

COMPOSITIO MATHEMATICA

PHILIPPE MAISONOBE

**Faisceaux pervers dont le support singulier
est une courbe plane**

Compositio Mathematica, tome 62, n° 3 (1987), p. 215-261

http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__62_3_215_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane

PHILIPPE MAISONOBE

Département de Mathématiques, Université de Nice, Parc Valrose, F-06034 Nice Cédex, France

Received 9 July 1985; accepted in revised form 21 August 1986

Plan

I. Coupures associées à Δ et énoncés des résultats	217
II. Triangles associés à un faisceau pervers relativement à Δ	221
III. Théorème d'équivalence de catégorie	246
IV. Description du complexe d'intersection	256
A– Appendice:	260
Deux lemmes sur les catégories triangulées.	

Notations

X	voisinage ouvert de \mathbb{C}^2
\mathbb{C}_X	catégorie des faisceaux de \mathbb{C} espaces vectoriels sur X
$D(\mathbb{C}_X)$	catégorie dérivée associée.
	Pour \mathcal{F}^\cdot complexe d'objet de \mathbb{C}_X , on note:
$h^i(\mathcal{F}^\cdot)$	son $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie
\mathcal{F}_x^\cdot	sa fibre en un point x de X
$\mathcal{F}^\cdot[k]$	complexe égal à \mathcal{F}^{k+n} en degré n dont la différentielle est celle de \mathcal{F}^\cdot multipliée par $(-1)^k$
E	faisceau constant de fibre E
Γ_A	foncteur de $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_X$ est égal pour A fermé au foncteur section à support A et pour A ouvert à i_*i^{-1} où $i: A \hookrightarrow X$ est l'inclusion ouverte
Γ_A	est aussi défini pour les localement fermés de façon que
	$\Gamma_A\Gamma_B = \Gamma_{A \cap B}$
$R\Gamma_A$	foncteur dérivé de Γ_A .

Introduction

Ce travail fait suite aux articles [3, 4, 5, 6, 7]. Son objet est de donner une description de la catégorie $\text{Perv}^\Delta(\mathbb{C}^2)$ des faisceaux pervers relativement à une courbe plane Δ ou du complexe des solutions d'un \mathcal{D} -Module holonome dont la variété caractéristique se projette sur Δ . L'équivalence entre ces deux points de vues résulte de [1, 12, 13, 18, 19, 20]. La méthode d'étude consiste à introduire une coupure H de \mathbb{C}^2 et une coupure M de la coupure H . Les propriétés de ces coupures sont telles que le foncteur $\tilde{\alpha}$

$$\mathcal{F}^\bullet \rightarrow (0 \rightarrow R^0\Gamma_{\mathbb{C}^2-H}\mathcal{F}^\bullet \rightarrow R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\bullet \rightarrow R^2\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet \rightarrow 0) = \tilde{\alpha}(\mathcal{F}^\bullet)$$

est un isomorphisme fonctoriel de $\text{Perv}^\Delta(\mathbb{C}^2)$. On décrit alors précisément $\tilde{\alpha}(\mathcal{F}^\bullet)$ en remarquant que c'est un complexe de faisceaux constructibles relativement à une stratification de (\mathbb{C}^2, H, M) . Afin de simplifier l'exposé, nous insisterons sur la version topologique. Nous renvoyons le lecteur à [8] pour sa version analytique et le lien entre les deux versions.

R. MacPherson et K. Vilonen, J.L. Verdier et L. Narvaez traitent par d'autres méthodes dans [15, 16, 17, 21, 24] de problèmes analogues.

0. Définition d'un faisceau pervers relativement à une courbe plane

Soit X un voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 et Δ un germe de courbe plane de $\mathbb{C}\{x, y\}$.

0.1. DÉFINITION: un élément \mathcal{F}^\bullet de $D(\mathbb{C}_X)$ est dit pervers relativement à la courbe plane Δ si les conditions I, II sont vérifiées

I $h^j(\mathcal{F}^\bullet)|_{X-\Delta}, h^j(\mathcal{F}^\bullet)|_{\Delta-\{0\}}, h^j(\mathcal{F}^\bullet)_0$ sont des systèmes locaux
 $h^j(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour $j \notin \{0, 1, 2\}$
 $h^1(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbb{C}^2-\Delta} = 0$ $h^2(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbb{C}^2-\{0\}} = 0$

II même condition que I pour $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{C}_X)$

Dans [3], on montre le résultat suivant:

0.2. PROPOSITION: Dans la définition 0.1, on peut remplacer les conditions II, au choix par les conditions IIbis ou IIter:

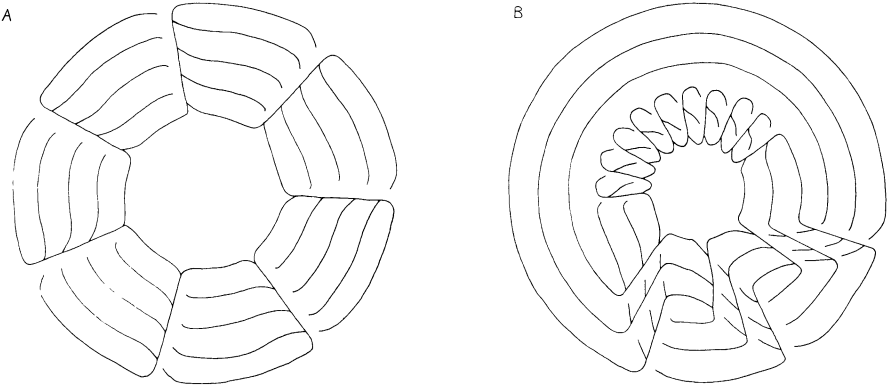
IIbis) $\forall x \in \Delta - \{0\} \quad R^2\Gamma_{\{x\}}\mathcal{F}^\bullet = 0$
 $R^0\Gamma_{\{0\}}\mathcal{F}^\bullet = R^1\Gamma_{\{0\}}\mathcal{F}^\bullet = 0.$

IIter) $R\Gamma_\Delta\mathcal{F}^\bullet$ n'a de la cohomologie qu'en degré ≥ 1
 $R\Gamma_{\{0\}}\mathcal{F}^\bullet$ n'a de la cohomologie qu'en degré $\geq 2.$

I. Coupures associées à Δ et énoncés des résultats

Soit S_ε la sphère de rayon ε centrée à l'origine dans \mathbb{C}^2 . Soit L un entrelacs de S_ε associé au germe de courbe plane Δ . On peut prendre $L = S_\varepsilon \cap \Delta$. Nous dessinerons L dans un tore de \mathbb{R}^3 d'axe Oz au moyen d'une projection stéréographique. Pour obtenir des dessins réalisables, on peut prendre pour L la tresse associée à Δ .

En A , on représente l'entrelacs associé à la courbe Δ d'équation $y^7 - x^5 = 0$ et en B à la courbe irréductible paramétrée par $(x = t^6, y = t^9 + t^{10})$.



Si $C(L)$ désigne le cône sur L de sommet l'origine de \mathbb{C}^2 , on a l'homéomorphisme de paires:

$$(\mathbb{C}^2, C(L)) \cong (\mathbb{C}^2, \Delta).$$

Désormais nous identifierons ces deux espaces topologiques.

I.1. Coupures associées à Δ

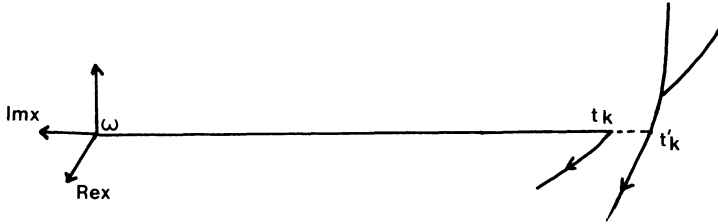
Notons ω l'origine de \mathbb{R}^3 . Quitte à faire un homéomorphisme de la paire (\mathbb{R}^3, L) , on peut supposer que la projection de centre ω de L sur une grande sphère de \mathbb{R}^3 centrée en ω n'a que des points doubles ordinaires. Notons δ le nombre de ces points doubles.

I.1.1. DÉFINITION DES OEILLETS: Associons à L , les δ points $(t_1, t_2, \dots, t_\delta)$ nommés oeillets qui vérifient la propriété suivante.

- 1) La demi-droite $[\omega, t_k[$ rencontre L en un unique autre point t'_k . Ce point est de plus extérieur au segment $[\omega, t_k[$.

2) Si l est un point de L distinct de t_k et t'_k , $[0, l[$ ne rencontre L qu'au point l .

Orientons maintenant L dans le sens des $\arg X$ croissant. Soit t_k un oeillet, \overrightarrow{T}_{t_k} et $\overrightarrow{T}_{t'_k}$ les tangentes orientées de L en t_k et t'_k . On peut supposer que tous les trièdres $(\overrightarrow{T}_{t_k}, \overrightarrow{T}_{t'_k}, \overrightarrow{0t_k})$ sont indirects pour l'orientation canonique de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ (c'est bien le cas si on prend pour L la tresse associée à Δ , voir aussi [8] page 20, remarque 1.5.6).



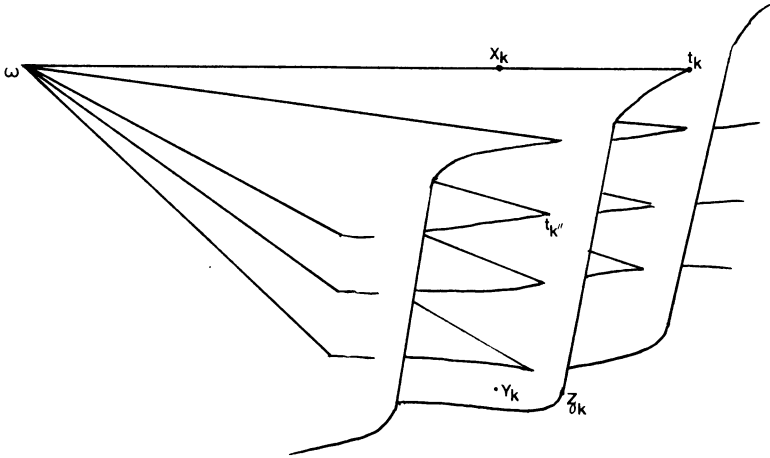
1.1.2. Notation: $c(L) = \bigcup_{l \in L} [\omega, l]$, le cône compact de centre ω de \mathbb{R}^3 sur L (plus exactement son image réciproque par la projection stéréographique).

$c(L)$ est stratifiée de la façon suivante:

$$\left(\mathbb{R}^3 - c(L), \quad c(L) - \bigcup_{k=1}^{\delta} [\omega, t_k] - L, \quad L - \bigcup_{k=1}^{\delta} \{t_k\}, \right. \\ \left. \bigcup_{k=1}^{\delta}]\omega, t_k[, \quad \bigcup_{k=1}^{\delta} \{t_k\}, \quad \omega \right).$$

Donnons quelques propriétés de ces strates

- 1) $\mathbb{R}^3 - c(L)$ est simplement connexe.
- 2) $L - \bigcup_{k=1}^{\delta} \{t_k\}$ a δ composantes connexes. En effet suivant notre orientation de chaque point t_k part une composante connexe de $L - \bigcup_{k=1}^{\delta} \{t_k\}$. Notons \downarrow_k cette composante connexe. On désignera par z_k un point de \downarrow_k .
- 3) $c(L) - \bigcup_{k=1}^{\delta} [\omega, t_k] - L$ a δ composantes connexes, on notera $c(k, L)$ la composante dont l'adhérence contient \downarrow_k et par y_k un point de $c(k, L)$.
- 4) On désignera enfin par x_k un point de $]0, t_k[$.



I.1.3. DÉFINITION: On appelle coupure associée à

$$H = C(c(L))$$

le cône de sommet l'origine de $c(L)$ dans \mathbb{C}^2 . On appelle accident de H :

$$M = C\left(\bigcup_{k=1}^{\delta} [\omega, t_k]\right).$$

I.1.4. DÉFINITION: On note Σ la stratification suivante de (\mathbb{C}^2, H, M) : $\Sigma = \{\mathbb{C}^2 - H, H - (M \cup \Delta), \Delta - (M \cap \Delta), M \cap \Delta - \{0\}, M - (M \cap \Delta) - C(\{\omega\}), C(\{\omega\}) - \{0\}, \{0\}\}$, $\Delta = C(L)$ et $C(\omega)$ désigne la demi-droite $[0, \omega[$. $X - H$ est simplement connexe; d'après les propriétés de la stratification de $c(L)$, $H - (M \cup \Delta)$, $\Delta - (M \cap \Delta)$, $M - M \cap \Delta - C(\{\omega\})$, $M \cap \Delta - \{0\}$ ont chacun δ composantes connexes.

I.1.5. Notations

	Composante connexe de	Isomorphe à	point de cette composante
H_k "cloison"	$H - (M \cup \Delta)$	$C(c(k, L) - \{0\})$	y_k
Δ_k "fil"	$\Delta - (M \cap \Delta)$	$C(-k) - \{0\}$	z_k
D_k "oeillet"	$M \cap \Delta - \{0\}$	$C(\{t_k\}) - \{0\}$	t_k
S_k "coins"	$M - \Delta \cap M - C(\{\omega\})$	$C([0, t_k]) - \{0\}$	x_k
$D = C(\{\omega\}) - \{0\}$			ω

I.2. *Enoncé des résultats* $X = \mathbb{C}^2$

I.2.1. **RÉSULTAT:** Si \mathcal{F}' est un faisceau pervers relativement à Δ , les complexes $R\Gamma_{X-H}\mathcal{F}'$, $R\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$, $R\Gamma_M\mathcal{F}'$ sont respectivement concentrés en degré 0, 1 et 2.

On déduit en utilisant comme pour la preuve du théorème I.2.4 les lemmes de l'appendice A que le foncteur $\tilde{\alpha}$:

$$\mathcal{F}' \rightsquigarrow \tilde{\alpha}(\mathcal{F}') = (0 \longrightarrow R^0\Gamma_{X-H}\mathcal{F}' \longrightarrow R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}' \longrightarrow R^2\Gamma_M\mathcal{F}' \longrightarrow 0)$$

est un isomorphisme fonctoriel de $\text{Perv}^\Delta(X)$.

I.2.2. **RÉSULTAT:** Si \mathcal{F}' est un faisceau pervers relativement à Δ , le complexe $\tilde{\alpha}(\mathcal{F}')$ est constructible par rapport à Σ .

Pour décrire un tel complexe constructible, on est amené à introduire la catégorie $C(\Delta)$.

I.2.3. **DÉFINITION:** Les objets de cette catégorie sont la donnée de $\delta + 2$ espaces vectoriels de dimension finie reliés par des morphismes

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightleftharpoons{u_k} & F_k & \xrightleftharpoons{u'_k} & G \\ & \xleftarrow{v_k} & & \xleftarrow{v'_k} & \end{array}$$

où k décrit $\{1, 2, \dots, \delta\}$ assujettis à vérifier les conditions

- 1) $v_k u_k + 1d \doteq M_k$ est un isomorphisme
- 2) $v'_k u'_{a(k)} = u_k v_{a(k)}$
 $v'_k u'_{b(k)} \doteq -\alpha_{b(k),k}$ est un isomorphisme
 $v'_k u'_k = 1d$
 $v'_k u'_c = 0$ si $c \notin \{k, a(k), b(k)\}$
- 3) $M_{a(k)} v_{b(k)} = v_k \alpha_{b(k),k}$
- 4) $\sum_{k=1}^{\delta} \tilde{M}_k v_k v'_k = 0$
- 5) $\sum_{k=1}^{\delta} u'_k u_k = 0$,

où $a(k)$ et $b(k)$ sont définis en II.3.8 et \tilde{M}_k est un produit de M_j défini en II.5.3.2.

I.2.4. **THÉORÈME:** *Les catégories $\text{Perv}^\Delta(X)$ et $C(\Delta)$ sont équivalentes.*

On démontrera ce théorème en décrivant à l'aide de $C(\Delta)$ le complexe constructible de I.2.2. On obtiendra ainsi un foncteur $\alpha: \text{Perv}^\Delta(X) \rightarrow C(\Delta)$

dont on construira un quasi-inverse β . Pour démontrer I.2.1, I.2.2, on supposera vérifiées des propriétés topologiques du type suivant: soit par exemple x un point de M , $B(x, \varepsilon) \cap (H - M)$ est une réunion disjointe d'ouverts de $H - M$ et ces ouverts se rétractent sur des points de $H - M$ en respectant la stratification Σ . Cela ne pose pas de problèmes vu la construction de H et M .

I.2.5. REMARQUE: "Un mot sur le cas analytique". Dans [8], on montre que l'on peut choisir pour H

$$H = \{(x, y - i\lambda); f(x, y) = 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^+\}$$

où $f(x, y) = 0$ est une équation de Δ dans un bon système de coordonnées.

II. Triangles associés à un faisceau pervers relativement à Δ

A tout faisceau pervers \mathcal{F}^\bullet de $\text{perv}^\Delta(X)$, associons les deux triangles:

$$\begin{array}{c} R\Gamma_M \mathcal{F}^\bullet \\ \downarrow \\ R\Gamma_H \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\bullet \\ \downarrow \\ R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\bullet \end{array}$$

II.1. Les complexes $R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\bullet$, $R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\bullet$, $R\Gamma_M \mathcal{F}^\bullet$ sont concentrés respectivement en degré 0, 1 et 2

Soit i l'inclusion ouverte de $X - H$ dans X . Rappelons que $\Gamma_{X-H} = i_* i^{-1}$. La condition de perversité I) de 0.1 entraîne:

$$i^{-1} \mathcal{F}^\bullet \cong i^{-1}(h^0(\mathcal{F}^\bullet)) \quad (\text{dans } D(\mathbb{C}_X)).$$

On a donc un isomorphisme fonctoriel en \mathcal{F}^\bullet :

$$R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\bullet \cong Ri_*(i^{-1}(h^0(\mathcal{F}^\bullet))).$$

$B(x, \varepsilon)$ désignant une boule de centre x et de rayon ε , on a:

$$R^k i_*(i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet))_x = \lim_{\varepsilon} R^k \Gamma(B(x, \varepsilon) - H, h^0(\mathcal{F}^\bullet)).$$

le deuxième isomorphisme se déduit de II.1.2). Soit x un point de \mathbb{C}^2 :

$$R^k j_* (j^{-1} R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_x = \lim_{\varepsilon} \rightarrow R^k \Gamma(B(x, \varepsilon) \cap (H - M), R^1 \Gamma_H \mathcal{F}').$$

En II.2, nous établissons que les restrictions de $R^0 \Gamma_{X-M} \mathcal{F}'$ aux strates de Σ sont des faisceaux localement constants d'espaces vectoriels de dimension finie. En utilisant la suite exacte longue du triangle horizontal et la condition I de la définition 0.1, on obtient que cette propriété est encore vraie pour $R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'$. Soit x un point de M , $B(x, \varepsilon) \cap (H - M)$ est une réunion disjointe d'ouverts de $H - M$. Ces ouverts se rétractent sur des points de $H - M$ en respectant la stratification Σ . Du lemme 2 de l'appendice 2 de [11], on déduit que la fibre de $R^k j_* (j^{-1} R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')$ en un point de M est somme de fibres de ce faisceau en des points de $H - M$. Comme pour x dans $H - M$ et k non nul:

$$R^k j_* (j^{-1} R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_x = 0, \text{ on a établi:}$$

II.1.3. $R \Gamma_{H-M} \mathcal{F}' \cong R^1 \Gamma_{H-M} \mathcal{F}'[-1].$

II.1.4. $R^1 \Gamma_{H-M} \mathcal{F}' \cong j_* j^{-1} R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'$

La suite exacte longue du triangle vertical se réduit donc à

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R^1 \Gamma_M \mathcal{F}' & \longrightarrow & R^1 \Gamma_H \mathcal{F}' & \longrightarrow & R^1 \Gamma_{H-M} \mathcal{F}' \\ & & & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\ & & R^2 \Gamma_M \mathcal{F}' & \longrightarrow & R^2 \Gamma_H \mathcal{F}' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

$R \Gamma_M \mathcal{F}'$ ne peut donc avoir des groupes de cohomologie non nulle qu'en degré 1 et 2. Appelons m l'inclusion fermée de M dans X .

Soit x un point de $M - \Delta - C(\{\omega\})$; comme x n'appartient pas à Δ et d'après la condition I de la définition 0.1, on a les isomorphismes:

$$R \Gamma_x \mathcal{F}' \cong R \Gamma_x h^0(\mathcal{F}') \cong h^0(\mathcal{F}')_x[-4].$$

En II.3, on montrera que $R^1 \Gamma_{H-M} \mathcal{F}'$ est constant en restriction aux strates de Σ . En utilisant la suite exacte longue du triangle vertical, cette propriété étant vérifiée pour $R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'$ et $R^2 \Gamma_H \mathcal{F}'$, on l'a déduit pour $R^1 \Gamma_M \mathcal{F}'$ et $R^2 \Gamma_M \mathcal{F}'$. On a donc:

$$R \Gamma_x (m^{-1} R^k \Gamma_M \mathcal{F}') \cong (R^k \Gamma_M \mathcal{F}')_x[-2].$$

Or $R\Gamma_x(m^{-1}R\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet) = R\Gamma_x\mathcal{F}^\bullet$ n'a de la cohomologie qu'en degré 4. La suite spectrale de ce foncteur composé montre que $(R^1\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet)_x = 0$. Par suite, $R^1\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet$ est supporté par $\Delta \cup C(\{\omega\})$.

Soit x un point de $C(\{\omega\})$, on a

$$R\Gamma_{\{x\}}(m^{-1}R^1\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet) = (R^1\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet)_x[-1].$$

D'autre part $R^0\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet = 0$; et comme x n'appartient toujours pas à Δ , $R\Gamma_{\{x\}}\mathcal{F}^\bullet$ est concentré en degré 4. La suite spectrale du foncteur composé $\Gamma_{\{x\}} = \Gamma_{\{x\}}(m^{-1}\Gamma_M)$ permet alors d'affirmer que $R^1\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet$ est supporté par Δ .

Soit x un point de $\Delta - \{0\}$, on conclut par le même argument que $R^1\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet$ est supporté par $\{0\}$, car d'après les conditions de perversité II de la proposition 0.3, $R\Gamma_x\mathcal{F}^\bullet$ n'a de la cohomologie qu'en degré supérieur ou égal à 3.

Comme $R^0\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet = 0$, on a donc:

$$R^1\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet \cong R^1\Gamma_{\{0\}}\mathcal{F}^\bullet.$$

Ce dernier faisceau est nul d'après la condition II de la proposition 0.3.

II.1.5. $R\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet \cong R^2\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet[-2].$

II.1.6. REMARQUE: Soit \mathcal{F}^\bullet un complexe vérifiant les conditions I de la définition 0.1. Alors $R\Gamma_{X-H}\mathcal{F}^\bullet$ est concentré en degré zéro et si $R\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\bullet$ et $R\Gamma_M\mathcal{F}^\bullet$ sont concentrés respectivement en degré 1 et 2, \mathcal{F}^\bullet est pervers relativement à Δ .

II.2. Le faisceau $R^0\Gamma_{X-H}\mathcal{F}^\bullet \cong \Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\bullet) = i_*i^{-1}(h^0(\mathcal{F}^\bullet))$

(i désigne l'inclusion ouverte: $X - H \hookrightarrow X$).

$$\begin{aligned} \text{Posons } E &= \Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\bullet)(X - H) \\ &= h^0(\mathcal{F}^\bullet)(X - H). \end{aligned}$$

$h^0(\mathcal{F}^\bullet)|_{X-H}$ est un faisceau constant, $X - H$ étant simplement connexe:

$$\Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\bullet) \cong i_*(E).$$

Pour ε assez petit et $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, $B(x, \varepsilon) - H$ se rétracte par déformation sur $B(x, \varepsilon') - H$. Si $n(x)$ désigne le nombre de composantes connexes de $B(x, \varepsilon) - H$, on en déduit

II.2.1. $\Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}^*)_x \cong E^{n(x)}$

Avec les notations de I.1.2, projetons $c(L)$ sur une sphère de \mathbb{R}^3 de grand rayon et de centre l'origine par rapport à l'origine de \mathbb{R}^3 . La courbe obtenue est un graphe à δ points doubles. Ce graphe est connexe, $B(\omega, \varepsilon) - H$ a donc $\delta + 2$ composantes connexes. En suivant les notations de I.1.5, on obtient le tableau:

x	Fibre de $R^0\Gamma_{X-H}\mathcal{F}^*$ en x
0	E
ω	$E^{\delta+2}$
x_k	E^4
t_k	E^2
y_k	E^2
z_k	E
$a \in X - H$	E

Soit x un point d'une strate de Σ , $B(x, \varepsilon) - H$ se rétracte par déformation en respectant Σ sur $B(x', \varepsilon') - H$, où x' est un point de la même strate de Σ que x , assez proche de x , et ε' assez petit. On en déduit la proposition II.2.2.

II.2.2. PROPOSITION: Les restrictions de $\Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}^*)$ aux strates de Σ sont des faisceaux localement constants d'espaces vectoriels de dimensions finie.

Le faisceau $\Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}^*)$ est donc déterminé par sa restriction aux strates de Σ et par les morphismes de recollement entre strates. Soit S et S' deux strates de Σ . Supposons S incidence à S' . Soit x un point de S , $B_1, B_2, \dots, B_{n(x)}$ les $n(x)$ composantes connexes de $B(x, \varepsilon) - H$. Pour y proche de x dans S , $B(y, \varepsilon') - H$ a $n(y)$ composantes connexes: $B'_1, \dots, B'_{n(y)}$. Pour ε' petit,

$$\forall j \exists i; B'_j \subset B_i.$$

II.2.3. PROPOSITION: Avec les notations précédentes, le morphisme de recollement entre la strate S et la strate S' s'exprime par

$$E^{n(x)} \longrightarrow E^{n(y)}$$

$$(e_1, e_2, \dots, e_{n(x)}) \longmapsto (e'_1, e'_2, \dots, e'_{n(y)}),$$

où $e'_j = e_i$ si $B'_j \subset B_i$.

II.3. Le faisceau $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$

Soit j l'inclusion de $H - M$ dans X , on a vu en II.1 que $R^1\Gamma_H\mathcal{F}'$ est un faisceau localement constant en restriction aux strates de Σ et que

$$R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}' \cong j_*j^{-1}R^1\Gamma_H\mathcal{F}'.$$

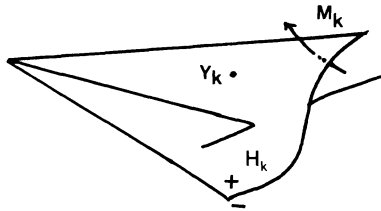
Le même argument que pour II.2.2 permet d'affirmer:

II.3.1. PROPOSITION: Les restrictions de $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$ aux strates de Σ sont des faisceaux localement constants d'espaces vectoriels de dimension finie.

II.3.2. DÉFINITION: $F_k = R^1\Gamma_H\mathcal{F}'(\Delta_k)$
 ($R^1\Gamma_H\mathcal{F}'|_{\Delta_k}$ est donc isomorphe au faisceau F_k).

II.3.3. DÉFINITION: $h^0(\mathcal{F}')|_{X-\Delta}$ est un système local. Soit M_k le morphisme de franchissement de H_k de sa face négative vers sa face positive associé à ce système local. Cette orientation est fixée par le dessin suivant:

dessin: dessin dans $\overline{C_0(H)} \cap S_\varepsilon$



Soit $B(y_k, \varepsilon)$ une boule centrée en y_k de rayon ε ; $B(y_k, \varepsilon) - H$ a deux composantes connexes: $B^+(y_k, \varepsilon)$ (resp. $B^-(y_k, \varepsilon)$) placé du côté positif de H_k (resp. négatif). $h^0(\mathcal{F}')$ étant un système local, on a les isomorphismes:

$$\begin{array}{ccc}
 h^0(\mathcal{F}')_{y_k} \xrightarrow{\cong} h^0(\mathcal{F}')(B^+(y_k, \varepsilon)) \xrightarrow{\cong} h^0(\mathcal{F}')(X - H) = E & & \\
 \parallel \downarrow & & \nearrow M_k \\
 h^0(\mathcal{F}')(B^-(y_k, \varepsilon)) & & \\
 \parallel \downarrow & & \\
 h^0(\mathcal{F}')(X - H) = E & &
 \end{array}$$

M_k est alors l'isomorphisme qui fait commuter ce diagramme.

D'autre part y_k n'appartenant pas à Δ , on a le diagramme commutatif entre suites exactes courtes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & h^0(\mathcal{F}^\cdot)_{y_k} & \longrightarrow & \Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\cdot)_{y_k} & \longrightarrow & (R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot)_{y_k} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\
 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E^+ \oplus E^- & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\
 & & & & e \longmapsto & (e, M_k^{-1}e) & (e, f) \longmapsto M_k f - e,
 \end{array}$$

où $E^+ = E^- = E$, le $+$ indiquant par exemple que le morphisme de recollement de $\Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\cdot)$ entre H_k et un point placé du côté positif de H_k est la projection:

$$E^+ \oplus E^- \longrightarrow E^+.$$

Du lemme des cinq, on déduit une identification de $(R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot)_{z_k}$ avec E et l'isomorphisme de faisceaux constants.

II.3.4. $R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot|_{H_k} \cong E$
 H_k et Δ_k étant disjoints de M , on a donc:

II.3.5. $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\cdot|_{\Delta_k} \cong F_k.$

II.3.6. $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\cdot|_{H_k} \cong E.$

Déterminons maintenant $(R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\cdot)_0$:

$$\begin{aligned}
 (R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\cdot)_0 &\cong \lim_{\varepsilon} R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot(B(0, \varepsilon) \cap (H - M)) \\
 &\cong \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \delta\}} \lim_{\varepsilon} R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot(B(0, \varepsilon) \cap (H_k \cup \Delta_k)).
 \end{aligned}$$

$B(0, \varepsilon) \cap (H_k \cup \Delta_k)$ se rétracte par déformation, en respectant Σ , sur $B(0, \varepsilon') \cap (H_k \cup \Delta_k)$ pour $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ et ε petit:

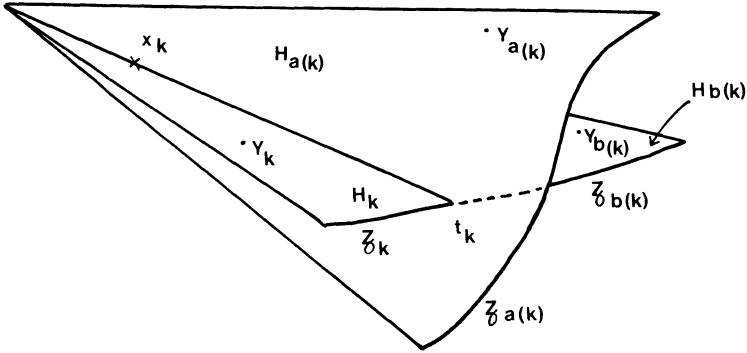
$$\lim_{\varepsilon'} R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot(B(0, \varepsilon') \cap (H_k \cup \Delta_k)) = R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot(B(0, \varepsilon) \cap (H_k \cup \Delta_k)).$$

$H_k \cup \Delta_k$ se rétracte par déformation sur un système fondamental de voisinage de Δ_k , on en déduit un isomorphisme canonique:

$$II.3.7. (R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}')_0 \cong \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \delta\}} R^1\Gamma_H\mathcal{F}'(\Delta_k) \cong \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \delta\}} F_k.$$

II.3.8. *Numérotation des strates de Σ*

Utilisons pour cela le dessin de $c(L)$:



(en suivant I.1.5).

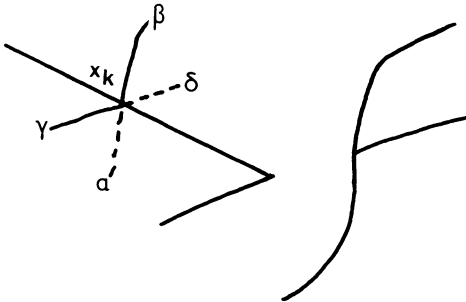
REMARQUE: Si le nombre de Milnor de la courbe est strictement supérieur à 1, c'est-à-dire si la courbe est non lisse ou différente de $y^2 - x^2 = 0$, les trois nombres de $\{1, 2, \dots, \delta\}$: $k, a(k), b(k)$ sont distincts.

II.3.9. *Calcul de la restriction de $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$ aux strates S_k, D_k, D*
(en utilisant les mêmes arguments de déformation-rétraction).

II.3.9.1. *Restriction à D_k*

$$(R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}')_{\Delta_k} \cong R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'(H_{a(k)}) \oplus R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'(H_{b(k)} \cup \Delta_{b(k)}) \\ \oplus R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'(H_k \cup \Delta_k) \cong E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k.$$

II.3.9.2. *Restriction à S_k : x_k désignant un point de $S_k, B(x_k, \epsilon) \cap (H - M)$*

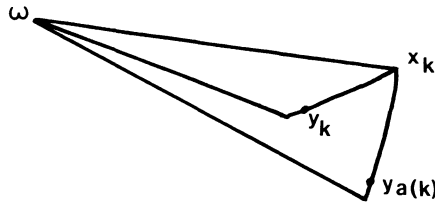


a quatre composantes connexes, numérotées dans le dessin suivant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ces composantes connexes sont incluses respectivement dans $H_{a(k)}, H_{a(k)}, H_k, H_{b(k)}$. On en déduit l'isomorphisme

$$(R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}')_{x_k} \cong E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma \oplus E_\delta,$$

où par exemple $E_\alpha = E$ et où le morphisme de recollement entre la strate S_k et un point proche de x_k sur la composante α est la projection sur E_α .

II.3.9.3. *Restriction à D .* ω étant un point de D , $B(\omega, \varepsilon) \cap (H - M)$ a 2δ composantes connexes. Pour tout k de $\{1, 2, \dots, \delta\}$ et pour x_k proche de ω sur S_k partent deux composantes connexes de $B(\omega, \varepsilon) \cap H - M$ l'une contenue dans H_k , l'autre dans $H_{\alpha(k)}$.



On obtient ainsi:

$$(R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}')_\omega \cong \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} (E_k \oplus E_{\alpha(k)}),$$

où $E_k = E_{\alpha(k)} = E$ et où le morphisme de recollement du faisceau $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$ entre la strate D et le point y_k est la projection sur E_k .

II.3.10. *Les morphismes de recollement entre strates du faisceau $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$*

II.3.10.1. DÉFINITION: Pour tout k de $\{1, 2, \dots, \delta\}$, on note $v_k: F_k \rightarrow E$ le morphisme de recollement du faisceau $R^1\Gamma_H\mathcal{F}'$ entre les strates Δ_k et H_k déduit des isomorphismes II.3.2 et II.3.4.

II.3.10.2. REMARQUE: A l'aide de E, F_k, v_k , on reconstitue un faisceau \mathcal{H} isomorphe à $R^1\Gamma_H\mathcal{F}'|_{H-M}$. On a alors

$$R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}' \cong j_*(\mathcal{H}).$$

Par les isomorphismes II.3.5 et II.3.6, le morphisme de recollement de $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$ entre les strates Δ_k et H_k s'exprime par le morphisme:

$$v_k: F_k \longrightarrow E.$$

Les morphismes de recollement de $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}$ entre les strates (D, H_k) , (D, S_k) , (S_k, H_k) , $(S_k, H_{a(k)})$, $(S_k, H_{b(k)})$ et (D_k, Δ_k) ; $(D_k, \Delta_{b(k)})$, $(D_k, H_{a(k)})$ s'expriment avec nos identifications par des projections évidentes. De même pour le morphisme entre les strates $(0, \Delta_k)$.

Etant donné leur commutativité, les morphismes de recollement entre les autres strates s'expriment à l'aide des v_k .

II.3.10.3. Morphisme de recollement de $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}$ entre (D_k, H_k) , $(D_k, H_{b(k)})$ et (D_k, S_k)

Ces morphismes s'expriment respectivement par:

$$E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k \longrightarrow E$$

$$(e, f_{b(k)}, f_k) \longmapsto v_k(f_k)$$

$$E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k \longrightarrow E$$

$$(e, f_{b(k)}, f_k) \longmapsto v_{b(k)}(f_{b(k)})$$

$$E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k \longrightarrow E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma \oplus E_\delta$$

$$(e, f_{b(k)}, f_k) \longmapsto (e, e, v_k(f_k), v_{b(k)}(f_{b(k)}).$$

II.3.10.4. Morphisme de recollement entre $(0, H_k)$, $(0, D)$, $(0, D_k)$ et $(0, S_k)$

Ces morphismes s'expriment respectivement par:

$$\bigoplus_{c \in \{1, \dots, \delta\}} F_c \longrightarrow E$$

$$(f_c) \longmapsto v_k(f_k)$$

$$\bigoplus_{k \in \{1, \dots, \delta\}} F_k \longrightarrow \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \delta\}} (E_k \oplus E_{a(k)})$$

$$(f_k) \longmapsto (v_k(f_k), v_{a(k)}(f_{a(k)}))$$

$$\bigoplus_{c \in \{1, 2, \dots, \delta\}} F_c \longrightarrow E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k$$

$$(f_c) \longmapsto (v_{a(k)}(f_{a(k)}), f_{b(k)}, f_k)$$

$$\bigoplus_{c \in \{1, 2, \dots, \delta\}} F_c \longrightarrow E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma \oplus E_\delta$$

$$(f_c) \longmapsto (v_{a(k)}(f_{a(k)}), v_{a(k)}(f_{a(k)}), v_k(f_k), v_{b(k)}(f_{b(k)}))$$

II.4. Le morphisme:

$$U: R^0\Gamma_{X-H}\mathcal{F}^\cdot \cong \Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\cdot) \longrightarrow j_*(R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot|_{H-M}) \cong R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\cdot$$

U est la composée $\bar{U}\bar{U}$, où \bar{U} et \bar{U} apparaissent dans les suites exactes longues de nos deux triangles

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\cdot) & \xrightarrow{\bar{U}} & R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot \\ & & \downarrow \bar{U} \\ & & j_*(R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot|_{H-M}). \end{array}$$

II.4.1. Restriction de U à Δ_k (définition): On note

$$u_k: E \longrightarrow F_k$$

le morphisme qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\cdot)_{z_k} & \xrightarrow{U_{z_k}} & j_*(R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot|_{H-M})_{z_k} \\ \parallel & & \parallel \\ E & \xrightarrow{u_k} & F_k \end{array}$$

II.4.2. Restriction de U à H_k

Cette restriction est donnée par l' isomorphisme II.3.4, elle s'exprime par la formule:

$$E^+ \oplus E^- \longrightarrow F_k$$

$$(e, f) \longmapsto M_k f - e.$$

En utilisant la commutativité de U avec les morphismes de recollement entre les strates de Σ , on obtient les restrictions de U aux autres strates, en fonction de E, F_k, M_k, u_k .

II.4.3. Fibre à l'origine de U

$$E \xrightarrow{\oplus u_k} \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} F_k.$$

II.4.4. Restriction de U à D_k

Avec la numérotation de II.3.8, soit t_k un point de D_k .

$$\Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}')_{t_k} \cong E_{b(k)} \oplus E_k,$$

où $E_{b(k)} = E_k = E$ et où le morphisme de recollement de $\Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}')$ entre D_k et la strate $\Delta_{b(k)}$ (par exemple) est la projection sur $E_{b(k)}$.

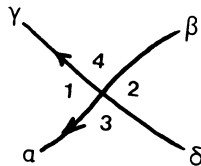
La restriction cherchée s'exprime par

$$E_{b(k)} \oplus E_k \longrightarrow E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k$$

$$(e_{b(k)}, e_k) \longmapsto (M_{a(k)} e_{b(k)} - e_k, u_{b(k)}(e_{b(k)}), u_k(e_k)).$$

II.4.5. Restriction de U à S_k

Soit x_k un point de S_k , numérotions par $\{1, 2, 3, 4\}$ les composantes connexes de $X - H$ au voisinage de x_k



conformément à la numérotation de II.3.9.2. Notre morphisme s'exprime par:

$$E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4 \longrightarrow E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma \oplus E_\delta$$

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \longmapsto (M_{a(k)} e_3 - e_1, M_{a(k)} e_2 - e_4, M_k e_1 - e_4, M_{b(k)} e_3 - e_2).$$

II.4.6. Restriction de U à D

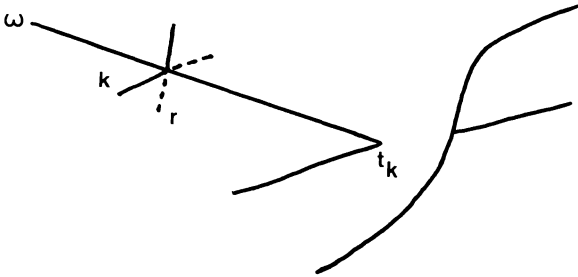
Soit ω un point de D . Pour x_k appartenant à S_k proche de ω , le secteur (γ, α) délimite une composante connexe de $B(\omega, \varepsilon) - H$. Indignons par k cette composante connexe. Indignons par I (resp. II) la composante connexe de $B(\omega, \varepsilon) - H$ contenant un point proche de ω , sur l'axe des z et au-dessus

de ω , dans $c(L)$ (resp. en dessous). U_ω s'exprime par:

$$E_I \oplus E_{II} \oplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} E_k \longrightarrow \oplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} (E_k \oplus E_{a(k)})$$

$$(e_1, e_2, e_k) \longrightarrow (\varepsilon_k, \varepsilon_{a(k)})$$

où par exemple si $H_{a(k)}$ est adhérent aux composantes r et k .



$$\varepsilon_{a(k)} = M_{a(k)} e_r - e_k.$$

II.4.7. Condition exprimant que U est un morphisme de faisceau

La commutativité de U au morphisme de recollement entre les strates Δ_k et H_k se traduit par la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} e & E & \xrightarrow{u_k} F_k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow v_k \\ (e, e) & E \oplus E & \longrightarrow E \end{array}$$

$$(e, f) \longmapsto M_k f - e$$

Cette commutativité s'exprime par la relation

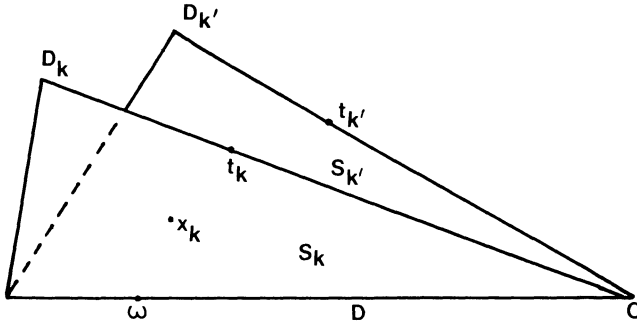
$$v_k u_k + 1d = M_k.$$

Nous laissons le lecteur se convaincre que le fait que U commute aux recollements entre les autres strates n'apporte aucune autre relation.

II.5. Le faisceau $R^2 \Gamma_M \mathcal{F}'$

Ce faisceau est supporté par M . En utilisant la suite exacte longue de l'un de nos triangles, on déduit que comme $h^2(\mathcal{F}')$, $R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'$, $R^1 \Gamma_{H-M} \mathcal{F}'$, le

faisceau $R^2\Gamma_M\mathcal{F}'$ est constant en restriction aux strates de Σ : (0) , D , D_k , S_k incluses dans M .



dessin d'un
morceau de M

II.5.1. Restriction de $R^2\Gamma_M\mathcal{F}'$ à S_k

Considérons les deux suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & (R^1\Gamma_H\mathcal{F}')_{x_k} & \xrightarrow{\bar{U}_{x_k}} & j_*(R^1\Gamma_H\mathcal{F}'|_{H-M})_{x_k} & \longrightarrow & (R^2\Gamma_M\mathcal{F}')_{x_k} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \nearrow U_{x_k} & & \\
 E^4 & \cong & \Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}')_{x_k} & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 E & \cong & h^0(\mathcal{F}')_{x_k} & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

$(R^1\Gamma_H\mathcal{F}')_{x_k}$ est donc isomorphe à E^3 et $(R^2\Gamma_M\mathcal{F}')_{x_k}$ est isomorphe à E . Pour préciser ce dernier isomorphisme, nous allons déterminer l'image \bar{U}_{x_k} , donc l'image de U_{x_k} . Avec les notations de II.4.5, $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\delta)$ appartient à $\text{Im } U_{x_k}$ s'il existe (e_1, e_2, e_3, e_4) vérifiant:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\alpha &= M_{a(k)}e_3 - e_1 \\
 \varepsilon_\beta &= M_{a(k)}e_2 - e_4 \\
 \varepsilon_\gamma &= M_k e_1 - e_4 \\
 \varepsilon_\delta &= M_{b(k)}e_3 - e_2.
 \end{aligned}$$

Im U_{x_k} étant de dimension 3 $\dim_{\mathbb{C}} E$, on en déduit qu'une équation de cette image est

$$\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta + M_k \varepsilon_\alpha - M_{a(k)} \varepsilon_\delta = 0,$$

les M_k étant alors nécessairement reliés par la relation

$$II.5.1.1. M_{a(k)} M_{b(k)} = M_k M_{a(k)}$$

On reviendra plus loin sur cette relation. Nous obtenons ainsi le diagramme commutatif suivant entre suites exactes horizontales

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}^\cdot)_{x_k} & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\cdot)_{x_k} & \longrightarrow & (R^2 \Gamma_M \mathcal{F}^\cdot)_{x_k} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}^\cdot)_{x_k} & \longrightarrow & E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma \oplus E_\delta & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\ & & & & (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\delta) \longmapsto & & \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta + M_k \varepsilon_\alpha - M_{a(k)} \varepsilon_\delta \end{array}$$

Du lemme des 5, on déduit un isomorphisme:

$$(R^2 \Gamma_M \mathcal{F}^\cdot)_{x_k} \cong E.$$

II.5.2. Restriction de $R^2 \Gamma_M \mathcal{F}^\cdot$ à D_k

Considérons les deux suites exactes suivantes:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & h^1(\mathcal{F}^\cdot)_{i_k} & & E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k & & \\ & & \uparrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}^\cdot)_{i_k} & \xrightarrow{\bar{v}_{i_k}} & j_*(R^1 \Gamma_H \mathcal{F}^\cdot|_{H-M})_{i_k} & \longrightarrow & (R^2 \Gamma_M \mathcal{F}^\cdot)_{i_k} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \nearrow & & \\ & & \bar{v}_{i_k} & & U_{i_k} & & \\ E^2 \cong & (\Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}^\cdot))_{i_k} & & & & & \\ & \uparrow & & & & & \\ & h^0(\mathcal{F}^\cdot)_{i_k} & & & & & \\ & \uparrow & & & & & \\ & 0 & & & & & \end{array}$$

D'autre part z_k et $z_{b(k)}$ désignant deux points proches de t_k respectivement sur Δ_k et $\Delta_{b(k)}$. On a les morphismes des suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & h^0(\mathcal{F}')_{z_k} & \longrightarrow & \Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}')_{z_k} & \longrightarrow & R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'_{z_k} & \longrightarrow & h^1(\mathcal{F}')_{z_k} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \cong & & \\
 0 & \longrightarrow & h^0(\mathcal{F}')_{t_k} & \longrightarrow & \Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}')_{t_k} & \longrightarrow & R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'_{t_k} & \longrightarrow & h^1(\mathcal{F}')_{t_k} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\
 0 & \longrightarrow & h^0(\mathcal{F}')_{z_{b(k)}} & \longrightarrow & \Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}')_{z_{b(k)}} & \longrightarrow & R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'_{z_{b(k)}} & \longrightarrow & h^1(\mathcal{F}')_{z_{b(k)}} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Les morphismes verticaux des extrémités du précédent diagramme sont des isomorphismes, car les restrictions à $\Delta - \{0\}$ de $h^0(\mathcal{F}')$ et $h^1(\mathcal{F}')$ sont des systèmes locaux. On en déduit

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{C}} (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_{t_k} - \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}')_{t_k} &= \dim (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_{z_{b(k)}} \\
 - \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{X-H} h^0(\mathcal{F}')_{z_{b(k)}} &= \dim_{\mathbb{C}} F_{b(k)} - \dim_{\mathbb{C}} E.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\dim_{\mathbb{C}} (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_{t_k} = \dim_{\mathbb{C}} F_{b(k)} + \dim_{\mathbb{C}} E.$$

$(R^2 \Gamma_M \mathcal{F}')_{t_k}$ est alors isomorphe à F_k , pour déterminer un tel isomorphisme, nous allons calculer $\text{Im } \tilde{U}_{t_k}$.

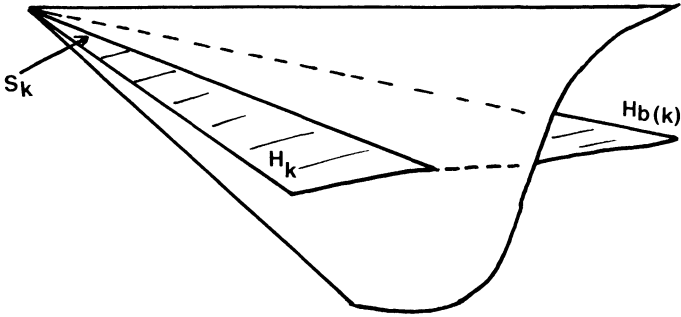
Puisque $\tilde{U}\tilde{U} = U$, $\text{Im } U_{t_k} \subset \text{Im } \tilde{U}_{t_k}$.

$$U_{t_k} : E_{b(k)} \oplus E_k \longrightarrow E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k$$

$$(e_{b(k)}, e_k) \longmapsto (M_{a(k)} e_{b(k)} - e_k, u_{b(k)}(e_{b(k)}), u_k(e_k))$$

$\{(M_{a(k)} e_{b(k)} - e_k, u_{b(k)}(e_{b(k)}), u_k(e_k))\}$ est donc inclus dans $\text{Im } \tilde{U}_{t_k}$.

Posons $\tilde{H}_k = H_k \cup S_k \cup H_{b(k)}$



Nous avons encore un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F_k & & \\
 & & & & \parallel \wr & & \\
 0 & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_{\tilde{H}_k} \mathcal{F}')_{z_k} & = & (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_{z_k} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \cong \gamma^+ & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_{\tilde{H}_k} \mathcal{F}')_{t_k} & \xrightarrow{\gamma} & (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_{t_k} & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_{H-\tilde{H}_k} \mathcal{F}')_{t_k} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \gamma^- & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & (R^1 \Gamma_{\tilde{H}_k} \mathcal{F}')_{z_{b(k)}} & = & (R^1 \Gamma_H \mathcal{F}')_{z_{b(k)}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \parallel \wr & & \\
 & & & & F_{b(k)} & &
 \end{array}$$

Tout comme on a montré que $R^1 \Gamma_H \mathcal{F}'$ est constant en restriction à Δ_k , on peut montrer que $R^1 \Gamma_{\tilde{H}_k} \mathcal{F}'$ est constant en restriction à $\Delta_k \cup \Delta_{b(k)} \cup (S_k \cap \Delta)$. Cette remarque explique que les deux flèches verticales γ^+ et γ^- soient des isomorphismes. On en déduit un isomorphisme.

II.5.2.1. $\alpha_{b(k),k}: F_{b(k)} \rightarrow F_k$

Soient $f'_{b(k)}$ un élément de $F_{b(k)}$, s la section que détermine $f'_{b(k)}$ dans $(R^1 \Gamma_{\tilde{H}_k} \mathcal{F}')_{t_k}$ par $(\gamma^-)^{-1}$. D'après l'identification II.3.9.1, $\tilde{U}_{t_k}(\gamma(s))$ s'identifie à

$$(0, f'_{b(k)}, \alpha_{b(k),k}(f'_{b(k)})) \in E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k$$

$\{(0, f_{b(k)}, \alpha_{b(k),k}(f_{b(k)}))\}$ est donc inclus dans $\text{Im } \tilde{U}_{t_k}$.

Comme le faisceau $(R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot)_{t_k}$ est isomorphe à $\text{Im } \bar{U}_{t_k}$, ce dernier faisceau est de dimension: $\dim_{\mathbb{C}} F_{b(k)} + \dim_{\mathbb{C}} E$. On a donc:

$$\text{Im } \bar{U}_{t_k} = \{(-e_k, f'_{b(k)}, \alpha_{b(k),k}(f'_{b(k)}) + u_k(e_k)); e_k \in E \text{ et } f'_{b(k)} \in F_{b(k)}\}$$

Une équation de $\text{Im } \bar{U}_{t_k} \subset E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k$ est donc:

$$f_k - \alpha_{b(k),k}(f_{b(k)}) + u_k(\varepsilon) = 0.$$

Comme on a vu que $(M_{a(k)}(e_{b(k)}), u_{b(k)}(e_{b(k)}), 0) \in \text{Im } \bar{U}_{t_k}$, on obtient la relation:

II.5.2.2. $u_k M_{a(k)} = \alpha_{b(k),k} u_{b(k)}$

Considérons alors le diagramme commutatif entre suites exactes horizontales:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot)_{t_k} & \longrightarrow & (R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}^\cdot)_{t_k} & \longrightarrow & (R^2\Gamma_M\mathcal{F}^\cdot)_{t_k} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & (R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot)_{t_k} & \longrightarrow & E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k & \longrightarrow & F_k \longrightarrow 0 \\ & & & & (\varepsilon, f_{b(k)}, f_k) & & f_k - \alpha_{b(k),k}(f_{b(k)}) + u_k(\varepsilon) \end{array}$$

On en déduit par le lemme des 5, une identification

$$(R^2\Gamma_M\mathcal{F}^\cdot)_{t_k} \cong F_k.$$

II.5.3. *Restriction de $R^2\Gamma_M\mathcal{F}^\cdot$ à D*

Ecrivons les deux suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & E^{2\delta} & & \\ & & \uparrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & (R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot)_\omega & \xrightarrow{\bar{v}_\omega} & j_*(R^1\Gamma_H\mathcal{F}^\cdot|_{H-M})_\omega & \longrightarrow & (R^2\Gamma_M\mathcal{F}^\cdot)_\omega \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \bar{v}_\omega & & \nearrow u_\omega & & \\ E^{\delta+2} \cong & & (\Gamma_{X-H}h^0(\mathcal{F}^\cdot))_\omega & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ E \cong & & h^0(\mathcal{F}^\cdot)_\omega & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

On en déduit successivement que $(R^1\Gamma_H\mathcal{F}')_\omega$ est isomorphe à $E^{\delta+1}$ et que $(R^2\Gamma_M\mathcal{F}')_\omega$ est isomorphe à $E^{\delta-1}$.

Avec les notations de II.3.9, rappelons que le morphisme de recollement du faisceau $R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}'$ entre la strate D et S_c se lit comme un morphisme de projection

$$p_c: \bigoplus_{k \in \{1,2,\dots,\delta\}} (E_k \oplus E_{a(k)}) \longrightarrow E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma \oplus E_\delta.$$

II.5.3.1. *Notation:* Pour c appartenant à $\{1, 2, \dots, \delta\}$, on notera A_c le morphisme

$$A_c: \bigoplus_{k \in \{1,2,\dots,\delta\}} (E_k \oplus E_{a(k)}) \longrightarrow E_c = E$$

$$(e_k, e_{a(k)}) \longmapsto \varepsilon_c = e_\gamma - e_\beta + M_c e_\alpha - M_{a(c)} e_\delta,$$

où

$$(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) = p_c\{(e_k, e_{a(k)})\}.$$

Soit z_{k_0} un point de L adhérent à la composante connexe I de $B(\omega, \varepsilon) - H$ (voir II.4.6). Considérons alors l'application:

$$c \in \{1,2,\dots,\delta\} - \{k_0\} \quad A_c: \bigoplus_{k \in \{1,2,\dots,\delta\}} (E_k \oplus E_{a(k)}) \longrightarrow \bigoplus_{k \in \{1,2,\dots,\delta\} - \{k_0\}} E_k$$

Chaque e_k ou $e_{a(k)}$ apparaît exactement deux fois dans

$$\{A_c((e_k, e_{a(k)})_{k \in \{1,2,\dots,\delta\}} \text{ pour } c \text{ décrivant } \{1, 2, \dots, \delta\}.$$

On en déduit en se déplaçant sur L que les lignes de la matrice donnant $\bigoplus_{c \neq k_0} A_c$ sont indépendantes. Cette matrice est donc de rang $(\delta - 1) \dim_{\mathbb{C}} E$. Or $\text{Im } U_\omega = \text{Im } \tilde{U}_\omega$ et $\text{Im } U_\omega \subset \text{Ker} (\bigoplus_{c \neq k_0} A_c)$ (utiliser II.5.1 et le fait que U commute aux morphismes de recollement entre strates de Σ). Comme $\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } U_\omega = (\delta + 1) \dim_{\mathbb{C}} E$, on en déduit

$$\text{Im } U_\omega \cong \text{Ker} \left(\bigoplus_{c \neq k_0} A_c \right).$$

Nous avons donc le diagramme suivant entre suites exactes horizontales:

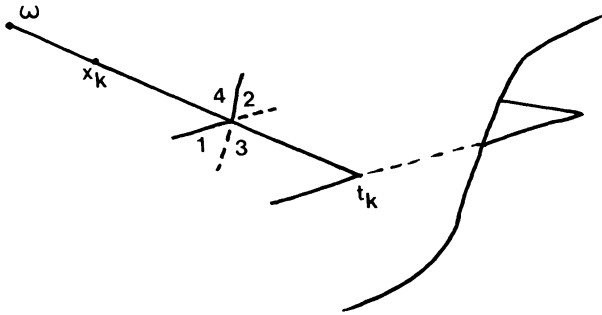
$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & (R^1\Gamma_H\mathcal{F}')_\omega & \longrightarrow & (R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}')_\omega & \longrightarrow & (R^2\Gamma_M\mathcal{F}')_\omega \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & (R^1\Gamma_H\mathcal{F}')_\omega & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} (E_k \oplus E_{a(k)}) & \xrightarrow{\oplus_{c \neq k_0} A_c} & \bigoplus_{k \neq k_0} E_k \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Par le lemme des cinq, on obtient l'identification:

$$(R^2\Gamma_M\mathcal{F}')_\omega \cong \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\} - \{k_0\}} E_k$$

$\{(e_k, e_{a(k)})_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}}; A_{k_0}((e_k, e_{a(k)})) = 0\}$ contient $\text{Im } \bar{U}_\omega$. L'endomorphisme A_{k_0} s'écrit donc comme combinaison linéaire (à coefficients dans $\text{End}(E)$) unique des autres A_c .

II.5.3.2. DÉFINITION DE \tilde{M}_k : $B(\omega, \varepsilon) - H$ a pour ε assez petit $\delta + 2$ composantes connexes, fixons k dans $\{1, 2, \dots, \delta\}$.

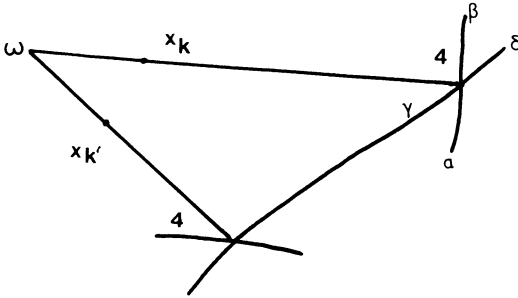


Soit γ_k un chemin partant d'un point de la composante connexe de $B(\omega, \varepsilon) - H$ adhérente à x_k numéroté 4 ci-dessus, allant dans la composante I de $B(\omega, \varepsilon) - H$ (voir II.4.6) et évitant $H^+ = \{(x, y + i\lambda); (x, y) \in \Delta \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^+\}$. Suivre une section de $h^0(\mathcal{F}')(X - H)$ le long de γ_k définit un isomorphisme de $h^0(\mathcal{F}')(X - H)$ que l'on notera \tilde{M}_k . Par un argument d'homotopie, \tilde{M}_k ne dépend pas du chemin γ_k choisi.

II.5.3.3. PROPOSITION: $\sum_{c \in \{1, 2, \dots, \delta\}} \tilde{M}_c A_c = 0$.

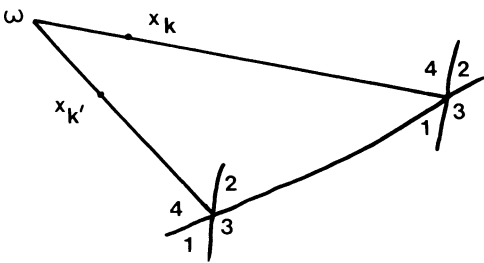
Preuve: Nous allons montrer que les coefficients de e_k et $e_{a(k)}$ qui apparaissent dans $\sum_{c \in \{1, 2, \dots, \delta\}} \tilde{M}_c A_c((e_k, e_{a(k)}))$ sont nuls

1er case: $k = \beta(k')$



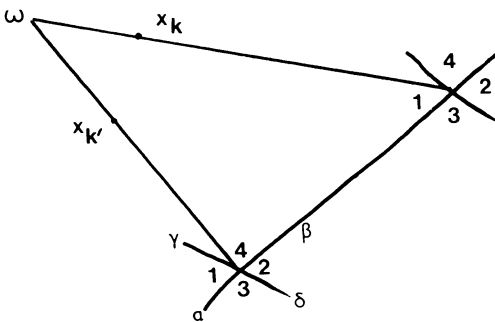
Le coefficient de e_k est alors $\tilde{M}_k - \tilde{M}_{k'}$. Mais $\tilde{M}_k = \tilde{M}_{k'}$ car la composante connexe 4 associée à k et à k' est la même.

2ème cas: $k = \delta(k')$



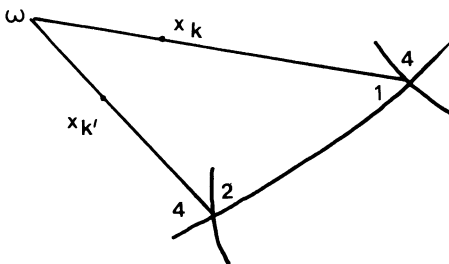
Le coefficient de e_k est alors $\tilde{M}_k - \tilde{M}_{k'} M_{a(k')}$. Ce coefficient est nul, car la composante 4 associée à k est la composante 2 associée à k .

1er cas(bis): $a(k) = \beta(k')$



Le coefficient de $e_{a(k)}$ est alors $\tilde{M}_k M_k - \tilde{M}_{k'}$ qui est nul puisque la composante 4 de k' est la composante 1 de k .

2ème cas(bis): $a(k) = \delta(k')$



Le coefficient de $e_{a(k)}$ est alors $\tilde{M}_k M_k - \tilde{M}_{k'} M_{a(k')}$ qui est nul puisque la composante 2 de $4'$ est la composante 1 de k .

II.5.4: Notation: La fibre en zéro de $R^2\Gamma_M\mathcal{F}'$

$$G = (R^2\Gamma_M\mathcal{F}')_0.$$

II.5.5: Morphismes de recollement de $R^2\Gamma_M\mathcal{F}'$

Donnons, sous forme d'un tableau, les définitions des morphismes de recollement de $R^2\Gamma_M\mathcal{F}'$ entre les strates $\{0\}$, D_k , S_k et D .

	Morphisme de recollement entre les strates	Expression du morphisme
II.5.5.1	0 et D_k	$v'_k: G \rightarrow F_k$
II.5.5.2	D_k et S_k	$w'_k: F_k \rightarrow E$
II.5.5.3	0 et D	$v'' = (v''_k)_{k \neq k_0}: G \xrightarrow{\oplus v''_k} \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\} - \{k_0\}} E_k$
II.5.5.4	D et S_k	$w'' = (w''_{c,k})_{c \neq k_0}: \bigoplus_{c \in \{1, 2, \dots, \delta\} - \{k_0\}} \xrightarrow{\oplus_{c \neq k_0} w''_{c,k}} E$

Exprimer que G est un faisceau se traduit par la seule condition sur les morphismes de recollement:

$$II.5.5.5. \forall k \in \{1, 2, \dots, \delta\} \quad w''_k v''_k = w'_k v'_k$$

Nous montrerons en II.6 que les morphismes w'_k , v'' et w''_k s'expriment à l'aide des v_k , v'_k et \tilde{M}_k .

II.6. Le morphisme $U': R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}' \rightarrow R^2\Gamma_M\mathcal{F}'$

U' est le morphisme issu de la suite exacte longue de l'un de nos triangles.

II.6.1. DÉFINITION: Muni des identifications précédentes, on note $u' = \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} u'_k$ le morphisme faisant commuter:

$$\begin{array}{ccc} (R^1\Gamma_{H-M}\mathcal{F}')_0 & \longrightarrow & (R^2\Gamma_M\mathcal{F}')_0 \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} F_k & \xrightarrow{\oplus u'_k} & G \end{array}$$

Aux paragraphes II.5.1, II.5.2, II.5.3, nous avons donné l'expression des restrictions de $R^2\Gamma_M\mathcal{F}'$ aux strates de Σ ainsi que l'expression des restrictions de U' . Il reste à traduire que U' est un morphisme de faisceau et que $U'U = 0$.

II.6.2. U' commute au morphisme de recollement entre (0) et D_k
 Cette condition se traduit par la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
 (f_c) & & \bigoplus_{c \in \{1, 2, \dots, \delta\}} F_c \xrightarrow{\oplus u'_k} G \\
 \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow v'_k \\
 (v_{a(k)}(f_{a(k)}), f_{b(k)}, f_k) & E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k \longrightarrow & F_k \\
 & & \\
 & (e, f_{b(k)}, f_k) \longmapsto & f_k - \alpha_{b(k),k}(f_{b(k)}) + u_k(e)
 \end{array}$$

On a donc

II.6.1.

$$\begin{aligned}
 v'_k u'_{a(k)} &= u_k v_{a(k)} \\
 v'_k u'_{b(k)} &= -\alpha_{b(k),k} \\
 v'_k u'_k &= id \\
 v'_k u'_c &= 0 \text{ pour } c \notin \{k, a(k), b(k)\}.
 \end{aligned}$$

II.6.3. U' commute au morphisme de recollement entre D_k et S_k
 Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (e, f_{b(k)}, f_k) & & E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k \longrightarrow F_k \\
 \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow w'_k \\
 (e, e, v_k(f_k), v_{b(k)}(f_{b(k)})) & E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\gamma \oplus E_\delta \longrightarrow & E \\
 & & \\
 & (e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) \longmapsto & e_\gamma - e_\beta + M_k e_\alpha - M_{a(k)} e_\delta
 \end{array}$$

On a donc

$$w'_k = v_k$$

$$w'_k \alpha_{b(k),k} = M_{a(k)} v_{b(k)}$$

$$w'_k u'_k = M_k - 1d.$$

Compte tenu de la relation II.4.7 ($v_k u_k + 1d = M_k$), ces relations équivalent à

II.6.3.1.

$$w'_k = v_k$$

$$M_{a(k)} v_{b(k)} = v_k \alpha_{b(k),k}.$$

II.6.4. U' commute au morphisme de recollement entre les strates $\{0\}$ et D

Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 (f_k) & \begin{array}{ccc} \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} F_k & \xrightarrow{\bigoplus u'_k} & G \end{array} & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \bigoplus_{k \neq k_0} v'_k & \\
 (v_k(f_k), v_{a(k)}(f_{a(k)})) & \begin{array}{ccc} \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \delta\}} (E_k \oplus E_{a(k)}) & \xrightarrow{\bigoplus_{k \neq k_0} A_k} & \bigoplus_{k \neq k_0} E_k \end{array} &
 \end{array}$$

On a donc, $\forall k \neq k_0$:

$$\begin{aligned}
 v''_k \left(\sum_{c \in \{1, \dots, \delta\}} u'_c(f_c) \right) &= v_k(f_k) - v_{a(k)}(f_{a(k)}) + M_k v_{a(k)}(f_{a(k)}) \\
 &\quad - M_{a(k)} v_{b(k)}(f_{b(k)}).
 \end{aligned}$$

Cette égalité se traduit, pour tout k différent de k_0 , par:

$$v''_k u'_{a(k)} = M_k v_{a(k)} - v_{a(k)}$$

$$v''_k u'_k = v_k$$

$$v''_k u'_{b(k)} = -M_{a(k)} v_{b(k)}$$

$$v''_k u'_c = 0 \quad \text{si } c \notin \{a(k), b(k), k\}.$$

II.6.5. U' commute au morphisme de recollement entre D et S_k

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus (E_c \oplus E_{a(c)}) & \xrightarrow{\bigoplus_{c \neq k_0} A_c} & \bigoplus_{c \neq k_0} E_c \\
 \downarrow & & \downarrow w_k'' = (w_{c,k}'')_{c \neq k_0} \\
 E_\alpha \oplus E_\beta \oplus E_\beta \oplus E_\delta & \xrightarrow{A_k} & E
 \end{array}$$

La surjectivité de $\bigoplus_{c \neq k_0} A_c$ assure l'unicité des w_k'' qui font commuter ce diagramme. Pour $k \neq k_0$, on obtient ainsi

$$w_{c,k}'' = 0 \quad \text{si } c \neq k$$

$$w_{k,k}'' = 1d.$$

Pour $k = k_0$, comme $\tilde{M}_{k_0} = 1d$ et d'après la formule II.3.5.4:

$$w_{c,k_0}'' = -\tilde{M}_c.$$

II.6.6. Relation traduisant II.5.5.5

1^{er} cas $k \neq k_0$: On obtient l'expression de v_k'' :

$$\begin{aligned}
 v_k'' &= w_k' v_k' \\
 &= v_k v_k'
 \end{aligned}$$

2^{ème} cas $k = k_0$: On obtient

$$-\sum_{k \neq k_0} \tilde{M}_k v_k v_k' = v_{k_0} v_{k_0}'.$$

Comme $\tilde{M}_{k_0} = 1d$, cette relation s'écrit:

II.6.6.1. $\sum_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} \tilde{M}_k v_k v_k' = 0.$

Compte tenu de l'expression des v_k'' , les relations obtenues en II.6.4 s'écrivent:

II.6.6.2. $\forall k \neq k_0$

$$v_k v'_k u'_{a(k)} = M_k v_{a(k)} - v_{a(k)}$$

$$v_k v'_k u'_k = v_k$$

$$v_k v'_k u'_{b(k)} = -M_{a(k)} v_{b(k)}$$

$$v_k v'_k u'_c = 0 \text{ si } c \in \{a(k), b(k), k\}.$$

II.6.7. Traduction de $U'U = 0$

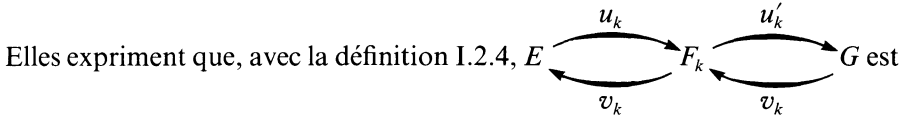
$U'U = U'\bar{U}\bar{U} = 0$, car \bar{U} et \bar{U} sont deux morphismes consécutifs d'une suite exacte longue de triangles. A l'origine cette nullité se traduit par la relation

II.6.7.1. $\sum_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} u'_k u_k = 0$.

En restriction aux autres strates, la nullité de $U'U$ se traduit, par construction de U' , par les relations II.5.1.1 et II.5.2.2

II.7. Conditions sur $E, F_k, G, u_k, u'_k, v_k, v'_k$ exprimant que

$R^0 \Gamma_{X-H} \mathcal{F} \rightarrow R^1 \Gamma_{H-M} \mathcal{F} \rightarrow R^2 \Gamma_M \mathcal{F}$ est un complexe de faisceau



un élément de $C(\Delta)$. Les relations II.4.7, II.6.2.1, II.6.3.1, II.6.6.1, II.6.7.1 ne sont respectivement autres que les relations 1, 2, 3, 4, 5, de $C(\Delta)$.

D'autre part ces relations 1, 2, 3, 5 entraînent en effet la relation II.6.6.2 ainsi que les relations:

$$M_{a(k)} M_{b(k)} = M_k M_{a(k)} \quad \text{II.5.1.1} \quad 6.$$

$$u_k M_{a(k)} = \alpha_{b(k), k} u_{b(k)} \quad \text{II.5.2.2} \quad 7.$$

III. Théorème d'équivalence de catégorie

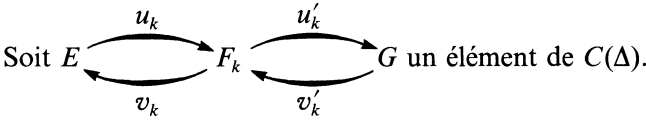
III.1. Catégorie $C(\Delta)$ et foncteur α

Au chapitre II, nous avons construit un foncteur

$$\alpha: \text{Perv}^\Delta(X) \longrightarrow C(\Delta)$$

de la catégorie des faisceaux pervers relativement à Δ , vers la catégorie $C(\Delta)$.

III.2. Le foncteur $\beta: C(\Delta) \rightarrow \text{Perv}^\Delta(X)$



III.2.1. Les faisceaux $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ associés à cet élément de $C(\Delta)$
i désignant l'inclusion ouverte de $X - H$ dans X , considérons E le faisceau constant de fibre E sur $X - H$ et notons:

$$\mathcal{A} = i_*(E).$$

j désignant l'inclusion de $H - M$ dans X , \mathcal{H} le faisceau sur $H - M$ obtenu en recollant les faisceaux E et F_k sur H_k et Δ_k par le morphisme v_k . Notons:

$$\mathcal{B} = j_*(\mathcal{H}).$$

Recollons les faisceaux $G, E^{\delta-1}, E, F_k$ sur respectivement $\{0\}, D, S_k, D_k$ par les morphismes de II.5.5 exprimés à l'aide des u_k, v_k, u'_k, v'_k grâce aux formules données en II.6. La relation II.5.5.5 étant vérifiée, on obtient ainsi un faisceau sur M . Son prolongement par zéro sur X définit un faisceau que l'on notera \mathcal{C} .

III.2.2. Le complexe $\mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathcal{B} \xrightarrow{U'} \mathcal{C}$

Les morphismes U et U' sont constants en restriction aux strates de Σ . Leurs restrictions à ces strates sont données pour U par les formules II.4.1 à II.4.6 et pour U' par les formules II.5.1 à II.5.3 et II.6.1. Les relations entre u_k, u'_k, v_k, v'_k permettent d'établir facilement que U et U' sont des morphismes de faisceaux et que $U'U = 0$.

III.2.3. Définition et propriétés du foncteur β

A notre objet de $C(\Delta)$, associons le complexe:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathcal{B} \xrightarrow{U'} \mathcal{C} \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{A} est placé en degré zéro. Notons ce complexe:

$$\beta(E \rightrightarrows F_k \rightrightarrows G).$$

PROPOSITION: $\beta(E \rightrightarrows F_k \rightrightarrows G)$ est pervers relativement à Δ , et β définit un foncteur de $C(\Delta) \rightarrow \text{Perv}^\Delta(X)$.

Seule la perversité est délicate à établir. Elle résultera des paragraphes III.2.3.1 à III.2.3.4, où on posera

$$\mathcal{G} = \beta(E \rightrightarrows F_k \rightrightarrows G).$$

III.2.3.1. $h^0(\mathcal{G})_{|_{X-\Delta}}$, $h^0(\mathcal{G})_{|\Delta-\{0\}}$, $h^0(\mathcal{G})_0$ sont des systèmes locaux $h^0(\mathcal{G}) = \text{Ker } U$. Par le calcul, on peut montrer directement que $h^0(\mathcal{G})_{|_{X-\Delta}}$ est un faisceau localement constant de fibre E . Ce calcul est un peu pénible en un point de D où il faut utiliser la relation 6 de II.7. Soit γ_k un lacet entourant Δ_k une seule fois, de point base (par exemple) le point $(0, i\varepsilon)$, traversant H_k de sa face négative vers sa face positive, ne traversant aucun autre H_k . On peut alors remarquer que pour k décrivant $\{1, 2, \dots, \delta\}$, les lacets γ_k engendrent $\pi_1(X - \Delta)$ et que les relations entre les γ_k sont engendrés par

$$\gamma_{a(k)}\gamma_{b(k)} = \gamma_k\gamma_{a(k)}.$$

Cette remarque, le fait que U ne dépend que de E et M_k , qu'il existe un faisceau pervers \mathcal{F} dont $h^0(\mathcal{F})$ est une représentation arbitraire de $\pi_1(X - \Delta)$ permet de démontrer sans calcul que $h^0(\mathcal{G})_{|_{X-\Delta}}$ est un système local associé à la représentation de $\pi_1(X - \Delta)$

$$E \longrightarrow E$$

$$e \longmapsto \gamma_c \cdot e = M_c e.$$

Déterminons maintenant $h^0(\mathcal{G})_{|\Delta-\{0\}} \cdot h^0(\mathcal{G})_{|\Delta_k}$ est le faisceau constant de fibre $\text{Ker } u_k$; $h^0(\mathcal{G})_{|_{D_k}}$ est le faisceau constant de fibre

$$\{(e_k, e_{b(k)}) \in E \oplus E; u_{b(k)}(e_{b(k)}) = u_k(e_k) = 0 \text{ et } M_{a(k)}e_{b(k)} = e_k\}.$$

La relation $u_k M_{a(k)} = \alpha_{b(k),k} u_{b(k)}$, où $\alpha_{b(k),k}$ est un isomorphisme, montre que les morphismes de restriction entre les strates (D_k, Δ_k) et $(D_k, \Delta_{b(k)})$ sont des

isomorphismes:

$$h^0(\mathcal{G}')_{|\Delta_k} \longleftarrow h^0(\mathcal{G}')_{|D_k} \longrightarrow h^0(\mathcal{G}')_{|\Delta_{b(k)}}$$

$$e_k \longleftarrow (e_k, e_{b(k)}) \longrightarrow e_{b(k)}$$

$h^0(\mathcal{G}')_{|\Delta-\{0\}}$ est donc le faisceau localement constant de fibre $\text{Ker } u_k$ sur Δ_k . Le morphisme de franchissement de la strate D_k n'est autre que M_k .

$h^0(\mathcal{G}')_0 = \text{Ker } \bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} u_k$ est bien un espace vectoriel de dimension finie.

III.2.3.2. $h^1(\mathcal{G}')_{|X-\Delta} = 0$; $h^1(\mathcal{G}')_{|\Delta-\{0\}}$ et $h^1(\mathcal{G}')_0$ sont des systèmes locaux

$$h^1(\mathcal{G}') = \frac{\text{Ker } U'}{\text{Im } U}.$$

\mathcal{B} étant supporté par H , pour montrer que $h^1(\mathcal{G}')_{|X-\Delta} = 0$, il suffit de le montrer fibre à fibre sur $H - \Delta$. Sur S_k le calcul $\text{Im } U \supset \text{Ker } U'$ est facile. Sur D , on peut éviter tout calcul en utilisant le caractère universel de notre construction, puisque U' et U ne dépendent que de E et M_k .

Déterminons $h^1(\mathcal{G}')_{|\Delta-\{0\}}$; $h^1(\mathcal{G}')_{|\Delta_k}$ est le faisceau constant de fibre $F_k/(\text{Im } u_k)$, $h^1(\mathcal{G}')_{|D_k}$ est le faisceau constant de fibre la cohomologie du complexe suivant:

$$E_{b(k)} \oplus E_k \longrightarrow E \oplus F_{b(k)} \oplus F_k \longrightarrow F_k$$

$$(e_{b(k)}, e_k) \longmapsto (M_{a(k)}e_{b(k)} - e_k, u_{b(k)}(e_{b(k)}), u_k(e_k))$$

$$(e, f_{b(k)}, f_k) \longmapsto f_k - \alpha_{b(k),k}(f_{b(k)}) + u_k(e).$$

Les morphismes de restriction de $h^1(\mathcal{G}')$ entre les strates (D_k, Δ_k) et $(D_k, \Delta_{b(k)})$ sont

$$h^1(\mathcal{G}')_{|\Delta_{b(k)}} \longleftarrow h^1(\mathcal{G}')_{|D_k} \longrightarrow h^1(\mathcal{G}')_{|\Delta_k}$$

$$\overset{\cdot}{f_{b(k)}} \longleftarrow (\overset{\cdot}{e}, \overset{\cdot}{f_{b(k)}}, \overset{\cdot}{f_k}) \longrightarrow f_k.$$

De la relation $u_k M_{a(k)} = \alpha_{b(k),k} u_{b(k)}$, où $\alpha_{b(k),k}$ est inversible, on déduit que ces morphismes sont des isomorphismes. Plus précisément, $h^1(\mathcal{G}')_{|\Delta_k}$ est le faisceau constant de fibre $F_k/(\text{Im } u_k)$ et le morphisme de franchissement de la strate D_k est $\alpha_{b(k),k}$.

$h^1(\mathcal{G}')_0 = (\text{Ker} \oplus u'_k)/(\text{Im} \oplus u_k)$ est bien un espace vectoriel de dimension finie.

III.2.3.3. $h^2(\mathcal{G}')$ est supporté par 0 et $h^2(\mathcal{G}')_0$ est un espace vectoriel de dimension finie

$$h^2(\mathcal{G}') = \frac{\mathcal{C}}{\text{Im } U'}$$

Comme \mathcal{C} , $h^2(\mathcal{G}')$ est donc supporté par M . Les formules donnant U' mettent en évidence la surjectivité de la restriction de U' à S_k et D_k . Pour D , on peut par exemple utiliser le caractère universel de notre construction.

$$h^0(\mathcal{G}')_0 = \frac{G}{\text{Im} \oplus u'_k}$$

est bien un espace vectoriel de dimension finie.

III.2.3.4. *Vérification des conditions de perversité sur \mathcal{G}'*

LEMME: $R\Gamma_{X-H}\mathcal{G}' \cong \mathcal{A}$, $R\Gamma_{H-M}\mathcal{G}' \cong \mathcal{B}[-1]$, $R\Gamma_M\mathcal{G}' \cong \mathcal{C}[-2]$.

Preuve: Notons \mathcal{H}' , le complexe $0 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$. On a alors le triangle de $D(\mathbb{C}_X)$:

$$\mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{G}' \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}$$

Comme \mathcal{H}' est supporté par H , on en déduit que $R\Gamma_{X-H}\pi$ est un isomorphisme de $D(\mathbb{C}_X)$. Par le même argument qu'en II.1, on établit aisément que le morphisme de complexe

$$\Gamma_{X-H}\mathcal{A} \longrightarrow R\Gamma_{X-H}\mathcal{A}$$

est un quasi-isomorphisme. Comme $\mathcal{A} = i_*(E)$, le morphisme

$$\mathcal{A} \longrightarrow \Gamma_{X-H}\mathcal{A} = i_*i^{-1}i_*(E)$$

est un isomorphisme. En composant ces applications, on obtient l'isomorphisme de $D(\mathbb{C}_X)$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\quad} \Gamma_{X-H}\mathcal{A} \xrightarrow{\quad} R\Gamma_{X-H}\mathcal{A}$$

$\searrow \scriptstyle i_2 \quad \nearrow$

(λ_2 est le morphisme du triangle: $R\Gamma_H \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow R\Gamma_{X-H} \mathcal{A}$). On a donc pour les morphismes naturels de diagramme commutatif dans $D(\mathbb{C}_X)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ R\Gamma_{X-H} \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow[\cong]{R\Gamma_{X-H} \pi} & R\Gamma_{X-H} \mathcal{A} \end{array}$$

On a donc le diagramme commutatif de $D(\mathbb{C}_X)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{G}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \downarrow \varphi & & \parallel & & \downarrow \lambda_2 (R\Gamma_{X-H} \pi)^{-1} \\ R\Gamma_H \mathcal{G}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{G}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_{X-H} \mathcal{G}^\bullet \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme φ de \mathcal{H}^\bullet vers $R\Gamma_H \mathcal{G}^\bullet$, tel que $(\varphi, =, \lambda_2 (R\Gamma_{X-H} \pi)^{-1})$ soit un isomorphisme de triangles.

Considérons maintenant le triangle:

$$\mathcal{C}[-2] \longrightarrow \mathcal{H}^\bullet \xrightarrow{\pi'} \mathcal{B}[-1].$$

Les complexes de ce triangle étant supportés par H , on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^\bullet & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{B}[-1] \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ R\Gamma_H \mathcal{H}^\bullet & \xrightarrow{R\Gamma_H \pi'} & R\Gamma_H \mathcal{B}[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_{H-M} \mathcal{H}^\bullet & \xrightarrow{R\Gamma_{H-M} \pi'} & R\Gamma_{H-M} \mathcal{B}[-1] \end{array}$$

\mathcal{C} étant supporté par M , $R\Gamma_{H-M} \pi'$ est un isomorphisme. \mathcal{B} étant supporté par H , morphisme de complexe

$$\Gamma_H \mathcal{B} \longrightarrow R\Gamma_H \mathcal{B}$$

est un quasi-isomorphisme. Par le même argument qu'en II.1, on établit que le morphisme de complexe suivant est un quasi isomorphisme

$$\Gamma_{H-M}\mathcal{B} \longrightarrow R\Gamma_{H-M}\mathcal{B}.$$

Par construction de \mathcal{B} ($\mathcal{B} = j_*(\mathcal{H})$), où \mathcal{H} est un certain faisceau supporté par H), le morphisme

$$\Gamma_H\mathcal{B} \longrightarrow \Gamma_{H-M}\mathcal{B}$$

est un isomorphisme. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_H\mathcal{B}[-1] & \xleftarrow{\cong} & \Gamma_H\mathcal{B}[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ R\Gamma_{H-M}\mathcal{B}[-1] & \xleftarrow{\cong} & \Gamma_{H-M}\mathcal{B}[-1], \end{array}$$

on déduit l'existence d'un isomorphisme μ de $D(\mathbb{C}_X)$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}[-2] & \longrightarrow & \mathcal{H}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{B}[-1] \\ \uparrow \psi & & \uparrow \cong \lambda & & \uparrow \cong \mu \\ R\Gamma_M\mathcal{H}' & \longrightarrow & R\Gamma_H\mathcal{H}' & \longrightarrow & R\Gamma_{H-M}\mathcal{H}'. \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme ψ de $R\Gamma_M\mathcal{F}'$ vers $\mathcal{C}[-2]$, tel que (ψ, λ, μ) soit un isomorphisme de triangles. En utilisant l'isomorphisme φ , on obtient l'isomorphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}[-2] & \longrightarrow & \mathcal{H}' & \longrightarrow & \mathcal{B}[-1] \\ \downarrow \cong (R\Gamma_M(\varphi\lambda))\psi^{-1} & & \downarrow \cong \varphi & & \downarrow \cong (R\Gamma_{H-M}(\varphi\lambda))\mu^{-1} \\ R\Gamma_M\mathcal{G}' & \longrightarrow & R\Gamma_H\mathcal{G}' & \longrightarrow & R\Gamma_{H-M}\mathcal{G}' \end{array}$$

Le lemme est ainsi démontré.

D'après III.2.3.1 à III.2.3.3, \mathcal{G}' vérifie les conditions I de perversité relativement à Δ de la définition 0.1. La remarque II.1.6 et le lemme

montrent que \mathcal{G}^\bullet appartient à $\text{Perv}^\Delta(X)$. On peut également remarquer que les conditions II.Ter de perversité de la proposition 0.3 sont facilement vérifiées. En effet

$$R_\Delta \mathcal{G}^\bullet \cong R\Gamma_\Delta(R\Gamma_H \mathcal{G}^\bullet) \cong R\Gamma_\Delta(0 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})[-1]$$

$$R\Gamma_{\{0\}} \mathcal{G}^\bullet \cong R\Gamma_{\{0\}}(R\Gamma_M \mathcal{G}^\bullet) \cong R\Gamma_{\{0\}}(\mathcal{C})[-2].$$

III.3. THÉORÈME: *Les deux foncteurs α et β*

$$\text{Perv}^\Delta(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} C(\Delta)$$

sont quasi-inverses.

Preuve: Le théorème pourrait se démontrer mot pour mot comme celui de [3] après avoir remarqué que l'on a étudié les sommets du carré:

$$\begin{array}{ccccc} R\Gamma_M \mathcal{F}^\bullet & = & R\Gamma_M \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_H \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_{X-M} \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\bullet \end{array}$$

Un lemme de [2] et un lemme que m'a communiqué B. Malgrange permettent de donner une version plus esthétique de cette démonstration.

III.3.1. $\alpha \beta$ est isomorphe au foncteur identité

Notons encore:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\bullet &= \beta(E \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} F_k \xrightarrow{\quad} G \\ \xleftarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \end{array}) \\ &= \mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathcal{B} \xrightarrow{U'} \mathcal{C} \end{aligned}$$

$\Gamma_{X-H} = i_* i^{-1}$, $\mathcal{H}^\bullet = (0 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ est supporté par H , i_* est l'adjoint de i^{-1} , on a donc

$$\forall j \in \mathbb{Z} \text{ Ext}_{D(\mathbb{C}_X)}^j(\mathcal{H}^\bullet, R\Gamma_{X-H} \mathcal{G}^\bullet) = 0.$$

D'après le lemme A.1, l'isomorphisme $\varphi: \mathcal{H}^\bullet \rightarrow R\Gamma_H \mathcal{G}^\bullet$ construit en III.2.3.4 tel que $(\varphi, =, \lambda_2(R\Gamma_{X-H} \pi)^{-1})$ soit un isomorphisme de triangles est unique. Par le même argument, \mathcal{C} étant supporté par M ,

$$\forall j \in \mathbb{Z} \text{ Ext}_{D(\mathbb{C}_X)}^j(\mathcal{C}[-2], R\Gamma_{H-M} \mathcal{H}^\bullet) = 0.$$

L'isomorphisme $\psi: R\Gamma_M \mathcal{H}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}[-2]$, construit en III.2.3.4, tel que (ψ, λ, μ) soit un isomorphisme de triangles est unique. On en déduit l'existence d'isomorphismes de triangles fonctoriels en

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} F_k \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} G:$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{C}[-2] & & \\
 & & \swarrow & & \\
 & & (R\Gamma_{H-M}(\varphi \lambda)) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 \mathcal{H}^\bullet & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A} \\
 \downarrow \psi & \searrow & \downarrow R\Gamma_M & \parallel & \downarrow \lambda_2(R\Gamma_{X-H} \pi)^{-1} \\
 R\Gamma_H \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{\quad} & R\Gamma_{X-H} \mathcal{G}^\bullet \\
 \downarrow (R\Gamma_M(\varphi \lambda))\psi^{-1} & \swarrow & \downarrow R\Gamma_{H-M} & & \\
 R\Gamma_{H-M} \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B}[-1] & &
 \end{array}$$

En passant aux morphismes de suites exactes longues, on obtient un isomorphisme fonctoriel entre $1d$ et $\alpha\beta$.

III.3.2. $\beta\alpha$ est isomorphe au foncteur identité

Soit \mathcal{F}^\bullet un élément de $\text{Perv}^\Delta(X)$, $\alpha(\mathcal{F}^\bullet) = (E \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} F_k \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} G)$ et

$$\beta\alpha(\mathcal{F}^\bullet) = (0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathcal{B} \xrightarrow{U'} \mathcal{C}).$$

En tronquant les complexes $R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\bullet$ et $R\Gamma_M \mathcal{F}^\bullet$ et en utilisant les définitions de \mathcal{B} , \mathcal{C} , U' , on obtient les isomorphismes dans les triangles suivants

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc}
 R\Gamma_H \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_M \mathcal{F}^\bullet [+1] \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \tau' & & \downarrow \tau'' \\
 (0 \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{U'} \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{B}[-1] & \longrightarrow & \mathcal{C}[-1]
 \end{array}$$

$\mathbb{R} \text{Hom} (R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\cdot, \mathcal{C}[-2])$ n'a de la cohomologie qu'en degré strictement positif, puisque $R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\cdot$ n'a de la cohomologie qu'en degré supérieur à 1. Pour les mêmes raisons qu'en III.3.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \text{Hom} (R\Gamma_M \mathcal{F}^\cdot [+1], \mathcal{B}[-1]) &\cong \mathbb{R} \text{Hom} (R\Gamma_M \mathcal{F}^\cdot [+1], R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\cdot) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'après le lemme A.2, il existe un unique isomorphisme de $D(\mathbb{C}_X)$

$$\lambda: R\Gamma_H \mathcal{F}^\cdot \longrightarrow (0 \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{U'} \mathcal{C})$$

tel que le diagramme ci-dessus soit un morphisme de triangles.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}^\cdot & \longrightarrow & R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\cdot & \xrightarrow{U'} & R\Gamma_H \mathcal{F}^\cdot [+1] \\ & & \downarrow \cong \tau & & \downarrow \lambda[+1] \\ \beta\alpha(\mathcal{F}^\cdot) & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{U} & (0 \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{U'} \mathcal{C}). \end{array}$$

τ est le morphisme de tronquature évident. Nous allons montrer que $\lambda[+1]\bar{U} = U\tau$. Considérons pour cela les morphismes entre les 4 triangles suivants:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\cdot & \xleftarrow{=} & R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\cdot & \tag{1} \\ \downarrow & & \downarrow \vartheta' & & \downarrow \vartheta & \\ R\Gamma_M \mathcal{F}^\cdot [+2] & \longleftarrow & R\Gamma_{H-M} \mathcal{F}^\cdot [+1] & \longleftarrow & R\Gamma_H \mathcal{F}^\cdot [+1] & \tag{3} \\ \downarrow \cong \mathbb{H} & & \downarrow \cong \tau[+1] & & \downarrow \lambda[+1] & \\ \mathcal{C} & \longleftarrow & \mathcal{B} & \longleftarrow & (0 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}) & \tag{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\cdot & \xleftarrow{=} & R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}^\cdot & \tag{1} \\ \downarrow & & \downarrow \tau \cong & & \downarrow \tau \cong & \\ 0 & \longleftarrow & \mathcal{A} & \xleftarrow{=} & \mathcal{A} & \tag{4} \\ \downarrow & & \downarrow U & & \downarrow U & \\ \mathcal{C} & \longleftarrow & \mathcal{B} & \longleftarrow & (0 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}) & \tag{2} \end{array}$$

Le morphisme entre les deux triangles 1 et 3, provient du carré donné en III.3, et on a $\tau U = \tau' [+1] \bar{U}'$.

Comme $\text{Hom}_{D(\mathbb{C}_X)}(R\Gamma_{X-H} \mathcal{F}', \mathcal{C}[-1]) = \text{Hom}_{D(\mathbb{C}_X)}(0, \mathcal{B}) = 0$, du lemme A.2, on déduit $\lambda [+1] \bar{U} = U\tau$. Les hypothèses du lemme A.2 sont encore vérifiées pour le diagramme *, on en déduit un isomorphisme unique

$$\mathcal{F}' \longrightarrow \beta\alpha(\mathcal{F}'),$$

qui permet de compléter * en un isomorphisme de triangles. D'où le résultat, car toutes ces opérations sont fonctorielles en \mathcal{F}' .

IV. Exemples et applications

IV.1. Extension de Deligne ou complexe d'intersection

IV.1.1. Rappels

Si \mathcal{F}' désigne un élément de $\text{Perv}^\Delta(X)$, les axiomes Ax 1 définis dans [9] se traduisent par

$$Ax\ 1 \begin{cases} h^1(\mathcal{F}') \text{ est supporté par } \{0\} \\ h^2(\mathcal{F}') = 0 \\ R^3\Gamma_{\{x\}} \mathcal{F}' = 0 \text{ pour } x \in \Delta - \{0\} \\ R^2\Gamma_{\{x\}} \mathcal{F}' = 0 \end{cases}$$

Dans [9] est démontré que le foncteur d'extension de Deligne (à un décalage de 2 près):

$$\begin{array}{ccc} \text{Systèmes locaux sur} & & \text{Faisceaux pervers relativement} \\ X - \Delta & \xrightarrow{\mathbb{P}} & \text{à } \Delta \text{ vérifiant Ax 1} \\ & & \text{“Perv}^\Delta(X) \cap \text{Ax 1”} \end{array}$$

est une équivalence de catégorie. Un foncteur quasi-inverse est le foncteur

$$\mathcal{F}' \longrightarrow h^0(\mathcal{F}')|_{X-\Delta}.$$

(\mathbb{P} est aussi noté I.C).

IV.1.2. Traduction sur $\alpha(\mathcal{F}')$ des conditions Ax 1

$$\text{Notons } \alpha(\mathcal{F}') = \begin{array}{ccccc} & & u_k & & u'_k \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ E & & F_k & & G \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & & v_k & & v'_k \end{array}$$

Il est facile [8], de voir que ces conditions se traduisent par: $\forall k \in \{1, 2, \dots, \delta\}$, u_k est surjective.

$$\bigoplus_{k \in \{1, \dots, \delta\}} F_k \xrightarrow{\oplus u'_k} G \text{ est surjective.}$$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, \delta\}$ v_k est injective.

$$\bigcap_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} \text{Ker } v'_k = 0.$$

IV.1.3. Description d'un foncteur isomorphe à $\alpha \circ \mathbb{P}$

Soit \mathcal{L} un système local sur $X - \Delta$, notons $\alpha \circ \mathbb{P}(\mathcal{L})$:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u_k} & F_k & \xrightarrow{u'_k} & G \\ & \searrow v_k & \swarrow v'_k & & \\ & & & & \end{array}$$

Les u_k, u'_k, v_k, v'_k vérifient les sept relations de II.7 et d'après IV.1.2,

$\forall k \in \{1, 2, \dots, \delta\}$ u_k est surjective, v_k est injective

$u' = \oplus u_k: \oplus F_k \rightarrow G$ est surjective

$v' = \oplus v'_k: G \rightarrow \oplus F_k$ est injective.

LEMME: Si un morphisme d'espace vectoriel $u: E \rightarrow F$ est surjectif et un morphisme $v: F \rightarrow E$ est injectif, on a le diagramme commutatif:

$$= \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & E \\ & & \cong \uparrow u & & \downarrow \\ & & E & \xrightarrow{vu} & E \\ \downarrow & \xrightarrow{\text{passage au}} & \text{Ker } vu & & \\ & \text{quotient} & & & \end{array} =$$

On en déduit donc des relations entre les u_k, u'_k, v_k, v'_k les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u_k} & F_k & \xrightarrow{v_k} & E \\ \parallel & & \cong \uparrow u_k & & \parallel \\ E & \longrightarrow & E & \xrightarrow{M_k - 1d} & E \\ & & \text{Ker } (M_k - 1d) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F_b(k) & \xrightarrow{-\alpha_{b(k),k} = v'_k u'} & F_k \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 E & & E \\
 \hline
 \text{Ker}(M_{b(k)} - 1d) & \xrightarrow{-M_{a(k)}} & \text{Ker}(M_k - 1d)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F_a(k) & \xrightarrow{v'_k u'_a(k)} & F_k \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 E & & E \\
 \hline
 \text{Ker}(M_{a(k)} - 1d) & \xrightarrow{M_{a(k)} - 1d} & \text{Ker}(M_k - 1d)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \oplus F_k & \xrightarrow{u'} & G & \xrightarrow{v'} & \oplus F_k \\
 \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow = \\
 \oplus F_k & \longrightarrow & \frac{\oplus F_k}{\text{Ker } v'u'} & \xrightarrow{v'u'} & \oplus F_k
 \end{array}$$

On en déduit que $\alpha\mathbb{P}(\mathcal{L})$ est isomorphe à

$$*(\mathcal{L}) \left[\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{M_k - 1d} & E \\
 \text{passage au quotient} & & \text{passage au quotient} \\
 E & \xrightarrow{\quad} & \text{Ker}(M_k - 1d) \\
 & & \xrightarrow{v'_k} \\
 & & \frac{\bigoplus_{k \in \{1, 2, \dots, \delta\}} E}{K}
 \end{array} \right.$$

où K est avec la numérotation de II.3.8, le sous-espace vectoriel d'équation:

$$\dot{e}_k - M_{a(k)} \dot{e}_{b(k)} + (M_{a(k)} - 1d) \dot{e}_{a(k)} = 0$$

et où

$$v_k((e_c)_{c \in \{1, 2, \dots, \delta\}}) = e_k - M_{a(k)} e_{b(k)} + (M_{a(k)} - 1d) e_{a(k)}.$$

Notre construction et les résultats rappelés en IV.1.1 s'énoncent:

PROPOSITION: Soit \mathcal{L} un système local sur $X - \Delta$, $E = \mathcal{L}(X - H)$, M_k : $E \xrightarrow{\cong} E$ les morphismes définis par le franchissement des H_k (voir II.3.3).

$$\mathcal{L} \longrightarrow *(\mathcal{L})$$

est un foncteur de

$$\begin{array}{c} \text{Systèmes locaux} \longrightarrow C(\Delta) \\ \text{sur } X - \Delta \end{array}$$

isomorphe à $\alpha \circ \mathbb{P}$.

IV.2. Calculs de multiplicités et autres applications

Soit C_1, C_2, \dots, C_s les s composantes irréductibles de Δ , N_i la multiplicité de C_i à l'origine. Soit \mathcal{F} un faisceau pervers relativement à Δ , m_\emptyset , m_j et m_0 les multiplicités de \mathcal{F} le long de T_X^*X , $T_{C_j}^*X$ et $T_{\{0\}}^*X$. Dans [8], on montre que

$$m_\emptyset = \dim_{\mathbb{C}} E$$

$$m_j = \dim_{\mathbb{C}} F_{k(j)} \text{ (où } t_{k(j)} \in C_j \text{)}$$

$$m_0 = \dim G - \sum_{j=1}^s (\delta_j - N_j) \dim_{\mathbb{C}} F_{k(j)}.$$

On montre ensuite que

$$m_\emptyset = 0 \Rightarrow m_0 \geq \sum_{j=1}^s (N_j - 1) \dim_{\mathbb{C}} F_{k(j)}.$$

Cela permet de donner une preuve du résultat, bien connu suivant: T_Δ^*X est la variété caractéristique d'un faisceau pervers si et seulement si les composantes irréductibles de Δ sont lisses. On montre enfin comment donner à partir de notre description de $C(\Delta)$ une démonstration topologique élémentaire d'un théorème de prolongement de solution (proposition 4.6.1 de [14] ou de la proposition page 76 de [22]).

Reconnaissance

Je remercie J. Briançon, M. Granger, B. Malgrange et F. Pham pour les fructueuses discussions échangées avec eux.

A. Appendice: Deux lemmes sur les catégories triangulées

(Les résultats et démonstrations de cet appendice m'ont été communiqués par B. Malgrange).

Soit K une catégorie additive triangulée, T son foncteur de translation. Considérons le diagramme suivant entre deux triangles distingués:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & T(A) \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow T(\alpha) \\
 A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & T(A')
 \end{array}$$

où $\gamma v = v' \beta$. D'après l'axiome $TR2$ et $TR3$, il existe un morphisme α , tel que $(\alpha, \beta, \gamma, T(\alpha))$ soit un morphisme de triangles (se reporter à [10] ou [23]).

A.1. LEMME: Si $\text{Hom}_K(A, T^{-1}(C')) = 0$, α est unique.

A.2. LEMME: Si $\text{Hom}_K(B, T^{-1}(C')) = \text{Hom}_K(C, B') = 0$, α est unique.

Preuve de A.1: C'est une partie de la proposition 1.1.9 de [2].

Preuve de A.2: On a le diagramme commutatif entre suites exactes

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_K(B, T^{-1}(C')) & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 \text{Hom}_K(A, T^{-1}(C')) & \xrightarrow{-T^{-1}(w)} & \text{Hom}_K(A, A') & \longrightarrow & \text{Hom}_K(A, B') \\
 \downarrow \cdot(-T^{-1}(w)) & & \downarrow \cdot(-T^{-1}(w)) & & \\
 \text{Hom}_K(T^{-1}(C), T^{-1}(B')) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(T^{-1}C, T^{-1}C') & \xrightarrow{-T^{-1}(w')} & \text{Hom}_K(T^{-1}C, A').
 \end{array}$$

Par hypothèse, les morphismes $(\cdot(-T^{-1}(v))) = \text{Hom}_K(-T^{-1}(v), T^{-1}(C'))$ et $(-T^{-1}(v')\cdot) = \text{Hom}_K(T^{-1}(C), -T^{-1}(v'))$ sont injectifs. Si (α, β, γ) est un morphisme de triangle, l'image de α dans $\text{Hom}_K(A, B')$ est $u'\alpha = \beta u$ et dans $\text{Hom}_K(T^{-1}C, A')$ est $-\alpha T^{-1}(w) = -T^{-1}(w') T^{-1}(\gamma)$. Ces images ne dépendent donc pas de α . Pour démontrer le lemme il reste à chasser dans le diagramme.

Bibliographie

1. J.L. Brylinsky: Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge, *Lect. Notes* 961, (1982).
2. A.A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne: Faisceaux pervers, *Astérisque* 100, (1983).
3. A. Galligo, M. Granger et Ph. Maisonobe: \mathcal{D} -Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal, *Annales de l'Inst. Fourier*, (1985).
4. A. Galligo, M. Granger et Ph. Maisonobe: \mathcal{D} -Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal – II, “Systèmes Différentiels et Singularités” *Astérisque* 130 (1985).
5. M. Granger et Ph. Maisonobe: Faisceaux pervers relativement à un point de rebroussement, C.R.A.S., t. 299, série I. No. 12, (1984).
6. M. Granger et Ph. Maisonobe: Faisceaux pervers relativement à un cusp, preprint No. 47, (Mars, 1984).
7. Ph. Maisonobe: Note manuscrite sur La classification des faisceaux pervers relativement à $y^2 - x^n = 0$, (rapport d'activité au C.N.R.S., Mai, 1984).
8. Ph. Maisonobe: \mathcal{D} -Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane, Thèse d'Etat, (Juin, 1985).
9. M. Goresky et R. MacPherson: Intersection Homologie II, *Inv. Math.*, 72 (1983) 1.
10. R. Hartshorne: Residues and duality, *Lect. Notes in Math.* 20, (1966).
11. M. Kashiwara: Systems of Microdifferential Equations, Notes and translation by Teresa Monteiro Fernandes, Introduction by J.L. Brylinsky, *Progress in Math.*, 34, (1983).
12. M. Kashiwara: On the maximally overdetermined systems of linear differential equations – I, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., No. 10, (1975).
13. M. Kashiwara: The Riemann Hilbert problem for holonomic systems, R.I.M.S., preprint No. 437, (1983).
14. M. Kashiwara et T. Kawai: On holonomic systems of micro-differential equation – III (systems with regular singularities), Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 17, (1981).
15. R. MacPherson et K. Vilonen: Construction élémentaire des faisceaux pervers, C.R.A.S., t. 299, série I, No. 10, (1984).
16. R. MacPherson et K. Vilonen: Elementary construction of perverse sheaves, *Invent. Math.* 84 (1986).
17. R. MacPherson et K. Vilonen: Perverse sheaves with singularities along the curve $y^n - x^m = 0$, *Math. Sci. Res. Inst. Berkeley Cal.*, (Février, 1985).
18. Z. Mebkhout: Thèse d'Etat, Univ. de Paris VII, (Février, 1979).
19. Z. Mebkhout: Une équivalence de catégorie. Une autre équivalence de catégorie, *Compositio Mathematica*, Vol. 51, No. 1, pp. 51–62 et 63–88, (1984).
20. Z. Mebkhout: Théorèmes de bidualité locale pour les \mathcal{D}_x -Modules holonomes, *Arkiv. für Math.*, Vol. 20, No. 1, (1982).
21. L. Narvaez: Faisceaux pervers dont le support singulier est le germe d'une courbe plane irréductible, Thèse de 3e cycle, Univ. de Paris VII, (Oct., 1984).
22. F. Pham: Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes, *L'Enseignement Mathématique*, t. 30, (1984).
23. J.L. Verdier: Catégories Dérivées, état 0, dans S.G.A. 4 $\frac{1}{2}$, *Lect. Notes in Math.*, No. 569, (1977).
24. J.L. Verdier: Extension of a Perverse Sheaf over a closed subspace, “Systèmes Différentiels et Singularités”, *Astérisque* 130 (1985).