

# COMPOSITIO MATHEMATICA

C. SABBAH

## **Proximité évanescente. I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$ -module**

*Compositio Mathematica*, tome 62, n° 3 (1987), p. 283-328

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1987\\_\\_62\\_3\\_283\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__62_3_283_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Proximité évanescence

### *I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$ -Module*

C. SABBAH

*Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau cedex, France*

Received 17 July 1986; accepted 10 October 1986

**Key words:** Système différentiel, filtration, éventail, polynôme de Bernstein, polyèdre de Newton.

**Résumé.** Dans cet article, nous entamons une étude des cycles évanescents à plusieurs variables. Nous considérons sur les  $\mathcal{D}$ -modules cohérents des multi-filtrations associées à des hypersurfaces lisses en position générale et montrons à leur propos un théorème de finitude. Nous étudions les relations entre les différents polynômes de Bernstein associés à la situation et introduisons la notion de polyèdre de Newton–Bernstein. Enfin, nous introduisons la notion de bonne multi-filtration associée à ces hypersurfaces et montrons que les  $\mathcal{D}$ -modules holonomes provenant de la géométrie algébrique admettent une telle multi-filtration.

**Abstract.** In this paper, we begin the study of vanishing cycles with many variables. We consider on coherent  $\mathcal{D}$ -modules some multi-filtrations associated with hypersurfaces in general position and we show for these a finiteness theorem. We study the relations between various Bernstein polynomials related to the situation and introduce the notion of Newton–Bernstein polyhedron. Then we introduce the notion of a good canonical multi-filtration associated with these hypersurfaces and we show that the holonomic  $\mathcal{D}$ -modules which come from algebraic geometry admit such a multi-filtration.

## Table des matières

Introduction	284
1. Cycles évanescents et $\mathcal{D}$ -modules	
1.1. La bonne filtration canonique relative à une hypersurface	286
1.2. Comportement par image inverse	289
1.3. Cycles évanescents itérés	289
2. Bonnes $\kappa$ -filtrations	
2.0. Notion de bonne filtration	291
2.1. Notion de bonne $\kappa$ -filtration	293
2.2. Eventails adaptés à une bonne $\kappa$ -filtration	297
2.3. Morphismes stricts et transversalité	301
2.4. Eventails et polyèdres de Newton	303
2.5. La filtration polaire	304

3. Bonnes $\kappa$ -filtrations pour les $\mathcal{D}$ -modules holonomes	
3.1. Polynômes de Bernstein	306
3.2. Polyèdres de Newton–Bernstein	307
3.3. La bonne $\kappa$ -filtration canonique	310
3.4. Un exemple	315
Appendice (en collaboration avec F. Castro)	
A.0. Aplatissement de $\mathcal{D}_{X/S}$ -modules cohérents	320
A.1. Théorème de finitude	323
A.2. Application à l'irrégularité	325

## Introduction

Les résultats de cet article ont été motivés par les problèmes suivants, qui ne seront cependant pas abordés ici. Si  $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  est un germe de fonction analytique à singularité isolée, la cohomologie de la fibre de Milnor  $F$  de  $f$  en 0 est munie d'une structure de Hodge mixte polarisée. Cette structure peut être décrite à l'aide du système de Gauss-Manin de  $f$  ([Va<sub>1</sub>], [M.Sa<sub>1</sub>], [Sch-St], [Ph<sub>2</sub>]). La polarisation n'est pas donnée par la forme d'intersection (qui peut être dégénérée) mais par le "logarithme de la forme de Seifert" qui exprime la dualité microlocale, ou "Residue Pairing" ([K.Sa], [Ph<sub>3</sub>], [M.Sa<sub>2</sub>]). La filtration par le poids est la filtration associée à la partie nilpotente de la monodromie (avec un décalage pour la valeur propre 1). Le fait qu'il existe une telle structure est dû à la compacité du support de  $\Phi_f(\mathbb{C})$ , complexe des cycles évanescents associé à  $f$ , puisqu'ici ce support est ponctuel (singularité isolée).

Si  $f$  n'est pas à singularité isolée,  $H^p(F, \mathbb{C})$  porte aussi une structure de Hodge mixte dont la description est abstraite ([duB], [Na]). Ici, il faut considérer le complexe  $i^*\Phi_f(\mathbb{C})$ , où  $i$  est l'inclusion de l'origine dans  $f^{-1}(0)$ , pour obtenir un complexe à support ponctuel. On ne peut pas espérer une description aussi claire de la structure de Hodge mixte: en appliquant  $i^*$  on a perdu et la perversité et l'autodualité.

Pour étudier cette cohomologie, on peut reprendre la méthode de Lê D. T. ([Lê]): On choisit une forme linéaire générique  $g: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  et on s'intéresse au groupe  $H^p(F, F \cap g^{-1}(0))$ . Ce groupe s'interprète comme l'unique groupe de cohomologie du complexe  $\Phi_g(\Psi_f(\mathbb{C}))$  (en fait c'est plutôt  $H^p(F, F \cap g^{-1}(\tau))$  pour  $\tau$  pas trop petit, mais la dimension est la même). Maintenant, ce complexe est pervers, autodual (à un décalage près), et à support ponctuel. Sa cohomologie doit porter une structure de Hodge mixte polarisée de laquelle on peut espérer donner une description comme dans le

cas d'une singularité isolée. Elle est munie de deux monodromies  $T_f$  et  $T_g$ . La filtration par le poids doit se construire à partir de la filtration monodromique *relative* de  $N_g$  par rapport à  $N_f$  (parties nilpotentes de  $T_f$  et  $T_g$  respectivement), si une telle filtration existe (voir [De<sub>2</sub>], [C–K], [St–Z] pour la notion de filtration monodromique relative).

De plus Lê D. T. a introduit une filtration de ce groupe  $H^n(F, F \cap g^{-1}(\tau))$  dite filtration polaire qui est indexée par les rapports des multiplicités d'intersection des branches du discriminant de  $(f, g)$  avec les axes  $\{f = 0\}$  et  $\{g = 0\}$ . Il est probable que la filtration monodromique relative a une structure assez simple: sur chaque gradué polaire, ce devrait être la filtration monodromique de tout endomorphisme nilpotent qui s'écrit sur ce gradué sous la forme  $aN_f + b(N_f + rN_g)$  avec  $a$  et  $b$  strictement positifs, à l'instar de [De<sub>2</sub>], [C–K]. En fait on doit même avoir une description de la filtration monodromique relative elle-même. Je considérerai ces questions dans un article suivant.

Enfin, en ce qui concerne la partie semi-simple de la monodromie, B. Teissier a conjecturé ([T<sub>1</sub>]) une inégalité (si  $f$  est à singularité isolée) entre l'exposant d'Arnold de  $f$  et celui de  $f_{|g^{-1}(0)}$  qui fait intervenir le plus grand des rapports ci-dessus, inégalité montrée en grande partie par F. Loeser ([Lo]) en utilisant le théorème de semi-continuité du spectre ([St], [Va<sub>2</sub>]).

Dans cet article, je rappelle d'abord le lien entre  $\mathcal{D}$ -modules et cycles évanescents, lien établi par B. Malgrange et M. Kashiwara. Ainsi, à tout  $\mathcal{D}$ -module holonome sont associés des  $\mathcal{D}$ -modules holonomes  $\Psi_f(\mathcal{M})$  et  $\Phi_f(\mathcal{M})$  qui, lorsque  $\mathcal{M}$  est régulier, ont pour complexe de de Rham les complexes  $\Psi_f(DR(\mathcal{M}))$  et  $\Phi_f(DR(\mathcal{M}))$ . Les considérations précédentes conduisent à étudier dans ce cadre les modules du type  $\Psi_g \Psi_f(\mathcal{M})$ , etc. . . . Comme  $\Psi_f(\mathcal{M})$  est obtenu comme gradué par rapport à une filtration dite canonique, qui mesure en quelque sorte (si cela a un sens) l'exposant dominant dans un développement asymptotique relatif à  $f$ , deux types de questions se posent.

D'abord, d'une manière générale, celle de comprendre la position relative de deux filtrations (l'une associée à  $f$ , l'autre à  $g$ ) ou plus généralement, la position relative de  $\kappa$  filtrations associées à des fonctions  $f_1, \dots, f_\kappa$ . Dans cette situation, il apparaît un nombre fini de formes linéaires sur  $\mathbb{Q}^\kappa$  à coefficients entiers positifs ou nuls, dont l'existence traduit le fait qu'en général, si par exemple  $\kappa = 2$ , on n'a pas, pour une bonne bifiltration  $U_{i,j}$  d'un  $\mathcal{D}$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  la relation de transversalité

$$U_{i,j} = \left( \bigcup_i U_{i,j} \right) \cap \left( \bigcup_j U_{i,j} \right).$$

Ce phénomène est très général et est étudié en détail dans l'appendice, en collaboration avec F. Castro. Le théorème de finitude qui y est montré (ici finitude du nombre de formes linéaires) est une variante du théorème d'aplatissement d'Hironaka. On interprète en effet le manque de transversalité comme un phénomène de non-platitude. Le même phénomène se produit dans l'étude de l'irrégularité (Y. Laurent [La<sub>1</sub>], [La<sub>2</sub>] et G. Laumon [L] ont étudié de telles situations). Dans le cas commutatif (Anneau  $\mathcal{O}_X$ ) les formes linéaires correspondent aux "tropismes critiques" introduits par M. Lejeune et B. Teissier [L-T].

Ainsi, quand  $\mathcal{M}$  est holonome, apparaissent entre les foncteurs de spécialisation  $sp_f(\mathcal{M})$  et  $sp_g(\mathcal{M})$  des foncteurs  $sp_r(\mathcal{M})$  pour  $r \in \mathbb{Q}_+$  (seuls un nombre fini d'entre eux sont intéressants). Au vu de l'analogie avec la théorie de l'irrégularité, ils jouent le rôle de foncteurs de "spécialisation à croissance relative".

Un deuxième problème est de savoir s'il existe une bonne bifiltration (ou  $\kappa$ -filtration) qui induise dans chaque "direction"  $r$  la bonne filtration canonique associée à cette direction. Je ne m'attends pas à une réponse positive en général<sup>†</sup> (il se produit des décalages difficilement contrôlables) et je calcule un exemple géométrique ( $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{O}_X$  et  $f_1, \dots, f_\kappa$   $\kappa$  fonctions analytiques) où une telle multi-filtration existe.

## 1. Cycles évanescents et $\mathcal{D}$ -Modules

### 1.1. La bonne filtration canonique relative à une hypersurface ([M<sub>1</sub>], [K<sub>3</sub>])

Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique sur une variété analytique complexe  $X$  et soit  $Y = \{f^{-1}(0)\}$ . Etant donné un complexe  $\mathcal{F}$  de faisceaux d'espaces vectoriels sur  $X$  à cohomologie constructible, on note  $\Psi_f(\mathcal{F})$  et  $\Phi_f(\mathcal{F})$  les complexes de cycles proches et cycles évanescents de  $\mathcal{F}$  relativement à  $f$  (voir [De<sub>1</sub>]). On les verra comme complexes sur  $X$  à support dans  $Y$ . Ils sont à cohomologie constructible. Ils sont munis d'un automorphisme de monodromie  $T$ , de morphismes "Canonique" et "Variation".

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome. A cette situation on peut associer une filtration  $V_\bullet(i_*\mathcal{M})$  du  $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module  $i_*\mathcal{M}$  (image directe au sens des  $\mathcal{D}$ -modules), où  $i: X \rightarrow X \times \mathbb{C}$  est définie par  $i(x) = (x, f(x))$ , comme suit:

<sup>†</sup> Ajouté sur épreuves: Une telle  $\kappa$ -filtration existe cependant pour tout module holonome.

on commence par définir la filtration  $V.(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}})$  en posant

$$V_k(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}) = \{P \in \mathcal{D}_X / P \mathcal{I}^j \subset \mathcal{I}^{-k} \forall j \in \mathbb{Z}\},$$

où  $\mathcal{I}$  est l'idéal de  $X \times \{0\}$  dans  $X \times \mathbb{C}$  (on pourrait définir de la même manière une filtration sur l'anneau des opérateurs différentiels d'une variété, filtration définie par une sous-variété lisse, voir [K<sub>3</sub>], [L], [La<sub>1</sub>]). Soit  $t$  une coordonnée sur  $\mathbb{C}$ . On a alors (voir 2.0) la notion de bonne filtration croissante  $U.(i_*\mathcal{M})$  de  $i_*\mathcal{M}$  et puisque  $\mathcal{M}$  est holonome, il existe un polynôme non nul  $b \in \mathbb{C}[s]$  tel que l'on ait pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$b(\partial_t t + k) U_k(i_*\mathcal{M}) \subset U_{k-1}(i_*\mathcal{M}).$$

Il existe une unique bonne filtration de  $i_*\mathcal{M}$  pour laquelle les zéros de  $b$  sont contenus dans  $\{s \in \mathbb{C} / 0 \leq s < 1\}$ , où l'ordre sur  $\mathbb{C}$  est l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$ . On peut interpoler cette filtration  $V.(i_*\mathcal{M})$  et l'indexer par  $\mathbb{C}$ , de sorte que pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  il existe un entier  $l(\alpha)$  pour lequel on a

$$(\partial_t t + \alpha)^{l(\alpha)} V_\alpha \subset V_{<\alpha}$$

où  $V_{<\alpha}(i_*\mathcal{M}) = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta(i_*\mathcal{M})$ . Bien sûr, si  $-\alpha$  n'est pas un décalé entier d'un zéro de  $b$ ,  $l(\alpha) = 0$ . Cette filtration possède les propriétés suivantes:

1.1.1. Tout morphisme de  $\mathcal{D}_X$ -modules holonomes est strict pour  $V.$ , c'est à dire que si l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$$

elle reste exacte après passage au gradué pour  $V.$  (et image directe par  $i_*$ ) ([K<sub>3</sub>], voir aussi [S<sub>1</sub>], [M.Sa<sub>4</sub>]).

1.1.2. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome. Alors  $gr_\alpha^V(i_*\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome à support dans  $Y$  pour tout  $\alpha$ . Ce module est de plus muni d'un endomorphisme nilpotent  $\partial_t t + \alpha$  ([Be], [K<sub>1,2,3</sub>], voir aussi [La], [S<sub>1</sub>], [M.Sa<sub>1</sub>]).

1.1.3. Soit  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  un morphisme propre,  $\tilde{\mathcal{M}}$  un  $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -module holonome (admettant un sous  $\mathcal{O}$ -module cohérent), et  $\tilde{f} = f \circ \pi$ . On a pour tout  $j$  ([Me-S])

$$\int_\pi^j gr_\alpha^V(\tilde{i}_*\mathcal{M}) = gr_\alpha^V\left(i_* \int_\pi^j \tilde{\mathcal{M}}\right)$$

Supposons de plus que  $\mathcal{M}$  soit régulier. Alors

1.1.4. Pour tout  $\alpha$ ,  $gr_\alpha^V(i_*\mathcal{M})$  est aussi régulier ([K–K<sub>1</sub>], voir aussi [Me–S]).

1.1.5. On a un quasi-isomorphisme fonctoriel ([M<sub>1</sub>], [K<sub>3</sub>], voir aussi [S<sub>1</sub>], [M.Sa<sub>4</sub>], [Me–S])

$$DR\left(\bigoplus_{-1 \leq \alpha < 0} gr_\alpha^V(i_*\mathcal{M})\right) \rightarrow \Psi_f(DR(\mathcal{M}))$$

et

$$DR\left(\bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} gr_\alpha^V(i_*\mathcal{M})\right) \rightarrow \Phi_f(DR(\mathcal{M})).$$

1.1.6. On peut définir  $\Psi_f(\mathcal{M}) = \bigoplus_{-1 \leq \alpha < 0} gr_\alpha^V(i_*\mathcal{M})$  et  $\Phi_f(\mathcal{M}) = \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} gr_\alpha^V(i_*\mathcal{M})$ . On notera aussi  $\Psi_{f,\alpha}(\mathcal{M})$  le  $\mathcal{D}_Y$ -module  $gr_\alpha^V(i_*\mathcal{M})$ . La variété caractéristique de  $\Psi_f(\mathcal{M})$  et  $\Phi_f(\mathcal{M})$  se calcule uniquement en fonction de celle de  $\mathcal{M}$  et on a  $\mathcal{M} = \{0\}$  au voisinage de  $Y$  si et seulement si  $\Psi_f(\mathcal{M})$  et  $\Phi_f(\mathcal{M})$  sont nuls ([K<sub>1</sub>], [B–D–K], [G], [S<sub>2</sub>]).

1.1.7. On a

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbb{C}} V_\alpha(i_*\mathcal{M})|_Y = \{0\}.$$

En effet soit  $m \in \bigcap_\alpha V_\alpha(i_*\mathcal{M})$  et considérons le  $\mathcal{D}_X$ -module engendré par  $m$ . C'est un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome régulier et sur ce module la filtration canonique  $V_\bullet$  est constante puisque si  $P \in \mathcal{D}_X$ ,  $Pm \in \bigcap_\alpha V_\alpha(i_*\mathcal{M})$ , et que la filtration  $V_\bullet$  est la filtration induite par  $V_\bullet(i_*\mathcal{M})$ . Ce qui précède montre alors que ce module, donc  $m$ , est nul.

1.1.8. Pour tout  $\alpha$ ,  $V_\alpha(i_*\mathcal{M})$  est  $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}/\mathbb{C}}$ -cohérent et relativement holonome ([K<sub>1</sub>], [K–K<sub>1</sub>], voir aussi [S<sub>1</sub>], [M.Sa<sub>4</sub>]).

1.1.9. PROPOSITION: Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  un morphisme lisse d'une variété analytique complexe  $X$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{D}_{X|S}$ -module cohérent contenu dans un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome régulier. Si  $\mathcal{N}|_t\mathcal{N} = \{0\}$  alors  $\mathcal{N}'_Y = \{0\}$ .

Preuve: On se ramène au cas où  $\mathcal{N} = V_0(\mathcal{M})$  et on applique 1.1.6. ◆

1.2. Comportement par image inverse

Soit  $j: Y \rightarrow X$  l'inclusion de  $Y$  dans  $X$ , et on suppose maintenant que  $Y$  est lisse de codimension 1 (localement défini par  $t = 0$ ). Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome, l'image inverse  $j^*\mathcal{M}$  est le complexe de  $\mathcal{D}_Y$ -modules

$$t: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

Ce complexe est quasi-isomorphe au complexe (voir par exemple [S<sub>1</sub>], [La-Sc])

$$t: gr_0^V(\mathcal{M}) \rightarrow gr_{-1}^V(\mathcal{M}).$$

Par suite le complexe de  $\mathcal{D}_X$ -modules  $\int_j j^*\mathcal{M}$  est le complexe

$$t: \bigoplus_{k \geq 0} gr_0^V(\mathcal{M}) \partial_t^k \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0} gr_{-1}^V(\mathcal{M}) \partial_t^k.$$

Pour construire le morphisme naturel  $\int_j j^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , qui n'est autre que l'inclusion  $\mathcal{H}_{[Y]}^0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ , on remarque que, puisque le module  $\mathcal{H}_{[Y]}^0(\mathcal{M})$  est à support dans  $Y$ , il est égal à son gradué pour la filtration  $V$ , qui n'est autre que le noyau du morphisme ci-dessus. Dans le cas où  $\mathcal{M}$  est régulier, via le complexe de de Rham, on obtient, à l'aide de [Me], le morphisme naturel

$$j_* j^! DR(\mathcal{M}) \rightarrow DR(\mathcal{M}).$$

1.3. Cycles évanescents itérés

Dans plusieurs situations on peut être amené à itérer la construction des cycles évanescents: on considère deux fonctions sur  $X$  (comme en 1.1) et on s'intéresse à un complexe du type  $\Psi_f \Psi_g(\mathcal{F})$  ou  $\Phi_f \Psi_g(\mathcal{F})$ , etc . . . . Un tel complexe est muni de deux monodromies: l'une, notée  $T_g$  est induite par celle de  $\Psi_g(\mathcal{F})$ , l'autre, notée  $T_f$ , est la monodromie associée au foncteur  $\Psi_f$  (ou  $\Phi_f$ ). Donnons quelques exemples.

Soit d'abord  $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  un germe de fonction analytique en 0 et  $g$  une forme linéaire générique pour  $f$ , au voisinage de l'origine. On suppose que  $f(0) = 0$ . Alors le complexe  $\Phi_g \Psi_f(\mathbb{C}_X)$  est à support l'origine et concentré en le seul degré  $n$ . Le  $n^{\text{ème}}$  groupe de cohomologie de ce complexe est de dimension égale à la multiplicité d'intersection de la courbe polaire de  $f$  relative à  $g$  à l'origine avec l'hypersurface  $\{f = 0\}$ . En fait ce groupe est égal à  $H^n(F, F \cap H)$ , où  $F = f^{-1}(\eta) \cap B_\varepsilon$  est la fibre de Milnor de  $f$  en 0 et  $H = g^{-1}(\tau)$  avec  $\eta \ll \tau \ll \varepsilon$ .



Soit maintenant  $(F(x, t), t): X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  un déploiement d'une fonction  $F(x, 0) = f(x)$ . Il est intéressant de comparer le faisceau  $\Psi_t \Phi_f(\mathbb{C}_{X \times \mathbb{C}})$  qui calcule les cycles évanescents de  $F_t(x) := F(x, t)$  pour  $t \neq 0$  assez petit, et le faisceau  $\Phi_f \Psi_t(\mathbb{C}_{X \times \mathbb{C}})$  qui calcule les cycles évanescents de  $f$ , en particulier si l'on veut montrer des résultats de semi-continuité.

D'une manière générale, soit  $\mathcal{F}$  un complexe à cohomologie constructible et pervers sur une variété  $X$ . Pour récupérer un complexe à support ponctuel qui soit pervers, l'opération de restriction à un point ne convient pas. Par contre, on peut choisir localement plusieurs fonctions sur  $X$  et itérer le foncteur cycles proches ou cycles évanescents jusqu'à obtenir un complexe à support ponctuel. Ce point de vue est développé par M. Saito [M.Sa<sub>4</sub>]. Cette même idée est utilisée dans certaines procédures de renormalisation d'intégrales de Feynman (voir [K-K<sub>3</sub>]).

Considérons maintenant le cas des  $\mathcal{D}$ -modules. Soient  $t$  et  $\tau$  deux fonctions lisses sur  $X$  et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome. On dispose sur  $\mathcal{M}$  d'une filtration  ${}^t V(\mathcal{M})$  et pour tout  $\alpha$  le gradué  $gr_\alpha^{tV}(\mathcal{M})$  est muni d'une filtration  ${}^\tau V_\alpha$  relative à  $\tau$ . Cette filtration n'est pas *a priori* celle induite par  ${}^\tau V(\mathcal{M})$ . Pour la calculer, il est naturel de chercher une bonne bifiltration  $U_{\alpha,\beta}(\mathcal{M})$  qui induise  ${}^t V_\alpha(\mathcal{M})$  et  ${}^\tau V_\beta(\mathcal{M})$ , c'est à dire  ${}^t V_\alpha(\mathcal{M}) = \sum_\beta U_{\alpha,\beta}(\mathcal{M})$  et  ${}^\tau V_\beta(\mathcal{M}) = \sum_\alpha U_{\alpha,\beta}(\mathcal{M})$ . Si une telle bifiltration existe, on obtient une bonne filtration sur  $gr_\alpha^{tV}(\mathcal{M})$  en posant

$$U_\beta gr_\alpha^{tV}(\mathcal{M}) = U_{\alpha,\beta} / U_{\alpha,\beta} \cap {}^t V_{<\alpha},$$

mais  $U_\beta$  n'est pas nécessairement égal à  ${}^\tau V_\beta gr_\alpha^{tV}(\mathcal{M})$  car on ne sait pas calculer le polynôme de Bernstein de cette filtration.

D'autre part, si on veut comparer  $gr_\beta^{tV} gr_\alpha^{tV}(\mathcal{M})$  et  $gr_\alpha^{tV} gr_\beta^{tV}(\mathcal{M})$ , et en admettant que  $U_{\alpha,\beta}$  existe, il est utile de se demander si l'on a pour tout  $\alpha, \beta$

$$U_{\alpha,\beta} = {}^t U_\alpha \cap {}^\tau U_\beta.$$

La réponse peut être négative, mais si on introduit suffisamment de directions  $L$ , formes linéaires sur  $\mathbb{Q}^2$  à coefficients positifs, on peut définir les filtrations  ${}^L U_{L(\alpha,\beta)}$ , et on a

$$U_{\alpha,\beta} = \bigcap_L {}^L U_{L(\alpha,\beta)}.$$

On voit alors qu'il existe une forme linéaire  $L$  (la première pente) telle que  ${}^\tau V_\beta gr_\alpha^{tV}(\mathcal{M})$  soit la filtration induite sur  $gr_\alpha^{tV}(\mathcal{M})$  par  ${}^L V_{L(\alpha,\beta)}$ .

Dans le paragraphe 2 nous montrons de manière générale comment associer à une bonne bifiltration sur un  $\mathcal{D}$ -module cohérent (ou une  $\kappa$ -filtration) un éventail dans le quadrant positif de  $(\mathbb{Q}^k)^*$ , éventail dont le 1-squelette forme les directions envisagées ci-dessus. Dans le paragraphe 3, nous appliquerons ces résultats aux  $\mathcal{D}$ -modules holonomes. Nous calculerons sur un exemple une bonne  $\kappa$ -filtration qui satisfait la première propriété.

## 2. Bonnes $\kappa$ -filtrations

### 2.0. Notion de bonne filtration

Nous allons rappeler ici la notion de bonne filtration et le lemme d'Artin-Rees. Nous reprenons les notations du §1:  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme lisse d'une variété analytique complexe dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent. Notons par  $(V_k(\mathcal{D}_X))_{k \in \mathbb{Z}}$  la filtration de  $\mathcal{D}_X$  définie en 1. A cette filtration est associé un anneau  $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$  appelé anneau de Rees:

$$\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\mathcal{D}_X) u^k \subset \mathcal{D}_X[u, u^{-1}].$$

Nous utiliserons constamment l'interprétation de cet anneau donnée dans [L]. Pour cela, définissons la filtration  $V_k(\mathcal{O}_X)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) par

$$V_k(\mathcal{O}_X) = \mathcal{I}_Y^{-k}$$

où  $\mathcal{I}_Y$  est l'idéal de  $Y = \{f^{-1}(0)\}$  dans  $X$  et  $\mathcal{I}_Y^{-k} = \mathcal{O}_X$  si  $k \geq 0$ . On définit de même  $\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)$ . Cet anneau a l'interprétation géométrique suivante: soit  $\pi: \mathcal{X}' \rightarrow X \times \mathbb{C}$  l'éclatement de l'idéal  $\mathcal{I}_Y + u\mathcal{O}_X$  dans  $X \times \mathbb{C}$  où  $u$  est la coordonnée sur le facteur affine  $\mathbb{C}$ , et  $\mathcal{X}$  la carte de cet éclatement dans laquelle l'élément  $u \circ \pi$  engendre l'image inverse de l'idéal précédent. On a un morphisme naturel  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  composé de  $\pi$  et de la projection sur  $\mathbb{C}$ . Alors  $\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)$  est un anneau de fonctions sur  $\mathcal{X}$ .

On peut définir l'anneau des opérateurs différentiels sur  $\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)$  et en lui appliquant  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathbb{C}[u]}$  on obtient  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ . De même on peut définir l'anneau des opérateurs différentiels relatifs au morphisme  $\varphi$  puisque celui-ci est lisse.

2.0.1. LEMME: On a  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}|\mathbb{C}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)} \mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$ . ◆

Soit  $(U_k(\mathcal{M}))_{k \in \mathbb{Z}}$  une filtration de  $\mathcal{M}$ . Nous disons qu'elle est bonne (relativement à  $V_*(\mathcal{D}_X)$ ) si elle satisfait les propriétés suivantes:

- $U_k(\mathcal{M})$  est  $V_0(\mathcal{D}_X)$ -cohérent et  $\bigcup_k U_k(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ ,
- $V_j(\mathcal{D}_X) \cdot U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k+j}(\mathcal{M})$  et il existe  $k_0 \geq 0$  tel qu'on ait égalité pour  $j \geq 0$  et  $k \geq k_0$ , ou pour  $j \leq 0$  et  $k \leq -k_0$ .

Il est équivalent de dire qu'il existe un morphisme surjectif

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{D}_X^{P_i} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

tel que  $U_*(\mathcal{M})$  soit image de la filtration  $\bigoplus_{i=1}^m V_*(\mathcal{D}_X^{P_i})[\lambda_i]$ , où  $\lambda_i$  est un décalage convenable.

2.0.2. PROPOSITION: Une filtration  $U_*(\mathcal{M})$  est bonne si et seulement si  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$ -module cohérent.

Nous indiquons brièvement la démonstration, qui est identique à celle donnée dans [M<sub>2</sub>]. On montre comme dans *loc. cit.* que  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  est  $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$ -cohérent si et seulement si pour tout polycylindre assez petit  $K \subset X$  on a

- a)  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})(K) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} U_k(\mathcal{M})(K) u^k$  est  $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)(K)$ -fini
- b)  $\forall x \in K$ , le morphisme naturel

$$\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)_x \otimes_{\mathcal{R}_V(\mathcal{O}_X)(K)} \mathcal{R}_U(\mathcal{M})(K) \rightarrow \mathcal{R}_U(\mathcal{M})_x$$

est un isomorphisme.

Cela résulte des propriétés de finitude de l'anneau  $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$ . Supposons alors que  $U_*(\mathcal{M})$  soit bonne. Il existe donc un morphisme surjectif

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X^{P_i})[\lambda_i] \rightarrow \mathcal{R}_U(\mathcal{M})$$

et on voit comme dans [M<sub>2</sub>] prop. 4.1 qu'il reste surjectif au niveau des sections globales sur  $K$ . On en déduit la condition a) de cohérence. D'autre part, puisque  $U_k(\mathcal{M})$  est  $V_0(\mathcal{D}_X)$ -cohérent, la deuxième condition est aussi satisfaite.

Inversement, si  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  est  $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$ -cohérent, il existe un morphisme surjectif gradué

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X^{P_i})[\lambda_i] \rightarrow \mathcal{R}_U(\mathcal{M})$$

et on en déduit immédiatement que  $U_*(\mathcal{M})$  est bonne. ◆

De cette proposition on déduit comme dans [M<sub>2</sub>] prop. 4.2.

2.0.2. LEMME D'ARTIN-REES: Soit  $\mathcal{M}'$  un sous- $\mathcal{D}_X$ -module cohérent de  $\mathcal{M}$  et  $U_*(\mathcal{M})$  une bonne filtration de  $\mathcal{M}$ . Alors  $U_*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M}'$  est une bonne filtration de  $\mathcal{M}'$ . ◆

2.1. Bonnes  $\kappa$ -filtrations

Nous considérons maintenant dans  $X$  des hypersurfaces lisses  $Y_1, \dots, Y_\kappa$  en position générale. Nous pouvons choisir localement sur  $X$  pour tout  $k \in \{1, \dots, \kappa\}$  une fonction lisse  $t_k: X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que l'on ait  $Y_k = \{t_k = 0\}$ . Définissons sur  $\mathcal{D}_X$  la  $\kappa$ -filtration suivante: pour  $s = (s_1, \dots, s_\kappa) \in \mathbb{Z}^\kappa$  on pose

$$V_s(\mathcal{D}_X) = {}^1V_{s_1}(\mathcal{D}_X) \cap \dots \cap {}^\kappa V_{s_\kappa}(\mathcal{D}_X)$$

où  ${}^kV$  est la filtration associée à l'hypersurface  $Y_k$ . Comme ci-dessus on considère l'anneau de Rees

$$\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}^\kappa} V_s(\mathcal{D}_X) u_1^{s_1} \dots u_\kappa^{s_\kappa} = \bigoplus_s V_s(\mathcal{D}_X) u^s$$

dont l'interprétation géométrique est analogue: on éclate dans  $X \times \mathbb{C}^\kappa$  le produit des idéaux  $\mathcal{I}_{Y_k} + u_k \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^\kappa}$  pour  $k \in \{1, \dots, \kappa\}$  et on appelle  $\mathcal{X}$  la carte de l'éclaté où  $u_k$  engendre l'image inverse de cet idéal. On a un morphisme lisse  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^\kappa$  et on a

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\kappa} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)} \mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X).$$

Une bonne  $\kappa$ -filtration d'un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent est par définition quotient d'une somme directe de  $\kappa$ -filtrations  $V_*(\mathcal{D}_X^p)$  convenablement décalées. Nous laissons le soin au lecteur de montrer les analogues de 2.0.2 et 2.0.3.

Dans la suite nous allons utiliser les notations concernant éventails et variétés toriques pour lesquelles nous renvoyons à [T<sub>2</sub>], [Bry], [Da]. Considérons dans le quadrant positif de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^* = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^\kappa, \mathbb{Q})$  un cône convexe simplicial rationnel  $\Gamma$ . A un tel cône est associée une variété affine  $S_\Gamma$  au-dessus de  $\mathbb{C}^\kappa$ , d'anneau  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap \mathbb{Z}^\kappa]$  où  $\check{\Gamma} = \{\lambda \in \mathbb{Q}^\kappa / \gamma(\lambda) \geq 0 \forall \gamma \in \Gamma\}$  et  $\mathbb{Z}^\kappa$  désigne le réseau standard de  $\mathbb{Q}^\kappa$ . Nous noterons éventuellement  $M$  ce réseau et  $N = M^*$ .

Pour un tel cône  $\Gamma$ , soit  $\mathcal{L}(\Gamma)$  l'ensemble des éléments primitifs du 1-squelette de  $\Gamma$ : une forme linéaire  $L \in (\mathbb{Q}^\kappa)^*$  appartient à  $\mathcal{L}(\Gamma)$  si et seulement si la demi-droite  $\mathbb{Q}_+ L$  est dans le 1-squelette de  $\Gamma$  et si  $L$  est à

coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Nous définissons (voir aussi [L]) pour une bonne  $\kappa$ -filtration  $U.(\mathcal{M})$  une  $\kappa$ -filtration  ${}^\Gamma U.(\mathcal{M})$  par:

$$\forall \sigma \in \mathbb{Z}^\kappa, {}^\Gamma U_\sigma(\mathcal{M}) = \sum_{\{s \in \mathbb{Z}^\kappa / L(s) \leq L(\sigma) \forall L \in \mathcal{L}(\Gamma)\}} U_s.$$

Remarquons que  $\{s \in \mathbb{Z}^\kappa / L(s) \leq L(\sigma) \forall L \in \mathcal{L}(\Gamma)\} = \{s \in \mathbb{Z}^\kappa / \sigma \in s + \check{\Gamma}\}$ , ce qui permettrait aussi de définir  ${}^\Gamma U.$  quand  $\Gamma$  n'est pas simplicial, mais nous n'utiliserons pas de tels cônes. Cette filtration est bonne pour la filtration  ${}^\Gamma V.(\mathcal{D}_X)$  correspondante et l'interprétation géométrique est la suivante, en posant

$$\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}^\kappa} {}^\Gamma V_\sigma(\mathcal{D}_X) u^\sigma$$

2.1.1. LEMME: *On a un isomorphisme naturel*

$$\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M] \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{N}^\kappa]} \mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X) \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{D}_X)$$

*et un morphisme naturel surjectif*

$$\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M] \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{N}^\kappa]} \mathcal{R}_U(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$$

*dont le noyau est exactement la  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -torsion du module de gauche.*

*Preuve:* On a un morphisme naturel surjectif

$$\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M] \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{N}^\kappa]} \mathcal{R}_U(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$$

induit par l'inclusion  $U_s \subset {}^\Gamma U_s$  et de plus  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$  n'a pas de  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -torsion. Comme les localisés des deux membres le long de  $u_1 \dots u_\kappa = 0$  coïncident, on en déduit la deuxième assertion. Pour la première on utilise la platitude de  $\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)$  comme  $\mathbb{C}[\mathbb{N}^\kappa]$ -module. ♦

Soit  $\Gamma$  un cône comme ci-dessus. Notons par  $S_\Gamma$  la variété torique affine associée qui est de dimension  $\kappa$ , et  $\varrho_\Gamma: S_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^\kappa$  le morphisme naturel. La fibre  $\varrho_\Gamma^{-1}(0)$  est un tore de dimension égale à la codimension dans  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  du sous-espace vectoriel engendré par  $\Gamma$ , noté  $\langle \Gamma \rangle$ . On peut en effet choisir une décomposition du réseau  $N = N' \times N''$  avec  $N' = N \cap \langle \Gamma \rangle$ . Alors on a  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M] = \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M'] \otimes \mathbb{C}[M'']$  avec  $M' = N'^*$  et  $M'' = N''^*$ . Soit  $I$  l'idéal maximal de  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M']$  formé des monômes d'exposant non nul et  $I \times \{0\}$  l'idéal qu'il définit dans  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ .

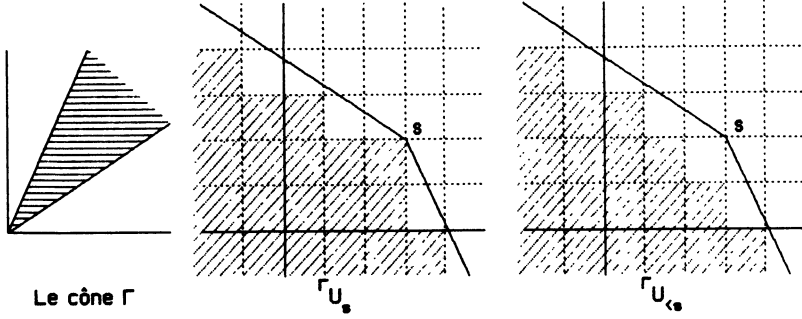


Fig. 1.

2.1.2. DÉFINITION: Le gradué  $gr^\Gamma(\mathcal{M})$  (ou  $gr^\Gamma(\mathcal{D}_X)$ ) est la restriction de  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$  au-dessus de  $\varrho_\Gamma^{-1}(0)$ . Autrement dit, on a

$$gr^\Gamma(\mathcal{M}) = \mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]} (\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]/I \times \{0\}).$$

Exemples:

1) Si  $\dim \langle \Gamma \rangle = \kappa$ , on pose

$${}^\Gamma U_{<s}(\mathcal{M}) = \sum_{\{\sigma/s \in \sigma + \Gamma, \sigma \neq s\}} U_\sigma(\mathcal{M})$$

On a alors  ${}^\Gamma U_s = U_s + {}^\Gamma U_{<s}$  et  $gr_s^\Gamma(\mathcal{M}) = {}^\Gamma U_s / {}^\Gamma U_{<s} = U_s / U_s \cap {}^\Gamma U_{<s}$ .

2) Si  $\Gamma$  est une demi-droite et  $\mathcal{L}(\Gamma) = \{L\}$ , posons

$${}^L U_{L(s)} := \sum_{\{\sigma/L(\sigma) \leq L(s)\}} U_\sigma = {}^\Gamma U_s$$

et

$${}^L U_{<L(s)} := \sum_{\{\sigma/L(\sigma) < L(s)\}} U_\sigma = {}^L U_{L(s)-1}$$

On a alors  $gr_s^\Gamma(\mathcal{M}) = {}^L U_{L(s)} / {}^L U_{<L(s)}$ .

3) Plus généralement, si  $\langle \Gamma \rangle = N'$ , on a  $N = N' \times N''$ ,  $M = M' \times M''$ , et on décompose  $s$  en  $(s', s'')$ . On pose

$${}^\Gamma U_{s'} = \sum_{\{(\sigma', \sigma'')/s' \in \sigma' + \Gamma\}} U_{(\sigma', \sigma'')} \quad \text{et} \quad {}^\Gamma U_{<s'} = \sum_{\{(\sigma', \sigma'')/s' \in \sigma' + \Gamma, \sigma' \neq s'\}} U_{(\sigma', \sigma'')}.$$

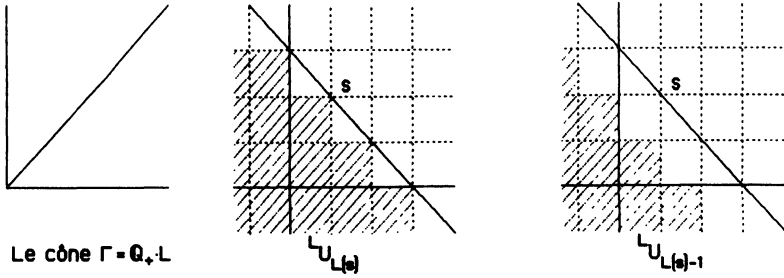


Fig. 2.

On a alors  $gr_s^\Gamma = {}^\Gamma U_s / {}^\Gamma U_{<s}$ . De plus,  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M}) = (\bigoplus_{s' \in M'} {}^\Gamma U_{s'} u^{s'}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M'']$ . On négligera éventuellement le tore  $\mathbb{C}[M'']$ . On a aussi

$$gr^\Gamma(\mathcal{M}) = (\bigoplus_{s' \in M'} gr_{s'}^\Gamma(\mathcal{M})) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M'']$$

et là encore on pourra oublier le tore  $\mathbb{C}[M'']$ .

2.1.3. CONSÉQUENCE ([L]): si  $\dim \langle \Gamma \rangle = \kappa$  la flèche naturelle suivante définit un isomorphisme

$$gr^V(\mathcal{D}_X) \rightarrow gr^\Gamma(\mathcal{D}_X)$$

et un morphisme surjectif

$$gr^U(\mathcal{M}) \rightarrow gr^\Gamma(\mathcal{M}).$$

Précisons cette flèche: elle est induite par l'inclusion  $U_{<s} \subset {}^\Gamma U_{<s}$ , où  $U_{<s}$  est la somme des  $U_\sigma$  pour  $\sigma < s$ . On a alors, en utilisant cette inclusion, une flèche naturelle

$$U_s / U_{<s} = U_s / U_{<s} \cap U_s \rightarrow U_s / {}^\Gamma U_{<s} \cap U_s.$$

On pourrait remplacer le terme de gauche par  $gr^\Omega(\mathcal{M})$  (ou  $gr^\Omega(\mathcal{D}_X)$ ) si  $\Omega$  est un cône simplicial contenant  $\Gamma$ . Alors, si  $\mathcal{R}_\Omega(\mathcal{M})$  est  $\mathbb{C}[\tilde{\Omega} \cap M]$ -plat, cette flèche est un isomorphisme.

Soit  $\Gamma$  un cône simplicial de dimension  $\kappa$  (seul ce cas nous intéressera),  $\Gamma'$  une face de  $\Gamma$  et  $\Gamma''$  la face opposée. On pose  $\langle \Gamma' \rangle \cap N = N'$  et  $\langle \Gamma'' \rangle \cap N = N''$ ,  $\kappa = \kappa' + \kappa''$ . On a alors  $N = N' \times N''$ . Il existe sur  $gr^\Gamma(\mathcal{M})$  une  $\kappa''$ -filtration indexée par  $M''$  et qui est bonne pour la  $\kappa'$ -filtration de  $gr^{\Gamma'}(\mathcal{D}_X)$  correspondante: on pose

$${}^\Gamma U_s gr^{\Gamma'}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{s' \in M''} {}^{\Gamma''} U_{s'} gr^{\Gamma'}(\mathcal{M})$$

avec

$$\Gamma'' U_{s'} gr_s^{\Gamma'}(\mathcal{M}) = (\Gamma U_{(s',s'')} + \Gamma U_{<s'}) / \Gamma U_{<s'}.$$

On en déduit un morphisme surjectif

$$gr^{\Gamma}(\mathcal{M}) \rightarrow gr^{\Gamma''}(gr^{\Gamma'}(\mathcal{M})).$$

Décrivons plus précisément ce morphisme: on a

$$gr_s^{\Gamma''} gr_s^{\Gamma'}(\mathcal{M}) = (\Gamma U_{(s',s'')} + \Gamma U_{<s'}) / (\Gamma U_{(s',<s'')} + \Gamma U_{<s'})$$

avec

$$\Gamma U_{(s',<s'')} = \sum_{\{\sigma \in M / s \in \sigma + \Gamma \text{ et } \sigma'' \neq s''\}} U_{\sigma}.$$

Le morphisme cherché est donné par les inclusions naturelles

$$\Gamma U_s \subset \Gamma U_s + \Gamma U_{<s'} \quad \text{et} \quad \Gamma U_{<s} \subset \Gamma U_{(s',<s')} + \Gamma U_{<s'}.$$

**2.1.4. LEMME:** Si  $\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M})$  est  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -plat (c'est le cas pour  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X$ ) ce morphisme est un isomorphisme.

*Preuve:*  $gr^{\Gamma}(\mathcal{M})$  est la fibre de  $\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M})$  au-dessus du point fermé de  $S_{\Gamma}$ , tandis que  $gr^{\Gamma''} gr^{\Gamma'}(\mathcal{M})$  est obtenu comme suit: on restreint  $\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M})$  sur  $\text{Spec } \{0\} \times \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M'']$ , on quotiente cette restriction par sa  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M'']$ -torsion (qui est triviale sous l'hypothèse de platitude), puis on considère la fibre au-dessus du point fermé de  $\text{Spec } \{0\} \times \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M'']$ . ♦

*2.2. Eventails adaptés à une bonne  $\kappa$ -filtration*

Soit  $U_{\cdot}(\mathcal{M})$  une bonne  $\kappa$ -filtration de  $\mathcal{M}$ . Nous dirons qu'un éventail  $\Sigma$  est adapté à  $U_{\cdot}(\mathcal{M})$  si pour tout cône  $\Gamma$  de  $\Sigma$  l'anneau  $\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M})$  est  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -plat. Cette propriété est encore satisfaite pour tout cône simplicial contenu dans un cône de  $\Sigma$ . L'existence d'un tel éventail est assurée par le théorème de finitude A.1.1 montré en appendice.

**2.2.1. PROPOSITION:** Soit  $U_{\cdot}(\mathcal{M})$  une bonne  $\kappa$ -filtration de  $\mathcal{M}$  (au voisinage de  $x \in X$ ) et  $\Sigma$  un éventail simplicial adapté à  $U_{\cdot}(\mathcal{M})$  qui subdivise le premier



quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ . Alors, pour tout cône  $\Gamma \in \Sigma$ , on a pour tout  $s \in \mathbb{Z}^\kappa$

$${}^\Gamma U_s = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\Gamma)} {}^L U_{L(s)}.$$

Il suffit de montrer le résultat suivant:

2.2.2. LEMME: Soit  $\Gamma$  un cône simplicial. Alors si  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$  est  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -plat on a pour tout  $s \in M$

$${}^\Gamma U_s = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\Gamma)} {}^L U_{L(s)}.$$

*Preuve:* On peut supposer, puisque la platitude se conserve par changement de base, que  $\Gamma$  est engendré par une partie d'une base de  $N$ . Faisons l'hypothèse que  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$  est  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -plat. Par un changement de variables, on se ramène au cas où  $\Gamma$  est le simplexe standard de dimension  $\dim \langle \Gamma \rangle$ . Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur  $\dim \langle \Gamma \rangle$ . Supposons donc  $\dim \langle \Gamma \rangle = \kappa$ . La restriction de  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  à l'hypersurface  $u_1 = 0$  est le module

$$\bigoplus_{1 \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{(s_2, \dots, s_\kappa)} (U_{(s_1, \dots, s_\kappa)} / U_{(s_1-1, \dots, s_\kappa)}) u_2^{s_2} \dots u_\kappa^{s_\kappa}.$$

D'autre part, Nous pouvons considérer la filtration  ${}^1 U_\bullet(\mathcal{M})$ . Le gradué de  $\mathcal{M}$  pour cette filtration est muni d'une bonne  $(\kappa - 1)$ -filtration:

$$U_{(s_2, \dots, s_\kappa)} gr_{s_1} {}^1 U(\mathcal{M}) = U_{(s_1, \dots, s_\kappa)} / U_{(s_1, \dots, s_\kappa)} \cap {}^1 U_{s_1-1}$$

et le module de Rees  $\mathcal{R}_U(gr {}^1 U(\mathcal{M}))$  est le quotient de la restriction de  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  à  $u_1 = 0$  par sa  $\mathbb{C}[\mathbb{N}^{\kappa-1}]$ -torsion. Comme  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  est  $\mathbb{C}[\mathbb{N}^\kappa]$ -plat, le morphisme surjectif naturel de l'un dans l'autre induit par l'inclusion

$$U_{(s_1-1, \dots, s_\kappa)} \subset U_{(s_1, \dots, s_\kappa)} \cap {}^1 U_{s_1-1}$$

est un isomorphisme, autrement dit cette inclusion est une égalité. On en déduit que pour tout  $k \geq 0$  on a aussi

$$U_{(s_1, \dots, s_\kappa)} = U_{(s_1+k, \dots, s_\kappa)} \cap {}^1 U_{s_1}$$

et donc

$$U_{(s_1, \dots, s_\kappa)} = U_{(s_2, \dots, s_\kappa)} \cap {}^1U_{s_1}.$$

Par récurrence sur  $\kappa$  on en déduit le lemme (le cas  $\kappa = 1$  est trivial). ♦

**2.2.3. PROPOSITION-DÉFINITION:** *Etant donnée une bonne  $\kappa$ -filtration  $U_\bullet(\mathcal{M})$ , La  $\kappa$ -filtration de  $\mathcal{M}$  définie par  $\bar{U}_s(\mathcal{M}) = \bigcap_L {}^L U_{L(s)}$  est bonne (l'intersection est prise pour toute les formes linéaires  $L$ ). Nous l'appellerons  $\kappa$ -filtration saturée de  $U_\bullet(\mathcal{M})$ . De plus, tout éventail adapté à  $U_\bullet(\mathcal{M})$  l'est aussi à  $\bar{U}_\bullet(\mathcal{M})$ .*

*Remarques:*

1) On a  $\bar{U}_s(\mathcal{M}) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\Sigma)} {}^L U_{L(s)}$  si  $\Sigma$  est un éventail adapté à  $U_\bullet(\mathcal{M})$  (on a noté  $\mathcal{L}(\Sigma)$  la réunion des  $\mathcal{L}(\Gamma)$  pour  $\Gamma \in \Sigma$ ). En effet, d'après 2.2.1. on a pour tout cône  $\Gamma$  de  $\Sigma$  l'inclusion

$$\bigcap_{L \subset \mathcal{L}(\Gamma)} {}^L U_{L(s)} = {}^\Gamma U_s(\mathcal{M}) \subset \bigcap_{\Delta \subset \Gamma} {}^L U_{L(s)} \subset \bigcap_{L \subset \mathcal{L}(\Gamma)} {}^L U_{L(s)}$$

(l'intersection est prise pour les demi-droites  $\Delta$ , et  $L \in \mathcal{L}(\Delta)$ ) et donc l'égalité

$$\bigcap_{L \subset \mathcal{L}(\Gamma)} {}^L U_{L(s)} = \bigcap_{\Delta \subset \Gamma} {}^L U_{L(s)},$$

d'où l'assertion.

2) On a une inclusion  $U_s \subset \bar{U}_s$  pour tout  $s$ . Par suite on a pour tout  $L$ :  ${}^L U_{L(s)} \subset {}^L \bar{U}_{L(s)}$ . Mais comme on a aussi  $\bar{U}_s \subset {}^L U_{L(s)}$ , on en déduit que

$${}^L \bar{U}_{L(s)} = \sum_{\{\sigma/L(\sigma) \leq L(s)\}} \bar{U}_\sigma \subset \sum_{\{\sigma/L(\sigma) \leq L(s)\}} {}^L U_{L(\sigma)} \subset {}^L U_{L(s)}.$$

On a donc l'égalité  ${}^L U_{L(s)} = {}^L \bar{U}_{L(s)}$ . Ceci montre que  $\bar{U}_s = \bigcap_L {}^L \bar{U}_{L(s)}$  et par suite la filtration  $\bar{U}$  est saturée.

*Preuve:* Soit  $\Sigma$  un éventail subdivisant le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  et  $\varrho_\Sigma: S_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^\kappa$  la modification propre associée. Soit  $\mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M})$  le transformé strict de  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  par  $\varrho_\Sigma$ . C'est un  $\mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{D}_X)$ -module cohérent. Si  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^\kappa$  est le morphisme construit en 2.1, soit  $\mathcal{X}_\Sigma$  le transformé strict de  $\mathcal{X}$  par  $\varrho_\Sigma$ . Cet espace est aussi muni d'une modification propre  $\pi: \mathcal{X}_\Sigma \rightarrow \mathcal{X}$  et d'un morphisme  $\varphi_\Sigma: \mathcal{X}_\Sigma \rightarrow S_\Sigma$ . La restriction de  $\mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M})$  à chaque carte  $S_\Gamma$  est égale à  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$ . Comme  $\pi$  est propre, le module  $\pi_* \mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{R}_U(\mathcal{D}_X)$ -module cohérent. D'autre part, on a un morphisme naturel de  $\mathcal{R}_U(\mathcal{D}_X)$ -modules cohérents

$$\mathcal{R}_U(\mathcal{M}) \rightarrow \pi_* \mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M}).$$

Remarquons que ces deux modules coïncident hors de  $u_1 \dots u_\kappa = 0$ . On a donc un morphisme naturel

$$\pi_* \mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}[u_1, \dots, u_\kappa, u_1^{-1}, \dots, u_\kappa^{-1}]$$

où le deuxième terme est le localisé du premier le long de  $u_1, \dots, u_\kappa = 0$ . L'image de ce morphisme n'est autre que le module de Rees associé à

$$\bar{U}_s(\mathcal{M}) = \bigcap_{\Gamma \in \Sigma} \Gamma U_s(\mathcal{M}),$$

et par suite  $\bar{U}_s(\mathcal{M})$  est une bonne  $\kappa$ -filtration. Pour tout cône  $\Gamma$  de  $\Sigma$ , on a  $\Gamma U_s \subset \Gamma \bar{U}_s$ , puisque l'on a  $U_s \subset \bar{U}_s$ . D'autre part, on a aussi  $\Gamma \bar{U}_s \subset \Gamma U_s$  puisque  $\bar{U}_s \subset \Gamma U_s$ . On en déduit que  $\mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M})$  est aussi le transformé strict de  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  par  $\varrho_\Sigma$ , d'où le deuxième point. Si enfin  $\Sigma$  est adapté à  $U_*(\mathcal{M})$ , la proposition 2.2.1 permet de conclure. ♦

REMARQUES:

1) Soit  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$  un sous- $\mathcal{D}_X$ -module cohérent et  $U_*(\mathcal{M})$  une bonne  $\kappa$ -filtration saturée (i.e.  $\bar{U} = U$ ) de  $\mathcal{M}$ . Alors la bonne  $\kappa$ -filtration  $U_*(\mathcal{M}') = U_*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M}'$  est aussi saturée.

2) Si  $\mathcal{M}''$  est un quotient de  $\mathcal{M}$  et si  $U_*(\mathcal{M})$  est saturée, alors la  $\kappa$ -filtration image  $U_*(\mathcal{M}'')$  est aussi saturée. En effet, dire que  $U_*(\mathcal{M})$  est saturée, c'est dire que pour tout (ou pour un) éventail  $\Sigma$  adapté à  $U_*(\mathcal{M})$ , le morphisme naturel

$$\mathcal{R}_U(\mathcal{M}) \rightarrow \pi_* \mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M})/\text{torsion}$$

est surjectif. Choisissons alors un éventail adapté à  $U_*(\mathcal{M})$  et  $U_*(\mathcal{M}'')$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_U(\mathcal{M}) & \rightarrow & \pi_* \mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M})/\text{torsion} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}_U(\mathcal{M}'') & \rightarrow & \pi_* \mathcal{R}_\Sigma(\mathcal{M}'')/\text{torsion} \end{array}$$

et par hypothèse, les deux flèches verticales sont surjectives. Comme la flèche horizontale du haut est surjective, il en est de même de celle du bas. On en déduit l'assertion.

3) On pourrait aussi définir pour tout cône  $C$  dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  la  $\kappa$ -filtration  $C$ -saturée de  $U_*$  par

$$\bar{c}U_s(\mathcal{M}) = \bigcap_{\Delta \subset C} \Delta U_s(\mathcal{M})$$

où  $\Delta$  est une demi-droite. Remarquons que si  $\Sigma$  est un éventail adapté à une bonne  $\kappa$ -filtration  $U \cdot (\mathcal{M})$ , la filtration  ${}^\Gamma U \cdot (\mathcal{M})$  est  $\Gamma$ -saturée pour tout cône  $\Gamma$  de  $\Sigma$ .

### 2.3. Morphismes stricts et transversalité

Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_1$  deux  $\mathcal{D}_X$ -modules munis de bonnes  $\kappa$ -filtrations et  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1$  un morphisme  $\kappa$ -filtré. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \text{Coker } \varphi \rightarrow 0.$$

Les modules  $\text{Ker } \varphi$  et  $\text{Coker } \varphi$  sont munis des filtrations induites naturelles (qui sont bonnes). Quand  $\kappa = 1$ , on dit que  $\varphi$  est strict si les deux filtrations induites sur  $\text{Im } \varphi$  par  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_1$  sont les mêmes. Il revient au même de dire que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_U(\text{Ker } \varphi) \rightarrow \mathcal{R}_U(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}_U(\mathcal{M}_1) \rightarrow \mathcal{R}_U(\text{Coker } \varphi) \rightarrow 0$$

est exacte. Comme tous ces modules sont  $\mathbb{C}[u]$ -plats, on en déduit que cette suite reste exacte après restriction au-dessus de l'origine de  $\mathbb{C}$ , c'est à dire que la suite des gradués est exacte. Considérons maintenant le cas général.

2.3.1. DÉFINITION: Nous dirons que  $\varphi$  est strict, si, lorsqu'on munit  $\text{Ker } \varphi$  et  $\text{Coker } \varphi$  des  $\kappa$ -filtrations induites, la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_\Delta(\text{Ker } \varphi) \rightarrow \mathcal{R}_\Delta(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}_\Delta(\mathcal{M}_1) \rightarrow \mathcal{R}_\Delta(\text{Coker } \varphi) \rightarrow 0$$

est exacte pour toute demi-droite  $\Delta$  dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^*)^*$ .

Explicitons cette condition. Nous dirons qu'une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  filtrée est stricte si pour toute demi-droite  $\Delta$  et  $L \in \mathcal{L}(\Delta)$ , la suite est stricte pour les filtrations  ${}^L U \cdot$ , c'est à dire si  ${}^L U(\mathcal{M}') = {}^L U(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M}'$  et  ${}^L U(\mathcal{M}'') = \text{Im } {}^L U(\mathcal{M})$ . Nous voyons qu'il revient au même de dire que la suite est stricte pour les  $\kappa$ -filtrations saturées  $\bar{U}$ . De plus on a alors  $\bar{U}(\mathcal{M}') = \bar{U}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M}'$  et  $\bar{U}(\mathcal{M}'') = \text{Im } \bar{U}(\mathcal{M})$ . Maintenant, dire que le morphisme  $\varphi$  est  $\kappa$ -strict, c'est dire que les deux suites exactes

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \text{Coker } \varphi \rightarrow 0$$

sont strictes, lorsqu'on munit  $\text{Im } \varphi$  de la  $\kappa$ -filtration induite par celle de  $\mathcal{M}$ .

2.3.2. COROLLAIRE: Soit  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1$  un morphisme strictement  $\kappa$ -filtré et soit  $\Sigma$  un éventail adapté à  $U.(\mathcal{M})$ ,  $U.(\mathcal{M}_1)$ , et  $U.(\text{Coker } \varphi)$ . Alors pour tout cône  $\Gamma$  de  $\Sigma$ , la suite

$$0 \rightarrow \text{gr}^\Gamma(\text{Ker } \varphi) \rightarrow \text{gr}^\Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \text{gr}^\Gamma(\mathcal{M}_1) \rightarrow \text{gr}^\Gamma(\text{Coker } \varphi) \rightarrow 0$$

est exacte.

Preuve: On sait que, puisque  $\varphi$  est strict, si  $\Sigma$  est adapté à  $U.(\mathcal{M})$ ,  $U.(\mathcal{M}_1)$  et  $U.(\text{Coker } \varphi)$  il est aussi adapté à  $\text{Im } \varphi$  et aussi à  $\text{Ker } \varphi$ . Par suite tous les modules des suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\text{Ker } \varphi) \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\text{Im } \varphi) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\text{Im } \varphi) \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M}_1) \rightarrow \mathcal{R}_\Gamma(\text{Coker } \varphi) \rightarrow 0$$

sont  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -plats, si  $\Gamma$  est un cône de  $\Sigma$ . Ces suites restent donc exactes en restriction à l'origine de  $S_\Gamma$ .

Venons-en maintenant à la notion de transversalité. Supposons que  $\kappa = \kappa' + \kappa''$  et soit  $U'(\mathcal{M})$  (resp.  $U''(\mathcal{M})$ ) une bonne  $\kappa'$ - (resp.  $\kappa''$ -) filtration de  $\mathcal{M}$ .

2.3.3. DÉFINITION: Nous dirons que  $U'(\mathcal{M})$  et  $U''(\mathcal{M})$  sont transverses s'il existe une bonne  $\kappa$ -filtration  $U(\mathcal{M})$  induisant  $U'(\mathcal{M})$  et  $U''(\mathcal{M})$ , et pour laquelle il existe un éventail adapté  $\Sigma$  de la forme  $\Sigma = \Sigma' \times \Sigma''$ , où  $\Sigma'$  est adapté à  $U'$  et  $\Sigma''$  à  $U''$ .

Remarquons que si  $U'$  et  $U''$  sont transverses, leur saturées le sont aussi. En effet, on a  $sk^1(\Sigma) = sk^1(\Sigma') \cup sk^1(\Sigma'')$  et par suite

$$\begin{aligned} \bar{U}(\mathcal{M}) &= \left( \bigcap_{\Delta \in sk^1(\Sigma')} \Delta U(\mathcal{M}) \right) \cap \left( \bigcap_{\Delta \in sk^1(\Sigma'')} \Delta U(\mathcal{M}) \right) \\ &= \left( \bigcap_{\Delta \in sk^1(\Sigma')} \Delta U'(\mathcal{M}) \right) \cap \left( \bigcap_{\Delta \in sk^1(\Sigma'')} \Delta U''(\mathcal{M}) \right) \\ &= \bar{U}'(\mathcal{M}) \cap \bar{U}''(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Par suite  $\bar{U}'(\mathcal{M}) \cap \bar{U}''(\mathcal{M})$  est une bonne  $\kappa$ -filtration qui induit  $\bar{U}'(\mathcal{M})$  et  $\bar{U}''(\mathcal{M})$ , et pour laquelle un éventail adapté est produit d'un éventail de

$\bar{U}'$  et  $\bar{U}''$ . De plus, pour tout cône  $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$  de  $\Sigma$ , on a

$$gr^{\Gamma'} gr^{\Gamma''}(\mathcal{M}) = gr^{\Gamma'} gr^{\Gamma''}(\mathcal{M}).$$

### 2.4. Eventails et polyèdres de Newton

Nous avons associé à une bonne  $\kappa$ -filtration  $U.(\mathcal{M})$  (au voisinage de  $x \in X$ ) un éventail simplicial  $\Sigma$ . Il n'y a *a priori* pas de raison pour qu'il existe un éventail moins fin que tous ceux qui vérifient la propriété de la proposition 2.2.1. C'est à dire encore qu'il n'existe pas une modification torique minimale  $\varrho: S \rightarrow \mathbb{C}^x$  qui aplatisse  $\mathcal{R}_U(\mathcal{M})$  (et ce n'est pas seulement dû au fait que nous imposons à  $\Sigma$  d'être simplicial). Cependant, nous verrons que si  $\kappa = 2$ , un tel éventail minimal existe, et il y a un sens alors de parler de l'éventail associé à une bifiltration. Pour l'exhiber nous associons à tout germe de section de  $\mathcal{M}$  un polygone dans  $\mathbb{Q}^2$ , et essentiellement l'ensemble des pentes des cotés de ces polygones (pour  $m \in \mathcal{M}_x$ ) donne le 1-squelette de l'éventail.

Soit  $U.(\mathcal{M})$  une bonne  $\kappa$ -filtration et  $m \in \mathcal{M}_x$  un germe de section de  $\mathcal{M}$ . Soit  $\Delta$  une demi-droite dans le quadrant positif de  $(\mathbb{Q}^x)^*$  et  $\{L\} = \mathcal{L}(\Delta)$ . Définissons l'ordre d'une section par rapport à  $U$  par

$$\text{ord}_U^\Delta(m) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{Z}/m \in {}^L U_\lambda(\mathcal{M}) \}.$$

Nous poserons

$$\mathcal{P}_U(m) = \bigcap_{\Delta} \{ s \in \mathbb{Q}^x/L(s) \geq \text{ord}_U^\Delta(m) \text{ avec } \mathcal{L}(\Delta) = \{L\} \}$$

et pour un cône  $C$  nous poserons aussi

$$\mathcal{P}_U^C(m) = \bigcap_{\Delta \subset C} \{ s \in \mathbb{Q}^x/L(s) \geq \text{ord}_U^\Delta(m) \}.$$

**2.4.1. PROPOSITION:** *Pour tout cône  $C$  (convexe, polyédral, rationnel, contenu dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^x)^*$ )  $\mathcal{P}^C(m)$  est un polyèdre. De plus, pour tout éventail  $\Sigma$  adapté  $U.(\mathcal{M})$ , et tout  $m \in \mathcal{M}_x$  les formes linéaires d'appui de  $\mathcal{P}^C(m)$  sont contenues dans le 1-squelette de  $\Sigma_C$  (subdivision de  $\Sigma$  adaptée à  $C$ ).*

*Preuve:* Soit  $\Sigma$  un éventail adapté à la filtration  $U.(\mathcal{M})$  comme en 3.2.1 et soit  $\Sigma_C$  une subdivision de  $\Sigma$  adaptée à  $C$ . On a alors (2.2):

$$\overline{\mathcal{P}}_U(m) = \bigcap_{\Delta \subset C} {}^L U_{L(s)} = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\Sigma_C)} {}^L U_{L(s)}.$$

Donc  $s \in \mathcal{P}_U^C(m)$  si et seulement si  $m \in \overline{cU}_s(\mathcal{M})$ , et aussi si et seulement si  $s \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}(C)} \{\sigma \in \mathbb{Q}^\kappa / L(\sigma) \geq \text{ord}_U^\Delta(m)\}$ . On obtient ainsi l'égalité

$$\mathcal{P}_U^C(m) \cap M = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(C)} \{s \in \mathbb{Q}^\kappa / L(s) \geq \text{ord}_U^\Delta(m)\} \cap M.$$

Pour obtenir l'égalité il suffit de remplacer le réseau  $M$  par un réseau du type  $(1/R)M$ , avec  $R$  entier positif et d'appliquer 2.2.1 après un changement de base fini correspondant à ce réseau. On en déduit alors immédiatement la proposition. ♦

Notons  $\mathcal{P}(U)_x$  l'ensemble minimal des demi-droites  $\Delta$  dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  qui contient toutes les directions des  $\kappa - 1$  faces des polyèdres  $\mathcal{P}(m)$ , pour toute section  $m \in \mathcal{M}_x$ . D'après ce qui précède, un tel ensemble est fini.

2.4.2. COROLLAIRE: On a pour tout  $s \in \mathbb{Z}^\kappa \bar{U}_s = \bigcap_{L \in \mathcal{P}(U)} {}^L U_{L(s)}$ . ♦

Bien entendu,  $\mathcal{P}(U)$  est insuffisant pour reconstruire  $\Sigma$  si  $\kappa \geq 3$ . Cependant, même si  $\kappa = 2$ , il se peut *a priori* que l'éventail associé à  $\mathcal{P}(U)$  soit strictement contenu dans  $\Sigma$ . On a pourtant une manière dans ce cas de construire un éventail minimal  $\Sigma_{\min}$ :

$\Delta \in sk^1(\Sigma_{\min})$  si et seulement si ou bien  $\Delta$  est demi-droite de coordonnée, ou bien il existe un cône  $\Gamma$  de dimension 2 contenant  $\Delta$  dans son intérieur, et tel que si  $sk^1(\Gamma) = \{\Delta', \Delta''\}$ , on ait pour tout  $s \in \mathbb{Z}^2$

$${}^\Gamma U_s = {}^L U_{L'(s)} \cap {}^L U_{L(s)} \cap {}^{L'} U_{L''(s)}$$

et il existe  $s \in \mathbb{Z}^2$  avec  ${}^\Gamma U_s \neq {}^L U_{L'(s)} \cap {}^{L'} U_{L''(s)}$ .

2.5. La filtration polaire

Nous avons associé à une bonne  $\kappa$ -filtration  $U.(\mathcal{M})$  différents gradués  $gr^\Gamma(\mathcal{M})$  pour tout cône simplicial  $\Gamma$  de dimension  $\kappa$ . Les gradués intéressants sont ceux pour lesquels  $\Gamma$  est contenu dans un cône de  $\Sigma$ , éventail adapté à  $U.(\mathcal{M})$ . Le fait que  ${}^\Gamma U.(\mathcal{M})$  ne soit pas seulement une filtration bonne pour  ${}^\Gamma V.(\mathcal{M})$ , mais aussi provienne d'une bonne  $\kappa$ -filtration permet de munir chaque gradué  $gr^\Gamma(\mathcal{M})$  d'une nouvelle filtration, qu'on appellera, à l'instar de [Lê], filtration polaire.

Soit donc  $U.(\mathcal{M})$  une bonne  $\kappa$ -filtration de  $\mathcal{M}$ . Etant donnés deux cônes simpliciaux  $C' \subset C$  de dimension  $\kappa$  dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$ , on

a  $\check{C}' \subset \check{C}$  et par conséquent, pour tout  $s \in \mathbb{Z}^\kappa$  on a

$${}^cU_{<s} \subset {}^cU_{<s}.$$

De plus, si  $\Sigma$  est un éventail simplicial adapté à  $U_*(\mathcal{M})$  et si  $C$  et  $C'$  sont dans un même cône simplicial  $\Omega$  de  $\Sigma$ , on a

$${}^cU_{<s} \cap U_s = {}^cU_{<s} \cap U_s = {}^\Omega U_{<s} \cap U_s.$$

En effet, il existe une subdivision  $\Sigma'$  de  $\Sigma$  telle que  $C$  soit un élément de  $\Sigma'$ , d'où un morphisme

$$gr_s^\Omega(\mathcal{M}) \rightarrow gr_s^C(\mathcal{M})$$

qui est alors un isomorphisme (puisque  $\mathcal{R}_\Omega(\mathcal{M})$  est plat), et ce morphisme est celui induit par les inclusions naturelles

$$U_s(\mathcal{M})/{}^\Omega U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M}) \rightarrow U_s(\mathcal{M})/{}^C U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M}).$$

Fixons maintenant un cône simplicial  $\Gamma$  de dimension  $\kappa$  et supposons que  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M})$  soit plat. Nous allons définir une filtration  $P_\bullet gr_s^\Gamma(\mathcal{M})$ . Cette filtration est indexée par  $\mathcal{C}_\Gamma$ , ensemble des cônes convexes polyédraux, rationnels, contenus dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  et qui contiennent  $\Gamma$ . Nous verrons qu'elle est en fait indexée par un ensemble plus petit.

Soit  $\Omega \in \mathcal{C}_\Gamma$  quelconque. Posons

$$P_\Omega gr_s^\Gamma(\mathcal{M}) = \left[ \sum_{C \subset \Omega} {}^C U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M}) \right] / {}^\Gamma U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M})$$

où  $C$  est un cône simplicial de dimension  $\kappa$ . Remarquons que si  $C \subset \Gamma$ , on a  ${}^C U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M}) = {}^\Gamma U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M})$ . Remarquons aussi que l'on a

$$P_\Omega gr_s^\Gamma(\mathcal{M}) = \left[ \sum_{\{C \in \Sigma / C \cap \Omega \neq \emptyset\}} {}^C U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M}) \right] / {}^\Gamma U_{<s}(\mathcal{M}) \cap U_s(\mathcal{M})$$

Ainsi, le gradué de cette filtration est nul si  $\Omega$  n'est pas une union de cônes de  $\Sigma$ .

Supposons par exemple que  $\kappa = 2$ . Si  $\Gamma$  est un cône tel qu'une des faces de dimension 1 est une demi-droite de coordonnées, la filtration  $P$  est en fait



indexée par  $r \in \mathbb{Q}$ : à  $\Omega$  contenant  $\Gamma$ , on associe le rationnel  $r$  tel que si  $L \in \mathcal{L}(\Omega) \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$ , on ait  $L = ps_1 + qs_2$  avec  $r = p/q$ .

### 3. Bonnes $\kappa$ -filtrations pour les $\mathcal{D}$ -modules holonomes

#### 3.1. Polynômes de Bernstein

Nous restons dans la situation de 2.1 et nous supposons de plus que  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome. Soit  $U_\bullet(\mathcal{M})$  une bonne  $\kappa$ -filtration de  $\mathcal{M}$  (au voisinage de  $x \in X$ ). Nous noterons  $(t_1, \dots, t_\kappa)$  des coordonnées telles que  $Y_k = \{t_k = 0\}$  pour  $k = 1, \dots, \kappa$ .

3.1.1. THÉORÈME DE BERNSTEIN: *Soit  $\Delta$  une demi-droite dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  et soit  $L$  l'élément primitif de  $\Delta$ . Il existe alors un polynôme non nul  $b_L$  à une variable, à coefficients complexes, tel que l'on ait pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}$*

$$b_L(L(\partial_{t_1} t_1, \dots, \partial_{t_\kappa} t_\kappa)^L U_\lambda \subset {}^L U_{\lambda-1}$$

*Preuve:* Elle est analogue à la démonstration dans le cas où  $\kappa = 1$ . On interprète  $gr^L(\mathcal{D}_X)$  comme un anneau d'opérateurs différentiels, puisque c'est la fibre de l'anneau d'opérateurs différentiels relatifs  $\mathcal{R}_L(\mathcal{D}_X)$  en  $u = 0$  (rappelons que  $\mathcal{R}_L(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} {}^L V_\lambda(\mathcal{D}_X) u^\lambda$ ). Tout revient donc à montrer que  $gr^L(\mathcal{M})$  est holonome comme  $gr^L(\mathcal{D}_X)$ -module. On utilise pour cela

3.1.2. THÉORÈME DE KASHIWARA: *Soit  $t: Z \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction lisse sur une variété analytique complexe  $Z$ , et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{D}_{Z/\mathbb{C}}$ -module cohérent sur lequel la multiplication par  $t$  est injective (i.e. sans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ -torsion) et relativement holonome hors de  $Y = \{t = 0\}$ . Alors  $\mathcal{N}/t\mathcal{N}$  est holonome comme  $\mathcal{D}_Y$ -module.*

On applique 3.1.2. au module  $\mathcal{N} = \mathcal{R}_L(\mathcal{M})$  et à la déformation  $\varphi_L: \mathcal{X}_L \rightarrow \mathbb{C}$  obtenue à partir de  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^\kappa$  (définie en 2.1) par le changement de base

$$u \rightarrow (u^{a_1}, \dots, u^{a_\kappa})$$

où les  $a_k$  sont les coefficients de  $L$ . ♦

Comme l'énoncé de Kashiwara ([K<sub>2</sub>], thm 2.5) ne coïncide pas exactement avec celui de 3.1.2, nous allons montrer comment s'y ramener simplement.

Soit  $(y, t)$  des coordonnées locales sur  $X \approx Y \times \mathbb{C}$  et considérons l'inclusion  $i: X \rightarrow X \times \mathbb{C}$  définie par  $(y, t) \rightarrow (y, t, t)$ . On note  $\tau$  la coordonnée sur le facteur  $\mathbb{C}$  supplémentaire, de sorte que  $i(X) = \{t - \tau = 0\}$ . Soit  $\mathcal{N}'$  l'image directe de  $\mathcal{N}$  par l'inclusion  $i$ . On a

$$\mathcal{N}' = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{N} \otimes \partial_t^k \delta \quad \text{avec} \quad \delta := \delta(t - \tau).$$

Alors  $\mathcal{N}'$  est un  $\mathbb{C}\{y, \tau\}[\partial_y, \partial_\tau]$ -module, muni de plus d'une action de  $t$ , et l'hypothèse montre que  $\mathcal{N}'$  est sous-holonome hors de  $\{\tau = 0\}$ . De plus  $\mathcal{N}'$  vu comme  $\mathbb{C}\{y, t, \tau\}[\partial_y, \partial_\tau]$ -module est à support dans  $\{t - \tau = 0\}$ . Soit  $\mathcal{N}''$  le plus grand module sous-holonome contenu dans  $\mathcal{N}'$  ( $[K_1]$  (2.6)). Alors  $\mathcal{N}'/\mathcal{N}''$  est à support dans  $\{\tau = 0\}$  et pour toute section  $m'$  de  $\mathcal{N}'$  il existe un entier  $n$  tel que  $\tau^n m' \in \mathcal{N}''$ . On en déduit aussi qu'il existe  $N$  tel que  $t^N m' \in \mathcal{N}''$  et donc il existe  $M$  tel que  $t^M \mathcal{N}' \subset \mathcal{N}''$ . Comme la multiplication par  $t$  sur  $\mathcal{N}'$  est injective (puisque'elle l'est sur  $\mathcal{N}$ ), on en déduit que  $\mathcal{N}'$  est sous-holonome ou ce qui revient au même, que  $\mathcal{N}$  est relativement holonome. Alors, comme dans  $[K_1]$  (3.2), on en déduit que  $\mathcal{N}'/t\mathcal{N}$  est holonome. ♦

On peut alors, comme dans le cas où  $\kappa = 1$ , définir une bonne filtration canonique notée  ${}^L V_*(\mathcal{M})$  qui est telle que le polynôme de Bernstein associé ait ses zéros dans  $\{s \in \mathbb{C}/0 \leq s < 1\}$  (voir 1.1) et même interpoler cette filtration et l'indexer par  $\mathbb{C}$ .

**REMARQUE:** Soit  $\Sigma$  un éventail adapté à la bonne  $\kappa$ -filtration  $U_*(\mathcal{M})$ . Soit  $\Gamma$  un cône de  $\Sigma$ . Alors  $gr^\Gamma(\mathcal{M})$  est  $gr^\Gamma(\mathcal{D}_X)$ -holonome. Cela résulte aussi de 3.1.2.

Nous nous intéresserons maintenant aux questions suivantes: quel est le lien entre les zéros de  $b_L$  quand  $L$  varie, et d'autre part existe-t-il une bonne filtration  $U_*(\mathcal{M})$  telle que l'on ait  ${}^L U(\mathcal{M}) = {}^L V(\mathcal{M})$  pour tout  $L$ ?

### 3.2. Polyèdres de Newton–Bernstein

Considérons maintenant le comportement des polynômes de Bernstein  $b_L$ .

**3.2.1. PROPOSITION:** Soit  $U_*(\mathcal{M})$  une bonne  $\kappa$ -filtration de  $\mathcal{M}$ ,  $\Sigma$  un éventail adapté et  $\Gamma$  un cône de dimension  $\kappa$  de  $\Sigma$ . Soit  $\Delta$  une demi-droite dans  $\Gamma$  et  $L \in \mathcal{L}(\Delta)$ . Soit  $\mathcal{L}(\Gamma) = \{L_i, i = 1, \dots, \kappa\}$ . Posons  $L = \sum r_i L_i$  avec  $r_i \in \mathbb{Q}_+$ . Alors, pour tout zéro  $-\alpha \in \mathbb{C}$  de  $b_L$ , il existe pour  $i = 1, \dots, \kappa$  un zéro  $-\alpha_i$  de  $b_{L_i}$  avec  $\alpha = \sum r_i \alpha_i$ .

Remarquons que l'on peut exprimer la conclusion de 3.2.1 en disant que les hyperplans de  $\mathbb{C}^\kappa$  définis par  $L(s) + \alpha = 0$  pour  $-\alpha$  zéro de  $b_L$  contiennent

nécessairement le point d'intersection de  $\kappa$  hyperplans  $L_i(s) + \alpha_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, \kappa$  où  $-\alpha_i$  est un zéro de  $b_{L_i}$ .

*Preuve:* Supposons d'abord que les  $r_i$  soient entiers. On peut alors travailler dans le réseau  $N'$  de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  engendré par  $\mathcal{L}(\Gamma)$ . On a de plus

$${}^\Gamma U_s = \bigcap_{i=1}^{\kappa} {}^i U_{L_i(s)} \quad \text{en posant} \quad {}^i U = {}^{L_i} U,$$

de sorte que pour tout  $j \in \{1, \dots, \kappa\}$  on a

$$b_{L_j}(L_j(\partial_t t + s)) {}^\Gamma U_s \subset (\bigcap_{i \neq j} {}^i U_{L_i(s)}) \cap {}^j U_{L_j(s)-1}$$

et en particulier

$$b_{L_j}(L_j(\partial_t t + s)) {}^\Gamma U_s \subset {}^{L_j} U_{L_j(s)-1}.$$

Considérons pour  $N \gg 0$  le polynôme

$$\begin{aligned} B_L(L(\partial_t t + s)) &= \prod_{\{(\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa) / b_i(-\alpha_i) = 0 \forall i\}} (L(\partial_t t + s) + \sum_i r_i \alpha_i)^N \\ &= \prod_{\{(\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa) / b_i(-\alpha_i) = 0 \forall i\}} (\sum_i r_i (L_i(\partial_t t + s) + \alpha_i))^N. \end{aligned}$$

Alors, si  $N$  est assez grand,  $B_L = \sum_i b_{L_i} Q_i$ . On a donc pour tout  $s \in M'$

$$B_L(L(\partial_t t + s)) {}^\Gamma U_s \subset {}^{L_j} U_{L_j(s)-1}$$

et donc

$$B_L(L(\partial_t t + s)) {}^{L_j} U_{L_j(s)} \subset {}^{L_j} U_{L_j(s)-1},$$

d'où la proposition. Si les  $r_i$  ne sont pas entiers, on travaille dans un réseau  $N'$  de sorte que l'on ait dans ce réseau  $L = \sum_i r'_i L'_i$  avec  $r'_i$  entiers. ♦

Nous allons maintenant associer à toute section locale  $m \in \mathcal{M}_x$  un polyèdre canonique (il ne dépend que de  $\mathcal{M}_x$  et de  $Y_1, \dots, Y_\kappa$ ) dans  $M \otimes \mathbb{C}$ , que nous appellerons polyèdre de Newton–Bernstein. Définissons d'abord ce qu'est un polyèdre dans  $M \otimes \mathbb{C}$ . Rappelons que  $\mathbb{C}$  est muni de l'ordre

lexicographique donné par la décomposition  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ . Nous considérons des ensembles du type suivant:

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}, \alpha \in \mathcal{F}} \{s \in M \otimes \mathbb{C} / L(s) + \alpha \geq 0\}$$

où  $\mathcal{L}$  est un ensemble fini de formes linéaires à coefficients entiers positifs premiers entre eux, et  $\mathcal{F}$  est un ensemble fini de nombres complexes.

Soit  $m \in \mathcal{M}_x$  et  $L$  une forme linéaire comme ci-dessus. Nous pouvons définir

$$\text{ord}^L(m) = \inf \{\alpha \in \mathbb{C} / m \in {}^L V_\alpha(\mathcal{M})\} \quad (\text{voir 3.1}).$$

Posons alors  $\mathcal{P}(m) = \bigcap^L \{s \in M \otimes \mathbb{C} / L(s) \geq \text{ord}^L(m)\}$ .

3.2.2. THÉORÈME:  $\mathcal{P}(m)$  est un polyèdre. Plus précisément. Il existe un unique ensemble fini  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_x)$  de demi-droites  $\Delta$  dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  telles que pour tout germe  $m \in \mathcal{M}_x$  on ait

$$\mathcal{P}(m) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathcal{M}))} \{s \in M \otimes \mathbb{C} / L(s) \geq \text{ord}^L(m)\}$$

et qui soit minimal pour cette propriété. De plus,  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_x)$  est contenu dans le 1-squelette de tout éventail  $\Sigma$  associé à une bonne  $\kappa$ -filtration locale.

Nous appellerons  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_x)$  l'ensemble des pentes de  $\mathcal{M}$  au voisinage de  $x$  (relativement à  $Y_1, \dots, Y_\kappa$ ). Quand  $\kappa = 2$ , on peut aussi définir un éventail canonique  $\Sigma_{\text{can}}$  de  $\mathcal{M}$  (voir 2.3) qui n'est cependant pas *a priori* l'éventail d'une bonne bifiltration.

*Preuve:* Soit  $\Delta$  une demi-droite et  $L \in \mathcal{L}(\Delta)$ . Soit  $m \in \mathcal{M}_x$ . Rappelons ce qu'est  $\text{ord}^L(m)$ : on sait qu'il existe un unique polynôme minimal  $b_{L,m} \in \mathbb{C}[\lambda]$  à coefficient dominant égal à 1, tel que l'on ait

$$b_{L,m}(L(\partial_t t)) \cdot m = Pm \quad \text{avec} \quad P \in {}^L V_{-1}(\mathcal{D}_x).$$

On appelle  $\text{ord}^L(m)$  le nombre complexe  $\max \{\alpha \in \mathbb{C} / b_{L,m}(-\alpha) = 0\}$ . Cette définition ne dépend que de  $m$ . On peut aussi utiliser une autre bonne  $\kappa$ -filtration que  $V(\mathcal{D}_x)$ : soit  $U(\mathcal{M})$  une telle  $\kappa$ -filtration et  ${}^L U(\mathcal{M})$  la filtration associée. Soit  $\mu = \text{ord}_U^L(m) = \inf \{\lambda \in \mathbb{Z} / m \in {}^L U_\lambda(\mathcal{M})\}$ . Il existe alors un polynôme minimal  $b_{U,L,m} \in \mathbb{C}[\lambda]$  tel que l'on ait

$$b_{U,L,m}(L(\partial_t t)) \cdot m \in {}^L U_{\mu-1}(\mathcal{M}).$$

On a alors aussi (voir [L], [K-K<sub>2</sub>], [S<sub>1</sub>])

$$\text{ord}^L(m) = \max \{ \alpha \in \mathbb{C}/b_{U,L,m}(-\alpha) = 0 \}.$$

3.2.3. LEMME: Dans la situation de 3.2.1. on a

$$\text{ord}^L(m) \leq \sum_i r_i \text{ord}^{L_i}(m) \text{ pour tout } m \in \mathcal{M}_x.$$

C'est une conséquence immédiate de 3.2.1. puisque tous les  $r_i$  sont positifs ou nuls. ♦

On peut ainsi obtenir  $\mathcal{P}(m)$  en n'utilisant que le 1-squelette de  $\Sigma$ , ce qui prouve que  $\mathcal{P}(m)$  est un polyèdre. Le reste du théorème est alors clair. ♦

### 3.3. La bonne $\kappa$ -filtration canonique

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_x$ -module holonome. Nous avons défini pour toute demi-droite  $\Delta$  du premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  et  $L \in \mathcal{L}(\Delta)$  la bonne filtration canonique  ${}^L V.(\mathcal{M})$ . Nous supposons dans la suite que pour toute forme linéaire  $L$ , les zéros du polynôme de Bernstein  $b_L$  sont rationnels. Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais seule cette situation nous intéressera dans la suite.

D'autre part, étant donnée une réunion finie de réseaux  $R = \bigcup_x (\alpha + \mathbb{Z}^\kappa)$  dans  $\mathbb{Q}^\kappa$ , nous disons qu'une  $\kappa$ -filtration  $U.(\mathcal{M})$  indexée par  $R$  est bonne si chaque  $\kappa$ -filtration  $U_{s+\alpha}(\mathcal{M})$ ,  $s \in \mathbb{Z}^\kappa$ , est bonne. Etant donné  $R' \supset R$  une autre réunion finie de réseaux, et une bonne  $\kappa$ -filtration indexée par  $R$ , on peut étendre trivialement la  $\kappa$ -filtration  $U.$  en une  $\kappa$ -filtration indexée par  $R'$  en posant pour tout  $\sigma \in R'$

$$U_\sigma(\mathcal{M}) = \sum_{\{s \in R/s \leq \sigma\}} U_s(\mathcal{M})$$

C'est une bonne filtration indexée par  $R'$ . Si  $R = (1/R)\mathbb{Z}^\kappa$ , pour un certain entier  $R$ , la  $\kappa$ -filtration  $U.(\mathcal{M})$  indexée par  $R$  est bonne si et seulement si le module de Rees

$$\mathcal{R}_U(\mathcal{M}) = \bigoplus_{s \in R} U_s(\mathcal{M}) u^{Rs}$$

est  $\mathbb{C}[u]$ -cohérent. Enfin, on vérifie qu'on peut appliquer les résultats du §2 à une telle situation.

Etant donné un ensemble fini  $\mathcal{P}$  de formes linéaires à coefficients dans  $\mathbb{N}$  premiers entre eux et un nombre fini de rationnels  $\lambda$ , il existe une union finie de réseaux  $R$  de  $\mathbb{Q}^k$  telle que toute intersection non vide d'hyperplans de  $\mathbb{Q}^k$  d'équation  $L + \lambda = 0$ , avec  $L$  dans  $\mathcal{P}$  contienne un point de  $R$ . Dans la suite, les rationnels  $\lambda$  seront les opposés des racines des polynômes de Bernstein  $b_L$  pour  $L$  dans  $\mathcal{P}$ . Nous dirons alors que  $R$  est adapté à  $\mathcal{P}$ . D'après 3.2.1, il existe, pour  $\mathcal{M}$  holonome, un ensemble fini  $\mathcal{P}$  de formes linéaires tel que tout  $R$  comme ci-dessus, on ait la propriété suivante

(\*) pour toute forme linéaire  $\Lambda$ , si  $-\lambda$  est un zéro de  $b_\Lambda$ , alors  $\lambda + \mathbb{Z}$  est contenu dans  $\Lambda(R)$ .

On en déduit que pour tout  $s \in R$  il existe un entier  $N$  tel que

$$\Lambda(\partial_t + s)^N \wedge V_{\Lambda(s)}(\mathcal{M}) \subset \wedge V_{\Lambda(s)-}$$

où  $\Lambda(s)-$  désigne le prédécesseur de  $\Lambda(s)$  dans  $\Lambda(R)$ .

3.3.1. PROPOSITION: Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) Il existe une réunion finie  $R$  de réseaux de  $\mathbb{Q}^k$  satisfaisant (\*) et une bonne  $\kappa$ -filtration  $U_s(\mathcal{M})$  indexée par  $R$  telles que pour toute forme linéaire  $\Lambda$  (à coefficients dans  $\mathbb{N}$  premiers entre eux), on ait pour tout  $s \in R$

$$\wedge U_{\Lambda(s)}(\mathcal{M}) = \wedge V_{\Lambda(s)}(\mathcal{M}).$$

2) Il existe un ensemble fini  $\mathcal{P}$  de formes linéaires et une réunion finie  $R$  de réseaux de  $\mathbb{Q}^k$  adaptée à  $\mathcal{P}$  et satisfaisant (\*) tels que la  $\kappa$ -filtration indexée par  $R$  définie par

$$\forall s \in R, U_s(\mathcal{M}) = \bigcap_{L \in \mathcal{P}} {}^L V_{L(s)}(\mathcal{M})$$

soit bonne.

Considérons alors la  $\kappa$ -filtration saturée  $V_s(\mathcal{M})$  associée à la  $\kappa$ -filtration donnée par 1). Elle induit  ${}^L V$  dans chaque direction  $L$  et elle vérifie

$$V_s(\mathcal{M}) = \bigcap_L {}^L V_{L(s)}(\mathcal{M})$$

pour tout  $s \in R$ . Par suite elle est définie de manière unique. Nous l'appellerons  $\kappa$ -filtration canonique de  $\mathcal{M}$  pour le réseau  $R$  (si elle existe). Soit

$R' \supset R$  une réunion finie de réseaux de  $\mathbb{Q}^k$ . Alors  $R'$  satisfait encore (\*).  
 Etendons trivialement  $V_*(\mathcal{M})$  à  $R'$ . On obtient une bonne  $\kappa$ -filtration indexée par  $R'$ , qui induit dans chaque direction  $L$  la filtration  ${}^L V$  (indexée maintenant par  $R'$ ). La  $\kappa$ -filtration saturée associée à cette dernière est la  $\kappa$ -filtration canonique  $V'(\mathcal{M})$  pour le réseau  $R'$ . De plus,  $V_*(\mathcal{M})$  et  $V'(\mathcal{M})$  coïncident sur  $R$ .

*Preuve de 3.3.1:* L'implication 1)  $\Rightarrow$  2) résulte directement de 2.2. Montrons donc 2)  $\Rightarrow$  1). Supposons que  $U_s(\mathcal{M}) := \bigcap_{L \in \mathcal{P}} {}^L V_{L(s)}(\mathcal{M})$  soit bonne. Nous allons vérifier que pour toute forme linéaire  $\Lambda$  on a  ${}^\Lambda U_*(\mathcal{M}) = {}^\Lambda V_*(\mathcal{M})$ . Pour cela il suffit de montrer que pour tout  $s \in R$  il existe un entier  $N$  tel que

$$\Lambda(\partial_t + s)^N U_s(\mathcal{M}) \subset {}^\Lambda U_{\Lambda(s)-}.$$

En décomposant successivement  $\Lambda$  en  $\Lambda = \sum_L a_L L$  avec  $L \in \mathcal{P}$  et  $a_L \geq 0$ , on voit qu'il existe un entier  $N$  tel que

$$\Lambda(\partial_t + s)^N U_s(\mathcal{M}) \subset \sum_{\mathcal{P}'} \left( \left[ \bigcap_{L \in \mathcal{P}'} {}^L V_{L(s)}(\mathcal{M}) \right] \cap \left[ \bigcap_{L \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'} {}^L V_{L(s)-}(\mathcal{M}) \right] \right)$$

où  $\mathcal{P}'$  parcourt l'ensemble des parties maximales de  $\mathcal{P}$  telles que  $\Lambda$  ne soit pas dans le cône positif engendré par les éléments de  $\mathcal{P}'$ . Il suffit donc de trouver pour chaque  $\mathcal{P}'$  un élément  $\sigma$  de  $R$  qui satisfait les propriétés suivantes:

$$\Lambda(\sigma) < \Lambda(s)$$

$$L(\sigma) \geq L(s)- \quad \text{pour } L \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$$

$$L(\sigma) \geq L(s) \quad \text{pour } L \in \mathcal{P}'.$$

En effet, si un tel  $\sigma$  existe, on a

$$\left( \left[ \bigcap_{L \in \mathcal{P}'} {}^L V_{L(s)}(\mathcal{M}) \right] \cap \left[ \bigcap_{L \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'} {}^L V_{L(s)-}(\mathcal{M}) \right] \right) \subset U_\sigma$$

d'après les deux dernières familles d'inégalités et donc, d'après la première, le terme de gauche est contenu dans  ${}^\Lambda U_{\Lambda(s)-}$ .

Considérons l'ensemble convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{Q}^k$  défini par les deux dernières familles d'inégalités. Vérifions d'abord que son intersection avec l'ensemble des  $\sigma \in \mathbb{Q}^k$  vérifiant la première n'est pas vide. Si  $s$  est intérieur à  $\Omega$ , c'est clair. Si  $s \in \partial\Omega$  alors, au voisinage de  $s$ ,  $\Omega$  est défini seulement par les

inégalités  $L(\sigma) \geq L(s)$  pour  $L \in \mathcal{P}'$  puisqu'on a  $L(s) > L(s) -$  pour tout  $L$  et donc au voisinage de  $s$  les autres équations définissant  $\Omega$  sont satisfaites. Comme  $\Lambda$  n'est pas dans le cône positif engendré par  $\mathcal{P}'$ ,  $\Lambda(\sigma - s)$  change de signe au voisinage de  $s$  sur  $\Omega$ , d'où l'assertion.

Si  $\Lambda$  a un minimum sur  $\Omega$ , ce minimum est atteint sur une face minimale, et  $\Lambda$  est constant sur cette face. Comme il existe un point  $\sigma$  de  $\mathbb{R}$  sur une telle face (qui est intersection d'hyperplans d'équation  $L + \lambda = 0$ , avec  $L \in \mathcal{P}$  et  $-\lambda$  un décalé entier d'un zéro de  $b_L$ ), ce point  $\sigma$  convient.

Si  $\Lambda$  n'a pas de minimum sur  $\Omega$  et si les éléments de  $\mathcal{P}$  engendrent  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, on remplace  $\Omega$  par  $\Omega'$  défini à l'aide des inégalités précédentes et des inégalités  $L(\sigma) \leq \lambda_L$  pour  $\lambda_L \gg 0$ . Alors  $\Omega'$  est compact,  $\Lambda$  a un minimum sur  $\Omega'$  et on applique le cas précédent.

Si  $\mathcal{P}$  n'engendre pas  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  et  $\Lambda$  est dans le sous-espace engendré par  $\mathcal{P}$ , on se ramène au cas précédent.

Si  $\mathcal{P}$  n'engendre pas  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  et  $\Lambda$  n'est pas dans le sous-espace engendré par  $\mathcal{P}$ ,  $\Omega$  est un produit  $\Omega_1 \times E$  par un espace affine  $E$ , et sur  $\{s\} \times E$  il y a au moins un point  $\sigma$  de  $\mathbb{R}$  pour lequel  $\Lambda(\sigma) < \Lambda(s)$ . ♦

**DÉFINITION:** Nous dirons que  $\mathcal{M}$  est dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$  si  $\mathcal{M}$  est holonome et admet une bonne  $\kappa$ -filtration canonique (pour une réunion finie de réseaux  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{Q}^\kappa$ ).

**3.3.2. PROPOSITION:** Si  $\mathcal{M}$  est dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$ , tout sous-quotient l'est encore. De plus, tout morphisme de  $\mathcal{D}_X$ -modules dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$  est  $\kappa$ -strict pour les  $\kappa$ -filtrations canoniques.

*Preuve:* Soit  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{D}_X$ -modules holonomes et  $V.(\mathcal{M})$  la bonne  $\kappa$ -filtration canonique de  $\mathcal{M}$ . La  $\kappa$ -filtration induite sur  $\mathcal{M}''$  vérifie la propriété 1) de 3.3.1. d'après l'unicité de  ${}^L V$ , donc  $\mathcal{M}''$  est dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$ . De plus cette  $\kappa$ -filtration induite est saturée, par suite c'est bien  $V.(\mathcal{M}'')$ .

De même, la  $\kappa$ -filtration induite sur  $\mathcal{M}'$  est saturée et vérifie 2) de 3.3.1. Donc  $\mathcal{M}'$  est dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$ , et la  $\kappa$ -filtration induite est égale à  $V.(\mathcal{M}')$ . Enfin il est clair que la suite ci-dessus est stricte pour toute filtration  ${}^L V$ . ♦

Donnons maintenant quelques propriétés de la  $\kappa$ -filtration canonique pour  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$ .

**3.3.3. PROPOSITION:** Soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\Sigma$  un éventail adapté à  $V.(\mathcal{M})$  et  $\Gamma$  un cône simplicial de dimension maximum contenu dans un cône de  $\Sigma$ . Alors pour



$k \in \{1, \dots, \kappa\}$ , le morphisme

$$t_k: gr_s^{\Gamma V}(\mathcal{M}) \rightarrow gr_{s-1_k}^{\Gamma V}(\mathcal{M})$$

est un isomorphisme si  $s_k \neq 0$  et le morphisme

$$\partial_{t_k}: gr_s^{\Gamma V}(\mathcal{M}) \rightarrow gr_{s+1_k}^{\Gamma V}(\mathcal{M})$$

est un isomorphisme si  $s_k \neq -1$ . De plus, on a pour  $s \geq 0$  entier

$$V_s(\mathcal{M}) = V_s(\mathcal{D}_X) \cdot V_0(\mathcal{M}).$$

*Preuve:* L'opérateur  $\partial_{t_k} t_k + s_k$  est nilpotent sur  $gr_s^{\Gamma V}(\mathcal{M})$  et on peut utiliser le même argument que [S<sub>1</sub>] (2.1.7). ♦

REMARQUE: On voit aussi que si  $s_k$  est strictement négatif, la multiplication à gauche par  $t_k: V_s(\mathcal{M}) \rightarrow V_{s-1_k}(\mathcal{M})$  est injective

L'utilité de la  $\kappa$ -filtration canonique  $V.(\mathcal{M})$  est qu'elle permet de calculer les cycles proches ou évanescents itérés pour les fonctions  $t_1, \dots, t_\kappa$ . Soit par exemple à calculer  $\Psi_{t_1, s_1}(\Psi_{t_2, s_2}(\dots(\Psi_{t_\kappa, s_\kappa}(\mathcal{M})) \dots))$ . On choisit un éventail  $\Sigma$  adapté à  $V.(\mathcal{M})$ . D'autre part on considère dans  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  le drapeau

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}^\kappa)^* \supset \{\sigma_1^* = 0\} \supset \dots \supset \{\sigma_1^* = \dots = \sigma_{\kappa-1}^* = 0\} \\ \supset \{\sigma_1^* = \dots = \sigma_{\kappa-1}^* = \sigma_\kappa^* = 0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Il existe au plus un cône  $\Gamma$  de  $\Sigma$  qui contient une face de dimension  $k$  dans le plan de dimension  $k$  du drapeau pour tout  $k$ . Si un tel cône n'existe pas dans  $\Sigma$ , on raffine  $\Sigma$  pour qu'il existe. On a alors

$$\Psi_{t_1, s_1}(\Psi_{t_2, s_2}(\dots(\Psi_{t_\kappa, s_\kappa}(\mathcal{M})) \dots)) = gr_s^\Gamma(\mathcal{M}).$$

3.3.4. PROPOSITION: Soit  $\pi: X' \rightarrow X$  un morphisme propre et  $\mathcal{M}'$  un  $\mathcal{D}_{X'}$ -module holonome.

1) Si  $\pi$  est un plongement et si les hypersurfaces  $Y'_k := X' \cap Y_k$  sont lisses à croisements normaux dans  $X'$ ,  $\mathcal{M}'$  est dans  $\mathcal{B}(Y'_1, \dots, Y'_\kappa)$  si et seulement si  $\int_\pi \mathcal{M}'$  est dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$ .

2) Si  $\pi$  est propre et lisse, et si on pose  $Y'_\kappa = \pi^{-1}(Y_\kappa)$ , alors, si  $\mathcal{M}'$  est dans  $\mathcal{B}(Y'_1, \dots, Y'_\kappa)$ , tous les  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents  $\int_\pi^* \mathcal{M}'$  sont dans

$\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$  (on suppose, comme toujours, que  $\mathcal{M}'$  admet une bonne filtration globale  $F.(\mathcal{M}')$ ).

Indiquons la preuve de 2) que se fait comme dans le cas où  $\kappa = 1$  (voir [Me-S]). Soit  $V.(\mathcal{M}')$  la bonne  $\kappa$ -filtration canonique. Elle est définie globalement sur  $\mathcal{M}'$ . On peut définir une filtration de  $\int^i \mathcal{M}'$  par  $\text{Im}(\int^i V.(\mathcal{M}') \rightarrow \int^i \mathcal{M}')$ . C'est une bonne  $\kappa$ -filtration et on vérifie qu'elle induit sur chaque demi-droite la bonne filtration canonique relative à cette demi-droite. ♦

### 3.4. Un exemple

Dans ce paragraphe nous considérons une variété lisse  $X$  et sur cette variété  $\kappa$  fonctions analytiques  $f = (f_1, \dots, f_\kappa): X \rightarrow \mathbb{C}^\kappa$ . Soit  $i: X \rightarrow X \times \mathbb{C}^\kappa$  le plongement associé au graphe de ces  $\kappa$  fonctions et  $t = (t_1, \dots, t_\kappa)$  les coordonnées correspondantes sur  $\mathbb{C}^\kappa$ . Soit  $\mathcal{M}$  le  $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^\kappa}$ -module image directe (au sens des  $\mathcal{D}$ -modules) de  $\mathcal{O}_X$  par  $i$ . On note aussi  $Y_k = \{t_k = 0\}$ . Nous nous proposons de montrer ci-dessous

3.4.1. THÉORÈME: *Dans ces conditions,  $\mathcal{M}$  est dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_\kappa)$ .*

Nous allons d'abord montrer le théorème dans la situation suivante:  $X$  est un voisinage ouvert de l'origine dans  $\mathbb{C}^n$  muni de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et les fonctions  $f_k$  sont des monômes. Pour  $i = 1, \dots, n$  nous noterons  $\Lambda_i$  la forme linéaire sur  $\mathbb{Q}^\kappa$  pour laquelle le coefficient de  $s_k$  est l'exposant de  $x_i$  dans  $f_k$ . Nous poserons aussi  $\partial_i t = (\partial_{t_1} t_1, \dots, \partial_{t_\kappa} t_\kappa)$ .

Nous savons (voir par exemple [Bj], [Ph<sub>1</sub>]) que  $\mathcal{M}$  est le  $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^\kappa}$ -module engendré par un élément  $\delta(t - f)$  qui vérifie les relations

$$t_k \delta(t - f) = f_k \delta(t - f) \quad (k = 1, \dots, \kappa)$$

$$\partial_{x_i} \delta(t - f) = - \left( \sum_{k=1}^{\kappa} (\partial f_k / \partial x_i) \partial_{t_k} \right) \delta(t - f) \quad (i = 1, \dots, n).$$

En particulier on a

$$x_i \partial_{x_i} \delta(t - f) = -\Lambda_i(\partial_i t) \delta(t - f).$$

On peut écrire  $\mathcal{M} = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}^\kappa} \mathcal{O}_X \partial_i^s \delta(t - f)$ , avec  $\partial_i^s = \partial_{t_1}^{s_1} \dots \partial_{t_\kappa}^{s_\kappa}$ .

Soit  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ , où  $D_i = \{x_i = 0\} \subset X$  et  $\mathcal{O}_X[*D]$  le faisceau des fonctions méromorphes sur  $X$  à pôles le long de  $D$ . On peut considérer  $\mathcal{M}$  comme

un sous- $\mathcal{O}_X$ -module de  $\mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_{t_1} t_1, \dots, \partial_{t_\kappa} t_\kappa]$ . En effet on a

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}^\kappa} (1/f^s) \mathcal{O}_X[*D] (\partial_{t_1}^{s_1} t_1^{s_1}) \dots (\partial_{t_\kappa}^{s_\kappa} t_\kappa^{s_\kappa}) \delta(t - f),$$

avec  $f^s = f_1^{s_1} \dots f_\kappa^{s_\kappa}$ . Dans cette représentation, l'action de  $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^\kappa}$  est définie par

$$t_k(\varphi \otimes P(\partial_t t)) = f_k \varphi \otimes P(\partial_t t - \mathbf{1}_k) \quad (k = 1, \dots, \kappa)$$

$$\partial_{t_k}(\varphi \otimes P(\partial_t t)) = (1/f_k) \varphi \otimes (\partial_{t_k} t_k) P(\partial_t t + \mathbf{1}_k),$$

où on a noté  $\partial_t t + \mathbf{1}_k = (\partial_{t_1} t_1, \dots, \partial_{t_k} t_k + 1, \dots, \partial_{t_\kappa} t_\kappa)$ ,  $\mathcal{O}_X$  opère par multiplication sur  $\mathcal{O}_X[*D]$  et pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\partial_{x_i}[\varphi \otimes P(\partial_t t)] = \partial_{x_i} \varphi \otimes P(\partial_t t) - \sum_{k=1}^{\kappa} [(\partial_{x_i} \log f_k) \varphi \otimes (\partial_{t_k} t_k) P(\partial_t t)].$$

Nous allons maintenant calculer  $V_0(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^\kappa}) \cdot \delta(t - f) \subset \mathcal{M}$  en utilisant cette représentation. Soit  $p = (p_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  un multi-indice avec  $p_i \in \mathbb{Z}$  pour tout  $i$ . Posons

$$G_p \mathcal{O}_X[*D] = \left\{ \varphi \in \mathcal{O}_X[*D] / x^p \varphi := \left( \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} \right) \varphi \in \mathcal{O}_X \right\}.$$

3.2.4. LEMME:  $V_0(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^\kappa}) \cdot \delta(t - f) = \sum_p G_p \mathcal{O}_X[*D] \otimes J_{p,0}$  où  $J_{p,0}$  est l'idéal de  $\mathbb{C}[\partial_t t]$  engendré par le polynôme

$$A_{p, < 0}(\partial_t t) = \prod_{i=1}^n \prod_{m \in [0, p_i - 1] \cap \mathbb{Z}} (\Lambda_i(\partial_t t) + m).$$

Note: Nous faisons la convention qu'un produit indexé par l'ensemble vide est égal à 1.

Preuve: Il suffit d'utiliser les relations ci-dessus et la définition de  $V_0(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^\kappa})$ . ♦

Soit  $s \in \mathbb{Q}^\kappa$  et  $p$  un multi-indice entier. Nous définissons pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  les polynômes suivants:

$$P_{i,p,s}(\partial_t t) = \prod_{m \in [\Lambda_i(s), p_i - 1] \cap \mathbb{Z}} (\Lambda_i(\partial_t t) + m)$$

et

$$A_{p,s}(\partial_t t) = \prod_{i=1}^n P_{i,p,s}(\partial_t t).$$

Dans la suite, nous noterons  $R$  une réunion finie de réseaux de  $\mathbb{Q}^\kappa$  qui contient un point dans chaque intersection non vide d'hyperplans d'équation  $\Lambda_i = \lambda_i$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ , et (si ces équations n'y sont pas déjà)  $s_k = \lambda_k$  avec  $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ . Nous poserons pour  $s \in R$  tel que pour tout  $k$ ,  $s_k < 0$ :

$$\mathcal{V}_s(\mathcal{M}) = \sum_p G_p \mathcal{O}_X[*D] \otimes I_{p,s}$$

où  $I_{p,s}$  est l'idéal de  $\mathbb{C}[\partial_t t]$  engendré par  $A_{p,s}$ .

Nous allons maintenant définir  $\mathcal{V}_s(\mathcal{M})$  pour tout  $s \in R$ . Pour cela, étant donné un multi-indice entier  $p$ , on pose pour tout entier  $j$  et tout  $k \in \{1, \dots, \kappa\}$

$$m'(k, p, j) = \sum_{i \in \mathcal{J}_k} \text{card} [j, p_i - 1] \cap \mathbb{Z}$$

et

$$m(k, p, j) = \min \{1, m'(k, p, j)\},$$

où on a posé  $\mathcal{J}_k = \{i \in \{1, \dots, n\} / \Lambda_i \text{ est multiple de la forme linéaire } s_k\}$ . On définit le polynôme  $B_{p,s}(\partial_t t)$  par

$$B_{p,s}(\partial_t t) = \left[ \prod_{k=1}^{\kappa} \prod_{j \in [0, [s_k]] \cap \mathbb{Z}} (\partial_{t_k} t_k + j)^{m(k,p,j)} \right] A_{p,s}$$

où  $[s_k]$  désigne la partie entière de  $s_k$ . Soit alors  $I_{p,s}$  l'idéal de  $\mathbb{C}[\partial_t t]$  engendré par  $B_{p,s}$  et posons

$$\mathcal{V}_s(\mathcal{M}) = \sum_p G_p \mathcal{O}_X[*D] \otimes I_{p,s}.$$

### 3.4.3. LEMME: $\mathcal{V}_s(\mathcal{M})$ est une bonne $\kappa$ -filtration de $\mathcal{M}$ .

*Preuve:* Il est d'abord facile de voir que pour  $s < 0$ ,  $\mathcal{V}_s(\mathcal{M})$  est contenu dans  $V_0(\mathcal{D}_{X \times C^\kappa}) \cdot \delta(t - f)$ . Il suffit en effet de voir que dans ce cas le polynôme

$A_{p,s}$  est multiple de  $A_{p,<0}$ . En utilisant les relations données plus haut qui explicitent l'action de  $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^k}$ , on voit que l'on a, pour tout  $\sigma < 0$  et tout  $s \leq 0$ , la relation

$$\mathcal{V}_{\sigma+s}(\mathcal{M}) = V_s(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^k}) \cdot \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{M}).$$

Enfin, on vérifie par récurrence sur les parties entières des  $s_k$  que l'on a pour tout  $s$ , et si l'on pose  $s = s' + s''$ , avec  $s'_k = s_k$  si  $k_k \geq 0$  et  $s'_k = 0$  sinon, et  $s''_k = s_k$  si  $s_k \leq 0$  et 0 sinon,

$$\mathcal{V}_s(\mathcal{M}) = V_{s'}(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^k}) \cdot \mathcal{V}_{s''}(\mathcal{M}). \blacklozenge$$

Nous allons maintenant montrer que  $\mathcal{V}$  induit  ${}^L V_*(\mathcal{M})$  dans toute direction L. Nous ne vérifierons cependant pas que  $\mathcal{V}_*(\mathcal{M})$  est saturée, ce qui est inutile pour le résultat que nous avons en vue.

3.4.4. LEMME: *Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et pour toute forme linéaire  $\Lambda$  comme plus haut, il existe un entier  $N$  tel que l'on ait*

$$\Lambda(\partial_t + s)^N \mathcal{V}_s(\mathcal{M}) \subset {}^\Lambda \mathcal{V}_{\Lambda(s)-}(\mathcal{M}).$$

Il suffit de le vérifier pour  $s \leq 0$ . La preuve est analogue à celle de 3.3.1. Pour  $s \leq 0$ , soit  $\mathcal{P}_s$  l'ensemble des formes linéaires  $L$  qui vérifient une des propriétés

- Il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\Lambda_i(s) \in \mathbb{Z}$  et il existe  $\lambda_i \in \mathbb{N}$  tel que  $L = \lambda_i \Lambda_i$
- Il existe  $k \in \{1, \dots, \kappa\}$  tel que  $s_k = 0$  et  $L$  est la forme  $L(\sigma) = \sigma_k$ .

Soit  $\Lambda$  une forme linéaire. En décomposant comme en 3.3.1  $\Lambda$  en  $\Lambda = \sum_{L \in \mathcal{P}_s} a_L L$  avec  $a_L \geq 0$  on a, pour un entier  $N$  assez grand,

$$\Lambda(\partial_t + s)^N I_{p,s} \subset \sum_{\mathcal{P}'} I_{p,\mathcal{P}'}$$

où  $\mathcal{P}'$  est une partie maximale de  $\mathcal{P}_s$  telle que le cône positif qu'elle engendre ne contient pas  $\Lambda$  et  $I_{p,\mathcal{P}'}$  est l'idéal engendré par le polynôme

$$\prod_{i \in \Lambda_i} \prod_{\lambda_i L \in \mathcal{P}'} P_{i,p,s}(\partial_t) \prod_{\{i \in \Lambda_i = \lambda_i L \text{ et } L \notin \mathcal{P}'\}} \prod_{m \in [\Lambda_i(s), p_i - 1] \cap \mathbb{Z}} (\Lambda_i(\partial_t) + m)$$

Tout revient à trouver un point  $\sigma$  de  $\mathbb{R}$  qui vérifie les inégalités suivantes

- $\sigma \leq 0$ ,
- $\Lambda(\sigma) < \Lambda(s)$ .
- $L(\sigma) \geq L(s)$  pour  $L \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ ,
- $L(\sigma) \geq L(s) -$  pour  $L \in \mathcal{P}'$ .

On définit l'ensemble convexe  $\Omega$  par toutes ces inégalités sauf la seconde, et on peut appliquer le même argument qu'en 3.3.1. ♦

Nous avons démontré le théorème 3.4.1 dans ce cas particulier. Passons maintenant au cas général. Choisissons une modification propre  $\pi: X' \rightarrow X$  telle que la réunion des diviseurs  $(f_k \circ \pi)^{-1}(0)$  soit un diviseur à croisements normaux (Hironaka). Considérons les inclusions  $i': X' \rightarrow X' \times \mathbb{C}^k$  et  $i: X \rightarrow X \times \mathbb{C}^k$  associées au graphe de  $f \circ \pi$  et à celui de  $f$  respectivement. Si nous connaissons le résultat pour le module  $\mathcal{M}' = \int_{X'} \mathcal{O}_{X'}$ , nous en déduisons le résultat pour les  $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^k}$ -modules  $\int_{\pi}^* \mathcal{M}'$  où  $\pi$  désigne encore la projection  $X' \times \mathbb{C}^k \rightarrow X \times \mathbb{C}^k$ , d'après 3.3.3. Si  $\mathcal{M} = \int_X \mathcal{O}_X$ , on a un morphisme naturel

$$\mathcal{M} \rightarrow \int_{\pi} \mathcal{M}'$$

et  $\mathcal{M}$  est contenu dans  $\int_{\pi}^0 \mathcal{M}'$ . D'après 3.3.2 on voit que  $\mathcal{M}$  est dans  $\mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_k)$ . Il reste donc à montrer que  $\mathcal{M}'$  est dans  $\mathcal{B}(Y'_1, \dots, Y'_k)$ . La question est locale sur  $X'$ . Il existe alors des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $X'$  telles qu'on ait pour tout  $k$

$$f_k \circ \pi(x) = \lambda_k(x)g_k(x)$$

où  $\lambda_k$  est une unité et  $g_k$  un monôme. Soit  $i'': X' \rightarrow X' \times \mathbb{C}^k$  le plongement associé au graphe de  $g$  et  $p: X' \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$  la projection définie par  $(x, t_1, \dots, t_k) \rightarrow (\lambda_1 t_1, \dots, \lambda_k t_k)$ . Soit  $\mathcal{M}' = \int_{i'} \mathcal{O}_{X'}$ . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} i': X' & \xrightarrow{i'} & X' \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{\sim} X' \times \mathbb{C}^k \\ & & \downarrow p \qquad \qquad \downarrow q \\ & & \mathbb{C}^k \qquad = \qquad \mathbb{C}^k \end{array}$$

où  $q$  est la deuxième projection. Il suffit donc de montrer le résultat pour  $\mathcal{M}''$  et les fonctions  $p_1, \dots, p_k$ . Mais le résultat ne dépend que des hypersurfaces  $p_1^{-1}(0), \dots, p_k^{-1}(0)$  et pas des fonctions qui les définissent, de sorte que l'on peut remplacer  $p_k$  par  $t_k$  et appliquer 3.4.4. ♦

**Appendice**

(C. Sabbah, en collaboration avec F. Castro\*)

Dans cet appendice, nous allons donner des variantes du théorème d’aplatissement d’Hironaka, d’abord pour des  $\mathcal{D}$ -modules relatifs, puis pour des  $\mathcal{D}_V(\mathcal{D})$ -modules. Il sera utile aussi de s’intéresser à des multi-filtrations qui combinent une filtration  $F.(\mathcal{M})$  bonne pour la filtration par l’ordre des opérateurs et des multi-filtrations  $U.(\mathcal{M})$  étudiées au §2. On obtient, alors (A.2) un théorème de finitude de variétés caractéristiques introduites par Y. Laurent [La<sub>1</sub>].

*A.0. Aplatissement de  $\mathcal{D}$ -modules relatifs*

Nous considérons ici un morphisme analytique lisse  $f: X \rightarrow S$  entre deux espaces analytiques. Nous ne supposons pas que  $S$  est lisse. Le faisceau  $\mathcal{D}_{X/S}$  des opérateurs différentiels relatifs à  $f$  est cependant bien défini. Soit  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{D}_{X/S}$ -module cohérent et  $x$  un point de  $X$ . Nous poserons aussi  $s = f(x)$ . Nous allons démontrer l’existence d’un platificateur pour  $\mathcal{N}$  comme  $\mathcal{O}_S$ -module au voisinage de  $x$ . La démonstration est presque identique à celle donnée par Hironaka (voir [H<sub>1,2</sub>], [H–L–T]).

**A.0.1. THÉORÈME:** *Il existe un unique germe d’espace analytique  $(Z, s) \subset (S, s)$  qui vérifie la propriété suivante:*

*Pour tout morphisme  $\varphi: (S', s') \rightarrow (S, s)$  le  $\mathcal{O}_{S',s'}$ -module  $\mathcal{N}_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{S',s'}$  est plat si et seulement si le morphisme  $\varphi$  se factorise par  $(Z, s)$ . De plus, en tout point  $z \in Z$  au voisinage duquel l’idéal de  $Z$  dans  $S$  est principal, le morphisme naturel*

$$\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \rightarrow (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'})/\text{torsion}$$

*tensorisé par  $\mathcal{O}_{Z,z}/M_{Z,z}$  ( $M_{Z,z}$  est l’idéal maximal de  $Z$  en  $z$ ) a un noyau non nul.*

Donnons d’abord quelques conséquences de ce résultat, qui sont analogues à celles données par Hironaka dans le cas commutatif.

**A.0.2. COROLLAIRE:** *Supposons de plus  $S$  réduit. Alors  $\mathcal{N}$  est  $\mathcal{O}_S$ -plat au voisinage de  $x$  si et seulement si pour tout morphisme  $h: (D, 0) \rightarrow (S, s)$  où  $D$  est une disque dans  $\mathbb{C}$ , le module  $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_D$  est  $\mathcal{O}_D$ -plat au voisinage de  $x$ . ♦*

Nous avons aussi une autre caractérisation de la platitude:

**A.0.3. COROLLAIRE:** *Dans les mêmes conditions,  $\mathcal{N}$  est  $\mathcal{O}_S$ -plat au voisinage de  $x$  si et seulement si pour toute modification propre  $\pi: S' \rightarrow S$  et pour tout  $s' \in \pi^{-1}(s)$  le morphisme naturel  $\mathcal{N}_s \rightarrow (\pi^*(\mathcal{N})/\text{torsion})_{s'}$  est un isomorphisme. ♦*

De la même manière que dans [H<sub>1</sub>], [H–L–T] nous obtenons:

\* Depto. de Algebra, Universidad de Sevilla, Sevilla, Espagne.

A.0.4. THÉORÈME D'APLATISSEMENT:

1) Soit  $f: X \rightarrow S$  propre et lisse,  $S$  réduit, et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{D}_{X/S}$ -module cohérent. Il existe une modification propre  $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$  composée d'une suite propre d'éclatements telle que le transformé strict de  $\mathcal{N}$  par  $\pi$  soit  $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -plat.

2) Soit  $f: X \rightarrow S$  lisse,  $S$  réduit et  $L \subset f^{-1}(s)$  un compact. Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $s$  dans  $S$  et une famille finie de morphismes  $\pi_i: \tilde{S}_i \rightarrow S$ , chacun obtenu par composition d'une suite finie d'éclatements locaux, telle que la famille soit complète au-dessus de  $U$  et que pour tout  $i$  le transformé strict de  $\mathcal{N}$  par  $\pi_i$  soit  $\mathcal{O}_{\tilde{S}_i}$ -plat en tout point au-dessus de  $L$ . ♦

Nous renvoyons à *loc. cit.* pour les notions non ici définies et les démonstrations.

*Preuve de A.O.1.:* L'unicité découle de la propriété caractéristique du platificateur. Nous allons indiquer la démonstration de l'existence qui est identique à celle donnée par Hironaka [H<sub>2</sub>]. Choisissons une présentation locale de  $\mathcal{N}$  au voisinage d'un point  $x \in X_s$ :

$$\mathcal{D}_{X/S}^q \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^p \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

et soit  $\mathcal{I}$  l'image de  $\mathcal{D}_{X/S}^q$ . Soit  $M_s$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{S,s}$ . Restreignons la situation au-dessus de  $s$ : nous poserons  $\mathcal{N}'_s = \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{S,s}/M_s$  qui est un  $\mathcal{D}_{X_s}$ -module cohérent, où  $X_s = f^{-1}(s)$ . Soit  $\mathcal{I}'_s$  l'image de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{D}_{X_s}$ . Nous utiliserons maintenant comme dans [H<sub>2</sub>] p. 258–259 deux formes du théorème de division:

A.0.5. LEMME ([Ca]): *Etant donnée une forme linéaire  $L$  sur  $\mathbb{Q}^{2n}$  à coefficients positifs on peut associer à  $\mathcal{I}'_s$  un escalier  $E_L(\mathcal{I}'_s) = E$  dans  $\mathbb{N}^{2n} \times \{1, \dots, p\}$  tel que l'application induite par la projection naturelle*

$$\varphi_s: (\mathcal{D}_{X_s, \nu})_E^p \rightarrow \mathcal{N}'_{s,x}$$

*soit bijective.* ♦

Nous avons noté  $(\mathcal{D}_{X_s, \nu})_E^p$  l'ensemble des germes dont le nuage de Newton ne coupe pas  $E$ . Nous pouvons supposer de plus que  $(S, s)$  est contenu dans un germe d'espace lisse  $(T, s)$  et que le morphisme  $(X, x) \rightarrow (S, s)$  s'étend en un morphisme lisse  $(X', x) \rightarrow (T, s)$ . Notons  $\mathcal{I}'$  l'image inverse de  $\mathcal{I}'_s$  par l'application

$$\mathcal{D}_{X'/T}^p \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^p \rightarrow 0.$$

A.0.6. LEMME ([Ca]): *Soit  $P_1, \dots, P_k$  des éléments de  $\mathcal{I}'_s$  et  $L'$  une forme linéaire à coefficients  $> 0$ . Notons  $E = E_{L'}(P_1, \dots, P_k)$  l'escalier de  $\mathbb{N}^{2n+t} \times \{1, \dots, p\}$  défini par ces éléments (ici  $t = \dim T$  et  $n = \dim X' - \dim T$ ), la restriction de la projection définit une application surjective*

$$(\mathcal{D}_{X'/T, x})_E^p \rightarrow \mathcal{D}_{X'/T, x}^p / \mathcal{I}'_s. \text{ ♦}$$

De ces deux lemmes nous pouvons déduire comme dans [H<sub>2</sub>] prop. 9.

A.0.7. CONSÉQUENCE: Soit  $L$  une forme linéaire à coefficients positifs sur  $\mathbb{Q}^{2n}$  et  $E = E_L(\mathcal{I}'_s) \subset \mathbb{N}^{2n} \times \{1, \dots, p\}$ . Définissons  $(\mathcal{D}_{X/S, x})_E^p$  comme l'ensemble des germes dont



le nuage de Newton (dans les fibres de  $X \rightarrow S$ ) ne coupe pas  $E$ . Alors l'application

$$(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})_E^p \rightarrow \mathcal{N}_\setminus$$

est surjective.

*Preuve:* Choisissons des éléments  $Q_1, \dots, Q_k$  de  $\mathcal{S}$  dont les exposants relativement à  $L$  engendrent  $E$ . Relevons-les en des éléments  $P_1, \dots, P_k$  de  $\mathcal{S}'$ . Choisissons une forme linéaire  $L'$  sur  $\mathbb{N}^{2n+1}$  telle que l'on ait  $\exp_{L'}(P_i) = \exp_L(Q_i) \times \{0\}$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Alors on a  $E_L(P_1, \dots, P_k) = E_L(\mathcal{S}) \times \mathbb{N}'$  et on a une application surjective

$$(\mathcal{D}_{X'/T, \setminus})_{E \times \mathbb{N}'}^p \rightarrow \mathcal{N}_\setminus \rightarrow 0.$$

Enfin cette application se factorise par  $(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})_E^p$ . ♦

Nous en déduisons alors, comme dans [H<sub>2</sub>] prop. 10:

A.0.7. LEMME:  $\mathcal{N}$  est  $\mathcal{O}_S$ -plat au voisinage de  $x$  si et seulement si l'application

$$\varphi: (\mathcal{D}_{X/S, \setminus})_E^p \rightarrow \mathcal{N}_\setminus$$

est bijective.

*Preuve:* En effet, soit  $\mathcal{K} = \text{Ker } \varphi$ . Nous savons que  $\mathcal{K} / \mathcal{K} \cap M_s(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})^p = 0$  puisque  $\varphi_s$  est bijective. Mais de plus, comme  $\mathcal{N}$  est  $\mathcal{O}_S$ -plat, on a  $\mathcal{K} \cap M_s(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})^p = M_s \mathcal{K}$ . On en déduit donc que pour tout entier  $m$  on a

$$\mathcal{K} \subset M_s^m(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})_E^p.$$

Comme  $(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})_E^p$  est somme directe de  $\mathcal{O}_{S,s}$ -modules du type  $\mathcal{O}_{S,s}\{x_i, i \in I\}[\partial_{x_j}, j \in J]$  où  $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  sont des coordonnées locales sur  $X_s$  et  $I$  et  $J$  sont deux parties de  $\{1, \dots, n\}$ , on en déduit que  $\mathcal{K} = \{0\}$ .

Inversement, si  $\varphi$  est bijective, puisque  $(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})_E^p$  est  $\mathcal{O}_{S,s}$ -plat, on en déduit que  $\mathcal{N}_\setminus$  l'est aussi. ♦

L'idéal de  $Z$  dans  $S$  est par définition l'idéal engendré par tous les coefficients des éléments de  $\text{Ker } \varphi$  une fois développés sous la forme

$$\sum_{I, J} \sum_{a, b} A_{I, J, a, b} x_I^a \partial_{x_j}^b e_{I, J}$$

avec

$$(\mathcal{D}_{X/S, \setminus})_E^p = \bigoplus_{I, J} \mathcal{O}_{S,s}\{x_I\}[\partial_{x_j}] e_{I, J}$$

et  $A_{I, J, a, b} \in \mathcal{O}_{S,s}$ .

On finit alors la preuve comme dans [H<sub>2</sub>]. ♦

A.1. Théorème de finitude

Dans ce paragraphe, nous reprenons la situation du §2.1. De plus, nous notons  $F.(\mathcal{D}_X)$  la filtration de  $\mathcal{D}_X$  par l'ordre des opérateurs différentiels, et nous définissons une  $(\kappa + 1)$ -filtration de  $\mathcal{D}_X$  par

$$FV_s(\mathcal{D}_X) = F_{s_0}(\mathcal{D}_X) \cap V_s(\mathcal{D}_X)$$

avec  $s = (s_0, s')$ . Nous avons encore la notion de bonne filtration  $FU.(\mathcal{M})$  d'un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent. Nous nous proposons de démontrer

A.1.1. THÉORÈME: Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent,  $FU.(\mathcal{M})$  une bonne  $(\kappa + 1)$ -filtration de  $\mathcal{M}$  et  $x$  un point de  $X$ . Il existe alors un éventail simplicial  $\Sigma$  dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^{\kappa+1})^*$  tel que, pour tout cône  $\Gamma$  de  $\Sigma$ , le module de Rees  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M}_x)$  associé à  $FU.(\mathcal{M}_x)$  soit  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -plat, où  $M = \mathbb{Z}^{\kappa+1} \subset \mathbb{Q}^{\kappa+1}$ .

REMARQUES: On obtient immédiatement le théorème de finitude pour  $U.(\mathcal{M})$  comme suit: soit  $\Sigma$  un éventail pour  $FU.(\mathcal{M})$ . Quitte à raffiner  $\Sigma$ , on peut supposer que le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^\kappa)^* \subset (\mathbb{Q}^{\kappa+1})^*$  est une union de cônes de  $\Sigma$ . Alors la trace de  $\Sigma$  sur  $(\mathbb{Q}^\kappa)^*$  est un éventail adapté à  $U.(\mathcal{M})$ .

- Tout raffinement de  $\Sigma$  vérifie aussi la propriété du théorème (conservation de la platitude par changement de base).
- Soit  $M' \supset M$  un autre réseau. Etendons de manière triviale la  $(\kappa + 1)$ -filtration  $FU.(\mathcal{M})$  en une  $\kappa + 1$ -filtration indexée par  $M'$ : on pose par définition, pour  $s' \in M'$

$$FU_{s'}(\mathcal{M}) = \sum_{\{s \in M | s \leq s'\}} FU_s(\mathcal{M}).$$

Alors,  $\Sigma$  est adapté à  $FU.(\mathcal{M})$  indexée par  $M'$ .

La preuve du théorème A.1.1 est analogue à celle du théorème d'aplatissement A.0.4. Nous allons seulement vérifier qu'on peut la faire de manière équivariante. Pour cela nous allons utiliser l'analogue de A.0.1:

A.1.2. THÉORÈME: Soit  $\Gamma$  un cône simplicial dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^{\kappa+1})^*$ . Alors le germe de platificateur de  $\mathcal{R}_\Gamma(\mathcal{M}_x)$  à l'origine de  $S_\Gamma = \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$  existe et est défini par un idéal monomial. L'éclatement de cet idéal dans  $S_\Gamma$  définit une subdivision de  $\Gamma$ , qu'on peut supposer simpliciale après raffinement. Pour tout cône  $\Gamma'$  de cette subdivision, le morphisme naturel

$$\mathcal{R}_{\Gamma'}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]} \mathbb{C}[\check{\Gamma}' \cap M'] \rightarrow \mathcal{R}_{\Gamma'}(\mathcal{M})$$

a un noyau non trivial.

Une fois ce théorème démontré, on en déduit A.1.1 comme dans [H-L-T] (il n'y a pas de problème de globalisation ici, à l'inverse de [H<sub>1</sub>]). Nous obtenons de même les corollaires A.0.2 et A.0.3 sous forme équivariante.

Preuve de A.1.2: Nous supposons que  $\Gamma$  est de dimension  $\kappa + 1$ , les autres cas se traitent de même. Nous allons d'abord nous ramener au cas où  $\Gamma$  est le simplexe standard. Si  $N'$

désigne le sous-réseau de  $N$  engendré par  $\mathcal{L}(\Gamma)$ , posons  $M' = \{s \in \mathbb{Q}^{k+1} / L(s) \in \mathbb{N} \forall L \in N'\}$ . Nous pouvons étendre la filtration  $FU.(\mathcal{M})$  de manière triviale en une filtration indexée par  $M'$ . Posons

$$\mathcal{R}'_{\Gamma}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{s \in M'} {}^{\Gamma}FU_s(\mathcal{M})u^s.$$

*Assertion:* On a  $\mathcal{R}'_{\Gamma}(\mathcal{M}) = \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]} \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M']$ .

En effet,  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M']$  est un  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ -module libre. Plus précisément, on a une bijection de  $\check{\Gamma} \cap M' / \check{\Gamma} \cap M$  sur  $M' / M$  et si on choisit des éléments  $\sigma'_i$  de  $\check{\Gamma} \cap M'$  qui relèvent les éléments de  $M' / M$ , et qui vérifient la propriété: Si  $\sigma'_i = \sigma' + \sigma$  avec  $\sigma' \in \check{\Gamma} \cap M'$  et  $\sigma \in \check{\Gamma} \cap M$  alors  $\sigma = 0$ , on a

$$\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M'] = \bigoplus_i \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]u^{\sigma'_i}.$$

On a donc

$$\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M}) \bigoplus_{\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]} \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M'] = \bigoplus_i \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M})u^{\sigma'_i}$$

et on en déduit l'assertion.

Si nous avons démontré le théorème pour  $\mathcal{R}'_{\Gamma}(\mathcal{M})$  (par un changement de variables on est dans le cas du simplexe standard), nous avons un idéal monomial  $I_Z \subset \mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M']$  définissant le platificateur de  $\mathcal{R}'_{\Gamma}(\mathcal{M})$ . On vérifie alors que la partie invariante par le groupe de Galois du revêtement de  $S_{\Gamma}$  défini par  $M'$  vérifie les propriétés du platificateur  $I_Z$  pour  $\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathcal{M})$ , et que c'est un idéal monomial. Enfin, par fidèle platitude de  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M']$  sur  $\mathbb{C}[\check{\Gamma} \cap M]$ , le morphisme de restriction sur un cône de la subdivision a un noyau non nul.

Nous supposons donc que  $\Gamma$  est le simplexe standard. Comme en **A.0** choisissons une présentation locale de  $\mathcal{R}_{FU}(\mathcal{M})$ :

$$\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_X^q) \rightarrow \mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_X^p) \rightarrow \mathcal{R}_{FU}(\mathcal{M}) \rightarrow 0.$$

L'anneau  $\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}^{k+1}} FV_s(\mathcal{D}_X)u^s$  est aussi muni d'une filtration

$$\mathcal{F}_j \mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}^{k+1}} F_j(\mathcal{D}_X) \cap FV_s(\mathcal{D}_X)u^s$$

pour  $j \in \mathbb{N}$  et l'on a

$$gr^{\mathcal{F}} \mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_X) = \left[ \bigoplus_{s_0 \in \mathbb{Z}} gr^{F_{s_0}}(\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_X)) u_0^{s_0} \right] \otimes \mathbb{C}[u_0].$$

On identifiera cet anneau à  $\mathcal{R}_V(gr^F(\mathcal{D}_X)) \otimes \mathbb{C}[u_0]$  et on prendra garde au décalage de la graduation en  $u_0$  via cette identification. De plus, nous pouvons identifier  $\mathcal{R}_V(gr^F(\mathcal{D}_{X,x}))$  à un sous-anneau de l'anneau  $A = \mathbb{C}\{u, v, x\}[\eta, \xi]$  où  $u = (u_1, \dots, u_k)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_k)$ ,  $x = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$  et  $\xi = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ . Si  $f \in A$ , écrivons  $f = \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha, \beta}(x, \eta, \xi)u^{\alpha}v^{\beta}$  et posons  $d(f) = \sup \{ \max_k \alpha_k - \beta_k \mid f_{\alpha, \beta} \neq 0 \}$ . Alors  $f \in \mathcal{R}_V(gr^F(\mathcal{D}_{X,x}))$  si et seulement si  $d(f)$  est fini. Rappelons en effet que si on a choisi des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $X$  et si

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sont les coordonnées duales, on a les relations dans  $\mathcal{R}_V(\text{gr}^F(\mathcal{D}_{X,x}))$ :

$$x_k = u_k v_k \text{ et } \eta_k = u_k \zeta_k \quad (k = 1, \dots, \kappa).$$

Soit  $P$  un élément de  $\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x})$ . Une fois choisies des coordonnées comme ci-dessus, nous pouvons définir le nuage de Newton  $N(P) \subset \mathbb{N}^{2n+\kappa+1}$ . Soit  $\sigma_{\mathcal{F}}(P)$  le symbole par rapport à la filtration  $\mathcal{F}$  et  $\sigma_0$  le symbole dans  $A[u_0]$  par rapport au degré en  $u_0$ . Etant donnée une forme linéaire  $L$  sur  $\mathbb{Q}^{2n+\kappa+1}$  à coefficients positifs, nous définissons l'exposant privilégié  $\exp_L(P)$  comme  $\exp_L(\sigma_0(\sigma_{\mathcal{F}}(P)))$  et ce dernier terme comme  $\min_L(N(\sigma_0(\sigma_{\mathcal{F}}(P))))$ , minimum pour le bon ordre de  $\mathbb{N}^{2n+\kappa+1}$  défini par la forme linéaire  $L$  (voir par exemple [B–G]). Nous étendons ces définitions de manière naturelle à  $\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x}^p)$  pour  $p \in \mathbb{N}$ .

**A.1.3. LEMME:** Soit  $E \subset \mathbb{N}^{2n+\kappa+1} \times \{1, \dots, p\}$  un escalier,  $L$  une forme linéaire comme ci-dessus (nous supposons que  $L$  est la forme diagonale sur  $\mathbb{Q}^n$  correspondant à  $(\eta, \xi)$ ) et  $P_1, \dots, P_m$  des éléments de  $\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x}^p)$  tels que

$$\bigcup_{i=1}^m [\exp_L(P_i) + (\mathbb{N}^{2n+\kappa+1} \times \{1, \dots, p\})] = E.$$

Alors l'application naturelle

$$\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x}^p)_E \rightarrow \mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x}^p) / \sum \mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x}^p) \cdot P_i$$

est surjective.

Une fois ce lemme de division démontré, on voit comme en **A.0** que, quitte à choisir convenablement la forme  $L$ , l'idéal du platificateur est l'idéal engendré par les coefficients du noyau  $\mathcal{X}$  de cette application, une fois le terme de droite identifié à  $\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{M}_x)$ . Comme cette application est graduée, il en est de même de  $\mathcal{X}$ , et par suite l'idéal du platificateur est engendré par des monômes.

*Esquisse de preuve de A.1.3:*

Il s'agit de vérifier que l'on peut diviser dans  $\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x})$  si on sait le faire dans  $A[u_0]$ . Comme la filtration  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x})$  est discrète, on se ramène à diviser dans  $\text{gr}^{\mathcal{F}}(\mathcal{R}_{FV}(\mathcal{D}_{X,x}))$  (c'est à dire que dans le lemme ci-dessus on remplace  $\mathcal{R}_{FV}$  par  $\text{gr}^{\mathcal{F}}(\mathcal{R}_{FV})$ ). On se ramène ainsi à diviser dans  $\text{gr}^F(\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_{X,x})) \otimes \mathbb{C}[u_0]$  de manière compatible avec la graduation de  $\text{gr}^F(\mathcal{R}_V(\mathcal{D}_{X,x}))$ . Finalement, il suffit de vérifier que dans une division dans l'anneau  $A[u_0]$ , si l'on a  $f = \sum q_i f_i + r$ , avec  $N(r) \cap E = \emptyset$ , et si  $f$  et  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) satisfont la condition  $d(f) \in \mathbb{N}$  et  $d(f_i) \in \mathbb{N}$ , alors il en est de même des quotients et du reste, ce qui se vérifie facilement. ♦

## A.2. Application à l'irrégularité ([La<sub>1,2</sub>])

Soit, dans ce paragraphe,  $Y$  une sous-variété lisse d'une variété analytique complexe  $X$ . On ne suppose pas nécessairement que  $Y$  est de codimension 1 dans  $X$ . On peut encore définir une filtration relative à  $Y$ , notée  $V.(\mathcal{D}_X)$  de la même manière qu'au §1 (voir [L], [La<sub>1</sub>], [K<sub>3</sub>]).

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent et  $U.(\mathcal{M})$  une bonne filtration de  $\mathcal{M}$ . Il n'existe pas en général une bonne filtration  $F.(\mathcal{M})$ , bonne pour la filtration  $F.(\mathcal{D}_X)$  par le degré des opérateurs, telle que  $F.(\mathcal{M})$  induise sur  $\text{gr}^U(\mathcal{M})$  une bonne filtration (voir cependant [M.Sa<sub>4</sub>], qui étudie

des  $\mathcal{D}$ -modules holonomes qui admettent une telle filtration  $F, (\mathcal{M})$ , vérifiant quelques conditions supplémentaires).

Considérons (localement sur  $X$ ) une bonne bifiltration  $FU, (\mathcal{M})$  (bonne pour la bifiltration  $FV, (\mathcal{D}_X)$  avec  $FV_{k,i}(\mathcal{D}_X) = F_k(\mathcal{D}_X) \cap V_i(\mathcal{D}_X)$ ) qui induise la filtration  $U, (\mathcal{M})$ :

$$U_i(\mathcal{M}) = \bigcup_k FU_{k,i}(\mathcal{M}).$$

Nous allons rappeler la définition des variétés (ou plus exactement des cycles)  $Ch^{(L)}(\mathcal{M})$  et  $Ch^{(L')}(\mathcal{M})$  donnée par Y. Laurent dans le cadre micro-différentiel.

Soit  $L$  une forme linéaire sur  $\mathbb{Q}^2$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$  premiers entre eux. Considérons la filtration  ${}^L FV, (\mathcal{D}_X)$  et son gradué  $gr^L(\mathcal{D}_X)$ . Cet anneau est muni d'une filtration induite par  $F$  et d'une filtration induite par  $V$ , (si  $L$  n'est pas une des deux formes de coordonnées). Notons  $L_1(k, i) = k$  et  $L_2(k, i) = i$  les deux formes de coordonnées. Soit  $\Gamma$  un cône de dimension 2 avec  $L \in \mathcal{L}(\Gamma)$ . Nous poserons  $\mathcal{L}(\Gamma) = \{L, L'\}$ .

Considérons de même le gradué  $gr^L(\mathcal{M})$ . Si  $L' = aL_1 + bL_2$  avec  $a, b \geq 0$ , on obtient une filtration de  $gr^L(\mathcal{M})$  bonne pour  $F, (gr^L(\mathcal{D}_X))$  en posant

$$\mathcal{F}_k gr^L(\mathcal{M}) = \bigoplus_j \mathcal{F}_k gr^L_j(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_k gr^{L'}(\mathcal{M}) = ({}^\Gamma FU_{(k,i)}(\mathcal{M}) + {}^L U_{,-1}(\mathcal{M}) / {}^L U_{,-1}(\mathcal{M}))$$

où  $i$  est tel que  $L(k, i) = \lambda$ . Cette filtration dépend *a priori* du cône  $\Gamma$  choisi. Cependant, le cycle associé au gradué  $gr^{\mathcal{F}} gr^L(\mathcal{M})$  ne dépend pas du cône  $\Gamma$  si  $L$  est fixé (c'est un cycle dans l'espace cotangent du fibré normal de  $Y$  dans  $X$ ). On note ce cycle  $Ch^{(L)}(\mathcal{M})$ .

De même, si l'on a  $L' = aL_2 + bL_1$  avec  $a, b \geq 0$ , les mêmes formules permettent de définir une filtration  $\mathcal{V}, gr^L(\mathcal{M})$  bonne pour  $V, (gr^L(\mathcal{D}_X))$ , et le cycle obtenu est noté  $Ch^{(L')}(\mathcal{M})$ . Comme conséquence du théorème de finitude A.1.1 nous obtenons:

**A.2.1. THÉORÈME:** Soit  $x \in X$ . Il existe un éventail  $\Sigma$  dans le premier quadrant de  $(\mathbb{Q}^2)^*$  tel que, au voisinage de  $x$ , on ait les propriétés suivantes:

1. Si  $\mathbb{Q}_+ \cdot L$  n'est pas dans le 1-squelette de  $\Sigma$ ,  $Ch^{(L')}(\mathcal{M}) = Ch^{(L)}(\mathcal{M})$ .
2. Si  $\mathbb{Q}_+ \cdot L$  et  $\mathbb{Q}_+ \cdot L'$  sont à l'intérieur d'un même cône de dimension 2 de  $\Sigma$ , alors  $Ch^{(L')}(\mathcal{M}) = Ch^{(L)}(\mathcal{M}) = Ch^{(L'+L)}(\mathcal{M}) = Ch^{(L')}(\mathcal{M})$ .

*Preuve:* Choisissons au voisinage de  $x$  une bonne bifiltration  $FU, (\mathcal{M})$ . Soit  $\Sigma$  un éventail adapté à cette bifiltration (au voisinage de  $x$ ). Si  $\Delta$  est une demi-droite contenue dans l'intérieur d'un cône de dimension 2 de  $\Sigma$ , soit  $L \in \mathcal{L}(\Delta)$  et  $\Gamma', \Gamma''$  deux cônes adjacents le long de  $\Delta$ , tous deux contenus dans le même cône de  $\Sigma$ . Soit  $\mathcal{L}(\Gamma') = \{L, L'\}$  et  $\mathcal{L}(\Gamma'') = \{L, L''\}$ . Alors on a, avec les notations ci-dessus (voir 2.1.4):

$$gr^{\mathcal{F}} gr^L(\mathcal{M}) = gr^{\Gamma'}(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad gr^{\mathcal{V}} gr^L(\mathcal{M}) = gr^{\Gamma''}(\mathcal{M}).$$

Comme  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  sont contenus dans le même cône de  $\Sigma$ , on a aussi

$$gr^{\Gamma'}(\mathcal{M}) = gr^{\Gamma''}(\mathcal{M}),$$

d'où la première partie du théorème. La deuxième se montre de la même manière. ♦

## Références

- [Be] J. Bernstein, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. *Funct. An. and Appl.* 6 (1972).
- [Bj] J.-E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North Holland (1979).
- [B-G] J. Briançon et A. Galligo, Déformations distinguées d'un point de  $\mathbb{C}^2$  ou  $\mathbb{R}^2$ , *Astérisque* no. 7/8 (1973) 129–138.
- [Bry] J.L. Brylinski, Eventails et variétés toriques, Séminaire sur les singularités des surfaces. *Springer Lect. Notes in Math.* no 777 (1980) 248–288.
- [B-D-K] J.L. Brylinski, A. Dubson et M. Kashiwara, Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale, *C.R. Acad. Sc.* 293 (30/11/81) 573–576.
- [Ca] F. Castro, *Thèse de 3ème cycle*. Univ. de Paris VII, 1984.
- [C-K] E. Cattani et A. Kaplan, Polarized mixed Hodge structure and the monodromy of a variation of Hodge structure. *Invent. Math.* 67 (1982) 101–115.
- [Da] V.I. Danilov, The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys* 33 no 2 (1978) 97–154.
- [De<sub>1</sub>] P. Deligne, Le formalisme des cycles évanescents, SGA 7 II, exposés 13 et 14. *Springer Lect. Notes in Math.* no 340 (1973).
- [De<sub>2</sub>] P. Deligne, La conjecture de Weil, II, *Publ. Math. I.H.E.S.* 52 (1980) 137–252.
- [duB] P. Du Bois, Structure de Hodge sur la cohomologie évanescence, *Ann. Institut Fourier* 35 (1985) 191–213.
- [G] V. Ginzburg, Characteristic varieties and vanishing cycles. *Invent. Math.* 84 (1986) 327–403.
- [H<sub>1</sub>] H. Hironaka, Flattening theorem in complex analytic geometry. *Amer. J. of Math.* 97 no 2 (1975).
- [H<sub>2</sub>] H. Hiroaka, Stratifications and flatness, In: P. Holm (ed.) *Real and Complex Singularities*, Oslo 1976. Sijthoff and Noordhoff (1977).
- [H-L-T] H. Hironaka, M. Lejeune et B. Teissier, Aplatissement local, Singularités à Cargèse. *Astérisque* no 7/8 (1973).
- [K<sub>1</sub>] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, *Invent. Math.* 38 (1976) 33–53.
- [K<sub>2</sub>] M. Kashiwara, On the holonomic systems of differential equations II. *Invent. Math.* 48 (1978) 121–135.
- [K<sub>3</sub>] M. Kashiwara, Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations. *Springer Lect. Notes in Math.* no 1016 (1983).
- [K-K<sub>1</sub>] M. Kashiwara et T. Kawai, Second microlocalization and asymptotic expansions. *Springer Lect. Notes in Physics* no 126 (1980) 21–76.
- [K-K<sub>2</sub>] M. Kashiwara et T. Kawai, On the holonomic systems of differential equations (systems with regular singularities) III, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.* 17 (1981) 813–979.
- [K-K<sub>3</sub>] M. Kashiwara et T. Kawai, Micro-local analysis of Feynman amplitudes, Seminar on microlocal analysis. *Ann. of Math. Studies* 93 (1979) P.U.P.
- [L] G. Laumon, Transformation canonique et spécialisation pour les  $\mathcal{D}$ -modules filtrés. *Astérisque* no 130 (1985) 56–129.
- [La<sub>1</sub>] Y. Laurent, Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes. *Astérisque* no 130 (1985) 352–364.
- [La<sub>2</sub>] Y. Laurent, *Polygones de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels*. Prépubl. Orsay (1986).
- [La-Sc] Y. Laurent et P. Schapira, *Images inverses de modules microdifférentiels*. Prépubl. Univ. Paris Sud (1985).

- [Lê] Lê D.T., *The geometry of the monodromy theorem*. Volume dédié à C.P. Ramanujam, Springer Verlag (1978).
- [L-T] M. Lejeune et B. Teissier, Thèse, Univ. de Paris VII (1973).
- [Lo] F. Loeser, Exposants d'Arnold et exposants polaires, *Comptes Rendus Acad. Sc.* 296 Ser I (1984) 485–498.
- [M<sub>1</sub>] B. Malgrange, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence, *Astérisque* no 101–102 (1983) 243–267.
- [M<sub>2</sub>] B. Malgrange, *Séminaire Opérateurs Différentiels*, Prépubl. Institut Fourier, Grenoble (1975).
- [Me] Z. Mebkhout, Thèse, Univ. Paris VII, 1979.
- [Me-S] Z. Mebkhout, et C. Sabbah, Appendice au livre de Mebkhout.
- [Na] V. Navarro, *Sur la théorie de Hodge-Deligne*, Prépubl. Univ. Politecnica (Barcelona) 1986.
- [Ph<sub>1</sub>] F. Pham, Singularités des systèmes de Gauss-Manin. *Progress in Math.* 2. Birkhauser.
- [Ph<sub>2</sub>] F. Pham, Structure de Hodge mixte associée à un germe de fonction à point critique isolé, *Astérisque* no 101–102 (1983) 268–285.
- [Ph<sub>3</sub>] F. Pham, La descente des cols par les onglets de Lefschetz avec vues sur Gauss-Manin. *Astérisque* no 130 (1985) 11–47.
- [S<sub>1</sub>] C. Sabbah,  $\mathcal{D}$ -modules et cycles évanescents (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara), à paraître.
- [S<sub>2</sub>] C. Sabbah, Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux. *Astérisque* no 130 (1985) 161–192.
- [K.Sa] K. Saito, the higher residue pairings  $K_{\mathbb{F}}^{(k)}$  for a family of hypersurfaces singular points. *Proc. of Symposia in Pure Math.* 40 (1983) 441–463.
- [M.Sa<sub>1</sub>] M. Saito, Supplement to “Gauss-Manin Systems”. *Astérisque* no 101–102 (1983) 320–331.
- [M.Sa<sub>2</sub>] M. Saito, *On the structure of Brieskorn lattices*, Prépubl. Institut Fourier, Grenoble, (1983).
- [M.Sa<sub>3</sub>] M. Saito, Hodge filtrations via  $\mathcal{D}$ -modules. *Astérisque* no 130 (1985) 342–351.
- [M.Sa<sub>4</sub>] M. Saito, *Modules de Hodge*, à paraître.
- [Sc-St] J. Scherk and J. Steenbrink, On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber. *Math. Ann.* 271 (1985) 641–655.
- [St] J. Steenbrink, Semi-continuity of the singularity spectrum. *Invent. Math.* 79 (1985) 557–567.
- [St-Z] J. Steenbrink et S. Zucker, Variation of mixed Hodge structure, *Invent. Math.* 80 (1985) 489–542.
- [T<sub>1</sub>] B. Teissier, Polyèdre de Newton jacobien et équisingularité. *Séminaire sur les singularités*, Publ. Univ. Paris VII (1980).
- [T<sub>2</sub>] B. Teissier, Variétés toriques et polytopes, Séminaire Bourbaki, exp. 565, *Springer Lect. Notes in Math.* 901.
- [Va<sub>1</sub>] A.N. Varchenko, Asymptotic Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber. *Math. USSR Izv.* 18 (1982) 469–512.
- [Va<sub>2</sub>] A.N. Varchenko, On the semi-continuity of the singularity spectrum and an upper bound for the number of singular points of projective hypersurfaces, *Dokl. Akad. Nauk.* 270 (1983) 1294–1297.