Y. LAURENT
P. SCHAPIRA

Images inverses des modules différentiels

Compositio Mathematica, tome 61, nº 2 (1987), p. 229-251
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__61_2_229_0>

Compositio Mathematica 61: 229–251 (1987)

Images inverses des modules différentiels

Y. LAURENT [1] & P. SCHAPIRA [2]
[1] *Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France;*
[2] *Université Paris-Nord, Mathématiques, C.S.P., 93430 Villetaneuse, France*

Received 28 January 1986; accepted 27 June 1986

0. Introduction

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété analytique complexe et soit $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux sur X des opérateurs différentiels holomorphes d'ordre fini. Soient Y une sous-variété lisse de X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent.

Nous nous proposons d'étudier ici les systèmes induits par $\mathcal{M}$ sur Y (i.e.: les $\mathcal{D}_Y$-modules $\mathcal{T}or_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{M})$) à l'aide d'une filtration $F_Y\mathcal{D}_X$ associée à Y, filtration introduite par [Kashiwara, 1983] dans l'étude des modules holonômes réguliers (voir aussi [Bengel et Gérard, 1982; Laumon, 1985]). Si $\mathcal{M}$ est muni d'une telle bonne filtration, le gradué associé $gr_Y(\mathcal{M})$ est un module cohérent sur l'anneau gradué $gr_Y(\mathcal{D}_X)$. On peut identifier naturellement cet anneau au sous-anneau de l'anneau des opérateurs différentiels sur T_YX (le fibré normal à Y dans X) qui sont algébriques dans les fibres, et la variété caractéristique de $gr_Y(\mathcal{M})$ dans T^*T_YX ne dépend que de $\mathcal{M}$. Notons $\hat{C}_{T_YX}(\mathcal{M})$ cette variété.

Nous montrons d'abord que la variété caractéristique des systèmes induits $\mathcal{M}_Y^j$ est contenue dans $T^*Y \cap \hat{C}_{T_YX}(\mathcal{M})$, précisant ainsi des résultats antérieurs de [Kashiwara et Schapira, 1981, 1985].

Nous donnons ensuite un critère de cohérence pour les systèmes induits. Une manière de formuler ce critère, est de dire que pour toute section u de $\mathcal{M}$, il existe un opérateur b d'ordre 0 pour la filtration $F_Y\mathcal{D}_X$, et un opérateur Q d'ordre -1, b ne contenant que des dérivations transverses à Y et vérifiant une condition analogue à celle considérée par Kashiwara, Kawaï et Sjöstrand [Kashiwara *et al.*, 1979] (dans le cas où $Y = \{p^t\}$), tels que $(b+Q)u = 0$. Quand $\mathcal{M}$ est holonôme, utilisant les techniques de deuxième microlocalisation de [Laurent, 1985], nous montrons que $gr_Y(\mathcal{M})$ est holonôme sur T_YX; (J.E. Björk nous a communiqué qu'il avait une démonstration purement algébrique de ce résultat). On en déduit alors l'existence d'un opérateur b vérifiant les conditions précédentes, et on retrouve ainsi les théorèmes de [Bernstein, 1972] et de [Kashiwara, 1979] sur la cohérence et l'holonômie des systèmes induits.

Enfin quand Y est une hypersurface, nous construisons une nouvelle variété microcaractéristique qui donne des résultats plus fins que ceux obtenus à l'aide de $\hat{C}_{T_YX}(\mathcal{M})$.

Signalons que les Théorèmes 2.2. et 3.3. de cet article ont été exposés dans le livre de [Schapira, 1985]. Nous développons ici leurs démonstrations tout en admettant les résultats sur les modules filtrés qui sont présentés en détail dans ce livre.

1. Filtration associée à une immersion

Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ une variété analytique complexe, Y une sous-variété lisse, $\mathscr{I}_Y$ l'idéal de définition de Y dans $\mathscr{O}_X$. On note $\Lambda = T_Y X$ le fibré normal à Y dans X, et $\lambda : \Lambda \to Y$ la projection de ce fibré sur sa base. On désigne par $\mathscr{O}_{[\Lambda]}$ le sous-faisceau de $\mathscr{O}_\Lambda$ des sections polynomiales dans les fibres de λ. Par suite:

$$\lambda_* \mathscr{O}_{[\Lambda]} = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathscr{I}_Y^k / \mathscr{I}_Y^{k+1}. \tag{1.1}$$

Soit maintenant $\mathscr{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels holomorphes d'ordre fini sur X. Sauf mention du contraire, on considère $\mathscr{D}_X$ muni de sa filtration naturelle par l'ordre et si P est une section de $\mathscr{D}_X$, on note $\sigma(P)$ son symbole principal. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent, on note $\mathrm{Car}(\mathscr{M})$ sa variété caractéristique, c'est-à-dire le support dans T^*X (le fibré cotangent à X) de $gr(\mathscr{M})$, où $\mathrm{gr}(\mathscr{M})$ est le gradué associé à une bonne filtration sur $\mathscr{M}$, (cf. [Björk, 1979] ou [Schapira, 1985] pour un exposé détaillé).

Suivant [Kashiwara, 1983], nous munirons $\mathscr{D}_X|_Y$ de la filtration:

$$F_Y^k \mathscr{D}_X = \left\{ P \in \mathscr{D}_X|_Y;\ \forall l \in \mathbb{N},\ P \mathscr{I}_Y^l \subset \mathscr{I}_Y^{l-k} \right\}. \tag{1.2}$$

On note $F_Y \mathscr{D}_X$ l'anneau $\mathscr{D}_X|_Y$ muni de cette filtration, et on note $gr_Y(\mathscr{D}_X)$ son gradué associé.

Soit e_Λ le champ d'Euler sur le fibré Λ. C'est le champ de vecteurs sur Λ qui opère comme l'identité sur $\mathscr{I}_Y / \mathscr{I}_Y^2$. On désigne par $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$ le sous-faisceau d'anneaux de $\mathscr{D}_\Lambda$ des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathscr{O}_{[\Lambda]}$, et on pose:

$$\mathscr{D}_{[\Lambda]}(k) = \left\{ P \in \mathscr{D}_{[\Lambda]};\quad [e_\Lambda, P] = -kP \right\}. \tag{1.3}$$

L'anneau $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$ est gradué par la famille des $\mathscr{D}_{[\Lambda]}(k)$:

$$\mathscr{D}_{[\Lambda]} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{D}_{[\Lambda]}(k). \tag{1.4}$$

Remarquons que $\mathscr{D}_\Lambda$ est plat sur $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$, et le foncteur $\mathscr{D}_\Lambda \otimes^*_{\mathscr{D}_{[\Lambda]}}$ de la catégorie des $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$-modules gradués dans la catégorie des $\mathscr{D}_\Lambda$-modules est fidèle.

Proposition 1.1.

On a un isomorphisme naturel de faisceaux d'anneaux gradués sur Y:

$$gr_Y(\mathscr{D}_X) \simeq \lambda_* \mathscr{D}_{[\Lambda]}.$$

Démonstration

Comme $gr_Y^k(\mathscr{D}_X) = F_Y^k \mathscr{D}_X / F_Y^{k-1} \mathscr{D}_X$, ce groupe opère naturellement sur $\lambda_* \mathscr{O}_{[\Lambda]}$. On a donc un morphisme canonique:

$$i: gr_Y(\mathscr{D}_X) \to \lambda_* \mathscr{H}om_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{[\Lambda]}, \mathscr{O}_{[\Lambda]}).$$

Choisissons alors un système de coordonnées locales (y, t) sur X avec $y = (y_1, \ldots, y_p)$, $t = (t_1, \ldots, t_q)$, $Y = \{(y, t);\ t = 0\}$. Une section P de $\mathscr{D}_X \mid_Y$ s'écrit:

$$P = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leqslant m} a_{\alpha,\beta}(y, t) D_y^\alpha D_t^\beta$$

avec $a_{\alpha,\beta} \in \mathscr{O}_X \mid_Y$. Chaque fonction $a_{\alpha,\beta}$ se développe en série de Taylor le long de Y:

$$a_{\alpha,\beta}(y, t) = \sum_\gamma a_{\alpha,\beta,\gamma}(y) t^\gamma.$$

Soient $(y, \tilde{t})$ les coordonnées sur $T_Y X$ associées à (y, t). Pour $k \in \mathbb{Z}$, définissons l'opérateur P_k sur $T_Y X$ par:

$$P_k(y, \tilde{t}, D_y, D_{\tilde{t}}) = \sum_{|\beta| - |\gamma| = k} a_{\alpha,\beta,\gamma}(y) \tilde{t}^\gamma D_y^\alpha D_{\tilde{t}}^\beta.$$

Alors $P \in F_Y^N \mathscr{D}_X$ si et seulement si $P_k = 0$ pour $k > N$, et l'application de $F_Y^N \mathscr{D}_X$ dans $\lambda_* \mathscr{D}_{[\lambda]}(N)$, $P \mapsto P_N$, passe à $gr_Y^N(\mathscr{D}_X)$, et coïncide avec i. Il est clair que cette application définit un isomorphisme de $gr_Y(\mathscr{D}_X)$ sur $\lambda_* \mathscr{D}_{[\Lambda]}$.

Définition 1.2.

On note $\hat{\sigma}_Y(\cdot)$ le morphisme naturel de $\mathscr{D}_X \mid_Y$ dans $\lambda_* \mathscr{D}_{[\Lambda]}$ défini via $gr_Y(\mathscr{D}_X)$:

$$D_X \mid_Y \to gr_Y(\mathscr{D}_X) \xrightarrow{\sim} \lambda_* \mathscr{D}_{[\Lambda]}$$

et on dit que $\hat{\sigma}_Y(P)$ est le symbole formel de P le long de Y.

On a alors le résultat suivant, dont la démonstration est détaillée dans [Schapira, 1982, ch. III, §1.4].

Proposition et définition 1.3.

i) *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent muni d'une bonne $F_Y\mathcal{D}_X$-filtration. Alors le module $gr_Y(\mathcal{M})$, le gradué associé, est un $gr_Y(\mathcal{D}_X)$-module cohérent.*
ii) *La variété caractéristique de $\mathcal{D}_\Lambda \otimes_{\mathcal{D}_{[\Lambda]}} \lambda^{-1}gr_Y(\mathcal{M})$ ne dépend que de $\mathcal{M}$. Notons $\hat{C}_\Lambda(\mathcal{M})$ cette variété caractéristique.*
iii) *Si $0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents, on a:*

$$\hat{C}_\Lambda(\mathcal{M}) = \hat{C}_\Lambda(\mathcal{L}) \cup \hat{C}_\Lambda(\mathcal{N}).$$

iv) *Si $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un idéal cohérent, on a:*

$$\hat{C}_\Lambda(\mathcal{M}) = \{\theta \in T^*\Lambda;\ \sigma(\hat{\sigma}_Y(P))(\theta) = 0\ \ \forall P \in \mathcal{J}\}.$$

Remarque 1.4.

Une variété analogue à la variété $\hat{C}_\Lambda(\mathcal{M})$ avait été définie par [Monteiro-Fernandès, 1986] pour les modules microdifférentiels définis en dehors de la section nulle de T^*X. On verra au paragraphe 4 que cette variété coïncide aussi avec une variété introduite par une autre méthode par [Laurent, 1985].

2. Variété caractéristique des systèmes induits

Soit comme précédemment Y une sous-variété de X. On désigne par T^*_YX le fibré conormal à Y dans X, (en particulier, T^*_XX désigne la section nulle de X). On désigne par ρ et ϖ les applications associées à l'immersion $Y \hookrightarrow X$:

$$T^*Y \underset{\rho}{\leftarrow} Y \times_X T^*X \underset{\varpi}{\rightarrow} T^*X.$$

Rappelons [Bernstein, 1972; Kashiwara, 1979] que le faisceau $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$ est naturellement muni d'une structure de $(\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_X|_Y)$-bimodule, et que l'on note $\mathcal{D}_{Y\to X}$ ce bimodule. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent à gauche. Nous poserons:

$$\mathcal{M}^{\cdot}_Y = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}. \tag{2.1}$$

C'est un objet de la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés inférieurement de $\mathscr{D}_Y$-modules. On posera aussi:

$$\mathscr{M}_Y^k = \mathscr{T}\mathrm{or}_k^{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_{Y\to X}, \mathscr{M}) = H^{-k}(\mathscr{M}_Y^\cdot). \tag{2.2}$$

Rappelons que l'on dit que Y est non caractéristique pour $\mathscr{M}$ si:

$$T_Y^*X \cap \mathrm{Car}(\mathscr{M}) \subset T_X^*X. \tag{2.3}$$

Dans ce cas, les $\mathscr{D}_Y$-modulus $\mathscr{M}_Y^k$ sont cohérents, nuls pour $k \neq 0$, et l'on a:

$$\mathrm{Car}(\mathscr{M}_Y^0) = \rho\bar{\omega}^{-1}\,\mathrm{Car}(\mathscr{M}) \tag{2.4}$$

[Kashiwara, 1983].

Dans le cas général les $\mathscr{D}_Y$-modules $\mathscr{M}_Y^k$ ne sont pas cohérents, mais on a cependant le résultat suivant:

Proposition 2.1.

Les $\mathscr{D}_Y$-modules $\mathscr{M}_Y^k$ sont localement réunion d'une suite croissante de $\mathscr{D}_Y$-modules cohérents.

Démonstration

Considérons une résolution locale libre de type fini de $\mathscr{M}$:

$$0 \to \mathscr{D}_X^{m_p} \to \cdots \xrightarrow[A_0]{} \mathscr{D}_X^{m_0} \to \mathscr{M} \to 0$$

où les A_i, $(i = 0, \ldots, p-1)$ sont des matrices d'opérateurs différentiels. Par définition, $\mathscr{M}_Y^k$ est le $(-k)$-ième groupe de cohomologie du complexe:

$$0 \to \mathscr{D}_{Y\to X}^{m_p} \to \cdots \xrightarrow[A_0]{} \mathscr{D}_{Y\to X}^{m_0} \to 0$$

où $\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_0}$ est en degré 0, et les A_i opèrent à droite.

Munissons $\mathscr{D}_{Y\to X}$ de la filtration $F_Y\mathscr{D}_{Y\to X}$, image de $F_Y\mathscr{D}_X$:

$$F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X} = F_Y^k\mathscr{D}_X \big/ \left(\mathscr{J}_Y\mathscr{D}_X \cap F_Y^k\mathscr{D}_X\right). \tag{2.5}$$

Remarquons que si l'on choisit des coordonnées locales (y, t) comme au §.1, une section u de $\mathscr{D}_{Y\to X}$ d'ordre m pour cette filtration s'écrit de manière unique:

$$u = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} u_\alpha(y, D_y)\delta^{(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^q \tag{2.6}$$

où $u_\alpha \in \mathscr{D}_Y$, $\delta^{(\alpha)}$ est la classe de D_t^α modulo $\mathscr{J}_Y\mathscr{D}_X$.

Soit alors $K_l(k)$ le noyau de A_{l-1} dans $F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l}$:

$$K_l(k) = \operatorname{Ker}\left(F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l} \underset{A_{l-1}}{\to} \mathscr{D}_{Y\to X}^{m_{l-1}}\right)$$

et soit $I_l(k)$ l'intersection avec $F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l}$ de l'image de A_l:

$$I_l(k) = \operatorname{Im}\left(\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_{l+1}} \underset{A_l}{\to} \mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l}\right) \cap F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l}.$$

Il suffit alors de montrer que ces $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche sont cohérents.

Pour l assez grand, on a aussi:

$$K_l(k) = \operatorname{Ker}\left(F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l} \underset{A_{l-1}}{\to} F_Y^{k+l}\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_{l-1}}\right).$$

Comme $F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}$ est libre de type fini sur $\mathscr{D}_Y$, $K_l(k)$ est cohérent. De même:

$$I_l(k) = \bigcup_{l\in\mathbb{N}}\left(\operatorname{Im}\left(F_Y^l\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_{l+1}} \underset{A_l}{\to} \mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l}\right) \cap F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}^{m_l}\right)$$

et $I_l(k)$ étant la réunion d'une suite croissante de sous-$\mathscr{D}_Y$-modules cohérents d'un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent, est lui-même cohérent, le faisceau d'anneaux $\mathscr{D}_Y$ étant noethérien. Ceci achève la démonstration.

Soir maintenant $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}_Y$-module à gauche, localement réunion d'une suite croissante de $\mathscr{D}_Y$-modules cohérents $(\mathscr{N}_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Il est clair que l'ensemble $\bigcup_p \operatorname{car}(\mathscr{N}_p)$ est indépendant du choix de la suite $(\mathscr{N}_p)_p$. On pose:

$$\operatorname{car}(\mathscr{N}) = \bigcup_p \operatorname{car}(\mathscr{N}_p). \tag{2.7}$$

Si $0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{M} \to \mathscr{N} \to 0$ est une suite exacte de $\mathscr{D}_Y$-modules du type précédent, on aura:

$$\operatorname{car}(\mathscr{M}) = \operatorname{car}(\mathscr{L}) \cup \operatorname{car}(\mathscr{N}). \tag{2.8}$$

Si $\mathscr{N}^\cdot$ est un complexe borné de $\mathscr{D}_Y$-modules dont les groupes de cohomologie sont du type précédent, on pose:

$$\operatorname{car}(\mathscr{N}^\cdot) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{car}(H^j(\mathscr{N}^\cdot)). \tag{2.9}$$

En particulier, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent, on définit ainsi $\operatorname{car}(\mathscr{M}_Y^\cdot)$, la variété caractéristique des systèmes induits par $\mathscr{M}$ sur Y.

Soit $\Lambda = T_Y X$ le fibré normal à Y dans X. La projection $\lambda : \Lambda \to Y$ définit l'immersion

$$T^*Y \times_Y \Lambda \hookrightarrow T^*\Lambda$$

qui composée avec l'immersion

$$T^*Y \simeq T^*Y \times_Y Y \hookrightarrow T^*Y \times_Y \Lambda$$

définit l'immersion:

$$T^*Y \hookrightarrow T^*\Lambda. \tag{2.10}$$

Théorème 2.2.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Alors:

$$\operatorname{car}(\mathscr{M}_Y^{\cdot}) \subset T^*Y \cap \hat{C}_\Lambda(\mathscr{M}).$$

Démonstration

Suivant une méthode désormais classique, nous allons nous ramener au cas où $\mathscr{M}$ est de la forme $\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$, pour un opérateur P. Soit $\theta \in T^*Y$, $\theta \notin \hat{C}_\Lambda(\mathscr{M})$. D'après la proposition 1.3., pour toute section u de $\mathscr{M}$ il existe $P \in \mathscr{D}_X$ avec $Pu = 0$, $\sigma(\hat{\sigma}_Y(P))(\theta) \neq 0$. Le module $\mathscr{M}$ étant localement de type fini, choisissons un système de générateurs $(u_1, \ldots, u_N)$ et pour chaque u_i un opérateur P_i tel que $P_i u_i = 0$, $\sigma(\hat{\sigma}_Y(P_i))(\theta) \neq 0$. Soit $\mathscr{L} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P_i$, et soit $\psi : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ le morphisme qui associe u_i à la classe de 1 modulo $\mathscr{D}_X P_i$. Soit $\mathscr{N} = \operatorname{Ker} \psi$. On a donc la suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche:

$$0 \to \mathscr{N} \to \mathscr{L} \to \mathscr{M} \to 0.$$

Appliquons le foncteur $\mathscr{D}_{Y \to X} \otimes^*_{\mathscr{D}_X}$ à cette suite exacte. On obtient la suite exacte longue:

$$\cdots \to \mathscr{N}_Y^k \to \mathscr{L}_Y^k \to \mathscr{M}_Y^k \to \cdots \to \mathscr{M}_Y^0 \to 0. \tag{2.11}$$

Supposons le théorème démontré pour tous les modules du type $\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$, et supposons démontrée l'inclusion $\operatorname{car}(\mathscr{M}_Y^k) \subset T^*Y \cap \hat{C}_\Lambda(\mathscr{M})$ pour tout module cohérent $\mathscr{M}$ et pour tout $k \leqslant k_0$. On déduit de (2.11):

$$\operatorname{car}\left(\mathscr{M}_Y^{k_0+1}\right) \subset \operatorname{car}\left(\mathscr{L}_Y^{k_0+1}\right) \cup \operatorname{car}\left(\mathscr{N}_Y^{k_0}\right)$$

et par suite $\theta \notin \operatorname{car}(\mathscr{M}_Y^{k_0+1})$. On peut donc procéder par récurrence.

Il reste à démontrer le théorème pour les modules du type $\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$. Soit donc $\theta \in T^*Y$, avec:

$$\sigma(\hat{\sigma}_Y(P))(\theta) \neq 0. \tag{2.12}$$

On en déduit immédiatement de (2.12) que $\hat{\sigma}_Y(P)$ appartient à $\mathscr{D}_{[\Lambda]}(0)$ et est non nul.

On a déjà considéré la filtration $F_Y\mathscr{D}_{Y\to X}$ sur $\mathscr{D}_{Y\to X}$, image de la filtration $F_Y\mathscr{D}_X$. Posons:

$$\mathscr{D}_Y[k] = gr_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}. \tag{2.13}$$

Alors $\mathscr{D}_Y[k]$ est un $\mathscr{D}_Y$-module localement libre de type fini. Si (y, t) sont les coordonnées introduits au §.1, toute section u de $\mathscr{D}_Y[k]$ s'écrit de manière unique:

$$u = \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha(y, D_y)\delta^{(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^q \tag{2.14}$$

où $a_\alpha(y, D_y) \in \mathscr{D}_Y$, $\delta^{(\alpha)}$ est la classe de D_t^α.

Les sections de $\mathscr{D}_{[\Lambda]}(0) = F_Y^0\mathscr{D}_X/F_Y^{-1}\mathscr{D}_X$ opèrent naturellement dans chaque $\mathscr{D}_Y[k] = F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}/F_Y^{k-1}\mathscr{D}_{Y\to X}$. Dans la base $(\delta^{(\alpha)})_{|\alpha|=k}$, les opérateurs $t^\beta D_t^\gamma$, $(|\beta| = |\gamma|)$, sont représentés par des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Lemme 2.3.

Soit $Q \in \mathscr{D}_{[\Lambda]}(0)$, $\theta \in T^*Y$, *avec* $\sigma(Q)(\theta) \neq 0$. *Alors*:
i) Q *opère injectivement sur* $\mathscr{D}_Y[k]$
ii) $\theta \notin \operatorname{car}(\mathscr{D}_Y[k]/\mathscr{D}_Y[k]\cdot Q)$.

Démonstration du lemme

Dans les coordonnées (y, t) on peut écrire:

$$Q = Q_0(y, D_y) + \sum_{0<|\beta|=|\gamma|\leqslant m} a_{\beta,\gamma}(y, D_y)t^\beta D_t^\gamma$$

où Q_0 est d'ordre m, $\sigma_m(Q_0)(\theta) \neq 0$, $a_{\beta,\gamma}$ est d'ordre $\leqslant m - |\gamma|$. Dans la base $(\delta^{(\alpha)})_{|\alpha|=k}$, Q est représenté par une matrice d'opérateurs de $\mathscr{D}_Y$ d'ordre strictement inférieur à m en dehors de la diagonale et dont tous les termes diagonaux ont même symbole principal que Q_0. Le lemme en résulte.

Fin de la démonstration du théorème

D'après le lemme, $\hat{\sigma}_Y(P)$ opère injectivement dans $gr_Y(\mathscr{D}_{Y\to X})$. Par suite P opère injectivement dans $\mathscr{D}_{Y\to X}$, et comme le complexe $\mathscr{D}_{Y\to X}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{D}_k}\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$ est quasi-isomorphe au complexe $0\to\mathscr{D}_{Y\to X}\underset{P}{\to}\mathscr{D}_{Y\to X}\to 0$, on obtient $\mathscr{T}\mathrm{or}_j^{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_{Y\to X}, \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P)=0$ pour $j\neq 0$.

Il reste à évaluer la variété caractéristique de $\mathscr{D}_{Y\to X}/\mathscr{D}_{Y\to X}P$ donc les variétés caractéristiques des $\mathscr{D}_Y$-modules cohérents:

$$M_k \underset{\mathrm{def}}{=} F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}/F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X}P$$

Considérons le diagramme exact:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & F_Y^{k-1}\mathscr{D}_{Y\to X} & \to & F_Y^k\mathscr{D}_{Y\to X} & \to & \mathscr{D}_Y[k] & \to 0\\
 & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow \hat{\sigma}_Y(P) & \\
0\to & F_Y^{k-1}\mathscr{D}_{Y\to X} & \to & F_Y^k\mathscr{D}_{y\to X} & \to & \mathscr{D}_Y[k] & \to 0\\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & M_{k-1} & \to & M_k & \to & \mathscr{D}_Y[k]/\mathscr{D}_Y[k]\hat{\sigma}_Y(P) & \to 0\\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit:

$$\mathrm{car}(M_k)\subset \mathrm{car}(M_{k-1})\cup \mathrm{car}\big(\mathscr{D}_Y[k]/\mathscr{D}_Y[k]\hat{\sigma}_y(P)\big)$$

et on peut procéder par récurrence sur k, et conclure à l'aide du lemme 2.3. que $\theta\notin \mathrm{car}(M_k)$, ceci pour tout k.

Remarque 2.4.

Quand $\mathscr{M}$ vérifie une hypothèse de régularité le long de Y un théorème analogue au théorème 2.2. dans lequel on remplace $\hat{C}_\Lambda(\mathscr{M})$ par $C_{T_Y^*X}(\mathscr{M})$, le cône normal à car$(\mathscr{M})$ le long de T_Y^*X, avait été obtenu par [Kashiwara et Schapira, 1981, 1985].

3. Cohérence des systèmes induits

Les notations sont les mêmes qu'au §.2. Nous utiliserons le faisceau $\mathscr{D}_{\Lambda|Y}$ des opérateurs différentiels relatifs sur le fibré Λ: c'est le sous-anneau de $\mathscr{D}_\Lambda$

engendré par $\mathcal{O}_\Lambda$ et par les champs de vecteurs 'verticaux' (i.e.: qui annulent $\lambda^{-1}\mathcal{O}_Y$). Nous poserons:

$$\mathcal{D}_{[\Lambda|Y]} = \mathcal{D}_{[\Lambda]} \cap \mathcal{D}_{\Lambda|Y}$$

$$\mathcal{D}_{[\Lambda|Y]}(0) = \mathcal{D}_{[\Lambda]}(0) \cap \mathcal{D}_{\Lambda|Y}.$$

Soit (y, t) un système de coordonnées sur Λ, t étant linéaire dans les fibres. Une section P de $\mathcal{D}_{\Lambda|Y}$ s'écrit:

$$P(y, t, D_t) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} a_\alpha(y, t) D_t^\alpha \tag{3.1}$$

avec $a_\alpha \in \mathcal{O}_\Lambda$.

Une section P de $\mathcal{D}_{[\Lambda|Y]}$ s'écrit:

$$P(y, t, D_t) = \sum_{0 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m} a_{\alpha,\beta}(y) t^\alpha D_t^\beta \tag{3.2}$$

et P appartient à $\mathcal{D}_{[\lambda|Y]}(0)$ si $a_{\alpha,\beta} = 0$ pour $|\alpha| \neq |\beta|$.

Définition 3.1.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent défini au voisinage de Y. On dira que $\mathcal{M}$ est elliptique le long de Y s'il existe localement un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ qui engendre $\mathcal{M}$ et un opérateur différentiel b sur X tels que:

i) $\hat{\sigma}_Y(b) \in \mathcal{D}_{[\Lambda|Y]}(0)$

ii) $b\mathcal{M}_0 \subset (F_Y^{-1}\mathcal{D}_X)\mathcal{M}_0$

iii) *il existe un système de coordonnées locales (y, t), avec $Y = \{(y, t);\ t = 0\}$ tel que*

$$\sigma(\hat{\sigma}_Y(b))(y,t,\bar{t}) \neq 0 \quad \forall t \neq 0$$

où $\bar{t}$ désigne le complexe conjugué de t.

Remarquons que les conditions ii) et iii) signifient que l'opérateur b s'écrit:

$$b = b_0 + Q, \quad Q \in F_Y^{-1}\mathcal{D}_X, \tag{3.3}$$

$$b_0 = \sum_{0 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant m} a_{\alpha,\beta}(y) t^\alpha D_t^\beta$$

avec:

$$\sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha,\beta}(y) t^\alpha \bar{t}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } t \neq 0. \tag{3.4}$$

Proposition 3.2.

Considérons une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents:

$$0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{M} \to \mathscr{N} \to 0.$$

Alors $\mathscr{M}$ est elliptique le long de Y si et seulement si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{N}$ le sont.

La démonstration de ce résultat étant détaillée dans [Schapira, 1985, ch. III, §.1.6], nous ne la reproduisons pas.

Théorème 3.3.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent, elliptique le long de Y. Alors les $\mathscr{D}_Y$-modules $\mathscr{M}_Y^k$ sont cohérents pour tout k.

Démonstration

La proposition 3.2. permet de se ramener, comme dans la démonstration du théorème 2.2, au cas où $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X \cdot b$, l'opérateur b satisfaisant les conditions (3.3) et (3.4). Il faut donc montrer que le noyau et le conoyau de b opérant à droite sur $\mathscr{D}_{Y \to X}$ sont des $\mathscr{D}_Y$-modules cohérents. Comme $\mathscr{D}_{Y \to X} = \bigcup_k F_Y^k \mathscr{D}_{Y \to X}$, et $F_Y^k \mathscr{D}_{Y \to X}$ est localement libre de type fini sur $\mathscr{D}_Y$, il suffit que montrer que les complexes:

$$0 \to \mathscr{D}_{Y \to X} \underset{b}{\to} \mathscr{D}_{Y \to X} \to 0$$

et

$$0 \to F^k \mathscr{D}_{Y \to X} \underset{b}{\to} F^k \mathscr{D}_{Y \to X} \to 0$$

sont (localement) quasi-isomorphes pour $k \gg 0$. Il suffit donc de montrer que, localement, b induit un isomorphisme sur $\mathscr{D}_{Y \to X}/F_Y^k \mathscr{D}_{Y \to X}$ pour $k \gg 0$.

Munissons $\mathscr{D}_{Y \to X}$ de la filtration $F_Y \mathscr{D}_{Y \to X}$. Il suffit de vérifier que $\hat{\sigma}_Y(b)$ induit un isomorphisme sur $gr_Y^k \mathscr{D}_{Y \to X}$ pour $k \gg 0$:

Lemme 3.4.

Soit $b_0(y, t, D_t)$ comme dans (3.3) *et* (3.4). *Pout tout $y_0 \in Y$, il existe un voisinage V de y_0 dans Y et un entier $k_0 \geqslant 0$ tel que b_0 induise un isomorphisme sur $\mathscr{D}_Y[k] \mid_V$ pour tout $k \geqslant k_0$.*

Démonstration du lemme

Soit $(\delta^{(\alpha)})_{|\alpha|=k}$ la base canonique de $\mathscr{D}_Y[k]$. Dans cette base l'opérateur b_0 est représenté par une matrice $A_k(y)=(a^k_{\alpha,\beta}(y))_{\substack{|\alpha|=k\\|\beta|=k}}$ avec:

$$a^k_{\alpha,\beta}(y)=\sum_{\substack{\delta-\gamma=\alpha-\beta\\ \gamma\leqslant\beta\\ |\gamma|=|\delta|=m}} a_{\gamma,\delta}(y)\frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!}.$$

Il faut montrer que, localement, il existe k_0 tel que pour $k\geqslant k_0$, la matrice $A_k(y)$ est inversible.

Soit, pour $k\in\mathbb{N}$, S_k l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes homogènes de degré k en q variables ($q=\dim X-\dim Y$):

$$S_k=\left\{u=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^q\\|\alpha|=k}} a_\alpha t^\alpha;\ a_\alpha\in\mathbb{C}\right\}$$

et soit $P_0(y,t,D_t)$ l'opérateur différentiel sur $\mathbb{C}^q$:

$$P_0(y,t,D_t)=\sum_{|\gamma|=|\delta|\leqslant m} a_{\gamma\delta}(y)(-t)^\delta D_t^\gamma$$

Il est clair que la matrice de P_0 dans la base $(t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est $A_k(y)$.

D'après le lemme 1.3. de [Kashiwara *et al.*, 1979], si b_0 vérifie la condition (3.4) en un point $y_0\in Y$, il existe $k_0\geqslant 0$ tel que l'opérateur $P_0(y_0,t,D_t)$ est bijectif de S_k dans S_k pour tout $k\geqslant k_0$. En fait la démonstration de [Kashiwara *et al.*, 1979] montre que k_0 ne dépend que de

$$\theta(y_0)=\inf_{|t|=1}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(y_0)t^\alpha\bar{t}^\beta.$$

Pour tout compact K de Y, il existe donc $k_0\geqslant 0$ tel que pour tout $k\geqslant k_0$ et tout $y\in K$, $P_0(y,t,D_t)$ soit bijectif de S_k dans S_k et donc tel que la matrice $A_k(y)$ soit inversible.

4. Le cas holonôme

Les notations sont les mêmes qu'aux paragraphes précédents. En particulier $\Lambda=T_YX$ désigne le fibré normal à Y dans X et e_Λ le champ d'Euler sur Λ. Soit $\Lambda^*=T^*_YX$. Les fibrés $T^*\Lambda$ et $T^*\Lambda^*$ sont naturellement isomorphes (cf. [Kashiwara et Schapira, 1985] Proposition 5.1.3) et nous les identifierons. Nous désignerons par π la projection de $T^*\Lambda^*$ dans X.

Rappelons quelques résultats de [Laurent, 1985]:

On peut construire sur $T^*\Lambda^*$ un faisceau d'anneaux $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}(\infty, \infty)$ et un morphisme injectif de $\pi^{-1}\mathscr{D}_X$ dans $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}(\infty, \infty)$ faisant de ce dernier un $\pi^{-1}\mathscr{D}_X$-module plat. De plus si P est une section de $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}(\infty, \infty)$, on peut lui associer naturellement son symbole principal $\sigma^{(\infty, \infty)}(P)$, fonction holomorphe sur $T^*\Lambda^*$, bi-homogène pour la structure bi-conique de ce fibré, et si P est une section de $\pi^{-1}\mathscr{D}_X$ on vérifie que:

$$\sigma^{(\infty, \infty)}(P) = \sigma(\hat{\sigma}_Y(P)). \tag{4.1}$$

Pour simplifier les notations, nous poserons:

$$\mathscr{E}^2_{\Lambda^*} = \mathscr{E}^2_{\Lambda^*}(\infty, \infty).$$

Le faisceau $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}$ est cohérent, et si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}$-module cohérent, son support est un ensemble analytique de $T^*\Lambda^*$, bi-conique pour les deux actions naturelles de $\mathbb{C}^*$ sur $T^*\Lambda^*$. On déduit de (4.1) et de la Proposition 1.3. que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent:

$$\hat{C}_\Lambda(\mathscr{M}) = \operatorname{supp}\left(\mathscr{E}^2_{\Lambda^*} \underset{\pi^{-1}\mathscr{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}\mathscr{M}\right) \tag{4.2}$$

Proposition 4.1.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}$-module cohérent. On a pour tout $d \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{codim}_{T^*\Lambda^*}(\operatorname{supp} \mathscr{M}) \geqslant d \Leftrightarrow \mathscr{E}xt^j_{\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}}(\mathscr{M}, \mathscr{E}^2_{\Lambda^*}) = 0 \ \ \forall j < d.$$

La Proposition 4.1. se démontre formellement comme dans le cas micro-différentiel 'classique' [Kashiwara, 1979]. La démonstration est détaillée dans [Laurent, à paraître] et nous ne la répétons pas.

Remarquons simplement que la filtration naturelle sur $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}$ est zariskienne (au sens de [Schapira, 1985] Ch. II, §.1) ce qui permet d'appliquer la Proposition 1.2.2. de (*loc. cit*). Par contre la filtration $F_Y\mathscr{D}_X$ sur $\mathscr{D}_X|_Y$ n'est pas zariskienne.

Théorème 4.2.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Alors:

$$\dim(\hat{C}_\Lambda(\mathscr{M})) \leqslant \dim(\operatorname{car}(\mathscr{M})).$$

Démonstration

On sait d'après [Kashiwara, 1979] que:

$$\operatorname{codim}_{T^*X}(\operatorname{car}(\mathcal{M})) \geqslant d \Leftrightarrow \mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M}, \mathscr{D}_X) = 0 \;\; \forall j < d.$$

Supposons donc $\operatorname{codim}_{T^*X}(\operatorname{car}(\mathcal{M})) = d$. La platitude de $\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}$ sur $\pi^{-1}\mathscr{D}_X$ entraîne:

$$\mathscr{E}xt^j_{\mathscr{E}^2_{\Lambda^*}}\left(\mathscr{E}_{\Lambda^*} \underset{\pi^{-1}\mathscr{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{M}, \mathscr{E}^2_{\Lambda^*}\right) = 0 \;\; \forall j < d$$

et il reste à appliquer la Proposition 4.1.

Corollaire 4.3.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonôme muni d'une bonne $F_Y\mathscr{D}_X$-filtration et $gr_Y(\mathcal{M})$ le gradué associé.

Alors $\tilde{\mathcal{M}} = \mathscr{D}_\Lambda \underset{\mathscr{D}_{[\Lambda]}}{\otimes} \lambda^{-1} gr_Y(\mathcal{M})$ est holonôme.

Démonstration

Par la Proposition 1.3., $\hat{C}_\Lambda(\mathcal{M})$ est la variété caractéristique du module cohérent $\tilde{\mathcal{M}}$. Cette variété sera lagrangienne si $\mathcal{M}$ est holonôme d'après le Théorème 4.2.

Corollaire 4.4.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonôme. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ les modules induits $\mathcal{M}^k_Y$ sont holonômes sur $\mathscr{D}_Y$.

Démonstration

Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ le module holonôme défini comme dans le corollaire précédent. On sait [Kashiwara, 1979] que la fibre en chaque point de Λ du faisceau $\mathscr{E}\mathrm{nd}_{\mathscr{D}_\Lambda}(\tilde{\mathcal{M}})$ est un espace vectoriel de dimension finie. Comme $\mathscr{D}_\Lambda$ est plat sur $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$, on a:

$$\mathscr{E}nd_{\mathscr{D}_\Lambda}(\tilde{\mathcal{M}}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{[\Lambda]}}(\lambda^{-1} gr_Y(\mathcal{M}), \tilde{\mathcal{M}})$$

et par suite la fibre en chaque point du faisceau $\mathscr{E}nd_{\mathscr{D}_{[\Lambda]}}(\lambda^{-1}\mathrm{gr}_Y(\mathcal{M}))$ est un espace vectoriel de dimension finie. En particulier si l'on se restreint à Y, la section nulle de Λ, on obtient que la fibre en chaque point $y \in Y$ du faisceau $\mathscr{E}nd_{\lambda_* \mathscr{D}_{[\Lambda]}}(gr_Y(\mathscr{M}))$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Définissons le morphisme φ_Λ de $gr(\mathscr{M})$ dans lui-même en posant:

$$\varphi_{\Lambda \mid gr_Y^k(\mathscr{M})} = e_\Lambda + k. \tag{4.3}$$

Comme l'on a, pour $P \in gr_Y^l(\mathscr{D}_X)$:

$$P \circ e_\Lambda = (e_\Lambda + l) \circ P$$

on obtient que φ_Λ appartient à $\mathscr{E}\mathrm{nd}_{\lambda_* \mathscr{D}_{[\Lambda]}}(gr_Y(\mathscr{M}))$. Par suite il existe au voisinage de chaque $y \in Y$, un polynôme $b(T) \in \mathbb{C}[T]$, non nul, vérifiant:

$$b(\varphi_\Lambda) = 0. \tag{4.4}$$

Soit $\mathscr{M}_0$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent contenu dans $\mathscr{M}$ et engendrant $\mathscr{M}$, et soit θ un opérateur différentiel d'ordre 1 pour la filtration $F_Y \mathscr{D}_X$, avec

$$\hat{\sigma}_Y(\theta) = e_\Lambda. \tag{4.5}$$

(Dans les coordonnées locales (y, t) sur X considérées au §.1, on peut prendre $\theta = \sum_{i=1}^{q} t_i D_{t_i}$.) Appliquant les remarques précédentes à la filtration $(F_Y^k \mathscr{D}_X)\mathscr{M}_0$ sur $\mathscr{M}$ on obtient:

$$b(\theta)\mathscr{M}_0 \subset (F_Y^{-1} \mathscr{D}_X)\mathscr{M}_0. \tag{4.6}$$

Les systèmes induits $\mathscr{M}_Y^k$ sont alors cohérents par le Théorème 3.3.

D'après le Théorème 2.2. il reste à démontrer que $T^*Y \cap \hat{C}_\Lambda(\mathscr{M})$ est isotrope pour la structure symplectique de T^*Y. Mais celle-ci est induite par la structure symplectique de $T^*\Lambda^*$, et $\hat{C}_\Lambda(\mathscr{M})$ étant isotrope dans $T^*\Lambda^*$ (par le Théorème 4.3) il en est de même de $T^*\Lambda^* \cap \hat{C}_\Lambda(\mathscr{M})$ (cf. [Kashiwara et Schapira, 1985] Proposition 8.2.2. par exemple).

Remarque 4.5.

L'énoncé du corollaire 4.4. est bien connu, et il est dû à [Kashiwara, 1979] (cf. aussi [Bernstein, 1972] pour le cas algébrique). Signalons d'autre part que J.E. Björk (non publié) nous a communiqué une démonstration purement algébrique (n'utilisant pas la deuxième microlocalisation) de la Proposition 4.2.

Remarque 4.6.

Quand $\mathscr{M}$ est holonôme régulier, [Kashiwara et Kawaï, 1980] construisent un polynôme $b(\theta)$ vérifiant la condition plus forte que (4.6)

$$b(\theta)\mathscr{M}_0 \subset \left(F_Y^{-1}\mathscr{D}_X \cap \mathscr{D}_X(m)\right)\mathscr{M}_0$$

où $\mathscr{D}_X(m)$ désigne le faisceau des opérateurs d'ordre au plus m pour la filtration usuelle de $\mathscr{D}_X$, et où m est le degré de b.

5. Le cas de la codimension un

Lorsque Y est une sous-variété de X de codimension un, les résultats du paragraphe deux peuvent être précisés. (Dans le cas d'un seul opérateur, on peut même calculer exactement la variété caractéristique du module induit).

Pour cela, nous allons définir une variété caractéristique relative à Y qui sera contenue (en général strictement) dans $T^*Y \cap \hat{C}_{T_YX}(\mathscr{M})$.

A. *Opérateurs différentiels sur un fibré vectoriel de rang un*

Soient Λ un fibré vectoriel de rang 1 sur une variété analytique complexe Y et $\lambda: \Lambda \to Y$ la projection.

Nour reprenons les notations que nous avions adoptées pour $\Lambda = T_YX$ dans les chapitres précédents, en particulier $\theta = e_\Lambda$ désigne le champ d'Euler sur Λ et on note:

$$\mathscr{O}_{[\Lambda]}[k] = \{ f \in \mathscr{O}_\Lambda;\ \theta f = kf \}, \quad \mathscr{O}_{[\Lambda]} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{O}_{[\Lambda]}[k]$$

$$\mathscr{D}_{[\Lambda]}[k] = \{ P \in \mathscr{D}_\Lambda;\ [\theta, P] = -kP \}, \quad \mathscr{D}_{[\Lambda]} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{D}_{[\Lambda]}[k].$$

L'application $\rho: \lambda_*\mathscr{O}_{[\Lambda]}[0] \to \mathscr{O}_Y$ définie par $\rho(f) = f_{|Y}$ est un isomorphisme. Le faisceau $\lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]$ opère sur $\lambda_*\mathscr{O}_{[\Lambda]}[0]$ donc sur $\mathscr{O}_Y$ et on définit ainsi un morphisme de faisceaux d'anneaux:

$$\rho: \lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0] \to \mathscr{D}_Y.$$

Si (y, t) est un système de coordonnées locales de Λ telles que $p(y, t) = y$, les opérateurs de $\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]$ sont ceux qui s'écrivent:

$$P = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} P_j(y, D_y)(tD_t)^j \tag{5.1}$$

et on a $\rho(P) = P_0(y, D_y)$.

On voit donc que (localement) $\lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]$ s'identifie à $\mathscr{D}_Y[\theta]$ et ρ à la restriction à $\theta = 0$. ($\mathscr{D}_Y[\theta]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathscr{D}_Y$, la variable θ commutant avec les éléments de $\mathscr{D}_Y$).

Si $\mathscr{N}$ est un $\lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]$-module cohérent, on définit un $\mathscr{D}_Y$-module cohérent $\rho(\mathscr{N})$ par extension des scalaires:

$$\rho(\mathscr{N}) = \mathscr{D}_Y \underset{\lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]}{\otimes} \mathscr{N} \tag{5.2}$$

et on lui associe la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\rho(\mathscr{N}))$ de $\rho(\mathscr{N})$ qui est un sous-ensemble analytique involutif de T^*Y.

Lemme 5.1.
a) *Si* $0 \to \mathscr{N}' \to \mathscr{N} \to \mathscr{N}'' \to 0$ *est une suite exacte de* $\lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]$*-modules cohérents on a*:

$$\mathrm{Car}(\rho(\mathscr{N})) = \mathrm{Car}(\rho(\mathscr{N}')) \cup \mathrm{Car}(\rho(\mathscr{N}''))$$

b) *Si* $\mathscr{J}$ *est un idéal cohérent de* $\lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]$ *et si* $\mathscr{N} = \lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]/\mathscr{J}$ *on a*:

$$\mathrm{Car}(\rho(\mathscr{N})) = \{y^* \in T^*Y;\ \forall P \in \mathscr{J},\ \sigma(\rho(P))(y^*) = 0\}.$$

Démonstration. Le problème étant local on peut supposer que $\lambda_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0] = \mathscr{D}_Y[\theta]$ et alors $\rho(\mathscr{N}) = \mathscr{N}/\theta\mathscr{N}$.

Soit $F\mathscr{D}_Y[\theta]$ la filtration obtenue en posant $F_k\mathscr{D}_Y[\theta] = \mathscr{D}_Y[\theta]$ pour $k \geqslant 0$ et $F_K\mathscr{D}_Y[\theta] = \theta^{-k}\mathscr{D}_Y[\theta]$ pour $k < 0$.

Remarquons tout d'abord que cette filtration est noethérienne [Schapira, 1985], ch. II Définition 1.1.2) car l'anneau formel associé $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_Y[\theta]_k T^k$ est égal à $\mathscr{D}_Y[\theta, T, \theta T^{-1}]$ donc est noethérien (*loc. cit.* Prop. 1.1.7).

Pour cette filtration on a $gr\mathscr{D}_Y[\theta] = \mathscr{D}_Y[\theta]$ et on peut filtrer ce gradué par l'ordre usuel des opérateurs différentiels sur Y.

Si $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{D}_Y[\theta]$-module cohérent muni d'une bonne $(F\mathscr{D}_Y[\theta])$-filtration, on peut donc lui associer son gradué $gr\mathscr{N}$ qui est un $\mathscr{D}_Y[\theta]$-module cohérent gradué puis la variété caractéristique $\mathrm{Car}(gr\mathscr{N})$ qui est un sous-ensemble de $T^*Y \times \mathbb{C}$.

D'après ([Schapira, 1985], ch. II, Proposition 1.3.1), $\mathrm{Car}(gr\mathscr{N})$ est indépendant du choix de la bonne filtration sur $\mathscr{N}$ et l'application qui a $\mathscr{N}$ associe $\mathrm{Car}(gr\mathscr{N})$ est additive, c'est-à-dire que si $0 \to \mathscr{N}' \to \mathscr{N} \to \mathscr{N}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathscr{D}_Y[\theta]$-module cohérent on a:

$$\mathrm{Car}(gr\mathscr{N}) = \mathrm{Car}(gr\mathscr{N}') \cup \mathrm{Car}(gr(\mathscr{N}'')).$$

Pour montrer la première partie de la proposition, il suffit de remarquer que $\mathrm{Car}(gr\mathscr{N}) = \mathrm{Car}(\mathscr{N}/\theta\mathscr{N}) \times \mathbb{C}$.

En effet si $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{D}_Y[\theta]$-module cohérent, la filtration définie par $\mathscr{N}_k = \mathscr{N}$ pour $k \geqslant 0$ et $\mathscr{N}_k = \theta^{-k}\mathscr{N}$ pour $k < 0$ est une bonne filtration donc

$$gr\mathscr{N} = \bigoplus_{k\geqslant 0} (\theta^k\mathscr{N}/\theta^{k+1}\mathscr{N}).$$

Pour tout k, $\theta^k\mathcal{N}/\theta^{k+1}\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent et on a un morphisme surjectif de $\mathcal{D}_Y$-modules cohérents:

$$\theta^k : \mathcal{N}/\theta\mathcal{N} \to \theta^k\mathcal{N}/\theta^{k+1}\mathcal{N}$$

donc $\mathrm{Car}(\theta^k\mathcal{N}/\theta^{k+1}\mathcal{N}) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{N}/\theta\mathcal{N}) \subset T^*Y$ et

$$\mathrm{Car}(gr\mathcal{N}) = \mathrm{Car}(\mathcal{N}/\theta\mathcal{N}) \times \mathbb{C}.$$

La partie b) de la proposition est claire puisque l'on a $\rho(\mathcal{N}) = \mathcal{D}_Y/\mathcal{J}_0$ avec $\mathcal{J}_0 = \rho(\mathcal{J}) = \{P(\theta, y, D_y)_{|\theta=0};\ P \in \mathcal{J}\}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}_{[\Lambda]}[k]$ est un $\mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]$-module cohérent (à droite et à gauche), donc on peut définir pour tout $\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]$-module cohérent $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent $\mathcal{N}_{Y,k}$ par:

$$\mathcal{N}_{Y,k} = \mathcal{D}_Y \underset{\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]}{\otimes} \left(\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[k] \underset{\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]}{\otimes} \mathcal{N}\right). \tag{5.3}$$

Proposition 5.2.

i) *Soient $\mathcal{M}$ un $\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}$-module cohérent et $\mathcal{N}$ un sous $-\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]$-module cohérent de $\mathcal{M}$ qui engendre $\mathcal{M}$ sur $\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}$. Alors $S(\mathcal{M}) \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Car}(\mathcal{N}_{Y,k})$ est un sous-ensemble de T^*Y indépendant du choix de $\mathcal{N}$.*

ii) *Si $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ est une suite exacte de $\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}$-modules cohérents on a:*

$$S(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}') \cup S(\mathcal{M}'').$$

Démonstration. i) Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ deux $\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]$-modules cohérents qui engendrent $\mathcal{M}$.

Puisque $\mathcal{N}$ engendre $\mathcal{M}$ on a:

$$\mathcal{N}' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[k]\mathcal{N}\right) \cap \mathcal{N}'$$

donc $\mathcal{N}' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}'^{(k)}$ avec $\mathcal{N}'^{(k)} = \sum_{-k\leqslant j\leqslant k} (\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[j]\mathcal{N}) \cap \mathcal{N}'$. Les modules $\mathcal{N}'^{(k)}$ forment une suite croissante de sous $-\lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]$-modules cohérents de $\mathcal{N}'$ donc puisque $\mathcal{N}'$ est de type fini cette suite est stationnaire.

Soit k_0 tel que $\mathcal{N}' = \mathcal{N}'^{(k_0)}$ et soit $\mathcal{N}'' = \sum_{-k_0\leqslant j\leqslant k_0} \lambda_*\mathcal{D}_{[\Lambda]}[j]\mathcal{N}$. Il est clair que l'on a:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Car}(\mathcal{N}'_{Y,k}) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Car}(\mathcal{N}''_{Y,k}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Car}(\mathcal{N}_{Y,k})$$

ce qui montre la première partie de la proposition.

ii) Il suffit de montrer que si $0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}'' \to 0$ est une suite exacte de $\lambda_* \mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]$-modules cohérents on a

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{Car}(\mathcal{N}_{Y,k}) = \mathrm{Car}(\mathcal{N}'_{Y,k}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{N}''_{Y,k})$$

ce qui est une conséquence immédiate du lemme 5.1. et de la platitude de $\lambda_* \mathcal{D}_{[\Lambda]}[k]$ sur $\lambda_* \mathcal{D}_{[\Lambda]}[0]$.

Remarque. Dans le système de coordonnées (y, t) considéré précédemment on a:

$$\lambda_* \mathcal{D}_{[\Lambda]}[k] = \mathcal{D}_Y[\theta] D_t^k \text{ pour } k \geqslant 0$$

$$= \mathcal{D}_Y[\theta] t^{-k} \text{ pour } k \leqslant 0$$

avec les relations $\theta D_t^k = D_t^k(\theta - k)$ et $\theta t^{-k} = t^{-k}(\theta + k)$. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_Y[\theta]$-module cohérent on a donc pour tout k:

$$\mathcal{N}_{Y,k} = \mathcal{N}/(\theta - k)\mathcal{N}.$$

B. *Application au fibré normal à une hypersurface*

On reprend les notations du paragraphe 2: X est une variété analytique complexe, Y une sous-variété de codimension 1 de X et Λ désigne le fibré normal $T_Y X$ à Y dans X.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent et $F_Y \mathcal{M}$ une bonne $F_Y \mathcal{D}_X$-filtration de $\mathcal{M}$. Alors le gradué associé $gr_Y \mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{[\Lambda]}$-module cohérent. On peut donc lui associer le sous-ensemble $S(gr_Y \mathcal{M})$ de T^*Y.

D'après la Proposition 7.2. $\mathcal{N} \to S(\mathcal{N})$ est additif, par suite (d'après [Schapira, 1985], ch. II, Prop. 1.1.3), $S(gr_Y \mathcal{M})$ est indépendant du choix de la bonne filtration et $\mathcal{M} \to S(gr_Y \mathcal{M})$ est additif:

Proposition et définition 5.3.

i) *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent, $S(gr_Y \mathcal{M})$ est un sous-ensemble de T^*Y indépendant du choix de la bonne $F_Y \mathcal{D}_X$-filtration sur $\mathcal{M}$. On pose* $\mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}) = S(gr_Y \mathcal{M})$.

ii) *Si $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents on a:*

$$\mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}') \cup \mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}'')$$

Calculons maintenant $\mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M})$ dans le cas d'un seul opérateur différentiel:

Soit $\mathcal{J}_Y$ l'idéal de définition de Y et φ un générateur local de $\mathcal{J}_Y$ (i.e. $\varphi \in \mathcal{J}_Y$ et $d\varphi \neq 0$ sur Y).

Si $P \in F_Y^0\mathscr{D}_X$, par définition il opère sur $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Y = \mathscr{O}_Y$ et on a ainsi un morphisme de faisceaux d'anneaux:

$$\rho_0 : F_Y^0\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_Y$$

qui n'est autre que la composition du morphisme canonique $F^0\mathscr{D}_X \to gr_F^0\mathscr{D}_X \simeq p_*\mathscr{D}_{[\Lambda]}[0]$ et du morphisme ρ que nous avons défini plus haut.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on définit un morphisme $\rho_k : F_Y^0\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_Y$ en posant $\rho_k(P) = \rho_0(\varphi^{-k}P\varphi^k)$.

Le morphisme ρ_k dépend de φ si $k \neq 0$ mais changer φ revient à conjuguer $\rho_k(P)$ par une fonction inversible de $\mathscr{O}_Y$ donc:
a) Le symbole principal $\sigma(\rho_k(P))$ est indépendant de φ.
b) Le $\mathscr{D}_Y$-module $\mathscr{D}_Y/\mathscr{D}_Y\rho_k(P)$ est indépendant de φ.
En fait, on vérifie facilement que si $\mathscr{N} = gr_Y^0(\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP)$ ($\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP$ étant muni de la filtration induite par la filtration $F_Y\mathscr{D}_X$), $\mathscr{D}_Y/\mathscr{D}_Y\rho_k(P)$ est égal au module $\mathscr{N}_{Y,k}$ défini plus haut.

Pour tout $P \in F_Y^0\mathscr{D}_X$ on a donc:

$$\mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{y^* \in T^*Y;\ \sigma(\rho_k(P))(y^*) = 0\}.$$

Si $P \in F_Y^k\mathscr{D}_X$, $k > 0$, on peut écrire $P = D_t^kQ$ avec $Q \in F_Y^0\mathscr{D}_X$ et on a pour tout $l \in \mathbb{Z}$:

$$gr_Y^l(D_X/D_XP) = gr_Y^l\mathscr{D}/gr_Y^{l-k}D_t^k\hat{\sigma}(Q).$$

Donc $gr_Y(\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP)$ est engendré par:

$$gr_Y^0(\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP) = gr_Y^0\mathscr{D}_X/gr_Y^0\mathscr{D}_Xt^kD_t^k\hat{\sigma}(Q).$$

Or $\rho_0(t^kD_t^k\hat{\sigma}(Q)) = 0$ donc

$$\mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP) = T^*Y.$$

On montrerait le même résultat lorsque $P \in F_Y^k\mathscr{D}_X$ avec $k < 0$. Si $\mathscr{I}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{D}_X$, $gr_Y(\mathscr{D}_X/\mathscr{I})$ est engendré par $gr_Y^0(F_Y^0\mathscr{D}_X/\mathscr{I}_0)$ avec $\mathscr{I}_0 = \mathscr{I} \cap F_Y^0\mathscr{D}_X$ et on déduit du lemme 5.1.:

Proposition 5.4. Si $\mathscr{I}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{D}_X$ et si $\mathscr{I}_0 = \mathscr{I} \cap F_Y^0\mathscr{D}_X$ on a:

$$\mathrm{Car}_Y^{\mathbb{Z}}(\mathscr{D}_X/\mathscr{I}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{y^* \in T^*Y;\ \forall P \in \mathscr{I}_0,\ \sigma(\rho_k(P))(y^*) = 0\}.$$

Exemple. Soit (y, t) un système de coordonnées locales de X tel que $Y = \{t = 0\}$. Un opérateur de $F_Y^0\mathscr{D}_X$ s'écrit sous la forme:

$$P(y, t, D_y, D_t) = P_0(y, D_y, tD_t) + tP_1(y, t, D_y, tD_t)$$

et prenant $\varphi(y, t) = t$ on obtient:

$$\rho_k(P)(y, D_y) = P_0(y, D_y, k).$$

C. *Variété caractéristique du module induit*

Théorème 5.5. Soient Y une hypersurface lisse d'une variété analytique complexe X et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent défini au voisinage de Y. Alors:

$$\operatorname{Car}(\mathscr{M}_Y^{\cdot}) \subset \operatorname{Car}_Y^{\mathbf{Z}}(\mathscr{M}).$$

(Rappelons que $\mathscr{M}_Y^{\cdot} = \mathscr{O}_Y \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$).

Les résultats des propositions 5.3. et 5.4. permettent, suivant la méthode que nous avons utilisée dans la démonstration du théorème 2.2., de ramener ce théorème au cas où $\mathscr{M}$ est de la forme $\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$ avec $P \in \mathscr{D}_X$.

Lorsque P est d'ordre non nul pour la filtration $F_Y\mathscr{D}_X$, nous avons vu précédemment que $\operatorname{Car}_Y^{\mathbf{Z}}(\mathscr{M})$ est égal à T^*Y.

Dans le cas où $P \in F_Y^0\mathscr{D}_X$ nous allons voir que l'on peut calculer exactement la variété caractéristique de $\mathscr{M}_Y^{\cdot}$:

Proposition 5.6. Soient P un opérateur différentiel de $F_Y^0\mathscr{D}_X$, et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$. On a:

$$\operatorname{Car}(\mathscr{M}_Y^{\cdot}) = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{y^* \in T^*Y;\ \sigma(\rho_k(P))(y^*) = 0\}.$$

(Rappelons que $\rho_k(P)$ dépend du choix de φ mais que son symbole principal $\sigma(\rho_k(P)) \in \mathscr{O}_{T^*Y}$ n'en dépend pas).

Démonstration. Fixons un système de coordonnées locales (y, t) de X et reprenons les calculs du paragraphe 2.

Les éléments de $\mathscr{D}_{Y \to X}$ s'écrivent de manière unique:

$$u = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} u_j(y, D_y)\delta^{(j)} \text{ avec } u_j \in \mathscr{D}_Y \text{ et } \delta^{(j)} \text{ classe de } D_t^j.$$

L'opérateur P peut être écrit en développant en t ses coefficients:

$$P(y, t, D_y, D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leqslant m \\ i \geqslant j}} P_{\alpha,i,j}(y) D_y^\alpha t^i D_t^j.$$

Pour $k \leqslant 0$, on pose $P_k(y, t, D_y, D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leqslant m \\ i-j=-k}} P_{\alpha,i,j}(y) D_y^\alpha t^i D_t^j.$

On peut réécrire P_k sous la forme:

$$P_k(y, t, D_y, D_t) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n_k} Q_k^i(y, D_y)(tD_t)^i t^{-k}.$$

Posons pour $j \in \mathbb{N}$: $P_k^{(j)}(y, D_y) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n_k} Q_k^i(y, D_y) j^i \dfrac{(j-k)!}{j!}$. (En particulier pour $k = 0$ on a $P_0^{(j)}(y, D_y) = \rho_j(P)(y, D_y)$).

Si $u = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} u_j(y, D_y)\delta^{(j)}$ on aura $u \cdot P = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} v_j(y, D_y)\delta^{(j)}$ avec $v_j(y, D_y) = \sum_{j-n \leqslant k \leqslant 0} u_{j-k}(y, D_y) P_k^{(j-k)}(y, D_y)$.

L'équation $u \cdot P = v$ est un système triangulaire d'équations différentielles sur Y dont la variété caractéristique est égale à la réunion des variétés caractéristiques des éléments diagonaux soit $\bigcup_{0 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{Car}(P_0^{(j)})$.

Le complexe $0 \to \mathscr{D}_{Y \to X}(n) \xrightarrow{P} \mathscr{D}_{Y \to X}(n) \to 0$ a donc pour variété caractéristique $\bigcup_{0 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{Car}(P_0^{(j)})$ et le complexe $0 \to \mathscr{D}_{Y \to X} \xrightarrow{P} \mathscr{D}_{Y \to X} \to 0$ a pour variété caractéristique $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{Car}(P_0^{(j)}) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{y^* \in T^*Y / \sigma(\rho_k(P))(y^*) = 0\}$.

Bibliographie

Bengel, G. et Gerard, R.: Formal and convergent solutions of singular partial differential equations. *Manuscripta Math*. 38 (1982) 343–373.

Bernstein, I.N.: The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. *Funct. Anal. and its Appl.* 6 (1972) 272–285.

Björk, J.-E.: *Rings of differential operators*. North Holland Math. Library (1979).

Kashiwara, M.: On the holonomic systems of linear differential equations II. *Inventiones Math.* 49 (1979) 121–135.

Kashiwara, M.: Vanishing cycles and holonomic systems of differential equations. *Lecture Notes in Math.* 1016. Springer Verlag (1983) 134–142.

Kashiwara, M.: Systems of microdifferential equations, Notes by T. Monteiro-Fernandes. *Progress in Math.* 34, Birkhäuser (1983).

Kashiwara, M. et Kawai, T.: Second microlocalization and asymptotic expansions. *Lecture Notes in Physics* 126. Springer Verlag (1980) 21–76.

Kashiwara, M., Kawai, T. and Sjöstrand, J.: On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge. *Arkiv für Math.* 17, N° 1 (1979) 83–91.

Kashiwara, M. et Schapira, P.: Variété caractéristique de la restriction d'un module différentiel. *Journée E.D.P. Saint Jean-de-Monts*. Publ. Ecole Polytechnique, Palaiseau (1981).

Kashiwara, M. et Schapira, P.: Microlocal study of sheaves. *Astérisque* 128. Soc. Math., France (1985).

Laurent, Y.: Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe. Progress in Math. 53. Birkhäuser (1985).

Laurent, Y.: Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonômes. *Astérisque* 130. Soc. Math. France, 352–364, et article à paraître.

Laumon, G.: $\mathscr{D}$-modules filtrés. *Astérisque* 130. Soc. Math., France (1985) 56–129.

Monteiro-Fernandès, T.: Problème de Cauchy microdifférentiel et théorèmes de propagation. *Astérisque*. 140–141 Soc. Math., France, (1986).

Schapira, P.: Microdifferential systems in the complex domain. *Grundlehren der Math.* 269. Springer (1985).