Compositio Mathematica

Daniel Alibert

Termes locaux de la formule de Lefschetz pour les courbes

Compositio Mathematica, tome 58, nº 2 (1986), p. 135-190
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__58_2_135_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica 58 (1986) 135–190
© Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht – Printed in the Netherlands

TERMES LOCAUX DE LA FORMULE DE LEFSCHETZ POUR LES COURBES

Daniel Alibert

Introduction

Soient X_1 et X_2 des schémas de type fini sur un corps algébriquement clos k, Λ un anneau de torsion première à la caractéristique de k et E_α un complexe de faisceaux (étales) de Λ-modules sur X_α ($\alpha = 1, 2$). Posons $S = \operatorname{Spec} k$. On appelle correspondance de X_1 à X_2 un S-morphisme de S-schémas c: $X' \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$. On appelle correspondance cohomologique de E_1 à E_2 à support dans c, un élément du groupe $H^0(X_1 \underset{S}{\times} X_2, c_! R\, Hom(c_1^* E_1, c_2^! E_2)$. En général on ne considère que des morphismes c propres de sorte que les correspondances cohomologiques de E_1 à E_2 à support dans c sont les éléments de $Hom(c_1^* E_1, c_2^! E_2)$. Les couples de correspondances cohomologiques à support dans des correspondances c' et c'' opèrent sur la cohomologie $R\Gamma(X_1, E_1)$, ou $R\Gamma(X_2, E_2)$; lorsque X_1 et X_2 sont propres, et que E_1 et E_2 possèdent des propriétés convenables, on sait calculer la trace de cette action en fonction de "termes locaux" associés aux composantes connexes de 1′ intersection de c' et c'' (Théorème de Lefschetz-Verdier SGA 5 III 4.7). Pour les généralités et les propriétés de ces correspondances on renvoie à (SGA 5 III).

Dans ce travail on explicite les termes locaux dans le cas où X_1, X_2, X', X'' sont des courbes lisses, en fonction des données locales: ramification des faisceaux, multiplicités d'intersection.

Le premier paragraphe présente les énoncés obtenus, après avoir défini les notions utilisées (1.7.1). Le second paragraphe utilise (1.7.1), établi dans le cadre de la cohomologie étale, pour obtenir des résultats dans d'autres contextes: cohomologie l-adique, faisceaux transcendants, faisceaux pervers. Les constructions techniques utilisées sont renvoyées en Annexe: mesure l-adique sur un groupe profini, chemin directs du disque. Dans le troisième paragraphe, on démontre les résultats de divisibilité, et les relations entre correspondances et revêtements, utilisés pour énoncer (1.7.1) et ses principaux corollaires. Dans le paragraphe 4, on procède à une suite de réductions permettant de se ramener à un cas simplifié pour démontrer le résultat principal. Enfin dans le paragraphe 5, on calcule le terme local dans ce cas particulier à l'aide d'une théorie de Traces non Commutatives exposée en Annexe.

Les résultats précédemment établis pour les courbes sont contenus dans (1.7.1) et ses corollaires: endomorphisme à points fixes de multiplicité 1 (Artin-Verdier [2]), cas du Frobénius (Deligne SGA $4\frac{1}{2}$), correspondances en position générale (Illusie SGA 5 III B §1) ou équivariantes (Illusie SGA 5 III B §6.7).

1. Enoncé des résultats

1.1. Soient X_1, X_2, X', X'' des courbes lisses sur un corps algébriquement clos k. On pose $S = \operatorname{spec} k$. Soient c': $X' \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$ et c'': $X'' \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$ des S-morphismes. Soit z un point fermé isolé du produit fibré $X' \underset{X_1 \underset{S}{\times} X_2}{\times} X''$. Soient x', x'', x_1, x_2 les images de z dans X', X'', X_1, X_2.

Pour tout point fermé y d'une courbe lisse sur k, Y, on note Y_y le S-trait strictement hensélien localisé strict de Y en y, (spectre du hensélisé strict de l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$). On associe à la situation "globale" décrite ci-dessus une situation "locale" donnée par le couple de S-morphismes:

$$X'_{x'} \xrightarrow{c'_{x'}} X_{1,x_1} \underset{S}{\times} X_{2,x_2} \xleftarrow{c''_{x''}} X''_{x''}.$$

Si on suppose de plus c' et c'' finis et tels que $c'_2 = pr_2 \circ c'$ (resp. $c''_1 = pr_1 \circ c''$) soit quasi-fini en x' (resp. en x''), alors $c'_{2,x'}$ et $c''_{1,x''}$ sont finis et surjectifs, et le produit fibré $(X'_{x'}) \underset{(X_{1,x_1} \underset{S}{\times} X_{2,x_2})}{\times} (X''_{x''})$ est réduit au point fermé $\{z\}$.

Inversement toute situation locale satisfaisant à ces propriétés provient d'une situation globale vérifiant les hypothèses ci-dessus (SGA 5 III B §1). On note p la caractéristique de k. Soit Λ un anneau commutatif noéthérien annulé par un entier premier à p. Soit $E_1 \in \operatorname{ob} D_{ctf}(X_1)$ (resp. $E_2 \in \operatorname{ob} D_{ctf}(X_2)$) un complexe de faisceaux pour la topologie étale, de Λ-modules, de tordimension finie et à cohomologie constructible. Soient $u' \in \operatorname{Hom}(c_1'^{*}\mathrm{E}_1, c_2'^{!}E_2)$, $u'' \in \operatorname{Hom}(c_2''^{*}E_2, c_1''^{!}E_1)$. On peut alors définir un "terme local", élément de Λ, et noté $\langle u', u''\rangle_z$ (SGA 5 III 4.2.7).

Par restriction à la situation locale, on obtient des complexes $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, et des flèches $\tilde{u}'$ et $\tilde{u}''$, auxquelles on sait associer un élément $\langle \tilde{u}', \tilde{u}''\rangle$ de Λ. D'après la compatibilité de la formation des termes locaux à la localisation étale, on sait que ces deux éléments de Λ sont égaux: $\langle u', u''\rangle = \langle \tilde{u}', \tilde{u}''\rangle$ (SGA 5 III 4.2.6 et III B 1.1.2). En utilisant la méthode de filtration de (SGA 5 III B), rappellée plus bas, on décompose le terme local en somme de deux termes

$$\langle \tilde{u}', \tilde{u}'' \rangle = \langle u'_z, u''_z \rangle + \langle u'^1, u''^1 \rangle \tag{1.1.1}$$

où $\langle u'_z, u''_z \rangle$ est le terme "ponctuel" défini de la manière suivante (SGA 5 III B 1.1.1): on note u'_z l'homomorphisme composé

$$E_{1,x_1} = R\Gamma\big(X_{1,x_1}, \tilde{E}_1\big) \xrightarrow{c_1'^*} R\Gamma\big(X'_{x'}, c'^*_{1,x'}(\tilde{E}_1)\big)$$

$$\xrightarrow{u'_{x'}} R\Gamma\big(X'_{x'}, c'^!_{2,x'}(\tilde{E}_2)\big) \xrightarrow{c'_{2*}} R\Gamma\big(X_{2,x_2}, \tilde{E}_2\big) = E_{2,x_2},$$

u''_z: $E_{2,x_2} \to E_{1,x_1}$ l'homomorphisme défini de manière analogue et $\langle u'_z, u''_z \rangle = \mathrm{Tr}_\Lambda(u'_z \circ u''_z)$ le cup-produit de ces morphismes de complexes parfaits de Λ-modules (SGA 6 I 8.3).

Dans la suite on évalue $\langle u'^1, u''^1 \rangle$ en fonction des données locales (1.7.1).

1.2. Rappelons comment on établit l'égalité (1.1.1) et comment on définit $\langle u'^1, u''^1 \rangle$: on suppose qu'on est dans la situation locale décrite plus haut: X_1, X_2, X', X'' sont des S-traits strictement locaux de points fermés respectifs x_1, x_2, x', x'', on a des S-morphismes locaux c': $X' \to X_1 \times_S X_2$, c'': $X'' \to X_1 \times_S X_2$ tels que c'_2 et c''_1 soient finis et surjectifs, et $X' \times_{X_1 \times_S X_2} X''$ est réduit au point $\{z\}$. Soient $E_1 \in \mathrm{ob}\ D_{ctf}(X_1)$ et $E_2 \in \mathrm{ob} D_{ctf}(X_2)$ des complexes de faisceaux de Λ-modules et $u' \in \mathrm{Hom}(c_1'^* E_1, c_2'^! E_2)$, $u'' \in \mathrm{Hom}(c_2''^* E_2, c_1''^! E_1)$ des flèches. On note U' (resp. U'', U_1, U_2) l'ouvert complémentaire de x' (resp. x'', x_1, x_2) dans X' (resp.), j': $U' \hookrightarrow X'$ (resp. j'', j_1, j_2) l'immersion ouverte canonique et i': $x' \hookrightarrow X'$ l'immersion fermée canonique (resp. i'', i_1, i_2). On a $c_2'^{-1}(U_2) = U'$ donc $c_1'^{-1}(U_1) \hookrightarrow c_2'^{-1}(U_2)$, on note s' cette flèche canonique (soit $c_1'^{-1}(U_1)$ est vide, soit s' est un isomorphisme). On considère la filtration sur E_α $(\alpha = 1, 2)$ définie par: $F^n E_\alpha = E_\alpha$ si $n \leqslant 0$, $F^1 E_\alpha = j_{\alpha!} j_\alpha^* E_\alpha$, $F^n E_\alpha = 0$ si $n > 1$.

On vérifie que les correspondances u' et u'' sont sous-jacentes à des correspondances filtrées (SGA 5 III 4.13) $\underline{u}'$ et $\underline{u}''$, et on a

$$\langle u', u'' \rangle = \langle gr^0 \underline{u}', gr^0 \underline{u}'' \rangle + \langle gr^1 \underline{u}', gr^1 \underline{u}'' \rangle.$$

On vérifie de plus que $\langle gr^0 \underline{u}', gr^0 \underline{u}'' \rangle = \langle u'_z, u''_z \rangle$ (SGA 5 III B 2.3). La flèche $gr^1 u'$: $c_1'^* j_{1!} j_1^* E_1 \to c_2'^! j_{2!} j_2^* E_2$ est la composée, notée u'^1, ci-dessous:

$$c_1'^* j_{1!} j_1^* E_1 \xrightarrow{(1)} j'_{1!} j_1'^* c_1'^* E_1 \xrightarrow{(2)} j'_{1!} j_1'^* c_2'^! E_2 \xrightarrow{(3)} j'_* j'^* c_2'^! E_2 \xrightarrow{(4)} c_2'^! j_{2!} j_2^* E_2$$

avec $j_1' = j' \circ s'$: $c_1'^{-1}(u_1) \leftarrow X'$ et les morphismes suivants, (1) est l'isomorphisme de changement de base, (2) est $j_{1!}' j_1'^*(u')$, (3) est la flèche d'adjonction $s_!' s'^* \to \mathrm{I}$, (4) est la flèche de changement de base. On définit de même u''^1.

Remarque 1.2.1: si $c_1'^{-1}(U_1)$ est vide, c'est à dire si c_1' se factorise par le point fermé i_1: $\{x_1\} \hookrightarrow X_1$, la flèche u'^1 est nulle. Cette condition équivaut au fait que c_1' n'est pas fini., Il en résulte que si c_1' ou c_2'' n'est pas fini, le terme $\langle u'^1, u''^1 \rangle$ est nul. Le terme local se réduit au terme pontuel $\langle u_z', u_z'' \rangle$.

Dans la suite du texte on suppose c_1', c_2', c_1'', c_2'' finis.

1.3. Rappelons le résultat suivant:

Lemme 1.3.1: *Soit X un schéma localement noéthérien, $E \in \mathrm{ob}\, D_{ctf}(X)$ un complexe de tordimension finie à cohomologie constructible de faisceaux de Λ-modules, (où Λ est un anneau de torsion première aux caractéristiques résiduelles). On peut alors décomposer X en sous-schémas fermés X_i, $X = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_r$ tels que pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, $E \mid_{X_i - X_{i+1}}$ soit localement isomorphe, dans $D(X_i - X_{i+1})$, à un complexe borné à composantes projectives de type fini sur Λ.*

En effet E étant de tordimension finie, est isomorphe dans $D^-(X)$ à un complexe borné F à composantes plates. Les faisceaux de cohomologie de F sont en nombre fini, et constructibles. Il existe donc un dévissage $X = X_0 \supset \dots \supset X_r$ de X tel que sur $X_i - X_{i+1}$ chaque faisceau de cohomologie soit localement constant constructible. On utilise alors (SGA 6 I, 5.8.1 et 3.5).

1.3.2. Si X est une courbe on définit ainsi un ouvert non vide $U \subset X$ tel qu'il existe un isomorphisme de $D(U)$, de $E\mid_U$ avec un complexe F sur U borné à composants localement constants de fibres projectives de type fini. Il existe alors un morphisme p: $U' \to U$ fini, étale, galoisien de groupe G, tel que pour tout composant F^i de F, p^*F^i soit constant sur U'. Supposons X lisse connexe, on peut prolonger par normalisation p en un morphisme $X' \to X$ avec X' une courbe lisse connexe. On dit que p: $X' \to X$ trivialise le complexe E au-dessus de U. Soit $\xi \to X$ un point géométrique générique. On peut supposer p ξ-pontué c'est à dire que $\xi \to X$ se factorise par X'. La fibre de p^*F en ξ est un complexe borné de Λ-modules projectifs de type fini, qu'on note M, sur lequel G opère. On note $\underline{\Lambda}_{U'}$ le faisceau constant de fibre Λ sur U', et on considère l'objet $\underline{\Lambda}_{U'} \otimes_\Lambda M$, muni de l'action diagonale de G. On a un isomorphisme de $D(G, U')$: $p^*(E\mid_U) \simeq \underline{\Lambda}_{U'} \otimes M$.

1.3.3. Appliquant cette construction à la situation de (1.2), on définit pour $\alpha = 1, 2$ un trait strictement local Y_α de point fermé y_α, un morphisme fini p_α: $Y_\alpha \to X_\alpha$ étale galoisien au-dessus de U_α, de groupe G_α, trivialisant $j_\alpha^* E_\alpha$. Il existe donc un complexe borné de Λ-modules projectifs de type fini M_α et un isomorphisme de $D(G_\alpha, Y_\alpha)$: $p_\alpha^* j_{\alpha!} j_\alpha^* E_\alpha \simeq r_{\alpha!} \underline{\Lambda}_{V_\alpha} \otimes M_\alpha$, avec $V_\alpha = Y_\alpha - \{y_\alpha\} = p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ et r_α: $V_\alpha \hookrightarrow Y_\alpha$ l'immersion ouverte canonique.

1.3.4. On note Z' (resp. Z'') le produit fibré $X' \underset{(X_1 \underset{S}{\times} X_2)}{\times} (Y_1 \underset{S}{\times} Y_2)$, (resp. $X'' \underset{(X_1 \underset{S}{\times} X_2)}{\times} (Y_1 \underset{S}{\times} Y_2)$). Le groupe $G_1 \times G_2$ opère sur $Y_1 \underset{S}{\times} Y_2$ au-dessus de $X_1 \underset{S}{\times} X_2$, et par transport de structure sur Z' au-dessus de X'. Plus particulièrement $G_1 \times G_2$ opère transitivement sur l'ensemble des composantes irréductibles $E(Z')$ de Z', ainsi que sur l'ensemble analogue $E(Z'')$. Le groupe $G_1 \times G_2$ opère diagonalement sur $E(Z') \times E(Z'')$.

1.3.4.1. On note $E(Z', Z'')$ l'ensemble quotient.

1.3.4.2. Soit $(D', D'') \in E(Z') \times E(Z'')$, on note $S(D', D'')$ le stabilisateur de (D', D'') dans $G_1 \times G_2$, et $s(D', D'')$ son ordre.

1.3.4.3. Soit $(D', D'') \in E(Z') \times E(Z'')$. On note Y' (resp. Y'') le trait strictement local normalisé de D' (resp. D'') et d': $Y' \to Y_1 \underset{S}{\times} Y_2$ le morphisme canonique (resp. d''), et de même p': $Y' \to X'$ le morphisme induit par la projection $Z' \to X'$ (resp. p'').

Les morphismes p' et p'' sont finis, étales, galoisiens de groupes respectifs G' et G'' au-dessus de $X' - \{x'\}$ (resp. $X'' - \{x''\}$). Le groupe G' (resp. G'') est le stabilisateur de D' (resp. D'') dans $G_1 \times G_2$. Soit $\eta' \to X' - \{x'\}$ un point géométrique se factorisant par Y', d'images η'_1 et η'_2 dans X_1 et X_2 respectivement. Si on suppose Y_1 (resp. Y_2) η'_1 (resp. η'_2)-ponctué, G' est l'image de $\pi_1(X' - \{x'\}, \eta')$ dans $G_1 \times G_2$ par le morphisme composé

$$\pi_1(X' - \{x'\}, \eta') \xrightarrow{c'} \pi_1(X_1 - \{x_1\}, \eta'_1) \times \pi_1(X_2 - \{x_2\}, \eta'_2)$$
$$\to G_1 \times G_2.$$

On caractérise de la même façon G'' à l'aide d'un point géométrique $\eta'' \to X' - \{x''\}$ se factorisant par $Y'' \to X''$. Lorsqu'on considère simultanément Y' et Y'', on doit de plus choisir un Y_1-chemin γ_1: $\eta'_1 \to \eta''_1$

(isomorphisme de foncteurs fibres) et un Y_2-chemin γ_2: $\eta'_2 \to \eta''_2$ définissant un isomorphisme $[\gamma]$: $\pi_1(X_1 - \{x_1\}, \eta'_1) \times \pi_1(X_2 - \{x_2\}, \eta'_2) \to \pi_1(X_1 - \{x_1\}, \eta''_1) \times \pi_1(X_2 - x_2, \eta''_2)$, donc un isomorphisme entre les quotients finis correspondants à $p_1 \times p_2$:

$$G'_1 \times G'_2 \xrightarrow{\sim} G''_1 \times G''_2$$

(avec les notations évidentes G'_1 = groupe du revêtement η'_1-ponctué p_1: $Y_1 \to X_1, \ldots$). Cet isomorphisme est indépendant du choix de γ_1 et γ_2 car un autre choix donnerait une translation par un élément de $\pi_1(Y_1 - \{y_1\}, \eta'_1) \times \pi_1(Y_2 - \{y_2\}, \eta'_2)$, dont l'image dans $G'_1 \times G'_2$ est par définition triviale. On associe donc au choix de $(D', D'') \in E(Z') \times E(Z'')$ un couple de morphismes injectifs de groupes finis bien déterminé.

1.3.4.4. ϕ': $G' \hookrightarrow G_1 \times G_2$, ϕ'': $G'' \hookrightarrow G_1 \times G_2$. On note parfois dans la suite $\phi = (\phi', \phi'')$.

1.3.5. Inversement soit η' (resp. η'') un point géométrique générique de X' (resp. X'') d'images η'_1, η'_2 (resp. η''_1, η''_2) dans X_1, X_2. Le choix d'un X_1-chemin γ_1: $\eta'_1 \to \eta''_1$ et d'un X_2-chemin γ_2: $\eta'_2 \to \eta''_2$ détermine pour tout revêtement $Y_1 \underset{S}{\times} Y_2 \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$ comme ci-dessus, étale galoisien génériquement, et $\eta'_1 \times \eta'_2$-ponctué, un couple unique de composantes normalisées (Y', Y'') comme ci-dessus: on note $G_1 \times G_2$ le groupe de Galois de $Y_1 \times Y_2$, quotient de $\pi_1(X_1 - \{x_1\}, \eta'_1) \times \pi_1(X_2 - \{x_2\}, \eta'_2)$, G' l'image de $\pi_1(X' - \{x'\}, y')$ dans $G_1 \times G_2$ par le morphisme composé déjà considéré ci-dessus, et G'' l'image de $\pi_1(X'' - \{x''\}, \eta'')$ dans $G_1 \times G_2$ par le morphisme composé utilisant les isomorphismes définis par γ_1 et γ_2. Le quotient G' de $\pi_1(X' - \{x'\}, \eta')$ définit un revêtement p': $Y' \to X'$, étale galoisien de groupe G' sur $X' - \{x'\}$, et de même on définit Y''.

1.4. Il existe un unique morphisme v': $c_1'^* j_{1!} j_1^* E_1 \to c_2'^* j_{2!} j_2^* E_2$ tel que u'^1 soit le composé de v' et du morphisme canonique adjoint à $\mathrm{Tr}_{c'_2}$, noté $a_{c'_2}$: $c_2'^* j_{2!} j_2^* E_2 \to c_2'^! j_{2!} j_2^* E_2$. Cela résulte en effet de (1.4.1). On définit de même une flèche v' v'': $c_2''^* j_{2!} j_2^* E_2 \to c_1''^* j_{1!} j_1^* E_1$.

LEMME 1.4.1: *Soient X et Y des schémas lisses sur un corps algébriquement clos k, de même dimension. Soit $E \in$ ob $D(Y)$ un complexe localement constant de faisceaux. Soit c: $X \to Y$ un morphisme fini. Alors le morphisme adjoint à* Tr_c, a_c: $c^*E \to c^!E$ *est un isomorphisme.*

L'hypothèse concernant E signifie qu'il existe un recouvrement étale (Y_i) de Y par des morphismes q_i: $Y_i \to Y$ et pour tout i un complexe de Λ-modules M_i et un isomorphisme de $D(Y_i)$: $q_i^* E \simeq \Lambda_{Y_i} \overset{L}{\underset{\Lambda}{\otimes}} M_i$. Il suffit donc de montrer (1.4.1) pour le faisceau constant Λ, et cela résulte alors de la dualité de Poincaré (SGA 4 XVIII 3.2.5).

1.5. On associe à chaque élément (D', D'') de $E(Z', Z'')$ (1.3.4.1) les entiers suivants:

1.5.1. La longueur du schéma $D' \underset{Y_1 \underset{S}{\times} Y_2}{\times} D''$ est finie par hypothèse, on note cette longueur $(D'.D'')$.

1.5.2. Les entiers $(D'.Y_1)$ et $(D''.Y_2)$ sont finis. On pose $m_{2,1}(D', D'') = (D'.Y_1) \times (D''.Y_2)$, avec $Y_1 = Y_1 \times \{y_2\}$ et $Y_2 = \{y_1\} \times Y_2$. On définit de même $m_{1,2}(D', D'')$. (Cf. 1.2.1). On a la propriété suivante, démontrée dans la suite (3.2.1):

1.5.3. Le rationnel $[(D'.D'') - m_{2,1}(D', D'')]/s(D', D'')$ (1.3.4.2) est de la forme $ap^r (a, r \in \mathbb{Z})$. En particulier il est défini dans Λ.

1.6. On peut de deux manières équivalentes associer un morphisme générique à u', et u'': soit η' (resp. η'') un point générique géométrique de X' (resp. X'') d'images η'_1, η'_2 (resp. η''_1, η''_2) dans X_1, X_2. Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ un couple de chemins de η'_1 à η''_1 dans X_1 et de η'_2 à η''_2 dans X_2 (c'est à dire d'isomorphismes de foncteurs fibres). Par passage à la fibre en η', v' (1.4) définit un morphisme $v'_{\eta'}$: $E_{1,\eta'_1} \to E_{2,\eta'_2}$, et en η'', v'' définit $v''_{\eta''}$: $E_{2,\eta''_2} \to E_{1,\eta''_1}$. Les isomorphismes γ_1, γ_2 définissent des isomorphismes de complexes γ_1: $E_{1,\eta'_1} \to E_{1,\eta''_1}$ et γ_2: $E_{2,\eta'_2} \to E_{2,\eta''_2}$.

1.6.1. On pose $\langle u', u''\rangle = \mathrm{Tr}(\gamma_2 \circ v'_{\eta'} \circ \gamma_1^{-1} \circ v''_{\eta''})$. Soit $Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ un revêtement trivialisant E_1 et E_2 génériquement (1.3.3, 1.3.4) et $(D', D'') \in E(Z', Z'')$ (1.3.4.1) et Y' (resp. Y'') la normalisée de D' (resp. D'') (1.3.4.3). Par image inverse par p' (resp. p'') on définit un morphisme de $D(G', Y')$ p'^*v': $d_1'^*(p_1^* j_{1!} j_1^* E_1) \to d_2'^*(p_2^* j_{2!} j_2^* E_2)$ (resp. p''^*v'': $d_2''^*(p_2^* j_{2!} j_2^* E_2) \to d_1''^*(p_1^* j_{1!} j_1^* E_1)$).

Soit $\eta' \to Y'$ (resp. $\eta'' \to Y''$) un point générique géométrique. On associe à p'^*v' un morphisme

$$v'_{\eta'}\colon E_{1,\eta'_1} \to E_{2,\eta'_2}$$

et de même $v''_{\eta''}$: $E_{2,\eta''_2} \to E_{1,\eta''_1}$. Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ avec γ_1 un Y_1-chemin de η'_1 à η''_1 et γ_2 un Y_2-chemin de η'_2 à η''_2. Comme précédemment on en déduit un cup-produit $\langle u', u''\rangle_\gamma = \mathrm{Tr}(\gamma_2 \circ v'_{\eta'} \circ \gamma_1^{-1} \circ v''_{\eta''})$. Cet élément de Λ ne dépend pas du choix de γ, car tout autre choix se traduirait par l'action d'éléments de $\pi_1(Y_1 - \{y_1\}, \eta'_1)$ ou $\pi_1(Y_2 - \{y_2\}, \eta'_2)$, qui opèrent trivialement sur E_{1,η'_1} ou E_{2,η'_2} respectivement par définition de $Y_1 \underset{S}{\times} Y_2 \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$.

1.6.2. L'élément défini ci-dessus est noté $\langle u', u''\rangle_{(D',D'')}$. Il ne dépend en effet que de la classe de (D', D'') dans $E(Z', Z'')$, par le caractère central du cup-produit.

1.7. A l'aide des éléments définis dans les numéros précédents, on énonce le résultat principal du texte.

Soient X', X'', X_1, X_2 des S-traits strictement locaux et c': $X' \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$, c'': $X'' \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$ des S-morphismes finis tels que $c'_i = pr_i \circ c'$ et $c''_i = pr_i \circ c''$ $(i = 1, 2)$ soient finis, et que $X' \underset{X_1 \underset{S}{\times} X_2}{\times} X''$ se réduise à un point z.

Soit $E_i \in \mathrm{Ob}\, D_{ctf}(X_i)$ $(i = 1, 2)$, un complexe de tordimension finie et à cohomologie constructible de faisceaux de Λ-modules sur X_i, où Λ est un anneau commutatif noéthérien annulé par un entier inversible sur S. Soient $u' \in \mathrm{Hom}(c_1'^{*}E_1, c_2'^{!}E_2)$ et $u'' \in \mathrm{Hom}(c_2''^{*}E_2, c''^{!}_1 E_1)$ des correspondances cohomologiques à support dans c' et c'' respectivement (SGA 5 III §4).

THÉORÈME 1.7.1: *Le terme local de la formule de Lefschetz-Verdier s'exprime par l'égalité*:

$$\langle u', u''\rangle_z = \langle u'_z, u''_z\rangle + \sum_{(D',D'')\in E(Z',Z'')} \frac{(D'.D'') - m_{2,1}(D', D'')}{s(D', D'')} \times \langle u', u''\rangle_{(D',D'')}$$

COROLLAIRE 1.7.2: (*a*) *Supposons de plus qu'on a l'égalité* $(X'.X'') = m_{2,1}(X', X'')$. *Alors le terme local se réduit à* $\langle u', u''\rangle_z = \langle u'_z, u''_z\rangle$. (*b*) *Si on a l'égalité duale*, $(X'.X'') = m_{1,2}(X', X'')$ *le terme local est donné par*

$$\langle u', u''\rangle_z = \langle (Du')_z, (Du'')_z\rangle$$

où Du' (*resp.* Du'') *est la correspondance duale de* u' (*resp.* u'') (*SGA* 5 *III*).

L'hypothèse supplémentaire de (1.7.2a) est vérifiée en particulier si les couples (X', X''), (X', X_1) et (X'', X_2) sont en position générale. Celle de (1.7.2b) dans le cas où (X', X''), (X'', X_1), (X', X_2) sont en position générale. On retrouve ainsi l'énoncé de (SGA 5 III B §1).

Mais il est également possible qu'on ait $\langle u', u''\rangle_z = \langle u'_z, u''_z\rangle$ sans que X' et X'' soient en position générale: soient par exemple les correspondances données par les équations locales

$$\begin{cases} c_1' = t^3 \\ c_2' = t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1'' = u^6 \\ c_2'' = u^4 + u^5. \end{cases}$$

Alors $m_{2,1}(X', X'') = (X'.X'') = 12$. Dans ce cas X' et X'' sont toutes deux "tangentes" à X_2.

Inversement, on peut également exhiber des cas particuliers où X' et X'' sont en position générale et $\langle u', u''\rangle_z \neq \langle u_z', u_z''\rangle$. De tels cas se présentent lorsque l'une des courbes est tangente à l'un des axes convenablement choisi: X_1 pour X', X_2 pour X''. Le corollaire (1.7.2) résulte de (1.7.1) et (3.1.4). Pour le cas (b) on utilise en outre l'égalité générale $\langle u', u''\rangle_z = \langle Du', Du''\rangle_z$ (SGA 5 III). Cette dernière relation permet de démontrer l'énoncé suivant:

COROLLAIRE 1.7.3: *On a l'égalité*

$$\langle (Du')_z, (Du'')_z\rangle = \langle u_z', u_z''\rangle$$
$$+ \sum_{(D', D'') \in E(Z', Z'')} \frac{m_{1,2}(D', D'') - m_{2,1}(D', D'')}{s(D', D'')}$$
$$\times \langle u', u''\rangle_{(D', D'')}.$$

1.7.4. Le cas particulier où l'une des correspondances, X'' par exemple est la diagonale de $X \underset{S}{\times} X$ et l'autre le graphe d'un S-endomorphisme f de X tel que $f(x) = x$ permet d'expliciter d'une manière plus simple le terme local. Soit f: $X \to X$ un S-endomorphisme et Γ_f: $X \xrightarrow{(f,I)} X \underset{S}{\times} X$ le graphe de f. Soit F un faisceau constructible sur X à fibres libres de type fini sur Λ et u': $f^*F \to F$. Soit p: $Y \to X$ un morphisme fini, étale galoisien de groupe G sur le complémentaire du point fermé x, trivalisant F.

Soit D' une composante irréductible de $X \underset{X \underset{S}{\times} X}{\times} Y \underset{S}{\times} Y$, G' son stabilisateur dans $G \times G$, et ϕ': $G' \to G \times G$ le morphisme canonique. On associe à ϕ' une action de G' sur G: $g' \circ g = \phi_1'(g') g \phi_2'(g'^{-1})$, avec $\phi_i' = pr_i \circ \phi'$. On note $G_{\natural\phi'}$ l'espace des orbites dans G, $c_{\phi'}(g)$ le cardinal du stabilisateur de $g \in G$. La correspondance u' induit un morphisme dans la fibre F_x en x, noté u_x' et pour un point géométrique ξ de X se factorisant par $Y \to X$, on a par image inverse sur D' un endomorphisme $u_{\xi, D'}$ de F. Soit Y' la normalisée de D', $v_{y'}$ sa valuation discrète et π une uniformisante de Y, (f', r): $Y' \to Y \underset{S}{\times} Y$ le morphisme canonique.

COROLLAIRE 1.7.5: *On a l'égalité*

$$\operatorname{Tr}(u')_x = \operatorname{Tr}_\Lambda(u'_x) + \sum_{g \in G_{\natural\phi'}} \frac{v_{y'}(f'g(\pi) - r(\pi)) - \epsilon}{c_{\phi'}(g)} \times \operatorname{Tr}_\Lambda(g u_{\xi, D'})$$

avec $\epsilon = \deg(r)$.

1.7.6. On peut vérifier à priori que le second membre de (1.7.1) est indépendant du choix des revêtements trivalisants Y_1 et Y_2. Cela résulte de (3.1.3).

1.7.7. Si c'_1 ou c''_2 n'est pas fini, les termes $\langle u', u'' \rangle_{(\mathrm{D}, \mathrm{D}'')}$ sont par convention égaux à 0, ce qui permet d'inclure ce cas (1.2.1) dans (1.7.1).

1.8. Lorsque les revêtements trivialisants Y_1 et Y_2 peuvent être choisis modérément ramifiés, on dit que E_1 et E_2 sont modérément ramifiés. L'égalité (1.7.1) s'explicite plus complètement dans ce cas.

PROPOSITION 1.8.1: *Supposons E_1 et E_2 modérément ramifiés. Le terme local est donné par les formules suivantes, utilisant les notations de* (3.1.5.2), (3.1.5.1),

(*a*) *Si* $(X'.X'') = m_{2,1}(X', X'')$, $\langle u', u'' \rangle_z = \langle u'_z, u''_z \rangle$.

(*b*) *Si* $(X'.X'') > m_{1,2}(X', X'') = m_{1,2}(X', X'')$, $\langle u', u'' \rangle_z = \langle u'_z, u''_z \rangle + ((X'.X'') - m_{2,1}(X', X'')) \times \langle u', u'' \rangle_{D', D''}$ *où* (D', D'') *est l'unique élément de* $E(Z', Z'')$ *tel que* $(D'.D'') - m_{2,1}(D', D'') \neq 0$.

(*c*) *Si* $(X'.X'') = m_{1,2}(X', X'') < m_{2,1}(X', X'')$, *pour* Y_1 *et* Y_2 *assez grands*, $\langle u', u'' \rangle_z = \langle u'_z, u''_z \rangle - d_p(c', c'') \Sigma_{(i,j)} \langle \sigma_1^i u', \sigma_2^{-j} u'' \rangle$.

(i, j) variant dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(\nu'_1, \nu'_2)\mathbb{Z} + (\nu''_1, \nu''_2)\mathbb{Z} + \bar{\mu}\mathbb{Z} \times \bar{\mu}\mathbb{Z}$.

1.8.1.1. Les trois cas considérés sont les seuls possibles, comme on le vérifie en considérant la correspondance composée de X' et X''.

1.8.1.2. Dans le cas de (*c*), σ_1 désigne un générateur de l'action de $\operatorname{Aut}(Y_1/X_1)$ sur une fibre générique de E_1: ce groupe est en effet cyclique. De même σ_2 désigne l'opération de monodromie sur E_2. Le cup-produit $\langle \sigma_1^i u', \sigma_2^{-j} u'' \rangle$ est calculé à l'aide d'un chemin quelconque (1.6), ou sur un couple (D', D'') quelconque, la somme n'en dépend pas. Il est clair que $\langle \sigma_1^{i+\nu'_1} u', \sigma_2^{-j-\nu'_2} u'' \rangle = \langle \sigma_1^{\mathrm{i}} \mathrm{u}', \sigma_2^{-\mathrm{j}} \mathrm{u}'' \rangle$ car $\sigma_1^{\nu'_1} u' = u' \sigma_2^{\nu'_2}$ et $\langle \sigma_1^i u', \sigma_2^{-j} u'' \rangle = \operatorname{Tr}(\sigma_1^i u' \sigma_2^{-j} u'')$ (moyennant des isomorphismes déterminés par un chemin. De même $\langle \sigma_1^{i+\nu''_1} u', \sigma_2^{-j-\nu''_2} u'' \rangle = \langle \sigma_1^i u', \sigma_2^{-j} u'' \rangle$ grâce à l'égalité $\sigma_2^{\nu''_2} u'' = u'' \sigma_1^{\nu''_1}$ et au caractère central de $\langle\ \rangle$. Pour $\bar{\mu}\mathbb{Z} \times \bar{\mu}\mathbb{Z}$, on pose $\tau_1 = \sigma_1^{\bar{\mu}}$, et on remarque que pour un $r \in \mathbb{Z}$ convenable, $\tau_1^{p^r} u' u'' = u' u''$ d'après les relations ci-dessus, et d'autre part que τ_1 est d'ordre ω_1 premier à p: il existe des entiers α, β tels que

$\alpha p^r + \beta\omega_1 = 1$ donc $\tau_1 u'u'' = (\tau_1^{p^r})^\alpha u'u'' = u'u''$. On raisonne de même pour $\sigma_2^{\bar{\mu}}$.

1.8.1.3. La proposition (1.8.1) traduit (1.7.1) avec les résultats de (3.1.5.1) (3.1.5.2).

COROLLAIRE 1.8.2: *Supposons k de caractéristique nulle.*

(*a*) *Si* $(X'.X'') = m_{2,1}(X', X'')$, $\langle u', u''\rangle_z = \langle u'_z, u''_z\rangle$.

(*b*) *Si* $(X'.X'') > m_{1,2}(X', X'') = m_{2,1}(X', X'')$,

$$\langle u', u''\rangle_z = \langle u'_z, u''_z\rangle + ((X'.X'') - m_{2,1}(X', X''))\langle u', u''\rangle_{(D',D'')}$$

avec (D', D'') *l'unique élément de* $E(Z', Z'')$ *tel que* $(D'D'') - m_{2,1}(D', D'') \neq 0$.

(*c*) *Si* $(X'.X'') = m_{1,2}(X', X'') < m_{2,1}(X', X'')$,

$$\langle u', u''\rangle_z = \langle u'_z, u''_z\rangle - \sum_{(i,j)} \langle \sigma_1^i u', \sigma_2^{-j} u''\rangle$$

(i, j) *variant dans* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(\nu'_1, \nu'_2)\mathbb{Z} + (\nu''_1, \nu''_2)\mathbb{Z}$.

En effet en caractéristique 0, on utilise l'égalité de sous-groupes de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(\nu'_1, \nu'_2)\mathbb{Z} + (\nu''_1, \nu''_2)\mathbb{Z} + (\nu'_1\nu''_2 - \nu'_2\nu''_1)\mathbb{Z} \times (\nu'_1\nu''_2 - \nu'_2\nu''_1)\mathbb{Z} = (\nu'_1, \nu'_2)\mathbb{Z} + (\nu''_1, \nu''_2)\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION 1.9 (de 1.7.1): Pour démontrer (1.7.1), on commence par montrer qu'il suffit de le faire dans un cas particulier (§4): on peut supposer $X_1 = X_2 = X'' = X$, $c'' = \Delta X$ correspondance diagonale sur $E_1 = E_2 = E$. On peut supposer E de fibre fermée nulle, trivialisé par un revêtement d'ordre une puissance d'un nombre premier l différent de la caractéristique de base, et tel que le morphisme injectif ϕ': $G' \to G \times G$ (1.3.4.4) correspondant à c' satisfasse à Ker ϕ'_1 = Ker $\phi'_2 = \{1\}$. On peut également supposer l'anneau de base Λ annulé par une puissance de l.

A l'aide d'une variante des traces non commutatives de Grothendieck-Illusie, exposée dans le cas particulier ci-dessus dans l'Annexe A, on montre alors (§5) que le terme local est bien donné par la formule (1.7.1), (Théorème 5.2.1):

$$\langle u', Id\rangle_z = \sum_{g \in G_{\natural\phi'}} \frac{(Y'_g.\Delta) - m_{2,1}(Y'_g, \Delta)}{c_{\phi'}} \times \mathrm{Tr}_\Lambda(\bar{u}'g)$$

avec Y' une composante au-dessus de X' dans le revêtement trivialisant $Y \times_S Y \to X \times_S X$ de groupe $G \times G$, et $\bar{u}'$ un endomorphisme générique défini par u' par image inverse sur Y' (voir §5 pour les détails).

2. Calculs de termes locaux

Le résultat (1.7.1) du paragraphe précédent donne le terme local de la formule de Lefschetz-Verdier en cohomologie étale. Il permet également d'évaluer ce terme local dans d'autres contextes: $\mathbb{Q}_l$-faisceaux, faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels sur une surface de Riemann, en particulier faisceaux pervers. Dans le cas des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux, on peut comparer le terme local de Lefschetz à celui de la formule d'Euler-Poincaré. Dans tout ce paragraphe, on se restreint pour plus de simplicité au cas où $X_1 = X_2 = X$ et c'' est la correspondance diagonale ΔX, cas auquel on peut toujours se ramener (4.1.1).

2.1. Termes locaux des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux

Soit c: $X' \to X \underset{S}{\times} X$ une correspondance locale (1.1), avec $c_1 = pr_1 \circ c$ et $c_2 = pr_2 \circ c$ finis, telle que le schéma $X' \underset{X \underset{S}{\times} X}{\times} \Delta X$ soit fini, réduit à un point z. On note x le point fermé de X, ξ (resp. η) un point générique géométrique de X (resp. de X'). On associe à une correspondance cohomologique à support dans c une fonction c-centrale (B.2.4.1) et on vérifie que son intégrale par rapport à la mesure μ_c définie par c (B.2.4.2) est égale à la partie "générique" du terme local de la formule de Lefschetz.

Soit F un $\mathbb{Q}_l$-faisceau constructible sur X, F' un $\mathbb{Z}_l$-faisceau sans torsion sur X tel que $F \sim F' \underset{\mathbb{Z}_l}{\otimes} \mathbb{Q}_l$ (SGA $4^{1/2}$, Rapport §2), u: $c_1^* F \to c_2^! F$ une correspondance sur F à support dans X'. Pour tout morphisme u': $c_1^* F' \to c_2^! F'$ on note u'_n la correspondance $c_1^*(F' \otimes \mathbb{Z}/l^n) \to c_2^!(F' \otimes \mathbb{Z}/l^n)$ définie par u' et $\mathrm{Tr}(u'_n)_z \in \mathbb{Z}/l^n$ le terme local de Lefschetz-Verdier associé à u'_n. Pour $n' \geqslant n$, l'image de $\mathrm{Tr}(u'_{n'})_z$ dans $\mathbb{Z}/l^n$ est égale à $\mathrm{Tr}(u'_n)_z$. On peut donc associer à u' un élément $\mathrm{Tr}(u')_z \in \mathbb{Z}$ et par linéarité définir $\mathrm{Tr}(u)_z \in \mathbb{Q}_l$.

A u' comme ci-dessus on associe un endomorphisme u'_z de F'_x, et pour tout couple de chemins $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ de ξ à $c_1(\eta)$ et de ξ à $c_2(\eta)$ respectivement on définit un endomorphisme u'_γ de F'_ξ (1.6), par passage à la limite. On définit de même par linéarité u_z et u_γ.

Le $\mathbb{Q}_l$-faisceau $F \mid_{X - \{x\}}$ est lisse, donc défini par une représentation continue de $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$ dans F_ξ. On note $t_{u,\gamma}$: $\pi_1(X - x, \xi) \to \mathbb{Q}_l$ l'application $\sigma \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(\sigma \circ u_\gamma)$. De même pour u' comme ci-dessus on définit $t_{u',\gamma}$, et la famille $t_{u'} = (t_{u',\gamma})_\gamma$ est clairement c-centrale (B.2.4.1). On peut calculer $\int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} t_{u'} \, d\mu_c$ et par linéarité $\int_{\pi_1(X - \{x\},\xi)} t_u \, d\mu_c$ (B.2.4.2).

THÉORÈME 2.1.1: *On a l'égalité dans* $\mathbb{Q}_l$.

$$\operatorname{Tr}(u)_z = \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_z) + \int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} t_u \, \mathrm{d}\mu_c.$$

Cette égalité résulte de (1.7.1) par passage à la limite (B.2.4). Les résultats généraux de l'Annexe B donnent les corollaires:

COROLLAIRE 2.1.2: *Si* X' *n'est tangent ni à* Δ_X *ni à* $X \times \{x\}$, *on a*

$$\operatorname{Tr}(u)_z = \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_z).$$

COROLLAIRE 2.1.3: *Supposons* X' *tangent à* ΔX.

$$1^\circ \quad \operatorname{Tr}(u)_z = \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_z) + \int_{\pi_{1,p}(X-\{x\},\xi)} t_u \, \mathrm{d}\mu_c.$$

en notant $\pi_{1,p}$ *le sous-groupe des revêtements sauvagement ramifiés.*
2° *Si de plus F est modérément ramifié,*

$$\operatorname{Tr}(u)_z = \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_z) + \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_\xi)(X'.\Delta_X - m(X', \Delta_X)).$$

Dans ce dernier énoncé, $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_\xi)$ désigne un quelconque des éléments $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(\operatorname{tg} \gamma . u_\gamma)$, pour γ un couple de chemins de ξ à $c_1(\eta)$ et ξ à $c_2(\eta)$ respectivement. En particulier si γ_0 est un "chemin direct", c'est à dire détermine dans tout revêtement une composante tangente à la diagonale, $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_\xi) = \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(\mathrm{u}_{\gamma_0})$ (B.2.2.4).

COROLLAIRE 2.1.4: *Supposons* X' *tangent à* $X \times \{x\}$ *et F modérément ramifié. Alors*

$$\operatorname{Tr}(u)_z = \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_z) + \mathrm{d}_p(c) \sum_{i \in \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}} \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(\sigma^i u_\xi).$$

Les notations sont celles de (B.2.3.1): $\nu_i = \deg(c_i)$, $\nu_1 - \nu_2 = \nu \, \mathrm{d}_p(c)$ avec $\nu > 0$ et premier à p, $|\mathrm{d}_p(c)|$ une puissance de la caractéristique de base p. L'endomorphisme u_ξ est déterminé par un couple de chemins quelconques. La fonction sur $\pi_1^{(p)}(X - \{x\}, \xi)$, $c \mapsto \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(cu_\xi)$ se factorise par $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$ (B.2.3.1) et σ est un des éléments de $\pi_1^{(p)}$ dont l'image est un générateur de $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$.

2.2. Formules de Lefschetz et d'Euler Poincaré pour les $\mathbb{Q}_l$-faisceaux

2.2.1. Pour une correspondance cohomologique à support dans une immersion fermée $c\colon X' \to X \underset{S}{\times} X$ (par exemple le graphe d'un endomorphisme de X), sur un $\mathbb{Q}_l$-faisceau F, soit $u\colon c_1^* F \to c_2^! F$, on peut modifier la définition des termes locaux de la formule de Lefschetz-Verdier pour obtenir une formulation générale donnant $\mathrm{Tr}(u, R\Gamma(X, F))$, valable aussi bien pour $c =$ correspondance diagonale que pour c telle que $X' \underset{X \times X}{\times} \Delta_X$ soit fini. Rappelons qu'on suppose X' lisse. Dans le langage de l'Annexe B, on associe au choix d'un couple de X-chemins $(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma$ (1.6) une mesure $\mu'_{c,\gamma}$ sur le groupe fondamental local donnant aussi bien le terme local de la formule d'Euler-Poincaré (représentation de Swan) que le terme local modifié de Lefschetz-Verdier, selon le cas.

2.2.2. Rappelons brièvement la formule d'Euler-Poincaré, pour les faisceaux sur un anneau de torsion, donnée par Grothendieck et montrons que pour un $\mathbb{Q}_l$-faisceau elle conduit à une formulation analogue à celle de (2.1.1) (SGA 5, exposé X). Soit X une courbe propre et lisse connexe sur un corps algébriquement clos, E un complexe de faisceaux étales sur X, de modules sur un anneau Λ de torsion première à la caractéristique de base. On suppose E de tordimension finie à cohomologie constructible.

On désigne ici par caractéristique d'Euler-Poincaré l'elément $\mathrm{EP}(X, E) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}, R\Gamma(X, E))$ de Λ. D'après (loc. cit.) on peut exprimer $\mathrm{EP}(X, E)$ de la manière suivante. On pose $\mathrm{EP}(X) = \mathrm{EP}(X, \Lambda)$ et pour un point générique géométrique ξ de X on note E_ξ la fibre de E. Pour tout point fermé x de X on définit un terme local ϵ_x, nul si E n'est pas ramifié en x, c'est-à-dire sauf pour un nombre fini de points. On a l'égalité $\mathrm{EP}(X, E) = \mathrm{EP}(X)\, \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}, E_\xi) + \sum_{x \in X} \epsilon_x$. Le terme ϵ_x s'explicite à l'aide de multiplicités d'intersection: soit $Y \to X$ un revêtement local (éventuellement ramifié en x) trivialisant E sur un ouvert de $X - \{x\}$, galoisien de groupe G. Pour $s \in G$ distinct de l'élément neutre, on note $\Gamma_s \subset Y \times Y$ le graphe de s, $(\Gamma_s . \Delta Y)$ la multiplicité d'intersection avec la diagonale. On pose $sw(s) = -(\Gamma_s . \Delta Y) + 1$, pour $s \neq \mathrm{Id}$, et $sw(\mathrm{Id}) = \sum_{s \neq \mathrm{Id}} (\Gamma_s . \Delta Y) - 1$. Cette fonction est centrale et le caractère d'une représentation Sw_x de G, la représentation de Swan. On écrit alors $\epsilon_x = -\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}, \mathrm{Hom}_{\Lambda[G]}(\mathrm{Sw}_x, E_\xi)) - \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}, E_\xi) + \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}, E_x)$.
Si E est modérément ramifié. $\mathrm{Sw}_x = 0$. Si E n'est pas ramifié en x on a de plus $E_x \simeq E_\xi$ donc $\epsilon_x = 0$. On pose $sw'(s) = -sw(s)$ si $s \neq \mathrm{Id}$ et $sw'(\mathrm{Id}) = -1 - \sum_{s \neq 1} (\Gamma_s . \Delta y)$. On note $c(s)$ le cardinal du stabilisateur de s and G pour l'action de conjugaison. Le rationnel $sw'(s)/c(s)$ est de la

forme bp^r, avec $b, r \in \mathbb{Z}$: pour $s \neq \mathrm{Id}$ cela résulte de (3.2.3) et pour $s = \mathrm{Id}$ on utilise l'égalité dans $\mathbb{Q}$ $sw'(I)/c(I) = 1 - \Sigma sw'(s)/c(s)$, la somme portant sur l'ensemble de classes de conjugaison de G distinctes de la classe de l'unité. Le quotient $sw'(s)/c(s)$ est donc toujours défini dans Λ. On peut alors écrire ϵ_x sous la forme

$$\epsilon_x = \mathrm{Tr}(I, E_x) + \sum_{s \in G_\natural} \frac{sw'(s)}{c(s)} \mathrm{Tr}(s, E_\xi).$$

Soit F un $\mathbb{Q}_l$-faisceau constructible, on note F' un $\mathbb{Z}_l$-faisceau lisse tel que $F \sim F' \underset{\mathbb{Z}_l}{\otimes} \mathbb{Q}_l$. Il existe un ouvert non vide U de X tel que pour tout n les points de ramification de $F' \otimes \mathbb{Z}/l^n$ soient contenus dans $X - U$. En passant à la limite à partir de la formule de Grothendieck rappelée ci-dessus, on obtient la caractéristique d'Euler-Poincaré $\mathrm{EP}(X, F)$ sous la forme $\mathrm{Tr}(I, R\Gamma(X, F)) = \mathrm{Tr}(I, R\Gamma(X, \mathbb{Q}_l))\, \mathrm{Tr}(I, F_\xi) + \Sigma_{x \in X} \epsilon_x$ où les ϵ_x sont nuls sur U. On peut les expliciter par les constructions de l'Annexe B: la fonction $G \to \mathbb{Z}/l^n$ donnée par $s \to sw'(s)/c(s)$ satisfait à (B.1.3.1): si on a un épimorphisme $H \to G$ on vérifie que pour $g \in G_\natural$ on a $sw'(g)/g = \sum_{\substack{h \in H_\natural \\ h \mapsto g}} \mathrm{sw}'(\mathrm{h})/\mathrm{c}(\mathrm{h})$. D'après l'égalité $\Sigma_{G_\natural} sw'(g)/c(g) = -1$, il suffit d'aileurs de le faire pour $g \neq I$.

On note $\mu'_{\Delta,x}$ la mesure sur le groupe fondamental local ainsi définie, sous-entendant le choix canonique du chemin (Id, Id). On note t la fonction centrale $\sigma \to \mathrm{Tr}(\sigma, F_\xi)$, sur le groupe fondamental local, noté $\pi_1(x)$.

PROPOSITION 2.2.3: *La caractéristique d'Euler Poincaré pour le $\mathbb{Q}_l$-faisceau F s'écrit*

$$\mathrm{EP}(X, F) = \mathrm{Tr}(I, R\Gamma(X, \mathbb{Q}_l))\, \mathrm{Tr}(I, F_\xi)$$

$$+ \sum_{x \in X} \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(I, F_x) + \int_{\pi_1(x)} t_\xi \, d\mu'_{\Delta,x}.$$

2.2.4. Dans la situation de (2.2.1) on suppose $X^c = X' \underset{X \times X}{\times} \Delta_X$ fini. Soit ξ un point générique géométrique de X, η un point générique géométrique de X' d'images η_1 et η_2 par c_1 et c_2 respectivement. Soit γ un chemin de (ξ, ξ) à (η_1, η_2) dans $X \times X$. Si on suppose que c est une immersion fermée, ce chemin γ définit localement au voisinage étale de x un chemin γ_x de (ξ, ξ) à (η_1, η_2).

Pour un chemin γ, au voisinage de x, de (ξ, ξ) à (η_1, η_2) on peut définir un terme local modifié en x: soit X_x le localisé strict de X en x, on définit une mesure $\mu'_{c,\gamma}$ sur $\pi_1(X_x - \{x\}, \xi)$ à l'aide de la fonction (B.1.3.1): v'_γ: $\pi_{r\natural} \to \mathbb{Z}/l^n$ donnée par $v'_\gamma(\dot{s}) = v_\gamma(\dot{s})$ si $\dot{s} \neq \dot{1}$ (B.2.1.1)

$$v'_\gamma(\dot{1}) = -\frac{m(Y'_\gamma)}{c_\phi(1)} - \sum_{s \neq 1} \frac{Y'_{\gamma,s}.\Delta}{c_{\phi\gamma}(s)}.$$

Cette fonction est bien définie car on a $v'_\gamma(\dot{1}) = v_\gamma(\dot{1}) - (X'.\Delta)_x$. D'après (2.1.1) le terme local de Lefschetz s'écrit

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_x) + (X'.\Delta)_x \,\mathrm{Tr}(u_\gamma) + \int_{\pi_1(x)} t_u \,\mathrm{d}\mu'_{c,\gamma},$$

avec $\pi_1(x) = \pi_1(X_x - \{x\}, \xi)$.

DÉFINITION 2.2.4.1: *On appelle terme local modifié l'expression* $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_x) + \int_{\pi_1(x)} t_u \,\mathrm{d}\mu'_{c,\gamma}$, *dépendant de* γ.

2.2.5. Pour une correspondance c: $X' \to X \times X$ telle que c_2 soit fini, on note a_c: $c_1^*\mathbb{Q}_l \to c_2^!\mathbb{Q}_l$ la flèche canonique adjointe à Tr_{c_2}.

Lorsqu'on choisit un chemin γ de $X \times X$, de (ξ, ξ) à (η_1, η_2), et qu'on suppose que c est une immersion fermée on a donc dans la situation (2.2.4) une égalité

$$\mathrm{Tr}(u, R\Gamma(X, F)) = \left(\sum_{x \in X^c} (X'.\Delta X)_x\right) \mathrm{Tr}(u_\gamma) + \sum_{x \in X^c} \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_x)$$

$$+ \int_{\pi_1(x)} t_u \,\mathrm{d}\mu'_{c,\gamma_x}$$

Si on remarque que $\sum_{x \in X^c} (X'.\Delta X)_x = \mathrm{Tr}(a_c, R\Gamma(X, \mathbb{Q}_1))$, et d'autre part que pour $c = \Delta X$, $a_c = \mathrm{Id}$ et que si on prend dans ce dernier cas $\gamma = (\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ on a $\mu'_{c,\gamma_x} = \mu'_{\Delta,x}$ (2.2.2), on obtient la formulation commune suivante pour les formules de Lefschetz et d'Euler Poincaré.

PROPOSITION 2.2.6: *Soit X une courbe propre et lisse, connexe, sur un corps k algébriquement clos, $S = \operatorname{spec} k$. Soit F un $\mathbb{Q}_l$-faisceau constructible sur X. Soit c: $X' \to X \times_S X$ une immersion fermée d'une courbe X' lisse sur S, et u: $c_1^*F \to c_2^!F$ une correspondance à support dans c. Avec les notations rappelées ci-dessus on a*

$$\mathrm{Tr}(u, R\Gamma(X, F)) = \mathrm{Tr}(a_c, R\Gamma(X, \mathbb{Q}_l))\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_\gamma, F_\xi)$$

$$+ \sum_{x \in X^c} \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_l}(u_x, F_x) + \int_{\pi_1(x)} t_u \,\mathrm{d}\mu'_{c,\gamma_x}.$$

2.3. Terme local d'une correspondance tendant vers la diagonale

Dans ce paragraphe on considère des S-traits strictement henséliens X', X et une immersion fermée c: $X' \to X \underset{S}{\times} X$ telle que $X' \underset{X \underset{S}{\times} X}{\times} \Delta X$ soit réduit au point fermé x de X. Soit $Y \to X$ un revêtement, étale galoisien de groupe G sur $X - \{x\}$. Pour $s \in G$ on note $\Gamma_s \subset Y \times Y$ le graphe de l'automorphisme s, et pour $s \neq I$, $(\Gamma_s . \Delta Y)$ la multiplicité d'intersection. On note n le degré Y/X, $(X'.\Delta X)$ la multiplicité d'intersection de X' avec la diagonale.

PROPOSITION 2.3.1: *On suppose* $(X'.\Delta X) > n \sup_{s \neq I}((\Gamma_s . \Delta Y))$.

(1°) *Il existe, à conjugaison diagonale près par* G, *une unique composante* Y' *de* $X' \underset{X \times X}{\times} Y \times Y$ *dont la multiplicité d'intersection avec* ΔY *est supérieure à celles des autres composantes. On a* $m(Y') = 1$.

(2°) *Si* ϕ: $G' \to G \times G$ *est l'injection du stabilisateur de* Y' *dans* $G \times G$, ϕ *est un isomorphisme de* G' *sur la diagonale de* $G \times G$.

(3°) *Pour toutes les autres composantes* Y'_s, $s \neq 1$, *on a* $(Y'_s . \Delta Y) = (\Gamma_s . \Delta Y)$.

Lorsqu'on raisonne comme ici à conjugaison diagonale près par G, les composantes de $X' \underset{X \times X}{\times} Y \times Y$ s'obtiennent à partir de Y' par action de $s \times I$, on les note pour cette raison Y'_s.

Soit Y' une composante telle que $(Y'.\Delta Y)$ soit le maximum des multiplicités d'intersection de composantes de $X' \underset{X \times X}{\times} Y \times Y$ avec ΔY. On a $n(X'.\Delta X) = \sum_{s \in G} Y'_s . \Delta Y$, donc $n^2 \sup(\Gamma_s . \Delta Y) < n(X'.\Delta X) \leqslant n(Y'.\Delta Y)$, donc $(Y'.\Delta Y) > n \sup(\Gamma_s . \Delta Y)$. Notons c': $Y' \to Y \times Y$ le morphisme canonique et π' une uniformisante de Y. On a pour $s \neq 1$:

$$\begin{aligned} c'_1(s\pi') - c'_2(\pi') &= c'_1(s\pi' - \pi') + c'_1(\pi') - c'_2(\pi') \\ &= c'_1(\lambda_s) c'_1(\pi')^{a_s} + c'_1(\pi') - c'_2(\pi') \end{aligned}$$

avec $s\pi' - \pi' = \lambda_s \pi'^{a_s}$ et $a_s = \Gamma_s . \Delta Y$. Or si la valuation de Y' est notée v on a $v(c'_1(\pi')) \leqslant n^2/n = n$ (B.2.2.2) donc $v(c'_1(\pi'))^{a_s} \leqslant n(\Gamma_s . \Delta Y) < (Y'.\Delta Y)$. On a donc $v(c'_1(s\pi') - c'_2(\pi')) = a_s v(c'_1(\pi')) < (Y'.\Delta Y)$ soit $(Y'_s . \Delta Y) < (Y'.\Delta Y)$ pour $s \neq 1$.

Pour $s' \in G'$, on a $Y'_{(\phi_1(s'), \phi_2(s'))} = Y'$ par définition donc $\phi_1(s') = \phi_2(s')$ d'après ce qui précède. Donc ϕ se factorise par le morphisme diagonal. Or on a (B.2.2.2) $v(c'_1(\pi')) \times \text{card } G = \text{card } G'$ donc $m(Y') = v(c'_1(\pi')) = 1$ et card $G =$ card G', ϕ est un isomorphisme sur la diagonale. On a alors d'après ce qui précède, pour $s \neq 1$ $(Y'_s . \Delta Y) = (\Gamma_s . \Delta Y) \times (c'_1(\pi')) = (\Gamma_s . \Delta Y)$ ce qui termine la démonstration de (2.3.1).

2.3.2. Soit c_n: $X'_n \to X \times X$, $n \in \mathbb{N}$, une famille de correspondances géométriques ayant les mêmes propriétés que c ci-dessus. Soit F un $\mathbb{Z}_l$-faisceau sur X et pour chaque n, u_n: $c^*_{n,1}F \to c^!_{n,2}F$. Soit ξ un point générique géométrique de X, et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, η_n un point générique géométrique de X'_n. Pour un revêtement $Y \to X$ galoisien trivialisant $F \otimes \mathbb{Z}/l^m$, on note $N_Y(m)$ l'entier $\deg(Y/X) \times \sup_{s \neq 1}((\Gamma_s\ \Delta Y))$ utilisé dans (2.3.1). Tous les revêtements sont supposés ξ-ponctués. On dit que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers la correspondance diagonale si les conditions suivantes sont vérifiées (L1, L2, L3):

(L1) *Pour tout m il existe un revêtement Y/X comme ci-dessus et un entier* n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$ *on ait* $(X'_n . \Delta X) > N_Y(m)$.

On a alors une composante au-dessus de X'_n dans $Y \times Y$, "plus tangente que les autres" à la diagonale (2.3.1), et on note $\gamma_{m,n}$ un chemin de $X \times X$ de $c_n(\eta_n)$ à $\Delta_x(\xi)$ déterminant cette composante dans $Y \times Y$. D'après (2.3.1) la fonction sur Gal(Y/X): $s \to \mathrm{Tr}(su_{\gamma m,n})$ est centrale, avec $u_{\gamma_{m,n}}$ l'endomorphisme de $F_\xi \otimes \mathbb{Z}/l^m$ déterminé par $\gamma_{m,n}$ et u_n.

(L2) *Pour tout* m, *il existe* $n'_0 \geqslant n_0$ *tel que pour* $n \geqslant n'_0$ *on ait* $\mathrm{Tr}(su_{\gamma_{m,n}}, F_\xi \otimes \mathbb{Z}/l^m) = \mathrm{Tr}(s, F_\xi \otimes \mathbb{Z}/l^m)$. *On note* $(u_{n,m})_x$ *l'endomorphisme de* $F_x \otimes \mathbb{Z}/l^m$ *défini par* u_n.

(L3) *Pour tout* m, *il existe* n''_0 *tel que pour* $n \geqslant n''_0$ *on ait* $\mathrm{Tr}(u_{n,m}, F_x \otimes \mathbb{Z}/l^m) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}, F_x \otimes \mathbb{Z}/l^m)$.

Dans ces conditions on note γ_n un chemin $\gamma_{m,n}$ correspondant au plus grand m tel que $n \geqslant \sup(n'_0(m), n''_0(m))$. Il existe donc un revêtement Y/X trivialisant $F \otimes \mathbb{Z}/l^m$, et les $F \otimes \mathbb{Z}/l^{m'}$ pour $m \geqslant m'$, tel que les conditions de (L1.2.3) soient vérifiées.

On note $\epsilon'(u_n)$ le terme local de Lefschetz modifié (2.2.4.1) défini par γ_n pour la correspondance u_n. On note $\epsilon^\Delta(F)$ le terme local de la formule d'Euler-Poincaré. Il résulte de (L1.2.3) qu'on a dans $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ l'égalité $\epsilon'(u_n) = \epsilon^\Delta(F)$, et que cette égalité est vraie pour tout $n' \geqslant n$. On a donc l'énoncé.

PROPOSITION 2.3.3: *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une famille de correspondances tendant vers la diagonale. Avec les notations précédentes on a dans* $\mathbb{Z}_l$

$$\epsilon^\Delta(F) = \lim_{n \to \infty} \epsilon'(u_n).$$

2.3.4. En caractéristique 0, ou plus généralement si F est modérément ramifié, c'est à dire défini par une représentation se factorisant par le groupe fondamental modéré, les conditions (L1, L2, L3) peuvent être remplacées par les suivantes plus simples: (u_n) tend vers la diagonale si,

(L'_1) $\forall m \in \mathbb{N}$, il existe n'_0 tel que pour $n > n'_0$,

$$\mathrm{Tr}(u_{n,x} \otimes \mathbb{Z}/l^m) = \mathrm{Tr}(Id,\ F \otimes \mathbb{Z}/l^m)$$

(L'_2) $\forall m \in \mathbb{N}$, il existe n''_0 tel que pour $n > n''_0$ l'endomorphisme $(u_n \otimes \mathbb{Z}/l^m)_{Y'}$ de la fibre générique $F_\xi \otimes \mathbb{Z}/l^m$ associé à l'unique (3.1.5.1) classe de composantes Y' tangente à la diagonale dans un revêtement trivialisant $Y \to X$ satisfasse à: $\mathrm{Tr}((u_n \otimes \mathbb{Z}/l^m)_{Y'}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}, F_\xi \otimes \mathbb{Z}/l^m)$.

2.3.5. Exemple: correspondance quasi-unipotente

Soit f: $X \to X$ un S-endomorphisme dont le graphe Γ_f est tangent à la diagonale. On peut montrer les propriétés suivantes ([1])

(1°) Pour tout revêtement galoisien ramifié $Y \to X$, il existe un revêtement galoisien ramifié r: $Z \to X$ se factorisant par Y, de groupe G, et un endomorphisme f' de Z tel que $r \circ f' = f \circ r$. Il existe un automorphisme ϕ de G tel que pour tout g de G on ait $\phi(g) \circ f' = f' \circ g$.

(2°) Si la caractéristique de S est $p \neq 0$, on a $(\Gamma_{f^n}.\Delta X) \geqslant (\Gamma_{f^{n-1}}.\Delta X)$ $\forall n \geqslant 1$ et $(\Gamma_{fp^n}.\Delta \underline{X}) > (\Gamma_{fp^{n-1}}.\Delta X)$ $n \geqslant 1$.

Soit F un $\mathbb{Z}_l$-faisceau constructible sans torsion sur X et u: $f^*F \to F$ une correspondance à support dans Γ_f. On dit que u est *quasi-unipotente* si la condition suivante est vérifiée. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $Y_m \to X$ un revêtement trivialisant $F \otimes \mathbb{Z}/l^m$ et où f se relève en un endomorphisme, comme ci-dessus 1°). Soit u'_m un des endomorphismes génériques associés à $u \otimes \mathbb{Z}/l^m$ par les composantes au-dessus de Γ_f. On suppose u'_m quasi-unipotent. On suppose de plus $(u \otimes \mathbb{Z}/l^m)_x$ quasi-unipotent.

On vérifie facilement que cette condition pour un revêtement et pour un des endomorphismes u'_m, équivaut à la même pour tout revêtement, et tous les endomorphismes (utiliser $gu'_m = u'_m\phi(g)$). A l'aide du résultat bien connu ci-dessous, et des propriétés 1°) et 2°) ci-dessus on montre la proposition (2.3.7) donnant un exemple de famille de correspondances tendant vers la diagonale, donc vérifiant (2.3.3): on utilise le lemme

LEMME 2.3.6: *Soit u un endomorphisme d'un module libre M sur $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(u - \mathrm{Id})^k = 0$. Alors pour tout endomorphisme v tel que $vu = uv$ on a* $\mathrm{Tr}(vu) = \mathrm{Tr}(v)$.

PROPOSITION 2.3.7: *Soit u: $f^*F \to F$ une correspondance quasi-unipotente. Alors la famille des correspondances composées (u^n) contient une famille de correspondances tendant vers la correspondance diagonale.*

2.4. Termes locaux des faisceaux transcendants

2.4.1. Dans ce numéro, $(X, 0)$ est un disque $\{z \in \mathbb{C} \,\|\, z| < 1\}$ F un complexe constructible sur X de faisceaux de A-modules, de tordimension finie. Lorsque A est inclus dans le produit de ses quotients finis, on peut déterminer le terme local d'une correspondance cohomologique sur F à l'aide des résultats obtenus en topologie étale, grâce aux théorèmes de comparaison ([3]): on exhibe un élément de A dont l'image dans chaque quotient fini est égale au terme local déterminé par la cohomologie étale. Cette méthode s'applique à $\mathbb{Z}$, et plus généralement à toutes les sous-$\mathbb{Z}$-algèbres finies de $\mathbb{C}$. Par un passage à la limite standard, on détermine ainsi le terme local pour une correspondance sur un faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels. On utilise les résultats de (1.8.2) puisqu'on se trouve dans le cas de caractéristique 0. Les formules données lorque la correspondance X' n'est pas tangente à la diagonale permettent de déduire immédiatement le terme local dans $\mathbb{C}$ car elles ne comportent pas d'objet purement algébrique. Lorsqu'on suppose X' tangente à ΔX, la formule obtenue utilise un chemin, isomorphisme de foncteurs fibres, dont on doit vérifier qu'il peut être choisi transcendant: c'est l'objet de l'Annexe C.

2.4.2. Soient X et X' des disques $\{z \in \mathbb{C} \,\|\, z| < 1\}$, et c: $X' \to X \times X$ un morphisme tel que $c_1 = pr_1 \circ c$ et $c_2 = pr_2 \circ c$ soient finis de degrés respectifs ν_1 et ν_2, et que $c(X') \cap X$ soit réduit à $(0, 0)$. Soit F un complexe constructible de $\mathbb{C}$-vectoriels sur X, u: $c_1^* F \to c_2^! F$ une correspondance sur F à support dans c. On choisit un point général $y \in X - \{0\}$ et on note F_y la fibre de F en y. Soit de même $y' \in X' - \{0\}$. Le choix d'un chemin de $(X - \{0\}) \times (X - \{0\})$ d'origine (y, y) et d'extrémité $c(y')$ permet de définir un endomorphisme u_γ de F_y. Lorsque X' est tangent à la diagonale ΔX, on suppose que γ est un chemin direct (C.1). On note u_0 l'homomorphisme sur les sections globales sur X déterminé par u. Enfin $(X'.\Delta X)$ désigne la multiplicité d'intersection de X' et Δ_X: si les coordonnées sont choisies de telle sorte que c s'écrive

$$\begin{cases} c_1(z') = z'^{\nu_1} \\ c_2(z') = \alpha_2 z'^{\nu_2} + \beta_2 z'^{\nu_2+2} \end{cases}$$

on pose $m(X') = \inf(\nu_1, \nu_2)$, et $(X'.\Delta X)$ est l'ordre en z' de $c_2(z') - c_1(z')$. On note σ la monodromie dans F_y, $\mathrm{Tr}(u)_0$ le terme local.

PROPOSITION 2.4.3:

(1°) *Si X' n'est tangente ni à ΔX, ni à $X \times \{0\}$ $(\nu_1 \geqslant \nu_2)$,* $\mathrm{Tr}(u)_0 = 0$

(2°) *Si X' est tangente à Δ_X on a* $\mathrm{Tr}(u)_0 = \mathrm{Tr}(u_0) + \mathrm{Tr}(u_\gamma)((X'.\Delta X) - m(X'))$.

(3°) *Si X' est tangente à $X \times \{0\}$, on a*

$$\mathrm{Tr}(u)_0 = \mathrm{Tr}(u_0) - \sum_{i \in \mathbb{Z}/(\nu_1 - \nu_2)\mathbb{Z}} \mathrm{Tr}\left(\sigma^i u_\gamma\right).$$

Dans le 3° γ est un chemin quelconque, et dans le 2° un chemin direct.

2.5. Termes locaux des faisceaux pervers

2.5.1. La proposition (2.4.3) s'applique en particulier lorsque F est un faisceau pervers. A titre d'exercice on traduit (2.4.3) dans la catégorie équivalente très simple $D(\rightleftarrows)$ (ci-dessous (2.5.3)). Pour la notion de faisceau pervers on renvoie à ([5]). Sur un disque D cette notion prend une forme très simple: un faisceau pervers est un objet F de la catégorie dérivée $D_c^b(D)$ des complexes de $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie bornés et à cohomologie constructible satisfaisant à la propriété suivante: soit i: $\{0\} \hookrightarrow D$ l'inclusion de l'origine et j: $\mathring{D} \hookrightarrow D$ l'ouvert complémentaire. On dispose des foncteurs de restriction i^*, j^* et du foncteur $i^!$ des sections à support dans $\{0\}$. Un complexe F est un faisceau pervers si et seulement si $\mathscr{H}^k(j^*F) = 0$ pour $k \neq -1$, $\mathscr{H}^k(i^*F) = 0$ pour $k > 0$ et $\mathscr{H}^k(i^!F) = 0$ pour $k < 0$. On vérifie alors facilement qu'on a $\mathscr{H}^k(i^*F) = 0$ pour $k \neq -1, 0$. Tout faisceau pervers sur D est quasi-isomorphe à un complexe réduit aux degrés -1 et 0. Le foncteur $R\Psi$ (SGA 7 XIV 1.3) associe à F un objet de $D(0 \times \mathscr{D})$ (loc. cit.) dont on peut d'après ce qui précède (SGA 7 XIV 1.3.6) choisir (non canoniquement) un représentant de la forme suivante, avec $x \in D - \{0\}$,

$$\begin{array}{ccc} K_0 & \xrightarrow{d_0} & I_0 \\ \varphi_K \downarrow & & \varphi_L \downarrow \\ K_x & \xrightarrow{d_x} & I_x \end{array}$$

(K en degré -1, L en degré 0), avec d_x surjectif et (Ker $\varphi_K \cap$ Ker d_0) $= 0$, ce carré commutatif étant de plus $\pi_1(D - \{0\}, x)$-équivariant.

2.5.2. On forme le complexe $R\phi_x(F)$ de la manière suivante (loc. cit.): on a une flèche $\pi_1(D - \{0\}, x)$-équivariante φ: $F_0 \to F_x$ d'où une flèche injective $F_0 \to F_x \oplus C(F_0)$ donnée par $F_0^n \to F_x^n \oplus F_0^n \oplus F_0^{n+1}$, $z \to \varphi(z) \oplus z \oplus 0$, dont le conoyau est par définition $R\phi_x(F)$.

On peut expliciter ce complexe à l'aide de la représentation ci-dessus: c'est $K_0 \to K_x \oplus L_0 \to L_x$ avec K_0 en degré -2, et 0 en degré $\neq -2, -1, 0$. Les flèches sont les suivantes: $K_0 \to K_x \oplus L_0$ est $v \mapsto -\varphi_K(v) \oplus d_0 v$, $K_x \oplus L_0 \to L_x$ est $z \oplus u \mapsto d_x(z) + \varphi_L(u)$. En particulier la cohomologie de $R\phi_x(F)$ est nulle en degré $\neq -1$ et $H^{-1}(R\phi_x(F)) \simeq K_x \underset{L_x}{\times} L_0/K_0$. Le complexe $R\phi_x(F)$ est le complexe des cycles évanescents, son H^{-1}, qui ne dépend pas du choix ci-dessus est *l'espace des cycles évanescents*. On le note dans ce texte $W_x(F)$ ou même W. L'espace $V_x(F) = H^{-1}(F_x)$ est *l'espace des cycles proches*, on le note simplement V lorsqu'aucune ambiguité n'en résulte.

On a un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \longrightarrow & R\Psi_x F \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & R\phi_x F & \end{array}$$

d'où une suite exacte de cohomologie qui se réduit à (SGA 7 XIV 1.3.6)

$$0 \to H^{-1}(F_0) \to V_x(F) \to W_x(F) \to H^0(F_0) \to 0.$$

On note $q_x(F)$: $V_x(F) \to W_x(F)$ le morphisme apparaissant ici. Notons σ l'automorphisme de monodromie de F_x. L'endomorphisme $\tau = 1 - \sigma$ s'annulle sur F_0 d'où une flèche $\mathrm{var}_x(F)$: $W_x(F) \to V_x(F)$ appelée flèche de variation, telle que $\mathrm{var} \circ q = 1 - \sigma$.

2.5.3. Notons $D(\rightleftarrows)$ la catégorie dont les objets sont les couples de morphismes de $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie q: $V \to W$ et var: $W \to V$ tels que $\mathrm{Id} - \mathrm{var} \circ q$ soit un automorphisme, et les morphismes, les morphismes de diagrammes $V \to W \to V$. On a le résultat bien connu

LEMME 2.5.3.1: *Soit* $x \in D - \{0\}$. *Le foncteur* P_x: $F \to (q$: $V_x(F) \to W_x(F)$, var: $W_x(F) \to V_x(F))$ *est une équivalence de la catégorie des faisceaux pervers sur D avec la catégorie* $D(\rightleftarrows)$.

On exhibe un quasi-inverse: à $(V \rightleftarrows W)$ on associe un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, q \arrow[rr] \arrow[d] & & V \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Var}"] & \mathrm{coker}\, q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^0(\pi_1(D - \{0\}, x), V) \arrow[rr] & & V \arrow[r] & V \arrow[r] & H^1(\pi_1(D - \{0\}, x), V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en munissant V de l'action de $\pi_1(D - \{0\}, x)$ donnée par l'automorphisme $I - \mathrm{var} \circ q$. Si on note $\mathscr{X}^{-1}$ le faisceau sur D donné par $\mathrm{Ker}\, q \to V$, $\mathscr{X}^0$ le faisceau sur D donné par $\mathrm{coker}\, q \to 0$, on a donc une flèche $i^*\mathscr{X}^0 \to H^1(\pi_1(D - \{0\}, x), V) \simeq H^2_{\{0\}}(D, \mathscr{X}^{-1})$ soit un élément de $\mathrm{Ext}^2(\mathscr{X}^0, \mathscr{X}^{-1})$ qui reconstitue un complexe F.

Le foncteur P_x dépend de x: pour $x' \neq x$, $P_{x'}(F)$ et $P_x(F)$ sont isomorphes, mais il n'y a pas un isomorphisme unique. En particulier si deux chemins de $D - \{0\}$ de x à x' diffèrent d'un lacet l, les isomorphismes qu'ils déterminent entre P_x et $P_{x'}$ diffèrent de l'action de l.

2.5.4. Soit X' un disque et c: $X' \to D$ un morphisme fini ramifié en 0. Soit $x' \in X' - \{0\}$ et $x = c(x')$. On note $(c_{x'})^*$ (resp. $(c_{x'})$ (resp. $(c_{x'})_*$) le foncteur de $D(\rightleftarrows)$ dans elle-même associé à c^* (resp. c_*) par les équivalences P_x et $P_{x'}$. On omet l'indication des points bases, en supposant toujours qu'on a $c(x') = x$. On peut expliciter les foncteurs c^*, c_* de $D(\rightleftarrows)$ de la manière suivante. Pour $(V \xrightarrow{q} W \xrightarrow{\mathrm{var}} V)$ on pose $\sigma = I - \mathrm{var} \circ q$.

Soit n le degré de c, on a

$$c^*\left(V \xrightarrow{q} W \xrightarrow{\mathrm{var}} V\right) = V \xrightarrow{q} W \xrightarrow{\mathrm{var}_n} V \tag{2.5.4.1.}$$

avec $N_c = \sum_0^{n-1} \sigma^i$, $\mathrm{var}_n = N_c \circ \mathrm{var} = \mathrm{var} \circ N_c$.

$$c_*\left(V \xrightarrow{q} W \xrightarrow{\mathrm{var}} V\right) = V^n \to V^n \times W/\Delta V \to V^n \tag{2.5.4.2.}$$

avec $V^n = V \times V \times \ldots \times V$ (n facteurs), Δ: $V \to V^n \times W$ donné par $z \mapsto ((z, z, \ldots z), (-q(z)))$ et les morphismes $\bar{q}$: $V \to V^n \times W/\Delta V$, $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n), 0)$ et $\overline{\mathrm{var}}$: $V^n \times W/\Delta V \to V^n$ $((z_1, \ldots, z_n), u) \mapsto (\sigma z_n - z_1, z_1 - z_2, \ldots, z_{n-1} - z_n) + (\mathrm{var}\, u, 0, \ldots, 0)$.

2.5.5. Soit c: $X' \to D \times D$ un morphisme avec c_1 et c_2 comme dans (2.5.4). On note ν_i $(i = 1, 2)$ le degré de c_i. Soit $x' \in X' - \{0\}$ d'image (x_1, x_2) dans $D \times D$, et $x \in D - \{0\}$.

Soit F un faisceau pervers sur D et u: $c_1^* F \to c_2^! F$ un morphisme. On pose $P_x(F) = (V \to W \to V)$, $P_{x_i}(F) = (V_i \to W_i \to V_i)$ $(i = 1, 2)$ et on note $(V_2 \to W_2^! \to V_2)$ l'image inverse $P_{x'}(c_2^! F)$. Le foncteur $P_{x'}$ associe à u un morphisme, encore noté u: $(v_1 \to W_1 \to V_1) \to (V_2 \to W_2^! \to V_2)$ de composantes u_v: $V_1 \to V_2$ et u_W: $W_1 \to W_2^!$. Le choix d'un chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ de $(D - \{0\}) \times (D - \{0\})$ de (x, x) à (x_1, x_2) permet de définir un morphisme u_γ: soit γ_2' le relèvement de γ_2 à X', d'origine notée y et extrémité x', d'où un isomorphisme $P_{x'}(c_2^! F) \simeq P_y(c_2^! F)$ et en notant $(V \to W^! \to V)$ l'objet $P_y(c_2^! F)$ de $D(\rightleftarrows)$ un morphisme composé

$$u_\gamma\colon (V \rightleftarrows W) \underset{\gamma_1}{\xrightarrow{\sim}} (V_1 \rightleftarrows W_1) \underset{u}{\to} (V_2 \rightleftarrows W_2^!) \underset{\gamma_2}{\xrightarrow{\sim}} (V \rightleftarrows W^!).$$

On note $u_{V,\gamma}$: $V \to V$ l'endomorphisme ainsi défini. Pour écrire le terme local dans $D(\rightleftarrows)$, on doit encore interpréter le foncteur $i^* = \Gamma$.

On note C_2 la catégorie des complexes à 2 degrés $(-1, 0)$ de $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie, et D_2 la catégorie dérivée. On dispose d'un foncteur Γ: $D(\rightleftarrows) \to D_2$ donné par $\Gamma(V \leftrightarrows W) = (q\colon V \to W)$. Pour un faisceau pervers F et $x \in D - \{0\}$, on a un isomorphisme de D_2: $\Gamma(D, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(P_x(F))$. Pour le définir il suffit de choisir un scindage $\mathbb{C}$-linéaire de $0 \to \mathrm{Ker}\, d_x \to K_x \to L_x \to 0$. L'isomorphisme canonique

$\Gamma(X', H) \tilde{\to} \Gamma(D, c_{1*}H)$ est donné par la flèche de D_2, avec $P_x(H) = V \rightleftarrows W$,

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^n \\ q\downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ W & \to & V^n \times W/\Delta V \end{array}$$

définie par les flèches horizontales $z \mapsto (z, \ldots, z)$, et $u \mapsto (0, u)$. La flèche composée $\Gamma(X', c_2^! F) \tilde{\to} \Gamma(D, c_{2*}c_2^! F) \to \Gamma(D, F)$ s'écrit sous forme d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^! & \to & W. \end{array}$$

On vérifie que la flèche horizontale supérieure est N_{c_2} et on note s_{c_2}: $W^! \to W$ le morphisme ainsi défini.

2.5.6. Rappelons que le terme local est somme d'un terme "générique", et d'un terme "ponctuel". Le terme ponctuel est donné par les sections globales sur D, c'est la trace de la flèche composée

$$\Gamma(D, F) \to \Gamma(D, c_{1*}c_1^* F) \tilde{\to} \Gamma(X', c_1^* F) \to \Gamma\left(X', c_2^! F\right)$$
$$\tilde{\to} \Gamma\left(D, c_{2*}c_2^! F\right) \to \Gamma(D, F)$$

soit pour $x \in D - \{0\}$, et $P_x(F) = (V \rightleftarrows W)$ comme en (2.5.5),

$$\begin{array}{ccccccccc} V & \to & V^{\nu_1} & \longrightarrow & V & \xrightarrow{u_{V,\gamma}} & V & \xrightarrow{N_{c_2}} & V \\ \downarrow q & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow q \\ W & \to & V^{\nu_1} \times W/\Delta V & \to & W & \to & W^! & \xrightarrow{s_{c_2}} & W. \end{array}$$

On note $u_{W,\gamma}$ l'endomorphisme composé $W \twoheadrightarrow W^! \xrightarrow{s_{c_2}} W$, écrit ci-dessus. Le terme ponctuel s'écrit dans $D(\rightleftarrows)$ $\mathrm{Tr}(u_{W,\gamma}) - \mathrm{Tr}(N_{c_2} \circ u_{V,\gamma})$ avec les notations de (2.5.4), pour γ quelqonque. Pour le terme générique on distingue trois cas:

(1°) Si $\nu_1 > \nu_2$ il est nul, et également si $\nu_1 = \nu_2$ et X' en position générale par rapport à Δ.

(2°) Si $\nu_1 = \nu_2$ et X' tangent à Δ, c'est $-(X'\Delta - \nu_2)\,\mathrm{Tr}(u_{V,\gamma})$ avec γ un chemin direct.

(3°) Si $\nu_1 < \nu_2$, c'est $\sum_1^{\nu_2 - \nu_1} \mathrm{Tr}(\sigma^i u_{V,\gamma})$ avec γ quelconque.

En résumé, on écrit

PROPOSITION 2.5.7: *Soient ν_1 et ν_2 les degrés respectifs de c_1 et c_2. On a*

(1°) *Si $\nu_1 \geqslant \nu_2$ et X' non tangent à Δ, γ quelconque,*

$$\operatorname{Tr}(u)_0 = \operatorname{Tr}(u_{W,\gamma}) - \operatorname{Tr}\left(\sum_0^{\nu_2 - 1} \sigma^i u_{V,\gamma}\right).$$

(2°) *Si $\nu_1 = \nu_2$ et X' tangent à Δ, γ un chemin direct*

$$\operatorname{Tr}(u)_0 = \operatorname{Tr}(u_{W,\gamma}) - \operatorname{Tr}\left(\sum_0^{\nu_2 - 1} \sigma^i u_{V,\gamma}\right) - (X'.\Delta - \nu_2)\operatorname{Tr}(u_{V,\gamma}$$

(3°) *Si $\nu_1 < \nu_2$, γ quelconque*

$$\operatorname{Tr}(u)_0 = \operatorname{Tr}(u_{W,\gamma}) - \operatorname{Tr}\left(\sum_0^{\nu_1 - 1} \sigma^i u_{V,\gamma}\right).$$

3. Correspondances et revêtements. Etude locale

3.1. Correspondances et revêtements

Rappelons la situation de (1.3) et plus particulièrement (1.3.4.3) et (1.3.4.4): on a un diagramme commutatif de S-morphismes, avec c_1', c_2', c_1'', c_2'' finis,

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xrightarrow{d'} & Y_1 \underset{S}{\times} Y_2 & \xleftarrow{d''} & Y'' \\ p' \downarrow & & p_1 \downarrow \times p_2 & & \downarrow p'' \\ X' & \xrightarrow{c'} & X_1 \underset{S}{\times} X_2 & \xleftarrow{c''} & X'' \end{array}$$

et des morphismes injectifs de groupes finis $\phi' = (\phi_1', \phi_2')$ et $\phi'' = (\phi_1'', \phi_2'')$, ϕ': $G' \to G_1 \times G_2$, ϕ'': $G'' \to G_1 \times G_2$. Posons $H = \{(g', g'')\} \in G' \times G''/\phi'(g') = \phi''(g'')\}$.

LEMME 3.1.1: *on a l'égalité*

$$\#H = s(D', D'').$$

Rappelons que D' est la composante de $Z' = X' \underset{X_1 \times X_2}{\times} Y_1 \underset{S}{\times} Y_2$ dont Y' est la normalisée, et de même pour D''.

En effet on définit une bijection $H \to S(D', D'')$ en associant à (g', g'') l'élément $\phi'(g') = \phi''(g'')$ de $G_1 \times G_2$: on a $\phi'(g') \circ d' = d' \circ g'$ et $\phi''(g'') \circ d'' = d'' \circ g''$ donc l'image de (g', g'') laisse bien fixe le couple (D', D''). Inversement on définit $S(D', D'') \to H$ de la manière suivante: soit $g \in S(D', D'')$. Par définition, il existe alors $(g', g'') \in G' \times G''$ tel que $g \circ d' = d' \circ g'$ et $g \circ d'' = d'' \circ g''$ et cet élément de $G' \times G''$ est uniquement déterminé puisque ϕ' et ϕ'' sont injectifs. Il appartient clairement à H.

3.1.2. Soient X', X'', X_1, X_2 des S-traits et c': $X' \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$, c'': $X'' \to X_1 \underset{S}{\times} X_2$ des correspondances satisfaisant aux hypothèses de (1.7). Soit Y_j la fermeture intégrale de X_j $(j = 1, 2)$ dans une extension finie séparable de son corps de fonctions, et des diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Z' & \to & Y_1 \underset{S}{\times} Y_2 & \leftarrow & Z'' \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \times p_2 & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{c'} & X_1 \underset{S}{\times} X_2 & \xleftarrow{c''} & X'' \end{array} \qquad (3.1.2.1.)$$

où p_1 et p_2 sont les morphismes canoniques. Soit (D'_α) (resp. (D''_β)) l'ensemble des composantes irréductibles de Z' (resp. Z''). On note n_j le degré de p_j $(j = 1, 2)$. La proposition suivante permet de montrer l'invariance du second membre de (1.7.1) lorsque'on change de revêtement trivialisant.

PROPOSITION 3.1.3: *On a l'égalité*

$$\sum_{(\alpha,\beta)} (D'_\alpha . D''_\beta) - m_{2,1}(D'_\alpha, D''_\beta) = n_1 n_2 \times ((X'.X'') - m_{2,1}(X', X'')).$$

Cette égalité se décompose en deux parties. La première $\Sigma_{(\alpha,\beta)}(D'_\alpha . D''_\beta) = \mathrm{n}_1\mathrm{n}_2(\mathrm{X}'.\mathrm{X}'')$ est bien connue. Démontrons la seconde $\Sigma_{(\alpha,\beta)} m_{2,1}(D'_\alpha, D''_\beta) = n_1 n_2 m_{2,1}(X', X'')$. Soit n'_α (resp. n''_β) le degré de D'_α (resp. D''_β) sur X' (resp. X''). On a $m_{2,1}(D'_\alpha, D''_\beta) = (n'_\alpha n''_\beta / n_1 n_2) m_{2,1}(X', X'')$ et de plus $\Sigma_\alpha n'_\alpha = n_1 n_2 = \Sigma_\beta n''_\beta$ d'où la relation cherchée.

COROLLAIRE 3.1.4: *Dans la situation de* (3.1.2), *si* $(X'.X'') = m_{2,1}(X', X'')$, *alors pour tout* (α, β) *on a* $(D'_\alpha . D''_\beta) = m_{2,1}(D'_\alpha, D''_\beta)$.

En effet la considération de la correspondance composée de c' et c'' (SGA 5 III) montre facilement les relations élémentaires suivantes: $(X'.X'') \geqslant \inf(m_{1,2}(X', X''), m_{2,1}(X', X''))$; si $m_{1,2}(X', X'') \neq m_{2,1}(X', X'')$, alors $(X'.X'') = \inf(m_{1,2}(X', X''), m_{2,1}(X', X''))$ de sorte que l'hypothèse $m_{2,1}(X', X'') = (X'.X'')$ entraine $m_{2,1}(X', X'') \leqslant m_{1,2}(X', X'')$. Or on a l'égalité pour tout (α, β) $m_{1,2}(D'_\alpha, D''_\beta)/m_{2,1}(D'_\alpha, D''_\beta) = m_{1,2}(X', X'')/m_{2,1}(X', X'')$. Il en résulte que $(D'_\alpha, D''_\beta) - m_{2,1}(D'_\alpha, D''_\beta) \geqslant 0$. Comme la somme de ces expressions est nulle par hypothèse, chacune est nulle également.

3.1.5. Le cas modéré

Dans ce numéro on étudie plus en détail les composantes irréductibles de Z' et Z'' (3.1.2.1) et leurs multiplicités d'intersection lorsque p_1 et p_2 sont étales galoisiens en dehors du point fermé, et de plus modérément ramifiés, c'est-à-dire de degré premier à la caractéristique de S. On pose $v(D', D'') = (D'.D'') - m_{2,1}(D', D'')$ pour des composantes D' et D'' de Z' et Z'' respectivement. On a vu (3.1.4) que si $(X'.X'') = m_{2,1}(X', X'')$ on a $v(D', D'') = 0$. Dans ce numéro on suppose $(X'.X'') \neq m_{2,1}(X', X'')$. Alors si $m_{2,1}(X', X'') \neq m_{1,2}(X', X'')$, on a $(X'.X'') = m_{1,2}(X', X'') < m_{2,1}(X', X'')$ et si $m_{2,1}(X', X'') = m_{1,2}(X', X'')$, on a $(X'.X'') > m_{1,2}(X', X'') = m_{2,1}(X', X'')$. On distingue ces deux cas.

(a) $(X'.X'') > m_{1,2}(X', X'') = m_{2,1}(X', X'')$.

Alors pour tout (D', D''), $m_{1,2}(D', D'') = m_{2,1}(D', D'')$ donc $v(D', D'') \geqslant 0$ et comme $v(X', X'') > 0$, pour un couple (D', D'') au moins on a $v(D', D'') > 0$. Soit $G' \subset G_1 \times G_2$ (resp. $G'' \subset G_1 \times G_2$) le stabilisateur de D' dans $G_1 \times G_2$ (resp. D''), et comme au §1, ϕ': $G' \to G_1 \times G_2$ et ϕ'': $G'' \to G_1 \times G_2$ les injections canoniques. On note $(G_1 \times G_2)_{\natural\phi}$ le quotient de $(G_1 \times G_2/G') \times (G_1 \times G_2/G'')$ par l'action diagonale de $(G_1 \times G_2)$, et $(g, h) \mapsto \overline{(g, h)}$ l'application canonique $(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2)_{\natural\phi}$. On a une bijection $(G_1 \times G_2)_{\natural\phi} \to E(Z', Z'')$ (1.3.4.1) qui associe à $\overline{(g, h)}$ le couple (D'_g, D''_h) où D'_g (resp. D''_h) est l'image de D' (resp. D'') par l'automorphisme g (resp. h) de $Y_1 \underset{S}{\times} Y_2$. Il est clair que $v(D'_g, D''_g) = v(D', D'')$. Lorsque G_1 et G_2 sont d'ordre premier à $p = \text{car}\, k$, c'est essentiellement le seul cas possible.

LEMME 3.1.5.1: *Si p_1 et p_2 sont modérés et $m_{2,1}(X', X'') = m_{1,2}(X', X'') < (X', X'')$, on a*

(1°) *les conditions suivantes sont équivalentes*

a) $v(D'_g, D''_h) = v(D', D'')$

b) $\overline{(g, h)} = \overline{(1, 1)}$ *dans* $(G_1 \times G_2)_{\natural\phi}$.

(2°) *On a* $v(D', D'')/s(D', D'') = v(X', X'')$.

Il est clair qu'on peut se ramener d'abord au cas où $h = 1$, élément neutre de $G_1 \times G_2$. Le lemme résulte alors d'un calcul dans les anneaux de valuation discrète correspondants, qu'on peut résumer ainsi: un automorphisme modéré non trival de $Y_1 \underset{S}{\times} Y_2$ fait "tourner" la direction de la tangente à une correspondance telle que D' d'un "angle" non nul. Si D' et D'' sont tangentes, et $(g, 1) \neq (1, 1)$, dans $(G_1 \times G_2)_{\natural\phi}$, alors D'_g et D'' ne sont plus tangentes et $v(D'_g, D'') = 0$.

On trouvera dans l'Annexe B un traitement plus détaillé dans le cas où $X_1 = X_2$ et X'' est la diagonale (B.2.2). Le second énoncé résulte de (3.1.3) et de l'égalité dans $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{(\alpha,\beta)} v\left(D'_\alpha, D''_\beta\right) = \sum_{E(Z',Z'')} \frac{v\left(D'_g, D''_h\right)}{s\left(D'_g, D''_h\right)}.$$

(b) $(X'.X'') = m_{1,2}(X', X'') < m_{2,1}(X', X'')$.

Alors pour chaque couple (D'_g, D''_h) cette relation est encore vraie: $v(D'_g, D''_h)$ est constant et égal à $m_{1,2}(D', D'') - m_{2,1}(D', D'')$. Notons n_1 (resp. n_2, n', n'', ν'_1, ν'_2, ν''_1, ν''_2) le degré de p_1 (resp. p_2, p', p'', c'_1, c'_2, c''_1, c''_2). On pose $\mu = m_{2,1}(X', X'') - m_{1,2}(X', X'') = \nu'_2\nu''_1 - \nu'_1\nu''_2$ et on décompose μ en $\mu = d_p(c', c'') \times \bar{\mu}$ avec $\bar{\mu}$ premier à p et $d_p(c', c'')$ une puissance de p.

LEMME 3.1.5.2: *Si p_1 et p_2 sont modérés, et $(X'.X'') = m_{1,2}(X', X'') < m_{2,1}(X', X'')$ on a*

(1°) *Pour tout couple (D'_g, D''_h) au-dessus de (X', X'') on a $v(D'_g, D''_h) = m_{1,2}(D', D'') - m_{2,1}(D', D'')$ et $s(D'_g, D''_h)$ est indépendant de (D'_g, D''_h).*

(2°) *Si n_1 et n_2 sont assez grands (multiplicativement), alors de plus*

(*a*) *$E(Z', Z'')$ a $\bar{\mu}$ éléments, et est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(\nu'_1, \nu'_2)\mathbb{Z} + (\nu''_1, \nu''_2)\mathbb{Z} + \bar{\mu}\mathbb{Z} \times \bar{\mu}\mathbb{Z}$.*

(*b*) *$v(D', D'')/s(D', D'') = -d_p(c', c'')$.*

3.1.5.3. Notons d'abord qu'on peut interpréter $(G_1 \times G_2)_{\natural\phi}$ (3.1.5,a)) de la manière suivante: le groupe $G' \times G''$ opère sur $G_1 \times G_2$ par $(g', g'').g = \phi'(g')g\phi''(g''^{-1})$, et $(G_1 \times G_2)_{\natural\phi}$ est l'espace des orbites de cette action. Le stabilisateur de l'élément neutre est le sous-groupe H de $G' \times G''$ considéré en (3.1): $H = \{(g', g'') \in G' \times G'' \mid \phi'(g') = \phi''(g'')\}$. Lorsque G_1 et G_2 sont commutatifs, il en résulte que $(G_1 \times G_2)_{\natural\phi} \simeq G_1 \times G_2/\phi'(G') + \phi''(G'')$ et que H est le stabilisateur de chaque élément, donc $s(D'_g, D''_h) = \#H$. Lorsque p_1 et p_2 sont modérés, G_1 et G_2 sont cycliques, d'où 1°.

3.1.5.4. Soit $\pi_1(\pi_2, \pi', \pi'')$ une uniformisante de $Y_1(Y_2, Y', Y'')$. Rappelons qu'on plonge G_1 (resp...) dans k^* par l'application α: $G_1 \to k^*$, $\sigma \to \overline{\sigma\pi_1/\pi_1}$ la barre désignant l'image dans le corps résiduel, identifié à k. L'image de α est le groupe des racines n_1-ièmes de 1 dans k. Si on procède de même pour G_2, G', G'', on vérifie que le morphisme ϕ'_1: $G' \to G_1$ (resp. ϕ'_2, ϕ''_1, ϕ''_2) se traduit par α dans l'élévation à la puissance μ'_1 (resp. μ'_2, μ''_1, μ''_2) avec $\mu'_1 = \deg(d'_1)$ (resp. d'_2, d''_1, d''_2). Notons q le plus petit multiple commun de n_1, n_2, n', n'' et $\epsilon \in k^*$ une racine primitive q-ième de 1. On peut écrire $q = n_1m_1 = n_2m_2 = n'm' = n''m''$. On pose $\beta_1 = \epsilon^{m_1}$, $\beta_2 = \epsilon^{m_2}$, $\beta' = \epsilon^{m'}$, $\beta'' = \epsilon^{m''}$, qui sont des racines primitives d'ordre n_1 (resp. n_2, n', n'') de 1, donc des générateurs de $\alpha(G_1)$ (resp...). On a un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont données par les β ci-dessus:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z}/n''\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G' & \xrightarrow{\phi'} & G_1\times G_2 & \xleftarrow{\phi''} & G'' \end{array}$$

On a les relations $\mu_1'n_1=\nu_1'n'$, $\mu_2'n_1=\nu_2'n'$, $\mu_1''n_1=\nu_1''n''$, $\mu_2''n_2=\nu_2''n''$, donc par exemple $\mu_1'm'n_1=\nu_1'n'm'=\nu_1'q=\nu_1'n_1m_1$ d'où $\mu_1'm'=\nu_1'm_1$, donc la flèche $\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}$ ci-dessus est donnée par ν_1'. On raisonne de même pour les autres flèches, de sorte que le diagramme

$$G'\xrightarrow{\phi'}G_1\times G_2\xleftarrow{\phi''}G''$$

s'écrit $\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}\xrightarrow{(\nu_1',\nu_2')}\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}\xleftarrow{(\nu_1'',\nu_2'')}\mathbb{Z}/n''\mathbb{Z}$. On a donc un isomorphisme $(G_1\times G_2)_{\natural\phi}\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/(\nu_1',\nu_2')\mathbb{Z}+(\nu_1'',\nu_2'')\mathbb{Z}+n_1\mathbb{Z}\times n_2\mathbb{Z}$. Soit $p^{r'}$ la plus grande puissance de p divisant le $pgcd(\nu_1',\nu_2')$ et posons $\nu_1'=p^{r'}\bar{\nu}_1'$, $\nu_2'=p^{r'}\bar{\nu}_2'$. On définit de même $\bar{\nu}_1''$, $\bar{\nu}_2''$.

Lemme 3.1.5.5: *On a une égalité*

$$(\nu_1',\nu_2')\mathbb{Z}+(\nu_1'',\nu_2'')\mathbb{Z}+n_1\mathbb{Z}\times n_2\mathbb{Z}=(\bar{\nu}_1',\bar{\nu}_2')\mathbb{Z}+(\bar{\nu}_1'',\bar{\nu}_2'')\mathbb{Z}+n_1\mathbb{Z}\times n_2\mathbb{Z}$$

entre sous-groupes de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

En effet, n_1 et n_2 étant premiers à p, il existe des entiers relatifs λ', λ_1', λ_2' tels que $\lambda'p^{r'}+\lambda_1'n_1+\lambda_2'n_2=1$ donc $\bar{\nu}_1'=\lambda'\nu_2'+\lambda_1'\bar{\nu}_1'n_1+\lambda_2'\bar{\nu}_1'n_2$ et $\bar{\nu}_2'=\lambda'\nu_2'+\lambda_1'\bar{\nu}_2'n_1+\lambda_2'\bar{\nu}_2'n_2$, et des égalités analogues pour $\bar{\nu}_1''$ et $\bar{\nu}_2''$.

3.1.5.6. Les considérations développées ci-dessus n'utilisent que la modération de p_1 et p_2. Supposons de plus $\nu_1'\nu_2''-\nu_2'\nu_1''\neq 0$. On a un homomorphisme $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/(\bar{\nu}_1'\nu_2''-\bar{\nu}_2'\nu_1'')\mathbb{Z}+\tilde{\nu}_2''n_1\mathbb{Z}+\tilde{\nu}_1''n_1\mathbb{Z}$ donné par $(a,b)\mapsto\tilde{\nu}_2''a-\tilde{\nu}_1''b$, avec $\tilde{\nu}_1''$ le quotient de ν_1'' par le $pgcd(\bar{\nu}_1'',\bar{\nu}_2'')$ et $\tilde{\nu}_2''$ le quotient de $\bar{\nu}_2''$ par le $pgcd(\bar{\nu}_1'',\bar{\nu}_2'')$. Les entiers $\tilde{\nu}_1''$ et $\tilde{\nu}_2''$ sont premiers entre eux donc le morphisme ci-dessus est surjectif. Son noyau est le sous-groupe $(\bar{\nu}_1',\bar{\nu}_2')\mathbb{Z}+(\bar{\nu}_1'',\bar{\nu}_2'')\mathbb{Z}+n_1\mathbb{Z}\times n_2\mathbb{Z}$; on a donc une suite exacte

$$0\to\mathbb{Z}/(\bar{\nu}_1'',\bar{\nu}_2'')\mathbb{Z}\to(G_1\times G_2)_{\natural\phi}\to\mathbb{Z}/(\bar{\nu}_1'\tilde{\nu}_2''-\bar{\nu}_2'\tilde{\nu}_1'')\mathbb{Z}+\tilde{\nu}_2''n_1\mathbb{Z}+\tilde{\nu}_1''n_2\mathbb{Z}\to 0.$$

Si n_1 et n_2 sont multiples de $\bar{\mu}$, alors $\mathbb{Z}/(\bar{\nu}_1'\tilde{\nu}_2''-\bar{\nu}_2'\tilde{\nu}_1'')\mathbb{Z}+\tilde{\nu}_2''n_1\mathbb{Z}+\tilde{\nu}_1''n_2\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/\tilde{\mu}\mathbb{Z}$, avec $\tilde{\mu}$ la partie première à p de $(\bar{\nu}_1'\tilde{\nu}_2''-\bar{\nu}_2'\tilde{\nu}_1'')$. Il en résulte dans ce cas que l'ordre de $(G_1\times G_2)_{\natural\phi}$ est $(\bar{\nu}_1'', \bar{\nu}_2'')\times\bar{\mu}=\bar{\mu}$. De plus l'homomorphisme canonique

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/(\nu'_1,\nu_2')\mathbb{Z}+(\nu_1'',\nu_2'')\mathbb{Z}+n_1\mathbb{Z}\times n_2\mathbb{Z}$$

$$\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/(\nu_1',\nu_2')\mathbb{Z}+(\nu_1'',\nu_2'')\mathbb{Z}+\bar{\mu}\mathbb{Z}\times\bar{\mu}\mathbb{Z}$$

est surjectif, donc un isomorphisme, les deux groupes ayant le même ordre: on a donc démontré (3.1.5.2 2°a)). Pour le 2°b) on remarque que

$$\#H=\frac{n_1n_2}{n'n''}\bar{\mu}\quad\text{et}$$

$$v(D',D'')=\frac{n_1n_2}{n'n''}(m_{2,1}(X',X'')-m_{1,2}(X',X''))=-\frac{n_1n_2}{n'n''}\mu.$$

3.2. Relation de divisibilité

PROPOSITION 3.2.1: *Dans la situation* (3.1), *le quotient* $(D'.D'')-m_{2,1}(D',D'')/\mathrm{card}\,H$ *est de la forme* ap^s, $a\in\mathbb{Z}$, $s\in\mathbb{Z}$, *où* p *est l'exposant caractéristique du corps de base.*

Posons pour abréger $t=(D'D'')$, $i=m_{2,1}(D',D'')$. Posons $Y_1=\operatorname{spec}A_1$, $Y_2=\operatorname{spec}A_2$, $Y'=\operatorname{spec}\bar{B}'$, $Y''=\operatorname{spec}\bar{B}''$. Soit $\mathfrak{p}''$ le noyau de $d''\colon A_1\underset{k}{\otimes}A_2\to\bar{B}''$ et d'une manière générale pour un anneau local A notons $\mathfrak{m}_A$ l'idéal maximal. La flèche d' se restreint en une flèche $\mathfrak{p}''\to\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^t$ et par composition on a une flèche non nulle donc surjective $\mathfrak{p}''\to\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^t/\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^{t+1}$, qui induit une bijection

$$\alpha\colon\mathfrak{p}''/\mathfrak{m}_{A_1\otimes A_2}\mathfrak{p}''\xrightarrow{\sim}\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^t/\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^{t+1}.$$

Soit ${}^hA_1\otimes A_2$ un hensélisé de $A_1\otimes A_2$. L'isomorphisme ${}^hA_1\otimes A_2/\mathfrak{m}_{A_1}{}^hA_1\otimes A_2\xrightarrow{\sim}A_2$ se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{p}''/(\mathfrak{m}_{A_1}{}^hA_1\otimes A_2)\cap\mathfrak{p}''\to\mathfrak{m}_{A_2}^{\nu_1}$ avec $\nu_1=l(\bar{B}''/\mathfrak{m}_{A_1}\bar{B}'')$, d'où par composition une flèche non nulle $\mathfrak{p}''/(\mathfrak{m}_{A_1}{}^hA_1\otimes A_2)\cap\mathfrak{p}''\to\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^i\to\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^i/\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^{i+1}$. On en déduit une seconde bijection

$$\beta\colon\mathfrak{p}''/\mathfrak{m}_{A_1\otimes A_2}\mathfrak{p}''\xrightarrow{\sim}\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^i/\mathfrak{m}_{\bar{B}'}^{t+1}.$$

Le groupe H peut être considéré comme un sous-groupe de $G_1\times G_2$ (égal à $S(D',D'')$) par ϕ' ou ϕ''. Il opère sur Y', Y'', $Y_1\underset{S}{\times}Y_2$ et par construction α et β sont H-équivariantes. De plus l'opération de H sur les quotients de la forme $\mathfrak{m}_{B'}^n/\mathfrak{m}_{B'}^{n+1}$ est la suivante: soit θ: $H \to k^*$ l'homomorphisme associant à $h \in H$ l'élément $(\overline{h\pi'/\pi'})$ avec π' une uniformisante de Y', la barre désignant l'image dans le corps résiduel. Alors h opère sur $\mathfrak{m}_{B'}^n/\mathfrak{m}_{B'}^{n+1}$ par multiplication par $\theta(h)^n$. Il résulte donc des isomorphismes α et β ci-dessus l'égalité $\theta(h)^t = \theta(h)^i$ soit $\theta(h)^{t-i} = 1$. Posons card $H = qp^s$ avec $(q, p) = 1$. On sait que $\theta(H)$ est un groupe cyclique d'ordre q, il en résulte que q divise $t - i$ donc $(t - i)/\text{card } H = ap^{-s}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

3.2.2. Dans le cas particulier où une des correspondances est la diagonale, et l'autre le graphe d'un endomorphisme, on retrouve un résultat de (SGA 5 XII).

3.2.3. Si $X_1 = X_2 = X$, et $c' = c'' = \Delta X$ le morphisme diagonal (3.2.1) reste vérifié pour $D'' = \Delta$, $D' = \Gamma_s$ graphe d'un X-automorphisme de $Y = Y_1 = Y_2$, distinct de l'identité.

Soit $c(s)$ le cardinal du stabilisateur de s dans G, $\{g \in G/gs = sg\}$, le rationnel $\Gamma_s\Delta - m_{2,1}(\Gamma_s, \Delta)/c(s)$ est de la forme ap^n, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Réduction à un cas particulier

4.1. On utilise une suite de réductions permettant de se ramener au cas particulier (4.3) ci-dessous pour la démonstration de (1.7.1): on note $c_z(u', u'')$ le second membre de (1.7.1), (cf 1.7.6) et on montre qu'il suffit de vérifier l'égalité $\langle u', u''\rangle_z = c_z(u', u'')$ dans le cas (4.3) pour qu'elle soit toujours vraie.

4.1.1. En considérant la correspondance composée (SGA 5 III 5.2.9) on se réduit à la diagonale: en effet on a $\langle u', u''\rangle_z = \langle u'u'', I\rangle_z$ (SGA 5 III 5.2.10) et on vérifie par un calcul direct qu'on a de même $c_z(u', u'') = c_z(u'u'', I)$.

4.1.2. Supposons donc $X_1 = X_2 = X'' = X$, $E_1 = E_2 = E$, $c'' = \Delta X$ le morphisme diagonal $u'' = \mathrm{Id}_E$.

En filtrant le complexe E (1.2), on peut supposer E isomorphe à $j_! j^* E$ où j: $X - \{x\} \to X$ est l'immersion ouverte du complémentaire du point fermé x de X.

4.1.3. En décomposant Λ suivant ses composantes l-primaires, on peut supposer que Λ est un anneau de l-torsion, où l est un nombre premier différent de la caractéristique de base.

4.1.4. Par une méthode analogue à (SGA 5 III B §1) on peut supposer j^*E trivialisé par un revêtement d'ordre une puissance de l. En effet soit

p: $Y \to X$ un revêtement étale galoisien de groupe G sur $X - \{x\}$, trivialisant j^*E (1.3.2). On considère un sous-l-groupe de Sylow S_l de G et on pose $Z = Y/S_l$, q: $Z \to X$ le morphisme canonique. Soit $r =$ card G/S_l. C'est un entier premier à l donc inversible dans Λ. Soit w' l'image inverse de la correspondance u' par q (rappelons que u' se décompose en $c_1'^*E \xrightarrow{v'} c_2'^*E \to c'^!_2E$, ce qui permet de définir w' en composant q^*v' et le morphisme analogue à $c_2'^*E \to c'^!_2E$ dans l'image inverse (1.6)). On a l'égalité $\langle w', q^*\Delta\rangle_z = r^2\langle u', \Delta\rangle_x$ comme on le voit par un argument de trace, en utilisant d'une part le fait que $E \simeq j_!j^*E$, d'autre part la compatibilité de la formation du terme local avec les images directes par morphismes propres (SGA 5 III §4). Un calcul direct montre qu'on une égalité analogue pour c_z. On peut donc se ramener à un calcul sur Z, puisque r^2 est inversible.

4.2. Supposons donc j^*E trivialisé par un revêtement p: $Y \to X$ d'ordre une puissance de l. Alors ce revêtement est nécessairement cyclique de groupe $G \simeq \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$. On associe à ces données deux morphismes injectifs de groupes finis (1.3.4.4): $\phi = (\phi_1, \phi_2)$: $G' \to G \times G$ et Δ: $G \to G \times G$ le morphisme diagonal. On peut d'abord remarquer que G' est nécessairement de la forme $\mathbb{Z}/l^{m'}\mathbb{Z}$, et que, ϕ étant injectif, un des deux homomorphismes ϕ_1 et ϕ_2 au moins est injectif.

Soit $\xi \to X - \{x\}$ un point géométrique, et de même $\eta \to X' - \{x'\}$ un point géométrique d'images η_1 et η_2 par c_1' et c_2' respectivement. On choisit des isomorphismes des foncteurs fibres η_1 et ξ, η_2 et ξ respectivement, et on suppose p ξ-ponctué.

La situation géométrique considérée est équivalente à la situation galoisienne suivante. Soit M la fibre de E en ξ. C'est un objet de $D(\Lambda[\pi_1(X - \{X\}, \xi)])$, parfait comme objet de $D(\Lambda)$. L'action de $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$ se factorise par le quotient fini G, autrement dit $\pi_1(Y - \{y\}, \xi)$ opère trivialement sur M. A l'aide des isomorphismes de foncteurs fibres choisis ci-dessus, on définit à partir de la correspondance u' un endomorphisme $\bar{u}'$ de M, $\pi_1(X' - \{x'\}, \eta)$-équivariant, l'action sur la source de u' se faisant via le morphisme $\pi_1(X' - \{x\}, \eta) \xrightarrow{c_1'} \pi_1(X - \{x\}, \eta_1) \simeq \pi_1(X - \{x\}, \xi)$, et l'action sur le but via c_2'.

4.2.1. Supposons ϕ_1' non injectif, donc ϕ_2' injectif. Le groupe G étant commutatif, l'image inverse dans $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$ de $\phi_2'(\mathrm{Ker}\phi_1') \subset G$ est un sous-groupe distingué d'indice fini H_1. Par construction la flèche $\bar{u}'$ se factorise par la flèche canonique $R\ \mathrm{Hom}_{\Lambda[H_1]}(\Lambda, M) \to M$. Filtrons M par la filtration $F^n(M) = M$ si $n \leqslant 0$, $F^1(m) = R\ \mathrm{Hom}_{\Lambda[H_1]}(\Lambda, M)$, $F^n(M) = 0$ si $n > 1$. La flèche $\bar{u}'$ est alors filtrée et la flèche $gr^1(\bar{u}')$ est nulle. On a ainsi remplacé, pour le calcul du terme local, la situation galoisienne donnée par $G' \xrightarrow{\phi} G \times G \xleftarrow{\Delta} G$ (1.3.4.4) par la situation correspondant à $G'/\operatorname{Ker}\phi_1 \xrightarrow{(\Psi_1,\Psi_2)} G/\phi_2(\operatorname{Ker}\phi_1) \times G/\phi_2(\operatorname{Ker}\phi_1) \xleftarrow{\Delta} G/\phi_2(\operatorname{Ker}\phi_1)$, Ψ_1 et Ψ_2 étant induits par ϕ_1 et ϕ_2 respectivement. Si $\operatorname{Ker}\Psi_1$ n'est pas trivial, on peut répéter ce processus, et au bout d'un nombre fini de pas on se ramène au cas où ϕ_1 et ϕ_2 sont injectifs.

4.2.2. Si ϕ_2 n'est pas injectif, ϕ_1 est injectif. Dans ce cas, dual du précédent, on procède d'une manière analogue en considérant les coinvariants à la place des invariants.

4.2.3. Dans tout les cas on voit que pour montrer l'égalité $\langle u', I\rangle_z = c_z(u', I)$ on peut supposer ϕ_1 et ϕ_2 injectifs.

4.3. Dans le paragraphe suivant on montre le théorème (1.7.1) dans le cas particulier suivant: la correspondance c″ est la diagonale Δ: $X \to X \underset{S}{\times} X$, on note $\{z\}$ l'intersection $X \underset{X \underset{S}{\times} X}{\times} X'$. Le complexe E est isomorphe à $j_! j^* E$, pour j: $X - \{x\} \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte canonique. Il existe un revêtement p: $Y \to X$, étale galoisien de groupe $G \simeq \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ sur $X - \{x\}$, avec l premier différent de car k, et un isomorphisme $p^* j^* E \simeq \underline{\Lambda} \otimes M$ où M est un complexe parfait de Λ-modules. Cet isomorphisme est G-équivariant, avec l'action diagonale de G sur $\underline{\Lambda} \otimes M$. De plus si on choisit une composante Y' au-dessus de X' et si on considère le diagramme (1.3.4.3) correspondant

$$\begin{array}{ccccc}
Y' & \xrightarrow{d'} & Y \underset{S}{\times} Y & \xleftarrow{\Delta} & Y \\
{\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p\times p} & & \downarrow {\scriptstyle p} \\
X' & \xrightarrow{c'} & X \underset{S}{\times} X & \leftarrow & X
\end{array}$$

et le couple de morphismes (1.3.4.4) associé, ϕ: $G' \to G \times G$, Δ: $G \to G \times G$ on suppose ϕ_1 et ϕ_2 injectifs.

Enfin l'anneau de base Λ est annulé par une puissance de l. On note dans la suite y le point fermé de Y et j': $Y - \{y\} \leftarrow Y$ l'immersion ouverte canonique.

5. Détermination du terme local

5.1. Dans tout le §5 on se réfère à la situation décrite en (4.3.), dont on utilise les notations. Soient $A = \Lambda[G]$, $A' = \Lambda[G']$. On note $\bar{\phi}$: $G' \to G$ le morphisme défini par $\bar{\phi}(g') = \phi_1(g')\phi_2(g'^{-1})$. On pose $C_{\bar{\phi}} = \operatorname{Ker}\bar{\phi}$, $c_{\bar{\phi}} = \# C_{\bar{\phi}}$.

Pour $E \in \mathrm{ob}\, D_{ctf}({}_A X)$ on définit une variante de la trace (SGA 5 III B 6.5),

$$\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}\colon \mathrm{Hom}_{A'}\left(c'^{*}_{1\phi_1}E,\ c'^{!}_{2\phi_2}E\right) \to \Lambda\left[G/\bar{\Phi}(G')\right]$$

de la même manière que (loc. cit.) mais en utilisant la variante des traces non commutative présentée dans l'annexe A. Pour $G = G' = \{1\}$ on retrouve la trace de la formule de Lefschetz, notée $u \mapsto \mathrm{Tr}(u)_z$. Les propriétés de compatibilité (A.2, A.3, A.4) de la trace non commutative s'étendent à $\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}$.

5.2. Soit E satisfaisant aux conditions de (4.3) et $u' \in \mathrm{Hom}(c_1'^*E,\ c'^!_2E)$. On sait que u' se factorise par le morphisme canonique $a_{c'_2}\colon c_2'^*E \to c'^!_2E$ (1.4) et on note $v\colon c_1'^*E \to c_2'^*E$ la flèche telle que $u' = a_{c'_2} \circ v$. Soit η un point générique géométrique de Y', ξ un point géométrique de X se factorisant par p. Si on choisit des Y-isomorphismes de foncteurs fibres entre $d_1'(\eta)$ et ξ d'une part, $d_2'(\eta)$ et ξ d'autre part, on déduit de v un endomorphisme G'-équivariant de M, noté $\bar{u}'$. Cet endomorphisme est indépendant des choix faits car $\pi_1(Y - \{y\},\ \xi)$ opère trivialement sur M, il ne dépend que de Y'. Pour $g \in G$, on note Y'_g la composante normalisée image par $(g \times I)$ de Y', et on note $(Y'_g.\Delta)$ et $m_{2,1}(Y'_g,\ \Delta)$ les entiers définis en (1.5).

Théorème 5.2.1: *On a l'égalité*

$$\mathrm{Tr}(u')_z = \sum_{g \in G/\bar{\Phi}(G')} \frac{(Y'_g.\Delta) - m_{2,1}(Y'_g,\Delta)}{c_{\bar{\Phi}}} \times \mathrm{Tr}_{\Lambda}(\bar{u}' \circ g).$$

On note $p'^*(u')$ la correspondance composée de $p'^*(v)\colon p'^*c_1'^*E \to p'^*c_2'^*E$ et de $a_{d_2'}\colon d_2'^*p^*E \to d_2'^!p^*E$, et $p'_*p'^*u'\colon c_1'^*p_*p^*E \to c_2'^!p_*p^*E$ la correspondance image directe. Ce morphisme est G'-équivariant, et par l'extension d'augmentation (A.2) on associe à $p'_*p'^*u'$ un morphisme $u\colon \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_1'^*p_*p^*E \to \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_2'^!p_*p^*E$. Le morphisme canonique G-équivariant $E \to p_*p^*E$ se factorise par un isomorphisme $\gamma_G\colon E \to R\,\mathrm{Hom}_A(\underline{\Lambda}_X,\ p_*p^*E)$:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & p_*p^*E \\ \uparrow \wr & \gamma_G & \uparrow \\ R\,\mathrm{Hom}_A(\underline{\Lambda}_X,\ E) & \underset{\sim}{\longrightarrow} & R\,\mathrm{Hom}_A(\underline{\Lambda}_X,\ p_*p^*E). \end{array}$$

Le complexe p_*p^*E est un objet de $D_{ctf}({}_A X)$, donc (SGA 5 III B 6.18.3) la multiplication à gauche par $N_G = \sum_{g \in G} g$ définit un isomorphisme

$N_G\colon \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} p_*p^*E \to R\ \mathrm{Hom}_A(\underline{\Lambda}_X, p_*p^*E)$. On note $i_G\colon E \to \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} p_*p^*E$ l'isomorphisme $(N_G)^{-1} \circ \gamma_G$.

Pour appliquer les propriétés de la trace non commutative à la démonstration de (5.2.1), on montre le lemme suivant:

LEMME 5.2.2. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} c_1'^*E & \xrightarrow{u'} & c_2'^!E \\ \downarrow i_G & & \downarrow i_G \\ \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_1'^*p_*p^*E & \xrightarrow{u} & \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_2'^!p_*p^*E. \end{array}$$

On vérifie cette commutativité dans les fibres géométriques de X'. Rappelons que $E \simeq j_!j^*E$ donc dans la fibre fermée la commutativité est triviale: $(c_1'^*E)_{x'} = 0$. La commutativité dans la fibre générique sera établie ci-dessous (5.5).

5.3. La démonstration de (5.2.1) se fait en plusiers pas utilisant les propriétés de $\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}$. Tout d'abord (5.2.2) et (A.2.3) montrent

$$\mathrm{Tr}(u')_z = \sum_{g \in G/\bar{\Phi}(G')} \mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}(p'_*p'^*u')(g). \tag{5.3.1}$$

L'ismorphisme de $D(G, Y)$, $p^*E \simeq j_!'\underline{\Lambda}_{Y-\{y\}} \otimes M$ permet d'identifier p'^*u' au produit tensoriel $a_{d_2'} \otimes \bar{u}'$. Par image directe on identifie $p'_*p'^*u'$ et $p'_*a_{d_2'} \otimes \bar{u}'$.

PROPOSITION 5.3.2: *On a l'égalité*

$$\mathrm{Tr}(u)_z = \sum_{g \in G/\bar{\Phi}(G')} \mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}(p'_*a_{d_2'})(g^{-1}) \times \mathrm{Tr}_\Lambda(\bar{u}'g).$$

Dans cette formule, comme dans (5.2.1), Tr_Λ désigne la trace d'un endomorphisme du complexe parfait M (SGA 6.I). Compte tenu de (5.3.1) il suffit de montrer l'égalité pour $g \in G$,

$$\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}(p'_*a_{d_2'} \otimes \bar{u}')(g^{-1}) = \mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}(p'_*a_{d_2'})(g^{-1})\ \mathrm{Tr}_\Lambda(\bar{u}'g). \tag{5.3.2.1}$$

Or on a (A.3.2, 2$^{\mathrm{e}}$)

$$\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}}(p'_*a_{d_2'})(g^{-1}) = \mathrm{Tr}_{\Delta C_{\bar{\Phi}}}(gp'_*a_{d_2'})(1)$$

et le second membre de (5.3.2.1) n'est autre que $\mathrm{Tr}_{\Delta C_{\bar\Phi}}(gp'_*a_{d'_2}\otimes\bar u'g)(1)$ (A.4.1). La correspondance $gp'_*a_{d'_2}\otimes\bar u'g$ est $C_{\bar\Phi}\times C_{\bar\Phi}$-equivariante et $\mathrm{Tr}_{\Delta C_{\bar\Phi}}(gp'_*a_{d'_2}\otimes\bar u'g)$ obtenu par restriction de $gp'_*a_{d'_2}\otimes\bar u'g$ à $C_{\bar\Phi}\times\{1\}$ par le morphisme i: $C_{\bar\Phi}=C_{\bar\Phi}\times\{1\}\to C_{\bar\Phi}\times C_{\bar\Phi}$ (1.3.3). Le premier membre de (5.3.2.1) est obtenu par restriction de $gp'_*a_{d'_2}\otimes\bar u'g$ à $C_{\bar\Phi}$ par le morphisme diagonal Δ: $C_{\bar\Phi}\to C_{\bar\Phi}\times C_{\bar\Phi}$. Ces deux membres sont donc égaux (A.3.3.1).

5.4. Pour terminer la démonstration de (5.2.1) il suffit donc de calculer $\mathrm{Tr}_{\bar\Phi}(p'_*a_{d'_2})(g^{-1})$. On a tout d'abord $c_{\bar\Phi}\times\mathrm{Tr}_{\bar\Phi}(p'_*a_{d'_2})(g^{-1})=\mathrm{Tr}(gp'_*a_{d'_2})_z$, d'après (A.3.2, 1[e]) et la compatibilité de $\mathrm{Tr}(\ )_z$ aux images directes par morphismes propres (SGA 5 III 4.4) donne $\mathrm{Tr}(gp'_*a_{d'_2})_z=\mathrm{Tr}(ga_{d'_2})_{z'}$, (avec $\{z'\}=Y'\underset{Y\times Y}{\times}\Delta$). Le calcul du terme local $\mathrm{Tr}(ga_{d'_2})_{z'}$ est connu (SGA 5 III 4.3 ou SGA 5 III B 6.14): on a $\mathrm{Tr}(ga_{d'_2})_{z'}=(Y'_g.\Delta)-m_{2,1}(Y'_g,\Delta)$. Pour diviser par $c_{\bar\Phi}$ on effectue un passage à la limite. Tout d'abord il est clair qu'il suffit de montrer

$$\mathrm{Tr}_{\bar\Phi}(p'_*a_{d'_2})(g^{-1})=\frac{(Y'_g\Delta)-m_{2,1}(Y'_g\Delta)}{c_{\bar\Phi}}\quad\text{pour } \Lambda=\Lambda_n=\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}.$$

Pour chaque n on a dans Λ_n

$$c_{\bar\Phi}\,\mathrm{Tr}_{\bar\Phi}(p'_*a_{d'_2})(g^{-1})=(Y'_g\Delta)-m_{2,1}(Y'_g,\Delta),$$

et il est clair que les premiers membres définissent un élément de $\mathbb{Z}_l$, $c_{\bar\Phi}\mathrm{Tr}_{\bar\Phi,l}(p'_*a_{d'_2})(g^{-1})$. On a donc dans $\mathbb{Z}_l$: $\mathrm{Tr}_{\bar\Phi,l}(p'_*a_{d'_2})(g^{-1})=((Y'_g.\Delta)-m_{2,1}(Y'_g,\Delta)/c_{\bar\Phi})$ et l'égalité cherchée en résulte par réduction modulo $l^n\mathbb{Z}_l$.

5.5. Rappelons comment u est formé à partir de u'. On a $u'=a_{c'_2}\circ v$ et $p'^*u'=a_{d'_2}\circ p'^*v$: $d_1'^*p^*E\simeq p'^*c_1'^*E\to p'^*c_2'^*E\simeq d_2'^*p^*E\to d_2'^!p^*E$. Le morphisme $p'_*p'^*u'$ est obtenu par image directe et composition avec les flèches de changement de base.

$$c_1'^*p_*p^*E\to p'_*d_1'^*p^*E\to p'_*d_2'^*p^*E\to p'_*d_2'^!p^*E\to c_2'^!p_*p^*E.$$

Ce morphisme est G'-équivariant si on utilise l'opération de G' via ϕ_1 sur le premier p_*p^*E, noté alors ${}_{\phi_1}p_*p^*E$, et via ϕ_2 sur le second, noté ${}_{\phi_2}p_*p^*E$. On forme $\Lambda\overset{L}{\underset{A}{\otimes}}p'_*p'^*u'$ et on compose à la source par I_{ϕ_1}: $\Lambda\overset{L}{\underset{A}{\otimes}}c_1'^*p_*p^*E\to\Lambda\overset{L}{\underset{A}{\otimes}}c'^*_{1\phi_1}p_*p^*E$ et au but par m: $\Lambda\overset{L}{\underset{A}{\otimes}}c'^!_{2\phi_2}p_*pE\to\Lambda\overset{L}{\underset{A}{\otimes}}c_2'^!p_*p^*E$. (A.2.2).

On interprète tout d'abord I_{ϕ_1} dans le cadre des invariants:

Lemme 5.5.1: *Soit* $L \in \mathrm{ob}\, D_{ctf}({}_{\Lambda[G]}X)$, *et* $\Psi\colon G' \to G$ *un morphisme injectif. On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \overset{L}{\underset{\Lambda[G]}{\otimes}} I \arrow[r, "N_G"] \arrow[d, "I_\Psi"] & R\,\mathrm{Hom}_{\Lambda[G]}(\underline{\Lambda}_X, L) \arrow[d, "\text{rest.}"] \\
\Lambda \overset{L}{\underset{\Lambda[G']}{\otimes}} I \arrow[r, "N_{G'}"] & R\,\mathrm{Hom}_{\Lambda[G']}(\underline{\Lambda}_X, L).
\end{tikzcd}$$

Cet énoncé est clair par réduction à un complexe parfait puis à $L = \underline{\Lambda}[G]$. Le diagramme (5.2.2) est le bord du diagramme suivant, d'après la définition de u rappelée ci-dessus

$$\begin{tikzcd}
c_1'^*E \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i_G"] & c_2'^*E \arrow[r, "a_{c_2'}"] \arrow[d, "i_G"] & c_2'^!E \arrow[d, "i_G"] \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_1'^*p_*p^*E \arrow[d, "I_{\phi_1}"] & \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_2'^*p_*p^*E \arrow[d, "I_{\phi_2}"] & \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_2'^!p_*p^*E \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} c'^*_{1\phi_1}p_*p^*E \arrow[d, "\text{ch.b.}"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} c'^*_{2\phi_2}p_*p^*E \arrow[d, "\text{ch.b.}"] \arrow[r, phantom, "(**)"] & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} c'^!_{2\phi_2}p_*p^*E \arrow[u, "m"'] \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*p'^*c_1'^*E \arrow[r, "p'_*p'^*v"'] & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*p'^*c_2'^*E \arrow[r, "a_{d_2'}"'] & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*d_2'^!p^*E. \arrow[u, "\text{ch.b.}"']
\end{tikzcd}$$

On montre la commutativité des diagrammes (*) et (**). Il résulte de (5.5.1) et de l'injectivité de ϕ_1 que la flèche composée formant le côté gauche du diagramme $c_1'^*E \to \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} p'_*p'^*c_1'^*E$, n'est autre que i_G, c'est à dire la composée de l'isomorphisme $\gamma_{G'}\colon c_1'^*E \to R\,\mathrm{Hom}_{A'}(\underline{\Lambda}_{X'}, p'_*p'^*c_1'^*E)$ et de l'inverse de $N_{G'}\colon \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} p'_*p'^*c_1'^*E \to R\,\mathrm{Hom}_{A'}(\underline{\Lambda}_{X'}, p'_*p'^*c_1'^*E)$. En effet on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
c_1'^*E \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma_G"] & c_1'^*p_*p^*E \arrow[r, "\text{ch.b.}"] & p'_*p'^*c_1'^*E \\
R\,\mathrm{Hom}_A(\underline{\Lambda}_{X'}, c_1'^*E) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] \arrow[d, "\wr\ \text{rest.}"] & R\,\mathrm{Hom}_A(\underline{\Lambda}_{X'}, c_1'^*p_*p^*E) \arrow[u] \arrow[d, "\text{rest.}"] & \\
R\,\mathrm{Hom}_{A'}(\Lambda_{X'}, c_1'^*E) \arrow[r] & R\,\mathrm{Hom}_{A'}(\Lambda_{X'}, c'^*_{1\phi_1}p_*p^*E) \arrow[r, "\text{ch.b.}"] & R\,\mathrm{Hom}_{A'}(\Lambda_{X'}, p'_*p'^*c_1'^*E). \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

De même ϕ_2 étant injectif, la flèche verticale $c_2'^*E \to \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} p'_* p'^* c_2'^* E$ est $i_{G'}$. Le diagramme (*) est donc commutatif. Pour montrer la commutativité de (**), on le décompose de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccc}
c_1'^*E & \overset{a_{c'_2}}{\rightarrow} & c_2'^!E \\
\downarrow i_G & (+) & \downarrow i_G \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_2'^* p_* p^* E & \overset{a_{c'_2}}{\rightarrow} & \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c_2'^! p_* p^* E \\
\downarrow I_{\phi_2} & & \uparrow m \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} c'^*_{2\phi_2} p_* p^* E & (++) & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} c'^!_{2\phi_2} p_* p^* E \\
\downarrow \text{ch.b.} & & \uparrow \text{ch.b.} \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_* d_2'^* p^* E & \underset{a_{d'_2}}{\rightarrow} & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_* d_2'^! p^* E.
\end{array}$$

Le diagramme $(+)$ est clairement commutatif, et tout revient à comparer la flèche $\Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} a_{c'_2}$ à la flèche composée donnée par les trois autres côtés de $(++)$, et à montrer qu'elles sont égales au point générique de X'.

Le complexe p^*E est constant et parfait sur Λ, il suffit donc de montrer la commutativité de $(++)$ pour $p^*E = \Lambda$.

5.6. Soient η, η', ξ, ξ', des spectres de corps et un diagramme commutatif d'extensions finies

$$\begin{array}{ccc}
\eta' & \overset{d'}{\rightarrow} & \xi' \\
\downarrow p' & & \downarrow p \\
\eta & \overset{c'}{\rightarrow} & \xi
\end{array}$$

avec p et p' galoisiennes de groupes G et G' respectivement. Soit $\bar{\xi} \to \xi$ un point géométrique se factorisant par ξ' et $\bar{\eta} \to \eta$ un point géométrique se factorisant par η'. On choisit un prolongement de c' en $\bar{c}$: $\bar{\eta} \to \bar{\xi}$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\eta, \bar{\eta}) & \overset{\bar{c}}{\rightarrow} & \pi_1(\xi, \bar{\xi}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G' & \overset{\Psi}{\rightarrow} & G.
\end{array}$$

On suppose Ψ injectif, G (donc G') abélien. Soit Λ un anneau de l-torsion avec l un nombre premier distinct de la caractéristique de ξ. Notons que $p_*\underline{\Lambda}_{\xi'} \in \mathrm{ob}\, D({}_A\xi)_{\mathrm{parf}}$. Pour r un morphisme fini on note a_r le morphisme adjoint à Tr_r, $A = \Lambda[G]$, $A' = \Lambda[G']$.

Proposition 5.6.1: *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c'^*p_*\underline{\Lambda} & \xrightarrow{a_{c'}} & \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} c'^!p_*\underline{\Lambda} \\
\downarrow I_\Psi & & \uparrow m \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} c'^*_\Psi p_*\underline{\Lambda} & & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} c'^!_\Psi p_*\underline{\Lambda} \\
\downarrow \mathrm{ch.b.} & & \uparrow \mathrm{ch.b.} \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*d^*\underline{\Lambda} & \xrightarrow[a_d]{} & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*d'^!\underline{\Lambda}.
\end{array}$$

Notons $b\colon \eta \underset{\xi}{\times} \xi' \to \xi'$ et $q\colon \eta \underset{\xi}{\times} \xi' \to \eta$ les morphismes canoniques. On a un morphisme $r\colon \eta' \to \eta \underset{\xi}{\times} \xi'$ qui est un isomorphisme sur son image, car Ψ est injectif, ce qui signifie que η' est l'une des composantes connexes de $\eta \underset{\xi}{\times} \xi'$ et G' le stabilisateur de cette composante pour l'action de G sur $\eta \underset{\xi}{\times} \xi'$. Par les isomorphismes de changement de base $c'^*p_* \to q_*b^*$ et $q_*b^! \to c'^!p_*$ le morphisme $a_{c'}$ est transformé en $q_*(a_b)\colon q_*b^*\underline{\Lambda} \to q_*b^!\underline{\Lambda}$. Par définition des flèches de changement de base, il suffit de vérifier la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} q_*b^*\underline{\Lambda} & \xrightarrow{a_b} & \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} q_*b^!\underline{\Lambda} \\
\downarrow I_\Psi & & \uparrow m \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} q_*b^*\underline{\Lambda} & & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} q_*b^!\underline{\Lambda} \\
\downarrow \alpha_r & & \uparrow \beta_r \\
\Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*d'^*\underline{\Lambda} & \xrightarrow[a_{d'}]{} & \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*d'^!\underline{\Lambda}
\end{array}$$

avec α_r donné par la flèche d'adjonction $I \to r_*r^*$ et β_r par la flèche d'adjonction $r_*r^! \to I$. Notons que r est une immersion ouverte et fermée

$r^* = r^!$, $r_* = r_!$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
r_*d'^*\Lambda = r_*r^*b^*\Lambda & \xrightarrow{a_{d'}} & r_*d'^!\Lambda \\
\wr\downarrow & & \| \\
r_*r^!b^*\Lambda & \xrightarrow[a_b]{} & r_*r^!b^!\Lambda \\
\downarrow\beta_r & & \downarrow\beta_r \\
b^*\Lambda & \xrightarrow{a_b} & b^!\Lambda
\end{array}$$

est commutatif.

Le preuve de (5.6.1) se ramène donc à la vérification suivante: le morphisme composé

$$\Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} q_*b^*\Lambda \xrightarrow{I_\Psi} \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} q_*b^*\Lambda \xrightarrow{\alpha_r} \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} p'_*d'^*\Lambda \xrightarrow{\beta_r} \Lambda \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} q_*b^*\Lambda$$

$$\xrightarrow{m} \Lambda \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} q_*b^*\Lambda$$

est le morphisme identique.

Cette vérification peut se faire après localisation étale, sur η'. Le morphisme s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Lambda \underset{A}{\otimes} A & \xrightarrow{I_\Psi} & \Lambda \underset{A'}{\otimes} A & \xrightarrow{\alpha_r} & \Lambda \underset{A'}{\otimes} A' & \xrightarrow{\beta_r} & \Lambda \underset{A'}{\otimes} A & \xrightarrow{m} & \Lambda \underset{A}{\otimes} A \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\Lambda & \rightarrow & \Lambda[G/\Psi(G')] & \rightarrow & \Lambda & \rightarrow & \Lambda[G/\Psi(G')] & \rightarrow & \Lambda \\
\lambda & \rightarrow & \lambda \displaystyle\sum_{g\in G/\Psi(G')} g & \rightarrow & \lambda & \rightarrow & \lambda e & \rightarrow & \lambda.
\end{array}$$

Annexe A: Traces non commutatives

A.1. On expose dans cette annexe une variante de la théorie des traces non commutatives de Grothendieck-Illusie (SGA 5 III B) en se restreignant volontairement et pour plus de simplicité au cas particulier utilisé dans l'article. Pour une généralisation on pourra consulter ([1]). Soient G et G' des groupes finis commutatifs, ϕ_1 et ϕ_2 des homomorphismes de G' dans G. On suppose ϕ_1 injectif et on note $\bar{\phi}$: $G' \to G$ l'homomorphisme $g' \mapsto \phi_1(g') - \phi_2(g')$, $C_{\bar{\phi}}$ son noyau, de cardinal $c_{\bar{\phi}}$. Soit T un topos, K un anneau commutatif unitaire de T. On pose $A' = K[G']$, $A = K[G]$ et on note encore ϕ_1 et ϕ_2 les flèches de A' dans A associées aux morphismes de groupes. On note $D(A)_{\text{parf}}$ la sous-catégorie pleine de $D(A)$ formée des complexes parfaits et de tordimension finie. Pour $E \in \text{ob } D(A)_{\text{parf}}$ et $F \in \text{ob } D^b(A^e)$ $(A^e = A \underset{K}{\otimes} A^0)$ on définit une flèche trace (loc. cit. 5.6.1)

$$\mathrm{Tr}_A\colon R\,Hom_A\left(E,\, F \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right) \to F \overset{L}{\underset{A^e}{\otimes}} A. \tag{A.1.1}$$

Pour un objet E de $D(A)$, on note ${}_{\phi_i}E$ l'objet de $D(A')$ qu'il définit à l'aide de ϕ_i. Si $E \in \text{ob } D(A)_{\text{parf}}$, alors ${}_{\phi_1}E \in \text{Ob } D(A')_{\text{parf}}$. On définit de de même E_{ϕ_i} et ${}_{\phi_i}F_{\phi_j}$ pour $F \in \text{ob } D(A^e)$. Soit (e_α) un système de représentants de $G/\phi_1(G')$ dans G. La section de $A_{\phi_1} \underset{A}{\otimes} {}_{\phi_1}A$ définie par $e_{\phi_1} = \Sigma e_\alpha \otimes e_\alpha^{-1}$ est indépendante du choix de (e_α), et on note $I_{\phi_1}\colon A \to A_{\phi_1} \underset{A'}{\otimes} {}_{\phi_1}A$ la flèche donnée pour $g \in G$ par $I_{\phi_1}(g) = e_{\phi_1}g$. Cette flèche est A-linéaire à droite et à gauche et on lui associe une flèche de $D(A)$, $I_{\phi_1}\colon E \to A_{\phi_1} \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} {}_{\phi_1}E \simeq A_{\phi_1} \underset{A'}{\otimes} {}_{\phi_1}E$ (A_{ϕ_1} est localement libre de rang fini sur A'). Pour $E \in \text{ob } D(A)_{\text{parf}}$ et $F \in \text{ob } D^b(A^e)$ on définit une flèche

$$\mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}\colon R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{A'}\left({}_{\phi_1}E,\, ({}_{\phi_2}F) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right) \to \left((A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_2}A)\right) \times \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} F \overset{L}{\underset{A^e}{\otimes}} A$$

en composant la flèche d'extension des scalaires:

$$\begin{aligned} &R\,Hom_{A'}\left({}_{\phi_1}E,\, ({}_{\phi_2}F) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right)\\ &\quad\to R\,Hom_A\left((A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_1}E),\, \left((A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_2}A)\right) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} F \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right), \end{aligned}$$

la flèche donnée par I_{ϕ_1}:

$$\begin{aligned} &R\,Hom_A\left((A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_1}E),\, \left((A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_2}A)\right) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} F \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right)\\ &\quad\to R\,Hom_A\left(E,\, \left((A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_2}A)\right) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} F \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right), \end{aligned}$$

$$R\ Hom_A(E,\ A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_2}A) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} F \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E$$

$$\to \left((A_{\phi_1}) \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} ({}_{\phi_2}A) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} F \right) \overset{L}{\underset{A^e}{\otimes}} A.$$

Lorsque $G = \{1\}$, on note Tr_K la flèche obtenue. La flèche $\mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}$ est une variante de celle définie dans (loc. cit.), elle possède les mêmes propriétés de compatibilité à l'extension et à la restriction des scalaires, ainsi qu'au produit tensoriel externe.

PROPOSITION A.1.2: *Soit* $E \in \mathrm{ob}\ D(A)_{\mathrm{parf}}$, $M \in \mathrm{ob}\ D^b(K)$. *Soit* $u \in \mathrm{Hom}_{A'}({}_{\phi_1}E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E)$, *et* $g \in G$. *On a dans* $H^0(T,\ M)$.

$$\mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}(gu)(e) = \mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}(u)(g^{-1}),$$

en notant, pour $X \in H^0(M) \otimes K[G/\bar{\phi}(G')]$, $X(h)$ *le coefficient de* $h \in G/\bar{\phi}(G')$.

Cela résulte de la commutativité de G et de (loc. cit. 5.11.3). De plus $(A_{\phi_1} \underset{A'}{\otimes} {}_{\phi_2}A) \underset{A^e}{\otimes} A \simeq \mathrm{K}[\mathrm{G}/\bar{\phi}(\mathrm{G}')]$.

A.2. Extension d'augmentation

Soient $A \to K$ et $A' \to K$ les flèches associées aux flèches d'augmentation usuelles, m: $\Sigma a_g g \mapsto \Sigma a_g$. Soient $E \in \mathrm{ob}\ D(A)_{\mathrm{parf}}$ et $M \in \mathrm{ob}\ D^b(K)$. On obtient dans (loc. cit. 5.9) une flèche d'extension des scalaires

$$\mathrm{Hom}_A\left(E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} E\right) \to \mathrm{Hom}_K\left(K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} \left(K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right)\right), \tag{A.2.1}$$

dont on peut définir une variante

$$\mathrm{Hom}_{A'}\left({}_{\phi_1}E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E\right) \to \mathrm{Hom}_K\left(K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} \left(K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right)\right). \tag{A.2.2}$$

En effet, on obtient une flèche locale

$$R\,Hom_{A'}\left({}_{\phi_1}E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E\right)$$

$$\to R\,Hom_K\left(K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} \left(K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E\right)\right)$$

en composant l'extension usuelle $R\,Hom_{A'}({}_{\phi_1}E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E) \to R\,Hom_K((K \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} {}_{\phi_1}E),\ M \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} {}_{\phi_2}E))$, avec la flèche $R\,Hom_K(K \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} {}_{\phi_1}E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} (K \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} {}_{\phi_2}E)) \to R\,Hom_K(K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} (K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E))$ donnée par composition avec $K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} I_{\phi_1}$: $K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E \to K \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} {}_{\phi_1}E$ et avec la flèche $m \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E$: $K \overset{L}{\underset{A'}{\otimes}} {}_{\phi_2}E \to K \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} E$.

Proposition A.2.3: *Pour E et M comme ci-dessus, soit $u \in \mathrm{Hom}_{A'}$-$({}_{\phi_1}E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E)$ et v l'image de u par (A.2.2). On a dans $H^0(T, M)$:*

$$\mathrm{Tr}_K(v) = \sum_{G/\bar{\Phi}(G')} \mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}(u)(g).$$

On montre la compatibilité de la flèche locale d'extension à $\mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}$ grâce aux propriétés de la flèche trace (loc. cit.) et à la compatibilité de I_{ϕ_1} à l'extension des scalaires.

A.3. Restriction des scalaires

On considère un sous-groupe H de $C_{\bar{\Phi}}$ (A.1) et on note ΔH: $H \to H \times H$ le morphisme diagonal, $B = K[H]$. Soit $E \in \mathrm{ob}\ D(A)_{\mathrm{parf}}$, $M \in \mathrm{ob}\ D^b(K)$, $u \in \mathrm{Hom}_{A'}({}_{\phi_1}E,\ M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E)$. On note encore u la flèche B-linéaire définie par restriction des scalaires.

Proposition A.3.1: *On a l'égalité*

$$\mathrm{Tr}_{\Delta H}(u)(e) = \#(C_{\bar{\Phi}}/H) \times \mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}(u)(e).$$

COROLLAIRE A.3.2: *On a les égalités*

$$(1^\circ)\ \mathrm{Tr}_K(gu)(e) = c_{\bar{\Phi}} \times \mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}(u)(g^{-1})$$

$$(2^\circ)\ \mathrm{Tr}_{\Delta C_{\bar{\Phi}}}(gu)(e) = \mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}(u)(g^{-1}).$$

A.3.3. Soit G un groupe fini, on note i: $G \to G \times G$ l'homomorphisme $g \mapsto (g, e)$ et ΔG l'homomorphisme diagonal. Supposons G commutatif, et notons ϕ_1' et ϕ_2' les composantes (égales à l'identité) de $\Delta G \times G$: $G \times G \to (G \times G) \times (G \times G)$. Avec les notations de (A.1), on a $C_{\bar{\Phi}} = G \times G$ et on peut plonger G dans $C_{\bar{\Phi}}$, par i ou ΔG. On peut donc appliquer (A.3.1) à cette situation de deux manières différentes: soit $E \in \mathrm{ob}\, D(K[G \times G])_{\mathrm{parf}}$, $M \in \mathrm{ob}\, D^b(K)$, $u \in \mathrm{Hom}_{K[G\times G]}({}_{\phi_1'}E, M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2'}E)$. On note u_Δ (resp. u_ι) le morphisme A-linéaire défini par restriction des scalaires par ΔG (resp. i).

COROLLAIRE A.3.3.1: *On a l'égalité*

$$\mathrm{Tr}_{\Delta G}(u_\Delta)(e) = \mathrm{Tr}_{\Delta G}(u_\iota)(e).$$

En effet, on a $\mathrm{Tr}_{\Delta G}(u_\Delta)(e) = \#(C_{\bar{\Phi}'}/G) \times \mathrm{Tr}_{(\phi_1',\phi_2')}(u)(e)$ et $\mathrm{Tr}_{\Delta G}(u_\iota)(e) = \#(c_{\bar{\Phi}'}/i(G)) \times \mathrm{Tr}_{(\phi_1',\phi_2')}(u)(e)$, (A.3.1).

A.3.4. Pour montrer (A.3.1) on définit une flèche $\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}/H}$: $K[G/\bar{\phi}(G')] \to K[H]$, variante de $\mathrm{Tr}_{B/A}$ de (loc. cit. 5.10) qu'on peut expliciter de la manière suivante; pour $g \in G/\bar{\phi}(G')$ on a:
(1°) Si $g \notin \phi_1(H)\bar{\phi}(G')/\bar{\phi}(G')$, $\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}/H}(g) = 0$
(2°) Si g est la classe de $\phi_1(h)$ avec $h \in H$, $\mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}/H}(g) = \#(C_{\bar{\Phi}}/H)\Sigma h'$, la somme portant sur les $h' \in H$ tels que $\phi_1(h')$ ait pour classe g dans $G/\bar{\phi}(H')$. On montre ensuite, en se ramenant au cas où $E = A$, qu'on a un diagramme commutatif de $D(K)$,

$$\begin{array}{ccc}
R\,Hom_{A'}({}_{\phi_1}E, M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{(\phi_1,\phi_2)}} & M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} K[G/\bar{\phi}(G')] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{R}\,Hom_B(E, M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} E) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\Delta H}} & M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} K[H]
\end{array}$$

la flèche verticale de gauche étant la restriction des scalaires, celle de droite $M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} \mathrm{Tr}_{\bar{\Phi}/H}$.

A.4. Produit tensoriel externe

Soient G, G', H, H' des groupes finis commutatifs, $\phi_i\colon G' \to G$ et $\Psi_i\colon H' \to H$ $(i = 1, 2)$ des homomorphismes. On suppose ϕ_1 et Ψ_1 injectifs. On pose $\bar{\phi} = \phi_1 - \phi_2$, $\bar{\Psi} = \Psi_1 - \Psi_2$ (A.1). On leur associe des morphismes $\theta_i = \phi_i \times \Psi_i\colon G' \times H' \to G \times H$, et $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_2$. On utilise les notations de (A.1). On a un isomorphisme canonique $K[G/\bar{\phi}(G')] \underset{K}{\otimes} K[H/\bar{\psi}(H')] \to K[G \times H/\bar{\theta}(G' \times H')]$ et on note $a.b$ l'image de $a \otimes b$ par cette flèche. Soit $E \in \operatorname{ob} D(K[G])_{\text{parf}}$, $F \in \operatorname{ob} D(K[H])_{\text{parf}}$, L, $M \in \operatorname{ob} D^b(K)$. Alors $E \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} F \in \operatorname{ob} D(K[G \times H])_{\text{parf}}$. Soient $u \in \operatorname{Hom}_{K[G']}({}_{\phi_1}E, M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\phi_2}E)$, $v \in \operatorname{Hom}_{K[H']}({}_{\Psi_1}F, L \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\Psi_2}F)$, et $u \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} v$ leur produit tensoriel, dans $\operatorname{Hom}_{K[G' \times H']}({}_{\theta_1}(E \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} F), (M \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} L) \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} {}_{\theta_2}(E \overset{L}{\underset{K}{\otimes}} F))$.

PROPOSITION A.4.1: *On a l'égalité*

$$\operatorname{Tr}_{(\theta_1, \theta_2)}\Big(u \underset{K}{\otimes} v\Big) = \operatorname{Tr}_{(\phi_1, \phi_2)}(u)\, \operatorname{Tr}_{(\Psi_1, \Psi_2)}(v).$$

Cette égalité traduit la compatibilité de la trace locale au produit tensoriel externe, qui se vérifie trivialement (loc. cit. 5.12).

Annexe B: Mesure l-adique sur un groupe profini

B.1. On note A un des anneaux suivants: $A = \mathbb{Z}_l$ pour l un nombre premier, ou $A = A_\lambda$ fermeture intégrale de $\mathbb{Z}_l$ dans une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_l$. L'anneau A est limite projective d'un système projectif filtrant d'anneaux finis noté $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on le munit de la topologie profinie.

DEFINITION B.1.1: Soit π un groupe profini. On appelle mesure l-adique sur π une forme linéaire continue sur l'espace $C(\pi, A)$ des applications continues de π dans A.

Posons $\pi = \varprojlim \pi_r$. Alors on a une bijection $C(\pi, A) \simeq \varprojlim_n \varinjlim_r F(\pi_r, A_n)$, où $F(\pi_r, A_n)$ est l'ensemble de applications de π_r dans A_n. En effet on a d'une part une bijection canonique $C(\pi, \varprojlim A_n) \simeq \varprojlim C(\pi, A_n)$, A étant limite projective des A_n muni de la topologie discrète, et d'autre part $C(\pi, A_n) \simeq \varinjlim F(\pi_r, A_n)$ π étant muni de la topologie profinie, pour laquelle une base de voisinages de l'élément neutre est formée des sous-groupes distingués d'indice fini, et A_n discret. La topologie utilisée sur $C(\pi, A)$ est celle définie par la bijection ci-dessus: $C(\pi, A_n)$ est muni de la topologie discrète et $C(\pi, A)$ de la topologie limite projective.

B.1.2. L'espace des mesures sur π à valeurs dans A

Une application linéaire continue μ: $C(\pi, A) \to A$ peut être définie de la manière suivante. Par composition avec les flèches canoniques on définit μ^n: $C(\pi, A) \to A_n$, A-linéaire continue. L'ensemble $(\mu^n)^{-1}(0)$ est un sous-groupe ouvert de $C(\pi, A)$, donc il existe un entier m tel que $(\mu^n)^{-1}(0)$ contienne l'image inverse de 0 par l'application canonique $C(\pi, A) \to C(\pi, A_m)$. L'application μ^n se factorise par μ^n_m: $C(\pi, A_m) \to A_n$, A-linéaire. Enfin μ^n_m est définie par une famille $((\mu^n_m)_r)$ indexée par les sous-groupes ouverts de π distingués, satisfaisant les propriétés suivantes: $((\mu^n_m)_r)$ est projective en r, et pour n fixé $((\mu^n_m)_r)$ et $((\mu^n_{m'})_r)$ définissent la même mesure si et seulement si il existe un entier m'' supérieur à m' et m tel que pour tout r $(\mu^n_m)_r$ et $(\mu^n_{m'})_r$ se restreignent en $(\mu^n_{m''})_r$, enfin pour $n' \geqslant n$ μ^n doit se restreindre en $\mu^{n'}$. Pour expliciter plus loin une mesure particulière, on précise ces données. Soit $(\mu^n_m)_r$: $F(\pi_r, A_m) \to A_n$, une application A-linéaire. On peut supposer m supérieur à n et $(\mu^n_m)_r$ A_m-linéaire. Pour $\sigma \in \pi_r$, on définit a_σ: $\pi_r \to A_m$ par $a_\sigma(\tau) = 0$ pour $\tau \neq 0$ et $a_\sigma(\sigma) = 1$. La famille (a_σ) est une base de $F(\pi_r, A_m)$ sur A_m et on associe à $(\mu^n_m)_r$ une application $\nu^n_{m,r}$: $\pi_r \to A_n$ en posant $\nu^n_{m,r}(\sigma) = (\mu^n_m)_r(a_\sigma)$. Pour définir une mesure l-adique sur π il suffit de se donner pour chaque n, chaque r dans un système cofinal de sous-groupes ouverts distingués de π, une application ν^n_r: $\pi_r \to A_n$ satisfaisant aux propriétés suivantes:

(1°) Si $r' \geqslant r$ (c'est à dire s'il existe un morphisme $\pi_{r'} \to \pi_r$) on a (B.1.2.1)

$$\nu^n_r(\sigma) = \sum_{\substack{\tau \in \pi_{r'} \\ \tau \mapsto \sigma}} \nu^n_{r'}(\tau)$$

(2°) Si $n' \geqslant n$ l'image de $\nu^{n'}_r(\sigma)$ dans A_n est $\nu^n_r(\sigma)$.

On associe une mesure l-adique à cette famille en posant $(\mu^n_m)_r(f) = \sum_{\sigma \in \pi} f(\sigma)\nu^n_r(\sigma)$, pour f: $\pi_r \to A_m$, avec $m \geqslant n$.

B.1.3. Variante ϕ-centrale

Soient π' et π des groupes profinis et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$: $\pi' \to \pi \times \pi$ un homomorphisme continu, avec ϕ_i: $\pi' \to \pi$ l'homomorphisme continu obtenu en composant ϕ avec la projection pr_i: $\pi \times \pi \to \pi$ $(i = 1, 2)$.

Rappelons qu'une fonction ϕ-centrale sur π à valeurs dans A est une application continue f: $\pi \to A$ telle que pour tout couple (σ', σ) de $\pi' \times \pi$ on ait $f(\phi_1(\sigma')\sigma\phi_2(\sigma'^{-1})) = f(\sigma)$. On note $C_\phi(\pi, A)$ le sous-espace de $C(\pi, A)$ formé des fonctions ϕ-centrales à valeurs dans A. On appelle ϕ-mesure l-adique sur π une forme linéaire continue μ: $C_\phi(\pi, A) \to A$. Les remarques développées plus haut s'appliquent à cette variante. Pour tout quotient fini π_r de π on définit un quotient fini π'_r de π' comme l'image de π' dans $\pi_r \times \pi_r$ par ϕ et le morphisme canonique. On note ϕ_r, ou encore ϕ: $\pi'_r \to \pi_r \times \pi_r$ l'injection canonique. Une application continue ϕ-centrale f est alors associée à une famille d'applications ϕ_r-centrales f_r^n: $\pi_r \to A_n$. De même une ϕ-mesure sur π est associée à une famille d'applications $(\mu_m^n)_r$: $F_{\phi_r}(\pi_r, A_m) \to A_n$. L'ensemble $F_{\phi_r}(\pi_r, A_m)$ est canoniquement en bijection avec l'ensemble $F(\pi_{r\natural\phi}, A_n)$ où $\pi_{r\natural\phi}$ est l'espace des orbites de π'_r dans π_r pour l'action $\sigma'.\sigma = \phi_{r,1}(\sigma')\sigma\phi_{r,2}(\sigma')^{-1}$. Pour définir une ϕ-mesure l-adique sur π, il suffit donc de se donner des applications ν_r^n: $\pi_{r\natural\phi} \to A_n$ satisfaisant aux propriétés suivantes:

(1°) Si $r' \geqslant r$ on a pour $\xi \in \pi_{r\natural\phi}$

$$\nu_r^n(\xi) = \sum_{\substack{\xi' \in \pi_{r'\natural\phi} \\ \xi \to \xi}} \nu_{r'}^n(\xi'). \tag{B.1.3.1}$$

(2°) Si $n' \geqslant n$ l'image de $\nu_r^{n'}(\xi)$ dans A_n est égale à $\nu_r^n(\xi)$.
Pour f un élément de $F_{\phi_r}(\pi_r, A_m)$ on pose alors

$$(\mu_m^n)_r(f) = \sum_{\xi \in \pi_{r\natural\phi}} f(\xi) \times \nu_r^n(\xi), \quad \text{avec } m \geqslant n. \tag{B.1.3.2}$$

B.2. Mesure associée à une correspondance géométrique

B.2.1. Soit k un corps algébriquement clos, $S = \operatorname{Spec} k$ et (X, x) (resp. (X', x')) un S-trait strictement hensélien localisé strict en un point fermé d'une courbe lisse séparée sur k. Soit c: $X' \to X \underset{S}{\times} X$ un S-morphisme local tel que $c_1 = pr_1 \circ c$ et $c_2 = pr_2 \circ c$ soient finis. Soit ξ un point géométrique de $X - \{x\}$, η un point géométrique de $X' - \{x'\}$, η_1 (resp. η_2) le point géométrique de $X - \{x\}$ obtenu par composition avec c_1 (resp. c_2). Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ un couple de chemins (isomorphismes de foncteurs fibres) de η_1 à ξ et de η_2 à ξ respectivement, dans $X - \{x\}$. On associe à γ un isomorphisme $\pi_1(X - \{x\}, \eta_1) \times \pi_1(X - \{x\}, \eta_2) \to \pi_1(X - \{x\}, \xi) \times \pi_1(X - \{x\}, \xi)$ donc un homomorphisme continu ϕ_γ: $\pi_1(X' - \{x'\}, \eta) \to \pi_1(X - \{x\}, \xi) \times \pi_1(X - \{x\}, \xi)$. A chaque morphisme fini de S-traits comme ci-dessus p: $(Y, y) \to (X, x)$ étale galoisien en dehors de x, ξ ponctué, on associe un morphisme

c'_γ: $(Y'_\gamma, y') \to Y \underset{S}{\times} Y$ et un morphisme q_γ: $Y'_\gamma \to X'$ ayant les mêmes propriétés que p, η ponctué tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Y'_\gamma & \xrightarrow{c'_\gamma} & Y \underset{S}{\times} Y \\ q \downarrow & & \downarrow p \times p \\ X' & \xrightarrow{c} & X \underset{S}{\times} X. \end{array}$$

Rappelons que si le revêtement p est défini par le quotient $\pi_1(X - \{x\}, \xi) \to \pi_r$ le groupe de galois de q_γ est l'image de $\pi_1(X' - \{x'\}, \eta)$ dans $\pi_r \times \pi_r$, c'est à dire le groupe noté π'_r en (B.1.3). Le schéma Y'_γ est le normalisé de X' dans l'extension définie par π'_r. C'est également le normalisé d'une des composantes irréductibles de $X' \underset{(X \times X)}{\times} Y \times Y)$: on dit dans la suite que Y'_γ est la composante au-dessus de X' déterminé par γ dans le revêtement p. Soit Δ_X: $x \to X \underset{S}{\times} X$ l'immersion diagonale. On suppose dans toute la suite que le schéma $\Delta_X \underset{(X \times X)}{\times} X'$ est fini sur S, c'est à dire réduit à un point. Pour $\sigma \in \pi_r$, le morphisme composé $Y'_\gamma \overset{c'_\gamma}{—} Y \times Y \overset{\sigma \times \mathrm{Id}}{\rightarrow} Y \times Y$ se factorise par la normalisée d'une composante $X' \underset{X \times X}{\times} (Y \times Y)$, notée $(Y'_\gamma)_\sigma$. Si $(\sigma, \mathrm{Id}) \in \pi'_r$, $(Y'_\gamma)_\sigma = (Y'_\gamma)$. On définit des entiers $((Y'_\gamma)_\sigma.\Delta_Y)$ et $m((Y'_\gamma)_\sigma, \Delta_Y)$ par les égalités $((Y'_\gamma)_\sigma.\Delta_Y) =$ longueur $((Y'_\gamma)_\sigma \underset{Y \times Y}{\times} \Delta_Y)$ et $m((Y'_\gamma)_\sigma, \Delta_Y) =$ longueur $((Y'_\gamma)_\sigma \underset{Y \times Y}{\times} Y \times \{y\})$. Si on choisit une uniformisante π' de Y et si on note $v_{Y'_\gamma}$ la valuation discrète définie par (Y'_γ), on a encore: $((Y'_\gamma)_\sigma.\Delta_Y) = v_{Y'_\gamma}(c'_{\gamma,1}(\sigma\pi') - c'_{\gamma,2}(\pi'))$ et $m((Y'_\gamma)_\sigma, \Delta_Y) = v_{Y'_\gamma}(c'_{\gamma,2}(\pi'))$, ces deux entiers étant bien définis grâce aux hypothèses de finitude sur c. On définit une fonction v_γ: $\pi_r \to \mathbb{Z}$ par B.2.1.1 $v_\gamma(\sigma) = ((Y'_\gamma)_\sigma \Delta_Y) - m((Y'_\gamma)_\sigma, \Delta_y)$. La fonction v_γ est ϕ-centrale, et de plus si on note $c_{\phi_\gamma}(\sigma)$ le cardinal du sous-groupe de π'_r, $C_{\phi_\gamma}(\sigma) = \{\sigma' \in \pi'_r, \phi_{\gamma,1}(\sigma')\sigma = \sigma\phi_{\gamma,2}(\sigma')\}$, et p l'exposant caractéristique de k, $v_\gamma(\sigma)/c_{\phi_\gamma}(\sigma)$ est de la forme ap^s, $a, s \in \mathbb{Z}$ (3.2.1). Ce quotient est donc défini dans les anneaux A_n (B.1).

B.2.2. D'après (B.1.3) on peut poser la définition suivante:
Mesure associée à (c, γ): *on appelle mesure associée à la correspondance c et au chemin* γ *et on note* $\mu_{c,\gamma}$ *la* ϕ_γ*-mesure l-adique sur* $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$ *définie par les fonctions* $(\nu_\gamma)^n_r$: $\pi_{r\natural\phi} \to A_n$:

$$(\nu_\gamma)^n_r(\sigma) = v_\gamma(\sigma)/c_{\phi\gamma}(\sigma). \tag{B.2.2.1}$$

La condition (B.1.3.1) est en effet vérifiée.

On donne dans la suite des propriétés de $\mu_{c,\gamma}$, qu'on note μ lorsqu'aucune ambiguité n'est à craindre: ces propriétés dépendent d'abord de la position de X' par rapport à la diagonale Δ_x et à "l'axe" $X \times \{x\}$. On fixe d'abord un revêtement p, et on donne quelques propriétés de l'application v_γ, qu'on note v.

Soit

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{c'} & Y \times Y \\ q \downarrow & & \downarrow p \times p \\ X' & \xrightarrow{c} & X \times X \end{array}$$

un diagramme commutatif comme ci-dessus (B.2.1), G le groupe de Galois de p, G' celui de q et ϕ: $G' \hookrightarrow G \times G$ l'injection canonique. On pose $X = \operatorname{Spec} A$, $X' = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} A'$, $Y' = \operatorname{Spec} B'$, et on note π (resp. ρ, ρ', π') une uniformisante de A (resp. B, B', A'). On a des égalités $p(\pi) = a\pi'^n$, $q(\rho) = b\rho'^{n'}$, $c_1(\pi) = a_1\rho^{\nu_1}$, $c_2(\pi) = a_2\rho^{\nu_2}$, $c_1'(\pi') = a_1'\rho'^{\nu_1'}$, $c_2'(\pi') = a_2'\rho'^{\nu_2'}$ avec a, $b\ldots$ des éléments inversibles. Pour z un élément d'un anneau local, on note $\bar{z}$ son image dans le corps résiduel, identifié ici au corps de base k. La commutativité du diagramme entraine les égalités

$$\nu_1'/\nu_2' = \nu_1/\nu_2, \quad \nu_1' n = n'\nu_1, \quad \bar{a}\bar{a}_1'^n = \bar{a}_1\bar{b}^{\nu_1}, \quad \bar{a}\bar{a}_2'^n = \bar{a}_2\bar{b}^{\nu_2}. \tag{B.2.2.2}$$

Distinguons trois cas:

(1°) $\nu_1 > \nu_2$, X' est tangent à $\{x\} \times X$. Alors $\nu_1' > \nu_2'$ et pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma) = 0$.

(2°) $\nu_1 < \nu_2$, X' est tangent à $X \times \{x\}$. Alors $\nu_1' < \nu_2'$ et pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma) = \nu_1' - \nu_2'$.

(3°) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Alors $\nu_1' = \nu_2' = \nu'$. On a $\sigma\pi' = \alpha_\sigma\pi' + \beta_\sigma\pi'^{\lambda_\sigma+2}$, avec $\alpha_\sigma \in k^*$ et $\lambda_\sigma \geqslant 0$. Il en résulte $c_1'\sigma\pi' = \alpha_\sigma a_1'\rho'^{\nu'} + c_1'(\beta_\sigma)a_1'^{\lambda_\sigma+2}\rho'^{\nu'(\lambda_\sigma+2)}$ et $c_2'\pi' = a_2'\rho'^{\nu'}$, donc $c_1'\sigma\pi' - c_2'\pi' = (\alpha_0 a_1' - a_2')\rho'^{\nu'} + c_1'(\beta_0)a_1'^{\lambda_\sigma+2}\rho'^{\nu'(\lambda_\sigma+2)}$.

D'autre part, $m((Y_\gamma')_\sigma, \Delta_Y) = \nu'$ donc $v(\sigma) \geqslant 0$, et $v(\sigma) > 0$ équivaut à $\alpha_\sigma\bar{a}_1' - \bar{a}_2' = 0$.

Or on a $(\bar{a}_1'/\bar{a}_2')^n = \bar{a}_1/\bar{a}_2$ (B.2.2.2) et $\alpha_\sigma^n = 1$. On peut donc distinguer à nouveau deux cas:

(3°-a) $\bar{a}_1/\bar{a}_2 \neq 1$, X' n'est pas tangent à Δ_X, alors pour tout $\sigma \in G$ $v(\sigma) = 0$.

(3°-b) $\bar{a}_1/\bar{a}_2 = 1$, X' est tangent à Δ_X.

Alors $\bar{a}_1'/\bar{a}_2'$ est une racine n-ième de 1 dans k, et si $n = n_1 p^{m_1}$, $(n_1, p) = 1$, $\bar{a}_1'/\bar{a}_2'$ est une racine n_1-ième de 1 dans k. On peut caractériser l'ensemble des σ de G tels que $v(\sigma) > 0$ à l'aide de c et γ.

B.2.2.3. On note $\Gamma(\eta, \xi, c)$ l'ensemble des chemins de (η_1, η_2) à (ξ, ξ). On définit une application tg: $\Gamma(\eta, \xi, c) \to \pi_1^{(p)}(X - \{x\}, \xi)$ en posant pour tout quotient fini $G^{(p)}$ de $\pi_1^{(p)}(X - \{x\}, \xi)$ et $\gamma \in \Gamma(\eta, \xi, c)$, $\mathrm{tg}^{(p)}(\gamma) = (\alpha_{G^{(p)}})^{-1}(\bar{a}_1'/\bar{a}_2')$ avec $\alpha_{G^{(p)}}$: $G^{(p)} \to k^*$ l'injection $\sigma \to (\overline{(\sigma\pi')}/\pi')$.

Cette définition est justifiée par les remarques (3°-b) ci-dessus. Notons que si δ et δ' sont des éléments de $\Gamma(\eta, \xi, c)$ conjugués par un élément $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ de $\pi_1(X - \{x\}, \xi) \times \pi_1(X - \{x\}, \xi)$, $\delta = \sigma\delta'$, on a $\mathrm{tg}(\delta') = \sigma_1.\mathrm{tg}(\delta).\sigma_2^{-1}$. En particulier il existe un élément γ_0 de $\Gamma(\eta, \xi, c)$ tel que $\mathrm{tg}(\gamma_0) = 1$, élément neutre de $\pi_1^{(p)}(X - \{x\}, \xi)$, c'est-à-dire que la composante au-dessus de X' déterminée par γ_0 dans tout revêtement de X soit tangente à la diagonale. (voir (C) pour le cas transcendant).

B.2.2.4. Revenant à (3°-b), on caractérise les $\sigma \in G$ tels que $v_\gamma(\sigma) \neq 0$ à l'aide de tg: on note θ: $G \to G^{(p)}$ l'application canonique de G dans son quotient premier à p ([4]), alors $v_\gamma(\sigma) \neq 0$ équivaut à $\theta(\sigma) = \mathrm{tg}(\gamma)$. Cet ensemble est donc une classe de G modulo son groupe de ramification sauvage bien déterminée par γ. On note cette classe $T_{G,\gamma}$.

Remarquons que $T_{G,\gamma}$ est stable par ϕ_γ-conjugaison, en effet, avec les notations de 3° on a pour $g' \in G'$ $\alpha_{\phi_1(g')} = \alpha_{g'}^{\nu_1'}$ et $\alpha_{\phi_2(g')} = \alpha_{g'}^{\nu_2'}$ donc si $\nu_1' = \nu_2'$, $\alpha_{\phi_1(g')} = \alpha_{\phi_2(g')}$ et $\theta(\phi_1(g')g\phi_2(g'^{-1})) = \theta(g)$.

On a donc une injection $(T_{G,\gamma})_{\natural\phi} \subset G_{\natural\phi}$ et v_γ est nul en dehors de $(T_{G,\gamma})_{\natural\phi}$. Il en résulte que si $(T_{c,\gamma})$ est la classe à gauche de $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$ modulo $\pi_{1,p}(X - \{x\}, \xi)$ définie par tg $\gamma \in \pi_1^{(p)}(X - \{x\}, \xi)$, la mesure $\mu_{c,\gamma}$ se factorise par l'application canonique $C_{\phi_{c,\gamma}}(\pi_1(X - \{x\}, \xi), A) \to C_{\phi_{c,\gamma}}(T_{c,\gamma}, A)$, et définit une mesure $\mu_{c,\gamma,p}$ sur $T_{c,\gamma}$.

En particulier si γ est choisi de telle sorte que $\mathrm{tg}(\gamma) = 1$, on obtient ainsi une mesure sur le groupe sauvage $\pi_{1,p}(X - \{x\}, \xi)$: on dit que γ est un *chemin direct*. Les résultats ci-dessus (1°, 2°, 3°) sont rassemblés dans la proposition suivante.

PROPOSITION B.2.2.5:

(1°) *Si X' n'est tangent ni à Δ_X ni à $X \times \{x\}$, $\mu_{c,\gamma} = 0$.*

(2°) *Si X' est tangent à Δ_X, on a* $\int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} f.\mathrm{d}\mu_{c,\gamma} = \int_{T_{c,\gamma}} (f \mid_{T_{c,\gamma}})\, \mathrm{d}\mu_{c,\gamma,p}$.

(3°) *Si X' est tangent à $X \times \{x\}$, on a*

$$(\mu_{c,\gamma})^n_{m,r}(f_r^m) = \sum_{\xi \in \pi_{r\natural\phi}} \frac{\nu_1' - \nu_2'}{c_{\phi_\gamma}(\xi)} f(\xi).$$

B.2.3. Intégration des fonctions modérées sur $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$

Soit f: $\pi_1(X - \{x\}, \xi) \to A$ une application continue. On dit que f est modérée si elle se factorise par le quotient $\pi_1^{(p)}(X - \{x\}, \xi)$ de $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$. Toute mesure μ sur $\pi_1(X - \{x\}, \xi)$ définit par restriction une mesure $\mu^{(p)}$ sur $\pi_1^{(p)}(X-\{x\}, \xi)$. On note θ: $\pi_1(X-\{x\}, \xi) \to \pi_1^{(p)}(X-\{x\}, \xi)$ la flèche canonique. Pour f: $\pi_1^{(p)}(X-\{x\}, \xi) \to A$ telle que $f \circ \theta$ soit $\phi_{c,\gamma}$-centrale, on a $\int_{\pi_1^{(p)}(X-\{x\},\xi)} f.\mathrm{d}\mu_{c,\gamma}^{(p)} = \int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} (f\theta)\, \mathrm{d}\mu_{c,\gamma}$. On a le corollaire suivant de (B.2.2.5):

COROLLAIRE B.2.3.1: *Soit f une fonction modérée telle que $f\theta$ soit $\phi_{c,\gamma}$-centrale.*

(1°) *Si X' n'est tangent ni à Δ_X, ni à $X \times \{x\}$,*

$$\int_{\pi_1^{(p)}(X-\{x\},\xi)} f\, \mathrm{d}\mu_{c,\gamma}^{(p)} = 0.$$

(2°) *Si X' est tangent à Δ_X,*

$$\int_{\pi_1^{(p)}(X-\{x\},\xi)} f\, \mathrm{d}\mu_{c,\gamma}^{(p)} = f(\mathrm{tg}\ \gamma)(X'.\Delta_X - m(X', \Delta_X)).$$

(3°) *Si X' est tangent à $X \times \{x\}$, posons $\nu_1 - \nu_2 = \nu\ \mathrm{d}_p(c)$, avec $\nu > 0$ premier à p, $|\mathrm{d}_p(c)|$ une puissance de p.*

3.a. *f se factorise par le quotient $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$ de $\pi_1^{(p)}(X-\{x\}, \xi)$.*

3.b. *Si $\bar{f}$: $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z} \to A$ est l'application ainsi définie,*

$$\int_{\pi_1^{(p)}(X-\{x\},\xi)} f\, \mathrm{d}\mu_{c,\gamma}^{(p)} = \mathrm{d}_p(c) \sum_{i \in \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}} \bar{f}(i).$$

Le premier cas est clair. Pour le second on a

$$(\mu_m^n)_r(f\theta) = \sum_{T_{\gamma,r\natural\phi}} f\theta(\xi)\nu_r^n(\xi) = f(\mathrm{tg}\ \gamma) \sum_{T_{\gamma,r\natural\phi}} \nu_r^n(\xi),$$

$$\text{et } \sum_{T_{\gamma,r\natural\phi}} \nu_r^n(\xi) = \sum_{\pi_{r\natural\phi}} \nu_r^n(\xi)$$

et par définition cette somme est constante lorsque r varie. Il suffit de faire $\pi_r = \{1\}$. Le troisième cas est un peu plus long à établir.

Démontrons 3.a. Pour un quotient A_m de A, on considère une factorisation f_r^m: $\pi_r \to A_m$ de f par un quotient premier à p de $\pi_1(X-\{x\}, \xi)$. Cette application se factorise par π_r. Il résulte de (3.1.5.2) que $\pi_{r\natural\phi} \simeq \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$ si l'ordre de π_r est un multiple de ν. Or $\pi_1(X-\{x\}, \xi)$ a un quotient $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$, donné par le revêtement ramifié $X[T]/T^\nu - \pi \to X$, et pour tout quotient fini π_r de $\pi_1(X-\{x\}, \xi)$ il existe un quotient intermédiaire $\pi_1(X-\{x\}, \xi) \to \pi_{r\nu} \to \pi_r$ d'ordre multiple de ν. De même pour 3-b on utilise (3.1.5.2, 2°b).

B.2.4. Fonctions c-centrales. c-mesures

Pour éliminer le choix d'un chemin γ, on introduit la notion de fonction c-centrale, et de c-mesure. Pour des éléments γ, γ' de $\Gamma = \Gamma(\xi, \eta, c)$

(B.2.2.3) il existe un unique couple $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$ d'éléments de $\pi_1(X-\{x\}, \xi)$ tel que $\gamma=\sigma.\gamma'$. On le note $\sigma(\gamma, \gamma')=(\sigma_1(\gamma, \gamma'), \sigma_2(\gamma, \gamma'))$.

DÉFINITION B.2.4.1: *On appelle fonction c-centrale sur* $\pi_1(X-\{x\}, \xi)$ *une famille* $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *d'applications* $f_\gamma\colon \pi_1(X-\{x\}, \xi)\to A$, *continues,* $\phi_{c,\gamma}$*-centrales, satisfaisant à la propriété: pour tous* $\gamma, \gamma'\in\Gamma$, $\tau\in\pi_1(X-\{x\}, \xi)$, *on a* $f_\gamma(\tau)=f_{\gamma'}(\sigma_1(\gamma, \gamma')\tau\sigma_2(\gamma, \gamma')^{-1})$.

Pour déterminer une telle fonction, il suffit de choisir un chemin γ_0, *une fonction* ϕ_{c,γ_0}*-centrale* f_0 *et de poser*

$$f_\gamma(\tau)=f_0\big(\sigma_1(\gamma_0, \delta)\tau\sigma_2(\gamma_0, \delta)^{-1}\big).$$

Soit f une fonction c-centrale modérée; si X' est tangent à Δ_X on a défini une application tg: $\Gamma\to\pi_1^{(p)}(X-\{x\}, \xi)$. Pour tous γ, γ' de Γ on a $f_\gamma(\text{tg }\gamma)=f_{\gamma'}(\text{tg }\gamma')$. En effet on a remarqué que $\text{tg }\gamma=\sigma_1(\gamma', \gamma)\text{ tg }\gamma'\sigma_2(\gamma', \gamma)^{-1}$. On note cet élément $f(1)$.

On définit de manière analogue une c-mesure. On appelle mesure associée à c, et on note μ_c la famille $(\mu_{c,\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$. C'est bien une c-mesure.

LEMME ET DÉFINITION B.2.4.2: *Soit F une fonction c-centrale. L'élément de A* $\int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} f_\gamma\, \mathrm{d}\mu_{c,\gamma}$ *est indépendant de* γ. *On note cet élément* $\int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} f\, \mathrm{d}\mu_c$.

Soient $\gamma, \delta\in\Gamma$. On pose $\delta=\sigma\gamma$, $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$. On a un homéomorphisme $[\sigma]\colon C_{\phi_\gamma}(\pi_1(X-\{x\}, \xi), A)\to C_{\phi_\delta}(\pi_1(X-\{x\}, \xi), A)$, donné par $f\mapsto(t\mapsto f(\sigma_1 t\sigma_2^{-1}))$. Il faut vérifier que $\int_{\pi_1}[\sigma]f\, \mathrm{d}\mu_{c,\delta}=\int_{\pi_1} f\, \mathrm{d}\mu_{c,\gamma}$ soit pour un quotient fini π_r, $(\mu_{c,\gamma})^n_{m,r}(f)=(\mu_{c,\delta})^n_{m,r}([\sigma]f)$. Le premier membre s'écrit $\sum_\epsilon f(\epsilon)(v_\gamma(\epsilon)/c_{\phi_\gamma}(\epsilon))$ et le second $\sum_\chi f(\sigma_1\chi\sigma_2^{-1})\dfrac{v_\delta\big(\sigma_1\chi\sigma_2^{-1}\big)}{c_{\phi_\delta}\big(\sigma_1\chi\sigma_2^{-1}\big)}$.
L'égalité résulte d'une part du fait que $\xi\mapsto\sigma_1\chi\sigma_2^{-1}$ est une bijection de $\pi_{r\natural\phi_\gamma}$ sur $\pi_{r\natural\phi_\delta}$, d'autre part du fait que le schéma Y'_γ est la composante au-dessus de X' image de Y' par le $X\underset{S}{\otimes}X$-automorphisme (σ_1, σ_2) de $Y\underset{S}{\otimes}Y$. Pour les fonctions c-centrales, les résultats des numéros précédents s'écrivent:

THÉORÈME B.2.4.3: (A) *Soit f une fonction c-centrale.*

(1°) *Si* X' *n'est tangent ni à* Δ_X *ni à* $X\times\{x\}$,

$$\int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} f\, \mathrm{d}\mu_c=0$$

(2°) *Si* X' *est tangent à* Δ_X

$$\int_{\pi_1(X-\{x\},\xi)} f\, \mathrm{d}\mu_c=\int_{\pi_{1,p}(X-\{x\},\xi)} f\, \mathrm{d}\mu_{c,p}.$$

(B) *Supposons de plus f modérée.*

(1°) *Si X' est tangent à Δ_X*

$$\int_{\pi_1^{(p)}(X-\{x\},\xi)} f\,\mathrm{d}\mu_c^{(p)} = f(1)(X'.\Delta_X - m(X', \Delta_X)).$$

(2°) *Si X est tangent à $X \times \{x\}$*

$$\int_{\pi_1^{(p)}(X-\{x\},\xi)} f\,\mathrm{d}\mu_c^{(p)} = \mathrm{d}_p(c) \sum_{i \in \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}} \tilde{f}(i).$$

Dans B 2°) $\tilde{f}$ désigne une quelconque des applications $\tilde{f}_\gamma$, et on vérifie que $\Sigma_i \tilde{f}_\gamma(i)$ est indépendant de γ.

Annexe C: Chemins directs dans le disque

PROPOSITION C.1: *Soient X et X' des disques unité $\{z \in \mathbb{C} \,\|\, z\,| < 1\}$, c_i: $X' \to X$ $(i = 1, 2)$ un revêtement fini ramifié en 0. On suppose que la correspondance $c = (c_1, c_2)$: $X' \to X \times X$ est tangente à la diagonale Δ_X. Il existe un chemin γ: $I = [0\ 1] \to \mathring{X} \times \mathring{X}$ d'un point de ΔX à un point de $c(X')$ satisfaisant à la propriété suivante. Soit $\bar{x}$ un point d'un revêtement universel du disque épointé $\mathring{X}$, au-dessus de $\mathrm{pr}_1 \circ \gamma(0) = x$. Pour tout revêtement fini ramifié $Y \to X$ connexe, $\bar{x}$ ponctué, γ détermine par relèvement à partir de l'image de $(\bar{x}, \bar{x})$ dans $Y \times Y$ une composante de $X' \underset{X \times X}{\times} Y \times Y$ tangente à la diagonale de $Y \times Y$. Un tel chemin est appelé chemin direct de Δ_X à $c(X')$.*

Il suffit de montrer le lemme:

LEMME C.2: *Dans la situation ci-dessus, il existe un chemin γ: $I \to \mathring{X} \times \mathring{X}$ d'un point de Δ_X à un point de $c(X')$ ayant la propriété suivante. Soit $\bar{x}$ un point d'un revêtement universel de $\mathring{X}$ au-dessus de $\mathrm{pr}_1 \circ \gamma(0) = x$. Pour tout revêtement fini ramifié connexe, $\bar{x}$ ponctué, p: $Y \to X$, soit Y' une composante de $X' \underset{X \times X}{\times} Y \times Y$ tangente à la diagonale. Il existe un chemin γ': $I \to \mathring{Y} \times \mathring{Y}$ $(\mathring{Y} = Y - \{0\})$ d'un point de Δ_Y à un point de l'image de Y' et une homotopie F: $I \times I \to \mathring{X} \times \mathring{X}$ satisfaisant à: $F(0, t) = \gamma(t)$, $F(1, t) = p \times p \circ \gamma'(t)$, $F(u, 0)$ est un chemin de ΔX, $F(u, 1) = \gamma(1)$.*

(C.2) entraine (C.1) par relèvement de F à partier de $\gamma'(0)$, soit F': $I \times I \to \mathring{Y} \times \mathring{Y}$: $F'(1, t) = \gamma'(t)$, $F'(0, 0)$ est au-dessus de (x, x) et dans la diagonale Δ_Y car $F'(u, 0)$ est nécessairement un chemin de Δ_Y (les graphes des automorphismes de Y/X sont disjoints dans $\mathring{Y} \times \mathring{Y}$). Donc $F'(0, 0)$ se déduit de l'image de $\bar{x}$ par un automorphisme de la forme $g \times g$ $(g \in \mathrm{Aut}\ Y/X)$ et Y' est image de la composante définie par γ, par $g \times g$. La composante définie par γ est donc également tangente à ΔY.

Pour démontrer (C.2) on utlise le résultat suivant:

LEMME C.3: *Il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout nombre complexe ϵ non nul satisfaisant à $|\epsilon| < \alpha$ on ait la propriété suivante: pour tout $n > 0$ il existe un complexe unique ϵ_n tel que $(1+\epsilon_n)^n = 1+\epsilon$ et $n|\epsilon_n| < 4|\epsilon|$.*

DÉMONSTRATION DE (C.2.): Soit $y_0 \in \mathring{X}'$ tel que $\left|\dfrac{c_2(y_0)}{c_1(y_0)} - 1\right| < \alpha$. On pose $y_1 = c_1(y_0)$, $y_2 = c_2(y_0)$, $x = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Pour un revêtement p: $Y \to X$ comme en (C.2) et une composante Y' au-dessus de X' tangente à ΔY, on note c': $Y' \to Y \times Y$ le morphisme canonique. Soit $y_0' \in \mathring{Y}'$ au-dessus de y_0, $y_1' = c_1'(y_0')$, $y_2' = c_2'(y_0')$, $x' = \frac{1}{2}(y_1' + y_2')$. Le chemin γ est donné par $\gamma(t) = t(y_1, y_2) + (1-t)(x, x)$ et γ' par $\gamma'(t) = t(y_1', y_2') + (1-t)(x', x')$. On pose $F(u, t) = u\ p \times p \circ \gamma'(t) + (1-u)\gamma(t)$. Les conditions de (C.2) sont trivialement vérifiées par F à l'exception de $F(u, t) \in \mathring{X} \times \mathring{X}$. Cette condition se vérifie à l'aide de (C.3). On pose quelques notations.

Soit q: $Y' \to X'$ le morphisme canonique, qui est un revêtement connexe ramifié, avec Y' un disque. On peut choisir les coordonnées dans Y et Y' de telle sorte que $p(z) = z^n$, $q(y') = y'^{n'}$, et dans X' pour que c soit donné par $c_1(y) = y^\nu$, $c_2(y) = y^\nu + \beta y^{\nu + r}$ avec $\beta(0) \neq 0$, $\nu = m(X')$, $r = X'.\Delta X - m(X') > 0$, $c(X')$ étant supposée tangente à ΔX. Pour tout choix d'un couple de racines n-ièmes de 1, $\chi = (\chi_1, \chi_2)$, on a un morphisme au-dessus de c, $c_{1,\chi}'(y') = \chi_1 y'^{\nu'}$, $c_{2,\chi}'(y') = \chi_2 y'^{\nu'} + \beta_\chi y'^{\nu' + r'}$ avec $\nu' n = \nu n'$. Cette correspondance c_χ' est tangente à ΔY si et seulement si $\chi_1 = \chi_2$. On pose

$$\frac{c_2(y) - c_1(y)}{c_1(y)} = \beta y^r = \epsilon(y)$$

et

$$\frac{c_{2,\chi}'(y') - c_{1,\chi}'(y')}{c_{1,\chi}'(y')} = \frac{\chi_2 - \chi_1}{\chi_1} + \frac{\beta_\chi}{\chi_1} y'r' = \epsilon_\chi(y').$$

La limite $\lim\limits_{y' \to 0} (\epsilon_\chi(y'))$ ne dépend que de $\dfrac{\chi_2}{\chi_1}$ et c_χ' est tangente à ΔY si et seulement si $\lim\limits_{y' \to 0} (\epsilon_\chi(y')) = 0$. Pour tout χ on a $1 + \epsilon(y'^{n'}) = (1 + \epsilon_\chi(y'))^n$ donc si $|\epsilon(y'^{n'})| < \alpha$, $\epsilon_\chi(y')$ pour c_χ' tangente à ΔY est l'élément noté ϵ_n dans (C.2). C'est vrai en partculier pour $y' = y_0'$ ci-dessus. On montre alors que $F_1(u, t) = up(ty_1' + (1-t)x') + (1 - u(ty_1 + (1-t)x)$ est non nul. On a $|F_1(u, t)| \geqslant \| t_1 + (1-t)x| - |ty_1 + (1-t)x - ty_1' + (1-t)x')^n|$. On note Q le premier terme, R le second et on montre

$Q > R$: $Q = |y_1|\,|1 + \frac{1-t}{2}\epsilon|$ avec $\epsilon = \frac{y_2}{y_1} - 1$, donc $Q \geqslant |y_1|\,|1 - \frac{|\epsilon|}{2}|$.
D'autre part $R = |y_1|\,|1 + \frac{1-t}{2}\epsilon - (1 + \frac{1-t}{2}\epsilon_n)^n|$ avec $\epsilon_n = \frac{y_2'}{y_1'} - 1$.
Posons $\tau = \frac{1-t}{2}$. On a $(1 + \tau\epsilon) - (1 + \tau\epsilon_n)^n = \tau(\epsilon - n\epsilon_n) - \epsilon_n^2\tau^2(c_n^2 + \dots)$ donc

$$|(1+\tau\epsilon) - (1+\tau\epsilon_n)^n| \leqslant |\tau|\,|\epsilon - n\epsilon_n| + \sum_{p=2}^{n} C_n^p |\tau|^p |\epsilon_n|^p$$

Donc

$$|(1+\tau\epsilon) - (1+\tau\epsilon_n)^n| \leqslant \frac{|\epsilon| + n|\epsilon_n|}{2} + \sum_{p=2}^{n} C_n^p \frac{|\epsilon_n|^p}{2^p}.$$

Utilisant (C.3) $n|\epsilon_n| < 4|\epsilon|$ on déduit

$$R < |y_1|\left(2|\epsilon| + \sum_{p=2} c_n^p \left(\frac{2}{n}\right)^p |\epsilon|^p\right).$$

Or $(1 + \frac{1}{kn})^n$ est borné et on peut chosir $|\epsilon|$ assez petit pour que $\frac{|\epsilon|}{2} + 2|\epsilon| + (1 + \frac{2|\epsilon|}{n})^n < 2$ pour tout n. Il en résulte que pour y_0 choisi de telle sorte que $|\epsilon|$ soit assez petit, $F_1(u, t) \neq 0$ pour tous u, t. Ce qui termine la démonstration de (C.2).

Démonstration de (C.3): Supposons d'abord $|\epsilon| < 1$ et $|\operatorname{Arg} \epsilon| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Alors si $1 + \epsilon = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, on a $\rho > 1$ et $|\theta| < \frac{\pi}{4}$. On pose $\epsilon_n = -1 + \rho^{1/n}(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n})$ avec cette détermination de θ. Remarquons qu'on a l'inégalité

$$\frac{n\left((1 + |\epsilon|)^{1/n} - 1\right)}{|\epsilon|} < 1,$$

donc comme

$$1 < \rho \leqslant 1 + |\epsilon|, \quad \text{on a} \quad 0 < \frac{n\left(\rho^{1/n} - 1\right)}{|\epsilon|} < 1.$$

Pour tout $\xi > 0$ il existe $\theta_0 > 0$ tel que $0 < |\theta| < \theta_0$ entraine

$$\left|\frac{\cos\theta - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)}{\theta^3}\right| < \zeta \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin\theta - \theta}{\theta^2}\right| < \xi.$$

C'est alors également vrai pour $\frac{\theta}{n}$ quel que soit n. Le complexe ϵ_n s'écrit alors

$$\epsilon_n = \rho^{1/n}\left(1 - \frac{\theta^2}{2n^2} + \mu_1\frac{\theta^3}{n^3}\right) - 1 + \mathrm{i}\rho^{1/n}\left(\frac{\theta}{n} + \mu_2\frac{\theta^2}{n^2}\right)$$

avec $|\mu_1| < \xi$, $|\mu_2| < \xi$. Donc pour $0 < |\theta| < \theta_0$, on a

$$\frac{n|\epsilon_n|}{|\epsilon|} - 1 < \rho^{1/n}\frac{|\theta|}{|\epsilon|}\left(1 + (1/2 + \xi)\theta_0 + \xi\theta_0^2\right).$$

Le lemme en résulte, car pour $|\epsilon|$ assez petit on peut supposer $\xi < 1$, $\theta_0 < \frac{1}{4}$, $\rho\frac{|\theta|}{|\epsilon|} < 2$, et enfin $\rho > 1$ entraine $\rho^{1/n} < \rho$ pour tout n.

Références

SGA 4: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, dirigé par A. Grothendieck, M. Artin et J.L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Springer Lecture notes* no. 305.

SGA $4^{1/2}$: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, dirigé par P. Deligne. *Cohomologie étale. Springer Lecture Notes* no. 569.

SGA 5: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie dirigé par A. Grothendieck. *Cohomologie l-adique et fonctions L.* Springer Lecture Notes no. 589.

SGA 6: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, dirigé par A. Grothendieck. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Springer Lecture Notes* no. 225.

SGA 7: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, dirigé par P. Deligne et N. Katz. *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. Springer Lecture Notes* no. 340.

[1] Daniel Alibert: *Termes locaux de la Formule de Lefschetz en cohomologie étale*. Thèse présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

[2] J.L. Verdier: *The Lefschetz fixed point formula in etale cohomology*. Proceedings of a conference on local fields. Springer-Verlag (1967).

[3] J.L. Verdier: Séminaire de Géométrie Analytique de l'Ecole Normale Supérieure 1974-1975. Astérisque no. 36–37. Exposé no. VI: *classe d'homologie associée à un cycle*.

[4] J.P. Serre: *Corps Locaux*. Hermann (1962).

[5] A.A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne: *Faisceaux Pervers*. Astérisque no. 100.

(Oblatum 20-VI-1984)

Daniel Alibert
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques E.R.A. 589
45, rue d'Ulm
F-75005 Paris
France

Institut Fourier
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin-D'Heres Cedex
France