
 &= \int^A DYA \otimes FA = \underline{\text{holim}} F.
 \end{aligned}$$

2. Pour l'objet de Vogt, $\underline{\text{holim}}_\nu F$, de ce diagramme cohérent, nous avons vu que l'indexation est obtenue à partir du foncteur simplicial $\underline{S\mathcal{A}}^d(-, -): (S\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$. Cette indexation est alors reliée à ce foncteur simplicial $X(-, -)$ par l'intermédiaire de l'objet total ∇X , d'un bisimplicial X , considéré par Artin et Mazur dans [A-M]. Cet objet total, non utilisé à notre connaissance depuis son introduction, est défini de la façon suivante:

Pour un ensemble bisimplicial X , ∇X est l'ensemble simplicial ayant pour ensemble des m -simplexes le sous-ensemble de $\prod_{p+q=m} X_{p,q}$, formé des éléments (y_0, y_1, \dots, y_m) tels que pour $y_p \in Y_{p,m-p}$

$$d_0'' y_p = d_{p+1}' y_{p+1},$$

$d_i': X_{p,q} \rightarrow X_{p-1,q}$ et $d_i'': X_{p,q} \rightarrow X_{p,q-1}$ étant les morphismes faces de X .

Les morphismes faces D_j et dégénérescences S_j de ∇X sont définis respectivement par,

$$D_j y = (d_j'' y_0, d_{j-1}'' y_1, \dots, d_1'' y_{j-1}, d_j' y_{j+1}, d_j' y_{j+2}, \dots, d_j' y_n)$$

$$S_j y = (s_j'' y_0, s_{j-1}'' y_1, \dots, s_0'' y_j, s_j' y_j, s_j' y_{j+1}, \dots, s_j' y_n),$$

$s'_j: X_{p,q} \rightarrow X_{p+1,q}$ et $s''_j: X_{p,q} \rightarrow X_{p,q+1}$ étant les morphismes dégénérescences de X .

Nous avons pour une catégorie \mathcal{A}

PROPOSITION 1. *Les foncteurs simpliciaux de $(S\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathcal{A}$ dans \mathcal{S} qui, à (A, B) objets de \mathcal{A} associent respectivement $\nabla X(A, B)$ et $S\underline{\mathcal{A}}^d(A, B)$ sont des foncteurs naturellement équivalents.*

Preuve. L'isomorphisme naturelle en A et B de $\nabla X(A, B)$ sur $S\underline{\mathcal{A}}^d(A, B)$ admet la description suivante:

Soit x un m -simplexe de $S\underline{\mathcal{A}}^d(A, B)$

$$x = [n_0 + 1] \xrightarrow{\delta^1} [n_1 + 1] \xrightarrow{\delta^2} \cdots \xrightarrow{\delta^m} [n_m + 1] \xrightarrow{f} \mathcal{A},$$

où $\delta^1, \dots, \delta^m$ sont des processus d'insertion de parenthèses, f un foncteur de $[n_m + 1]$ dans \mathcal{A} , avec $f(0) = A, f(n_m + 1) = B$ et $f_i = f(i, i + 1) \neq id$ pour $i = 0, \dots, n_m - 1$. On pose $A_i = f\delta^m \dots \delta^{i+1}(n_i)$.

On associe $y_0 \in S\underline{\mathcal{A}}(A, A_0)_m \times \mathcal{A}(A_0, B)$ qui est

$$([n_0] \xrightarrow{\delta^1} [\delta^1(n_0)] \xrightarrow{\delta^2} [\delta^2\delta^1(n_0)] \xrightarrow{\cdots} \xrightarrow{\delta^m} [\delta^m \dots \delta^1(n_0)] \xrightarrow{f} \mathcal{A}) \times \dots f(\delta^m \dots \delta^1(n_0), n_m + 1);$$

En désignant par $[n'] \hookrightarrow [n]$, l'inclusion $\{0, 1, \dots, n'\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$, par abus de notation nous notons encore par δ la restriction de $[n']$ dans $[\delta(n')]$. Pour définir les autres éléments de $\nabla X(A, B)_m$, introduisons la notation

$$z_q = [n_q] \xrightarrow{\delta^{q+1}} [\delta^{q+1}(n_q)] \xrightarrow{\cdots} \xrightarrow{\delta^m} [\delta^m \dots \delta^{q+1}(n_q)] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$$

et à un diagramme commutatif de processus d'insertion de parenthèses

$$\begin{array}{ccccccc} v = [p_0 + 1] & \xrightarrow{\delta^1} & [p_1 + 1] & \xrightarrow{\cdots} & \xrightarrow{\delta^m} & [p_m + 1] & \searrow f \\ & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \searrow \\ u = [q_0 + 1] & \xrightarrow{\cdots} & [q_1 + 1] & \xrightarrow{\cdots} & \xrightarrow{\cdots} & [q_m + 1] & \nearrow \end{array} \mathcal{A}$$

associons v/u , tel que $(v/u) * u = v$,

$$v/u = [p_0 - q_0] \xrightarrow{\delta^1} [p_1 - q_1] \xrightarrow{\cdots} \xrightarrow{\delta^m} [p_m - q_m] \xrightarrow{\bar{f}} \mathcal{A}$$

avec $\bar{\delta}'(i) = \delta'(i + q_{j-1} + 1) - q_j - 1$ et $\bar{f}(i) = f(i + \delta^m \dots \delta^1(q_0))$.

On associe, $y_1 \in \underline{S\mathcal{A}}(A, A_0)_{m-1} \times \underline{S\mathcal{A}}(A_0, A_1)_{m-1} \times \mathcal{A}(A_1, B)$,

$$y_1 = (x_0, x_1, f_1)$$

avec

$$x_1 * x_0 = [n_1] \xrightarrow{\delta^2} [\delta^2(n_1)] \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta^m} [\delta^m \dots \delta^2(n_1)] \xrightarrow{f} \mathcal{A}$$

$$x_0 = [\delta^1(n_0)] \xrightarrow{\delta^2} [\delta^2 \delta^1(n_0)] \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta^m} [\delta^m \dots \delta^2 \delta^1(n_0)] \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{A},$$

$$x_1 = [n_1 - \delta^1(n_0)] \xrightarrow{\delta^2} [\delta^2(n_1) - \delta^2 \delta^1(n_0)] \longrightarrow \cdots \\ \xrightarrow{\delta^m} [\delta^m \dots \delta^2(n_1) - \delta^m \dots \delta^2 \delta^1(n_0)] \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{A}$$

et

$$f_1 = f(\delta^m \dots \delta^2(n_1), n_m + 1).$$

Pour le cas général, on associe

$$y_p \in \underline{S\mathcal{A}}(A, A_0)_{m-p} \times \cdots \times \underline{S\mathcal{A}}(A_{p-1}, A_p)_{m-p} \times \mathcal{A}(A_p, B),$$

$$y_p = (x_0^p, \dots, x_p^p, f_p)$$

avec

$$x_0^p = d_0''^p z_0, x_1^p = d_0''^{p-1} z_1 / d_0''^p z_0, \dots$$

$$x_q^p = d_0''^{p-q} z_q / d_0''^{p-(q-1)} z_{q-1}, \dots, x_p^p = z_p / d_0'' z_{p-1}$$

et

$$f_p = f(\delta^m \dots \delta^{p+1}(n_p), n_m + 1).$$

On définit de même les formules en sens inverse; l'isomorphisme est immédiat. ■

De cette proposition nous obtenons la caractéristique suivante pour la limite directe d'homotopie de Vogt d'un diagramme cohérent.

PROPOSITION 2. Soit \mathcal{A} une catégorie, F un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top et soit $X: (S\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Fonc}(\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ le foncteur simplicial défini par

$$X(A, B)_{n,-} = \coprod_{A_0, \dots, A_n} \underline{S\mathcal{A}}(A, A_0) \times \dots \times \underline{S\mathcal{A}}(A_{n-1}, A_n) \times \mathcal{A}(A_n, B);$$

On a,

$$\underline{\text{holim}}_{\nu} F = \int^A (\varinjlim_B \nabla X(A, B)) \otimes FA.$$

Par dualité, nous obtenons pour les limites inverses d'homotopie de diagrammes cohérents,

PROPOSITION 2*. Soit \mathcal{A} une catégorie, F un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top et soit $X: \mathcal{A}^{\text{op}} \times S\mathcal{A} \rightarrow \text{Fonc}(\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ le foncteur simplicial défini par,

$$X(A, B)_{n,-} = \coprod_{A_0, \dots, A_n} \mathcal{A}(A, A_0) \times \underline{S\mathcal{A}}(A_0, A_1) \times \dots \times \underline{S\mathcal{A}}(A_n, B).$$

On a

$$\underline{\text{holim}}_{\nu} F = \int_B [\varprojlim_A \nabla X(A, B), FB].$$

3. Dans [V] Vogt a établi, dans le cas fonctoriel, une comparaison entre ses objets limites homotopiques et les objets limites de Bousfield-Kan. Nous allons mettre en évidence ici un morphisme de comparaison entre $\underline{\text{holim}} F$ en $\underline{\text{holim}}_{\nu} F$, pour un diagramme cohérent F . Cette comparaison se déduit d'un morphisme de comparaison naturel $\phi: DX \rightarrow \nabla X$ pour un bisimplicial X : pour

$$x \in X_{m,m}, \phi(x) = (x_0, \dots, x_m)$$

où

$$x_p \in X_{p,m-p}$$

et

$$x_p = d_0'' \dots d_0'' d_{p+1}' \dots d_m' x.$$

Ce morphisme ϕ , est montré dans [Z], pour être une équivalence d'homopopie faible. Cela conduit, pour un travail ultérieur, à une forte probabilité de l'identité d'homotopie de $\underline{\text{holim}} F$ et $\underline{\text{holim}}_{\nabla} F$.

Pour le bisimplicial $X(A, B)$, le morphisme simplicial

$$\phi(A, B): DX(A, B) \rightarrow \nabla X(A, B)$$

induit une transformation naturelle $\phi_*: \check{F}_D \rightarrow \check{F}_{\nabla}$. Nous obtenons alors par passage à la limite de ϕ_* le morphisme de comparaison $\underline{\text{lim}} \phi_*: \underline{\text{lim}} \check{F}_D \rightarrow \underline{\text{lim}} \check{F}_{\nabla}$ qui admet la description suivante,

PROPOSITION 3. *Soit \mathcal{A} une catégorie et F un diagramme homotopiquement cohérent de \mathcal{A} dans Top. Il existe un morphisme de comparaison de $\underline{\text{holim}} F$ dans $\underline{\text{holim}}_{\nabla} F$ qui, à $[u_1 \leq \dots \leq u_n; X_1, \dots, X_n; x]$ de $\underline{\text{holim}} F$ où $(u_1 \leq \dots \leq u_n) \in \Delta_n$, $X_i = [f_0^i, t_1, f_1^i, \dots, t_n, f_n^i] \in \underline{W}\mathcal{A}(A_{i-1}, A_i)$ et $x \in FA_0$, associe l'élément $[y_1, \dots, y_i, \dots, y_n; x]$ de $\underline{\text{holim}}_{\nabla} F$ où $y_i = \{f_0^i, \inf(1 - u_i, t_1), \dots, \inf(1 - u_i, t_n), f_n^i, (1 - u_i)\}$.*

REMARQUE. Si \mathcal{A} est une 2-catégorie, Street dans [St,2] montre que les lax-limites d'un 2-foncteur de \mathcal{A} dans Cat sont des limites indéxées par le foncteur $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \text{Cat}$, défini par $\phi A = \pi(\mathcal{A} // A)$ la catégorie composante par chemins de la 2-catégorie lax-comma. Pour F , un foncteur simplicial d'une catégorie simpliciale \mathcal{A} dans une catégorie simpliciale \mathcal{B} , $\underline{\text{holim}} F$ s'obtient par l'indexation $DY(-): \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$ qui généralise l'indexation intervenant dans les limites de Bousfield-Kan. Dans [G], Gray partant du travail de Thomason [T] considère l'indexation

$$\text{Ner}_* \pi(- // G_* \mathcal{A}): \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S},$$

de façon à lier lax-limite d'un 2-foncteur et limite d'homotopie d'un foncteur simplicial, en utilisant l'adjonction $G_* \dashv \text{Ner}_*$: L'application du foncteur catégorisation G à DYA , nous donne

$$GDYA = \int^{p \leq 2} [p] \times \coprod_{A_0, \dots, A_p} G \underline{\mathcal{A}}(A, A_0) \times \dots \times G \underline{\mathcal{A}}(A_{p-1}, A_p).$$

On obtient alors un morphisme de comparaison de DYA dans $\text{Ner}_* \pi(A // G_* \mathcal{A})$, d'où un morphisme de comparaison de $\underline{\text{holim}} F$ dans $\underline{\text{holim}}_G F$ la limite directe d'homotopie de Gray.

Remerciements

Je voudrais remercier M. Zisman pour les entretiens et communications sur ce sujet.

Bibliographie

- [A-M] M. Artin et B. Mazur: On the Van Kampen Theorem. *Topology* Vol. 5 (1966) 179–189.
- [B-C] D. Bourn et J.M. Cordier: A general formulation of homotopy limit. *J. Pure Appl. Algebra* 29 (1983) 129–141.
- [B-K] A.K. Bousfield et D.M. Kan: *Homotopy limits, completions and localization. Lecture Notes in Math.* 304. Springer (1972).
- [Bo-Ke] F. Borceux et G.M. Kelly: A notion of limit for enriched categories. *Bull. Australian Math. Soc.* 12 (1975) 49–72.
- [C] J. M. Cordier: Sur la notion de diagramme homotopiquement cohérent. *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIII 1 (1982) 93–112.
- [D-K] W.G. Dwyer et D.M. Kan: Simplicial localizations of categories. *J. Pure Appl.* 17 (1980) 267–284.
- [E-H] D.A. Edwards et H.M. Hastings: *Cech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology. Lecture Notes in Math.* 542. Springer (1976).
- [G] J.W. Gray: Closed categories, lax limits and homotopy limits. *J. Pure Appl. Algebra* 19 (1980) 127–158.
- [S] G.B. Segal: Categories and cohomology theories. *Topology* Vol. 13 (1974) 293–312.
- [St] R. Street: (1) Two constructions on lax functors. *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XIII3 (1972) 217–264; (2) Limits indexed by category-valued 2-functors. *J. Pure Appl. Algebra* 8 (1976) 149–181.
- [T] R.W. Thomason: Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 85 (1979) 91–109.
- [V] R.M. Vogt: Homotopy limits and colimits. *Math. Z.* 134 (1973) 11–52.
- [Z] M. Zisman: Comparaison de deux diagonales. Communication personnelle (1983).