

# COMPOSITIO MATHEMATICA

YVETTE FENEYROL-PERRIN

LABIB HADDAD

**Un théorème de Mittag-Leffler pour les fonctions  
méromorphes sur un corps valué au sens de Krull**

*Compositio Mathematica*, tome 57, n° 2 (1986), p. 249-269

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1986\\_\\_57\\_2\\_249\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__57_2_249_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UN THÉORÈME DE MITTAG-LEFFLER POUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES SUR UN CORPS VALUÉ AU SENS DE KRULL

Yvette Feneyrol-Perrin et Labib Haddad

### 0. Introduction

Dans un article précédent ([5]) Y. Feneyrol-Perrin a établi une théorie des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables sur les corps valués, complets et algébriquement clos, dont l'anneau de valuation possède une suite strictement décroissante d'idéaux premiers ayant pour intersection l'idéal nul. Cette théorie est fondée sur la notion d'élément analytique introduite par M. Krasner en analyse ultramétrique "classique" (voir [6], [3], [4]). Nous nous plaçons ici dans le cadre de cette théorie.

Soit  $K$  un tel corps.

Nous établissons d'abord un théorème de Mittag-Leffler qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fractions rationnelles soit la famille des parties principales d'une fonction méromorphe sur un ouvert  $D$  de  $K$ . Contrairement à ce qui se passe dans le théorème de Mittag-Leffler de l'analyse complexe et dans le théorème correspondant de M. Lazard [7] en analyse ultramétrique "classique", ici, la condition ne porte pas uniquement sur l'ensemble des pôles; elle fait intervenir, de manière essentielle, les parties principales elles-mêmes.

Ce résultat nous permet de caractériser, en particulier, les ouverts  $D$  de  $K$ , pour lesquels l'anneau  $F(D)$  des fonctions analytiques sur  $D$  est un anneau de Bezout. Enfin, en utilisant le théorème "de type Weierstrass" sur les zéros des fonctions analytiques sur  $D$  démontré dans [3], [4] et [5], on montre que l'anneau  $F(D)$  est pseudo-principal, donc pseudo-bezoutien. Il est aussi complètement intégralement clos.

### 1. Notations et définitions

Nous considérons un corps  $K$  valué, complet et algébriquement clos. Nous désignons par  $\mathcal{A}$  son anneau de valuation, par  $\mathcal{M}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{A}$  et, pour tout idéal premier  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$ , par  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  l'anneau local de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{P}$ .

' Nous supposons que  $\mathcal{A}$  possède une suite strictement décroissante d'idéaux premiers dont l'intersection est l'idéal nul, et nous nous fixons une telle suite  $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

1.1. DÉFINITIONS: Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul de  $\mathcal{A}$ . Nous dirons qu'une partie  $A$  de  $K$  est un  $\mathcal{P}$ -ouvert lorsque l'on a

$$A \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \text{ et } a + \mathcal{P} \subset A \text{ pour tout } a \in A.$$

Remarque: Ainsi un  $\mathcal{P}$ -ouvert est un ouvert "borné, d'épaisseur non nul" au sens défini dans [3] et [5].

Soit  $D$  une partie quelconque de  $K$ . On appellera  $\mathcal{P}$ -intérieur de  $D$  le plus grand  $\mathcal{P}$ -ouvert contenu dans  $D$  et on le désignera par  $D(\mathcal{P})$ . Ainsi, pour tout  $x \in K$ , on a  $x \in D(\mathcal{P})$  si et seulement si  $x + \mathcal{P} \subset D$  et  $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on notera  $D_n$  le  $\mathcal{P}_n$ -intérieur de  $D$ .

La suite  $D_n$  est croissante et  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$  si et seulement si  $D$  est ouvert.

On désignera par  $\bar{K} = K \cup \{\infty\}$  le *projectivisé* de  $K$ . Introduisons enfin deux expressions commodes et suggestives. On dira que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $K$  sont  $\mathcal{P}$ -proches lorsque  $x - y \in \mathcal{P}$ . Pour  $B \subset A \subset \bar{K}$  et  $f: A \rightarrow \bar{K}$ , on dira que  $f$  est  $\mathcal{P}$ -négligeable sur  $B$  lorsque  $f(x) \in \mathcal{P}$  pour tout  $x \in B$ .

## 2. Rappel de quelques résultats

Nous renvoyons aux travaux [3], [4] et [5] pour les définitions d'élément analytique, d'ensemble analytique, de fonction analytique, de fonction méromorphe, ainsi que pour les démonstrations des trois résultats que nous rappelons ci-dessous et que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite.

Soit  $D$  un ouvert de  $K$ , notons  $H(D)$  l'ensemble des éléments analytiques sur  $D$  et  $F(D)$  l'ensemble des fonctions analytiques sur  $D$ .

2.1. THÉORÈME: ([5] page 65, et [3] page 29).

Soient  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul de  $\mathcal{A}$  et  $D$  un  $\mathcal{P}$ -ouvert de  $K$ . Alors:

$$H(D) = F(D).$$

2.2. THÉORÈME (Théorème de Weierstrass) ([5] page 73, et [3] page 47).

Soient  $D$  un ouvert de  $K$ ,  $Z$  une partie de  $D$  et, pour tout  $a \in Z$ , soit un entier  $n(a) \geq 1$ .

Les deux énoncés suivants sont équivalents:

- (i) Il existe une fonction analytique  $f$  sur  $D$  dont  $Z$  est l'ensemble des zéros et dont chaque zéro  $a$  est d'ordre  $n(a)$ .

- (ii) Pour tout idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$ , l'ensemble  $Z \cap D(\mathcal{P})$  est fini.

Soit  $R(X) = P(X)/Q(X)$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$ ; nous dirons que  $R(\infty) = 0$  lorsque  $d^0 P < d^0 Q$ .

2.3. THÉORÈME: ([3] page 49).

Soient  $D$  un  $\mathcal{P}$ -ouvert de  $K$  et  $f$  une fonction méromorphe sur  $D$ . Il existe une fraction rationnelle  $R \in K(X)$  telle que  $R(\infty) = 0$  ayant tous ses pôles dans  $D$  et une fonction  $h$  analytique sur  $D$  telles que

$$f(x) = R(x) + h(x) \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Cette décomposition est unique. La fraction rationnelle  $R$  est appelée la partie principale de  $f$  dans  $D$ .

Nous allons introduire la notion de  $\mathcal{P}$ -fraction qui joue un rôle central dans la théorie des fonctions analytiques et méromorphes sur  $K$ .

### 3. Les $\mathcal{P}$ -fractions

3.1. DÉFINITIONS:

Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier de  $\mathcal{A}$ .

On dira qu'une fonction  $f$  définie sur une partie  $A$  de  $K$  à valeurs dans  $\bar{K}$  est une  $\mathcal{P}$ -fonction si

$$\mathcal{P} \subset A \text{ et si } f(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \text{ pour tout } x \in \mathcal{P}.$$

On appellera  $\mathcal{P}$ -fraction toute fraction rationnelle  $f \in K(X)$  dont la fonction rationnelle associée est une  $\mathcal{P}$ -fonction. On appellera  $\mathcal{P}$ -polynôme toute  $\mathcal{P}$ -fraction qui est un polynôme.

Le résultat du lemme suivant est valable pour un anneau de valuation commutatif intègre quelconque pourvu que son corps des fractions soit algébriquement clos.

3.2. LEMME:

Soient  $\mathcal{B}$  un anneau de valuation commutatif, intègre,  
 $\mathcal{N}$  son idéal maximal,  $L$  son corps des fractions.

On suppose que  $L$  est algébriquement clos.

Soit  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in L[X]$ .

On suppose que  $P(x) \in \mathcal{B}$  pour tout  $x \in \mathcal{N}$ .

Alors  $P(X) \in \mathcal{B}[X]$ .

DÉMONSTRATION: [On utilise une valuation (de Krull) notée multiplicativement sur  $L$ ].

On veut montrer que  $a_i \in \mathcal{B}$  pour tout  $i$ .

On raisonne par l'absurde. Soit  $I = \{i : a_i \notin \mathcal{B}\}$ . On suppose que  $I \neq \emptyset$ .

Pour chaque  $i \in I$ , on choisit un  $b_i$  tel que  $(b_i)^i = 1/a_i$ . Comme  $1/a_i \in \mathcal{N}$ , on a  $b_i \in \mathcal{N}$ . Soient

$$r = \min_{i \in I} |b_i|$$

$$J = \{i : |b_i| = r\}$$

$$s = \min\{1\} \cup \{|b_i| : i \in I \setminus J\}.$$

Ainsi  $r < s \leq 1$ .

Soit  $x \in L$  tel que  $r < |x| < s \leq 1$  (il en existe car  $L$  est algébriquement clos !). Soit  $t = |x|$ .

Ainsi  $x \in \mathcal{N}$ . On va voir cependant que  $P(x) \notin \mathcal{B}$ .

En effet:

- (1) Si  $i \notin I$ , alors  $a_i \in \mathcal{B}$  donc  $a_i x^i \in \mathcal{N}$ ;
- (2) Si  $i \in I \setminus J$ , alors  $a_i x^i = (x/b_i)^i$  donc

$$|a_i x^i| = \left| \frac{x}{b_i} \right|^i \leq \left( \frac{t}{s} \right)^i < 1 \quad \text{donc } a_i x^i \in \mathcal{N}.$$

- (3) Enfin, soit  $n = \sup J$ . Pour tout  $i \in J$ , on a

$$|a_i x^i| = \left| \frac{t}{r} \right|^i \quad \text{et} \quad \left| \frac{t}{r} \right| > 1.$$

Donc, en particulier,  $|a_n x^n| > 1$  et, pour tout  $i \in J$ , si  $i < n$  alors

$$|a_i x^i| = \left| \frac{t}{r} \right|^i < \left| \frac{t}{r} \right|^n = |a_n x^n|.$$

Ainsi  $|P(x)| = |a_n x^n| > 1$  donc  $P(x) \notin \mathcal{B}$ .

C.Q.F.D.

### 3.3. LEMME:

- (a) Soit  $P \in K[X]$ . Alors  $P$  est un  $\mathcal{P}$ -polynôme si et seulement si  $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$ .
- (b) Soit  $R$  une  $\mathcal{P}$ -fraction. On peut alors l'écrire sous la forme irréductible suivante:

$$R(X) = \frac{P(X)}{\prod_i \left(1 - \frac{X}{q_i}\right)}$$

où  $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  et où tous les  $q_i$  appartiennent à  $K \setminus \mathcal{P}$ .

- (c) Réciproquement, si une fraction rationnelle  $R \in K(X)$  se met sous la forme (non nécessairement irréductible) suivante:

$$R(X) = \frac{P(X)}{\prod_i \left(1 - \frac{X}{q_i}\right)} \quad \text{où } P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X] \text{ et } q_i \in K \setminus \mathcal{P} \text{ pour tout } i.$$

alors  $R$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction.

DÉMONSTRATION:

(a) Si  $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  il est clair que  $P$  est un  $\mathcal{P}$ -polynôme. Réciproquement, soit  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$  un  $\mathcal{P}$ -polynôme.

On veut montrer que  $a_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour tout  $i$ .

Il suffit d'appliquer le Lemme (3.2) à l'anneau de valuation  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ .

(b) Comme  $R$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction, elle n'a aucun pôle dans  $\mathcal{P}$ , donc, en particulier, 0 n'est pas un pôle de  $R$ . Ainsi  $R$  peut se mettre sous forme irréductible

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \quad \text{où } Q(0) \neq 0.$$

On peut donc, en multipliant haut et bas par  $1/Q(0)$ , supposer que  $Q(0) = 1$ , donc  $Q(X)$  est de la forme

$$Q(X) = \prod_i \left(1 - \frac{X}{q_i}\right), \quad q_i \notin \mathcal{P}.$$

Ainsi  $1/q_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  et, pour tout  $x \in \mathcal{P}$ , on a  $x/q_i \in \mathcal{P}$  donc  $1 - x/q_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  donc  $Q(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus \{0\}$  et  $P(x) = R(x) \cdot Q(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ . Donc  $P(X)$  est un  $\mathcal{P}$ -polynôme.

(c) Réciproque: Comme  $q_i \notin \mathcal{P}$ , on a  $1/q_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ . Soit  $x \in \mathcal{P}$ . Alors  $x/q_i \in \mathcal{P}$ , donc  $1 - x/q_i \notin \mathcal{P}$ , donc  $1/(1 - x/q_i) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ . Or  $P(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ . Donc

$$R(x) = P(x) \prod_i \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{q_i}} \right) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}.$$

Donc  $R(X)$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction.

C.Q.F.D.

### 3.4. Perturbation d'ordre $\mathcal{P}$ des pôles d'une $\mathcal{P}$ -fraction

Soit  $R$  une  $\mathcal{P}$ -fraction mise sous forme irréductible

$$R(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^n \left(i - \frac{X}{q_i}\right)}$$

où  $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  et  $q_i \in K \setminus \mathcal{P}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .  
 Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , soit  $t_i \in \bar{K} = K \cup \{\infty\}$ .

On considère la fraction suivante

$$S(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{X}{t_i}\right)} \quad \left( \text{où } \frac{X}{t_i} = 0 \text{ si } t_i = \infty \right).$$

On dira que  $S$  est une  $\mathcal{P}$ -perturbée de  $R$ , lorsque pour chaque  $i$ ,

$$\begin{array}{ll} t_i \text{ est } \mathcal{P}\text{-proche de } q_i & \text{si } q_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \\ \text{et } t_i \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}} & \text{si } q_i \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}}. \end{array}$$

### 3.5. PROPOSITION:

Soient  $R$  une  $\mathcal{P}$ -fraction,  $Z$  l'ensemble de ses pôles. Soit  $S$  une  $\mathcal{P}$ -perturbée de  $R$ . Alors

- (i)  $S$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction.
- (ii)  $S - R$  est  $\mathcal{P}$ -négligeable sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus (Z + \mathcal{P})$ .

#### DÉMONSTRATION:

On reprend les notations ci-dessus (3.4).

- (i) Il est clair que  $t_i \notin \mathcal{P}$ , quel que soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  par hypothèse. D'après le Lemme (3.3)  $S$  est donc une  $\mathcal{P}$ -fraction.
- (ii) Soit  $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus (Z + \mathcal{P})$ . Calculons modulo  $\mathcal{P}$ . Pour tout  $i$ , on a,

$$\frac{1}{q_i} \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}, \frac{1}{t_i} \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \text{ et } \frac{1}{q_i} - \frac{1}{t_i} = \frac{t_i - q_i}{q_i t_i}.$$

Si  $q_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  alors  $t_i - q_i \in \mathcal{P}$  donc  $(t_i - q_i)/q_i t_i \in \mathcal{P}$  donc  $\bar{q}_i^{-1} = \bar{t}_i^{-1}$  donc  $1 - \bar{q}_i^{-1} \bar{x} = 1 - \bar{t}_i^{-1} \bar{x} \neq 0$  car  $\bar{x} \neq \bar{q}_i$ . Si  $q_i \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ , alors  $t_i \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ , donc  $1/q_i \in \mathcal{P}$  et  $1/t_i \in \mathcal{P}$ , donc  $\bar{q}_i^{-1} = \bar{t}_i^{-1} = 0$ .

On a

$$Q(X) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{X}{q_i}\right).$$

On pose

$$Q_1(X) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{X}{t_i}\right).$$

Ainsi  $\overline{Q(x)} = \overline{Q_1(x)} \neq 0$ . Donc

$$\overline{R(x)} = \frac{\overline{P(x)}}{\overline{Q(x)}} = \frac{\overline{P(x)}}{\overline{Q_1(x)}} = \overline{S(x)}.$$

Autrement dit

$$S(x) - R(x) \in \mathcal{P}.$$

C.Q.F.D.

**3.6. PROPOSITION:** *La partie principale d'une  $\mathcal{P}$ -fraction dans un  $\mathcal{P}$ -ouvert est elle-même une  $\mathcal{P}$ -fraction.*

**DÉMONSTRATION:** Soient  $V$  un  $\mathcal{P}$ -ouvert,  $f$  une  $\mathcal{P}$ -fraction,  $R$  sa partie principale dans  $V$ . Soit  $(a_i)_{i \in I}$  la famille des pôles de  $f$  qui sont dans  $V$  (chacun étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité).

De même soit  $(b_j)_{j \in J}$  la famille des pôles de  $f$  qui sont en dehors de  $V$ . Par hypothèse  $f$  n'a aucun pôle dans  $\mathcal{P}$ , donc  $1/a_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour tout  $i \in I$ , et  $1/b_j \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour tout  $j \in J$ .

D'autre part,  $V$  étant un  $\mathcal{P}$ -ouvert,  $a_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  quel que soit  $i \in I$ . La fraction  $f$  se met sous la forme irréductible

$$f(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i \in I} (X - a_i) \prod_{j \in J} \left(1 - \frac{X}{b_j}\right)} = \frac{cP(X)}{\prod_{i \in I} \left(1 - \frac{X}{a_i}\right) \prod_{j \in J} \left(1 - \frac{X}{b_j}\right)}$$

où  $c = (-1)^{\text{card } I} (\prod_i a_i^{-1})$ .

Puisque  $f$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction on a  $cP(X) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  d'après (3.3), et comme  $a_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour tout  $i \in I$ , on a  $1/c \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  donc  $P(X) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$ . Posons

$$S(X) = \prod_{i \in I} (X - a_i), \quad T(X) = \prod_{j \in J} \left(1 - \frac{X}{b_j}\right);$$

$S$  et  $T$  sont des éléments de  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$ .

On va utiliser la théorie du *résultant* telle qu'elle est développée dans [1]. En particulier, d'après le corollaire 1 (i) page IV.75 de [1], le résultant de  $S$  et  $T$  est:

$$\text{res}(S, T) = \prod_{i \in I} T(a_i) = \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} \left(1 - \frac{a_i}{b_j}\right).$$

Or  $a_i - b_j \notin \mathcal{P}$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$ . Donc  $\text{res}(S, T) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$  et est inversible dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ .

D'après le corollaire 1, page IV.73 de [1], on en déduit qu'il existe deux polynômes  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  tels que

$$SA + TB = 1.$$

Donc

$$f(X) = \frac{P(X)}{S(X)T(X)} = \frac{P(X)A(X)}{T(X)} + \frac{P(X)B(X)}{S(X)}.$$

Donc  $R$  n'est autre que la partie principale de la fraction  $PB/S$ . Or  $PB \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$ ,  $S \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  et  $S$  est unitaire. On peut donc faire la division euclidienne de  $PB$  par  $S$  dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$ . Il existe  $E \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$ ,  $F \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$  tels que  $PB = SE + F$  et  $d^0 F < d^0 S$ . Donc  $PB/S = E + F/S$  et  $R = F/S$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant établir deux lemmes d'approximation pour les  $\mathcal{P}$ -fractions et pour cela nous aurons besoin du résultat suivant:

**3.7. LEMME:** *Soient  $A \in K$  et  $a \in K$ . Soit  $\mathcal{P}$  le plus grand idéal premier de  $\mathcal{A}$  tel que  $a \notin \mathcal{P}$ . On suppose que  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ . Il existe alors au moins un entier  $n \geq 0$  tel que  $Aa^n \in \mathcal{A}$ .*

**DÉMONSTRATION:** Comme  $\mathcal{P}$  est le plus grand idéal premier de  $\mathcal{A}$  qui ne contient pas  $a$  on a  $\mathcal{P} = \{x \in K : |x| < |a|^n, \text{ pour tout } n \geq 0\}$ .

Puisque  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ , on a  $1/A \notin \mathcal{P}$  et il existe donc  $n \geq 0$  tel que  $1/|A| \geq |a|^n$ , c'est-à-dire  $Aa^n \in \mathcal{A}$ . C.Q.F.D.

### 3.8. Lemmes d'approximation d'une $\mathcal{P}$ -fraction

**3.8.1. LEMME:** *Soient  $a \in K$  et  $\mathcal{P}$  le plus grand idéal premier de  $\mathcal{A}$  tel que  $1/a \notin \mathcal{P}$ . Soit  $f$  une  $\mathcal{P}$ -fraction dont tous les pôles sont  $\mathcal{P}$ -proches de  $a$ . Alors pour tout idéal premier  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathcal{P}$ , il existe un polynôme  $g \in K[X]$  tel que  $f - g$  soit  $\mathcal{Q}$ -négligeable sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ .*

**DÉMONSTRATION:**

On a

$$f(X) = \frac{P(X)}{\prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{X}{a_j}\right)} \quad \text{ou } a_j - a \in \mathcal{P} \text{ pour tout } j,$$

$$P(X) = A_0 X^p + \dots + A_p \quad \text{ou } A_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \text{ pour tout } i.$$

La fraction

$$h(X) = \frac{P(X)}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)^m}$$

est une  $\mathcal{P}$ -perturbée de  $f(X)$ . D'après la Proposition (3.5) sur les  $\mathcal{P}$ -perturbations, on sait que

$$f(x) - h(x) \in \mathcal{P} \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus (a + \mathcal{P})$$

et, par conséquent, pour tout idéal  $\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}$ , on a

$$f(x) - h(x) \in \mathcal{Q} \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus (a + \mathcal{P}).$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe un polynôme  $g$  tel que

$$h(x) - g(x) \in \mathcal{Q} \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}.$$

Il suffira pour cela de montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ , il existe un polynôme  $g$  tel que

$$\frac{A}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^m} - g(x) \in \mathcal{Q} \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}.$$

On a

$$\frac{1}{(1 - Y)^m} = 1 + C_m^1 Y + \dots + C_{m+n-1}^n Y^n + r_n(Y)$$

et

$$r_n(Y) = \frac{Y^{n+1} P_n(Y)}{(1 - Y)^m}$$

où les  $C_{m+i-1}^i$  et les coefficients du polynôme  $P_n$  sont des multiples entiers de l'élément unité 1 de  $K$ .

Ainsi

$$\frac{A}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)^m} = A \left[ \sum_{i=0}^n C_{m+i-1}^i \left(\frac{X}{a}\right)^i \right] + A \frac{X^{n+1}}{a^{n+1}} \frac{P_n\left(\frac{X}{a}\right)}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)^m}.$$

Posons  $g(X) = A \sum_{i=0}^n C_{m+i-1}^i (X/a)^i$ .

Par hypothèse  $1/a \in \mathcal{Q}$  donc, pour tout  $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ , on a

$$P_n\left(\frac{x}{a}\right) \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}} \text{ et } \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^m} \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}},$$

donc

$$\frac{x^{n+1}P_n\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^m} \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}.$$

Or, d'après le lemme (3.7), il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $A/a^n \in \mathcal{A}$ .  
Donc

$$\frac{A}{a^{n+1}} \in \mathcal{Q} \text{ et } \frac{A}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^m} - g(x) \in \mathcal{Q} \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}.$$

C.Q.F.D.

**3.8.2. LEMME:** Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{P}$  deux idéaux premiers de  $\mathcal{A}$  tels que  $\mathcal{R} \not\supseteq \mathcal{P}$ . Soient  $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{R}$  et  $f$  une  $\mathcal{P}$ -fraction dont tous les pôles sont  $\mathcal{P}$ -proches de  $a$ . Il existe alors un idéal premier  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{A}$  contenant strictement  $\mathcal{P}$ , pour lequel on a la propriété suivante:  
pour tout idéal premier  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{Q}' \supset \mathcal{Q} \not\supseteq \mathcal{P}$ , et pour tout  $c \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ , il existe une fraction rationnelle  $g$  ayant pour unique pôle  $b = a - c$  et telle que:

$$f - g \text{ soit } \mathcal{Q}\text{-négligeable sur } \mathcal{A}_{\mathcal{Q}} \setminus (a + \mathcal{Q}).$$

**DÉMONSTRATION:**

Soit

$$f(X) = \frac{A_0 X^p + \dots + A_p}{\prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{X}{a_j}\right)}$$

où  $A_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour tout  $i$  et  $a - a_j \in \mathcal{P}$  pour tout  $j$ . Comme dans le lemme précédent, il suffit d'établir le résultat pour la fraction

$$h(X) = \frac{\sum_{i=0}^p A_i X^i}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)^m}$$

qui est une  $\mathcal{P}$ -perturbée de  $f$ . Pour cela, on se ramène d'abord au cas des fractions de la forme  $A/(X-a)^m$  où  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ .

En effet, si le lemme est vrai pour les fractions de cette forme, on vérifie immédiatement qu'il est satisfait par les fractions

$$f_i(X) = \frac{A_i X^i}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)^m} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m.$$

Ainsi, pour chaque  $i = 1, \dots, m$ , il existe un idéal premier  $\mathcal{Q}_i$  et une fraction rationnelle  $g_i$  qui vérifient les conditions du lemme. Il suffit alors de prendre  $\mathcal{Q}' = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{Q}_i$  et  $g(X) = \sum_{i=1}^m g_i(X)$ . Soit donc  $f(X) = A/(X-a)^m$  où  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  et  $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{R}$ . Distinguons deux cas:

1er cas: Pour tout idéal premier  $\mathcal{Q}$  contenant strictement  $\mathcal{P}$ ,  $A \notin \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ . Prenons pour  $\mathcal{Q}'$  l'intersection des idéaux premiers qui contiennent  $1/A$ . On a ainsi  $\mathcal{R} \supset \mathcal{Q}' \supsetneq \mathcal{P}$  puisque  $1/A \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}$ . De plus le seul idéal premier  $\mathcal{Q}$  tel que  $\mathcal{Q}' \supset \mathcal{Q} \supsetneq \mathcal{P}$  est l'idéal  $\mathcal{Q}'$ . Soient donc  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$ ,  $c \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$  et  $b = a - c$ . On a

$$\begin{aligned} (X-b)^{m+n} &= (X-a+c)^{m+n} \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} C_{m+n}^i (X-a)^{m+n-i} c^i \\ &= (X-a)^m \sum_{i=0}^n C_{m+n}^i (X-a)^{n-i} c^i \\ &\quad + c^n \sum_{j=1}^m C_{m+n}^{n+j} (X-a)^{m-j} c^j. \end{aligned}$$

Posons

$$P(X) = A \sum_{i=0}^n C_{m+n}^i (X-a)^{n-i} c^i$$

$$T(X) = \sum_{j=1}^m C_{m+n}^{n+j} (X-a)^{m-j} c^j$$

$$g(X) = \frac{P(X)}{(X-b)^{m+n}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(X) - g(X) &= \frac{A(X-b)^{m+n} - (X-a)^m P(X)}{(X-a)^m (X-b)^{m+n}} \\ &= \frac{Ac^n T(X)}{(X-a)^m (X-b)^{m+n}} \\ &= Ac^n \sum_{j=1}^m \frac{c_{m+n}^{n+j} c^j}{(X-a)^j (X-b)^{m+n}} = Ac^n S(X). \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathcal{A}_2 \setminus (a + \mathcal{Q})$ , les éléments  $1/(x-a)^j$  et  $1/(x-b)^{m+n}$  appartiennent à  $\mathcal{A}_2$  et comme  $c \in \mathcal{Q}$ , on a  $S(x) \in \mathcal{Q}$ .

Or, d'après le Lemme (3.7), il existe  $n \geq 0$  tel que  $Ac^n \in \mathcal{A}$ . Pour un tel  $n$ , on aura bien  $f(x) - g(x) \in \mathcal{Q}$  pour tout  $x \in \mathcal{A}_2 \setminus (a + \mathcal{Q})$ .

2ème cas: Il existe un idéal premier  $\mathcal{Q}_1$  contenant strictement  $\mathcal{P}$  et tel que  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}_1}$ . Il en existe donc un,  $\mathcal{Q}'$ , tel que  $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}' \not\supseteq \mathcal{P}$  et  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}'}$ . Soit alors  $\mathcal{Q}$  un idéal premier tel que  $\mathcal{Q}' \supset \mathcal{Q} \not\supseteq \mathcal{P}$ . En particulier  $a \notin \mathcal{Q}$  et la fraction

$$f(X) = \frac{A}{(X-a)^m} = \frac{(-1)^m a^{-m} A}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)^m}$$

est une  $\mathcal{Q}$ -fraction.

On peut alors utiliser la proposition (3.5) sur la perturbation des pôles. Soient  $c \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$  et  $b = a - c$ , alors

$$g(X) = \frac{(-1)^m a^{-m} A}{\left(1 - \frac{X}{b}\right)^m}$$

est une  $\mathcal{Q}$ -perturbée de  $f$ , et

$$g(x) - f(x) \in \mathcal{Q} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}_2 \setminus (a + \mathcal{Q}).$$

C.Q.F.D.

#### 4. Le Théorème de Mittag-Leffler

4.1. LEMME: Soient  $D$  un ouvert de  $K$  et  $f$  une fonction méromorphe sur  $D$ . On suppose que  $0 \in D$  et que  $0$  n'est pas un pôle de  $f$ . Alors il existe un idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{P} \subset D$  et  $f(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour tout  $x \in \mathcal{P}$ ; autrement dit, tel que  $f$  soit une  $\mathcal{P}$ -fonction.

DÉMONSTRATION: L'ouvert  $D$  de  $K$  contient  $0$ , il contient donc un idéal premier non nul  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{A}$ . La fonction  $f$  n'a qu'un nombre fini de pôles dans  $\mathcal{Q}'$ , d'après le Théorème (2.3), et  $0$  n'est pas un de ces pôles. On peut donc choisir un idéal  $\mathcal{Q} \subset D$  tel que  $f$  n'ait aucun pôle dans  $\mathcal{Q}$ . La restriction  $f|_{\mathcal{Q}}$  est alors une fonction analytique sur  $\mathcal{Q}$  et, d'après le Théorème (2.1) c'est un élément analytique sur  $\mathcal{Q}$ . Il existe donc une fraction rationnelle  $g$  sans pôle dans  $\mathcal{Q}$  telle que:

$$f(x) - g(x) \in \mathcal{Q} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{Q}.$$

et

$$g(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{X}{a_i}\right)} \quad \text{où } P \in K[X] \text{ et } a_i \notin \mathcal{Q} \text{ pour tout } i.$$

Il existe un idéal premier non nul  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}'}[X]$ . Posons alors  $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}$ . Pour tout  $x \in \mathcal{P}$ , on a  $g(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  et par conséquent  $f(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ . C.Q.F.D.

4.2. LEMME: Soient  $D$  un ouvert de  $K$ ,  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul de  $\mathcal{A}$ ,  $A = D(\mathcal{P})$  le  $\mathcal{P}$ -intérieur de  $D$ ,  $f$  un élément analytique sur  $A$ . On suppose que  $f$  est une  $\mathcal{P}$ -fonction. Il existe alors une  $\mathcal{P}$ -fraction  $h \in K[X]$  sans pôle dans  $D$  et telle que  $f - h$  soit  $\mathcal{P}$ -négligeable sur  $A$ .

DÉMONSTRATION: Puisque  $f$  est un élément analytique sur  $A$ , il existe une fraction  $g$  sans pôle dans  $A$  telle que

$f(x) - g(x) \in \mathcal{P}$  pour tout  $x \in A$ . Or  $f$  est une  $\mathcal{P}$ -fonction, donc  $g$  l'est aussi. Soit  $Z$  l'ensemble des pôles de  $g$ . D'après le Lemme (3.3),  $g$  peut se mettre sous la forme irréductible

$$g(X) = \frac{P(X)}{\prod_{q \in Z} \left(1 - \frac{X}{q}\right)} \quad \text{où } P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X].$$

Si  $q$  est un pôle de  $g$  qui n'est pas dans  $D$  posons  $t(q) = q$ .

Si  $q$  est un pôle de  $g$  qui appartient à  $D$ , deux cas peuvent se présenter: Ou bien  $q \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  et nous posons  $t(q) = \infty$ . Ou bien  $q \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  et alors  $q + \mathcal{P} \not\subset D$  puisque  $q \notin A$ ; et il existe donc  $r \notin D$  tel que  $q - r \in \mathcal{P}$ , et nous posons  $t(q) = r$ .

La fraction  $h$  définie par

$$h(X) = \frac{P(X)}{\prod_{q \in Z} \left(1 - \frac{X}{t(q)}\right)}$$

est une  $\mathcal{P}$ -perturbée de  $g$ . C'est donc une  $\mathcal{P}$ -fraction. Elle n'a pas de pôle dans  $D$  et  $g(x) - h(x) \in \mathcal{P}$  pour tout  $x \in A$ , donc  $f(x) - h(x) \in \mathcal{P}$  pour tout  $x \in A$ . C.Q.F.D.

Rappelons que, pour chaque idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$ , on a désigné par  $D(\mathcal{P})$  le  $\mathcal{P}$ -intérieur de  $D$ ; et, pour chaque entier  $n$ , on a désigné par  $D_n$  le  $\mathcal{P}_n$ -intérieur de  $D$ ; voir (1.1) ci-dessus.

4.3. THÉORÈME (de Mittag-Leffler): Soient  $D$  un ouvert quelconque de  $K$  et  $Z$  une partie de  $D$ . Pour chaque  $a \in Z$ , soit  $R_a$  une fraction rationnelle ayant pour unique pôle  $a$  et telle que  $R_a(\infty) = 0$ . Pour toute partie finie  $F$  de  $Z$ , on pose

$$R_F = \sum_{a \in F} R_a.$$

On suppose que  $0 \in D \setminus Z$ . Les énoncés suivants sont alors équivalents:

- (i) Il existe une fonction méromorphe  $f$  sur  $D$  dont  $Z$  est l'ensemble des pôles et dont la partie principale en chaque pôle  $a \in Z$  est  $R_a$ .
- (ii) Il existe une partie cofinie  $C$  de  $Z$  telle que, pour tout idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$  et tout  $\mathcal{P}$ -ouvert  $V$  contenu dans  $D$ , l'ensemble  $F = C \cap V$  est fini et la fraction  $R_F$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction.
- (iii) Il existe une partie cofinie  $T$  de  $Z$  telle que, pour tout couple d'idéaux premiers non nuls  $\mathcal{Q} \subsetneq \mathcal{P}$ , l'ensemble  $F = T \cap (D(\mathcal{Q}) \setminus D(\mathcal{P}))$  est fini et il existe une fraction rationnelle  $S$  sans pôle dans  $D$  telle que  $R_F - S$  soit  $\mathcal{P}$ -négligeable sur  $D(\mathcal{P})$ .
- (iv) Il existe une partie cofinie  $T$  de  $Z$  telle que, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $F(n) = T \cap (D_{n+1} \setminus D_n)$  est fini et il existe une fraction rationnelle  $S_n$  sans pôle dans  $D$  telle que  $R_{F(n)} - S_n$  soit  $\mathcal{P}_n$ -négligeable sur  $D_n$ .

DÉMONSTRATION:

(i)  $\Rightarrow$  (ii).

Sur tout  $\mathcal{P}$ -ouvert, l'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe est fini, d'après le théorème (2.3). D'après le lemme (4.1), il existe un idéal premier non nul  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $f$  soit une  $\mathcal{R}$ -fonction (et  $\mathcal{R} \subset D$ ).

On pose alors  $N = Z \cap D(\mathcal{R})$  et  $C = Z \setminus N$ . Ainsi  $N$  est fini, c'est une partie cofinie de  $Z$ , et la fonction  $f - R_N$  est méromorphe sur  $D$  mais ne possède plus aucun pôle dans  $D(\mathcal{R})$ .

Considérons alors un idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$  et un  $\mathcal{P}$ -ouvert  $V \subset D$ . On pose  $F = C \cap V$  et  $R = R_F$ .

On va montrer que  $R$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction. Pour cela, on distingue les deux cas suivants:

- (1) Si  $\mathcal{P} \supset \mathcal{R}$  alors  $V \subset D(\mathcal{R})$  donc  $F = \emptyset$  et  $R = 0$ .

(2) Si  $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ , on pose  $U = V \cup \mathcal{R}$ . La fonction  $f_1 = f - R_N - R$  n'a aucun pôle dans  $U$  qui est  $\mathcal{P}$ -ouvert. Donc  $f_1$  est un élément analytique sur  $U$  d'après le théorème (2.1). Il existe donc une fraction rationnelle  $g$  sans pôle dans  $U$  et telle que

$$f_1(x) - g(x) \in \mathcal{P} \text{ pour tout } x \in U.$$

De plus, la  $\mathcal{R}$ -fonction  $f$  est alors une  $\mathcal{P}$ -fonction, a fortiori, et  $f \in H(\mathcal{R})$  et  $\mathcal{R}$  est le  $\mathcal{P}$ -intérieur de  $\mathcal{R}$ . D'après le lemme (4.2), il existe donc une  $\mathcal{P}$ -fraction  $h$  telle que

$$f(x) - h(x) \in \mathcal{P} \text{ pour tout } x \in \mathcal{R}.$$

Soit  $t = h - R_N - R - g$ . On a donc

$$t(x) \in \mathcal{P} \text{ pour tout } x \in \mathcal{R}.$$

Donc  $t$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction. Or,  $g = h - R_N - R - t$  étant une fraction sans pôle dans  $U$ , sa partie principale dans  $W = V \setminus D(\mathcal{R})$  est nulle. Autrement dit,  $R$  est la partie principale de la  $\mathcal{P}$ -fraction  $h - t$  dans  $W$  qui est  $\mathcal{P}$ -ouvert ! Donc  $R$  est une  $\mathcal{P}$ -fraction d'après la Proposition (3.6).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii).

Puisque  $0 \in D$ , il existe au moins un idéal premier non nul  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{R} \subset D$ . D'après (ii), l'ensemble  $C \cap D(\mathcal{R})$  est fini. Posons  $T = C \setminus D(\mathcal{R})$ . Ainsi  $T$  est une partie cofinie de  $Z$  et  $T \cap D(\mathcal{R}) = \emptyset$ .

Considérons alors deux idéaux premiers non nuls  $\mathcal{Q} \subsetneq \mathcal{P}$ . L'ensemble  $V = D(\mathcal{Q}) \setminus D(\mathcal{P})$  est un  $\mathcal{Q}$ -ouvert et l'ensemble  $F = T \cap V$  est donc fini.

On va montrer qu'il existe une fraction rationnelle  $S$  sans pôle dans  $D$  telle que  $R_F - S$  soit  $\mathcal{P}$ -négligeable sur  $D(\mathcal{P})$ .

Pour chaque  $a \in F$ , désignons par  $\mathcal{P}(a)$  le plus grand des idéaux premiers de  $\mathcal{A}$  pour lequel  $a \in D(\mathcal{P}(a))$ .

On a ainsi  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(a) \subsetneq \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}(a) \subsetneq \mathcal{R}$ . Soit

$$F(a) = \{ b \in F : b - a \in \mathcal{P}(a) \}.$$

On obtient ainsi une partition de  $F = \cup_{a \in F} F(a)$ .

Il suffira de montrer alors que, pour chaque  $a \in F$ , il existe une fraction rationnelle  $g$  sans pôle dans  $D$  et telle que  $R_{F(a)} - g$  soit  $\mathcal{P}$ -négligeable sur  $D(\mathcal{P})$ .

Remarquons que  $a + \mathcal{P}(a)$  est un  $\mathcal{P}(a)$ -ouvert contenu dans  $D \setminus D(\mathcal{R})$  et que  $F(a) = C \cap (a + \mathcal{P}(a))$ . Donc  $R_{F(a)}$  est une  $\mathcal{P}(a)$ -fraction (d'après (ii)) dont tous les pôles sont  $\mathcal{P}(a)$ -proches de  $a$ . D'autre part,  $a \in D(\mathcal{P}(a))$  mais  $a \notin D(\mathcal{P})$  pour tout idéal premier  $\mathcal{P} \supsetneq \mathcal{P}(a)$ . Ainsi deux cas seulement peuvent se présenter:

1er cas:  $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour tout idéal premier  $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{P}(a)$ . D'après le Lemme (3.8.1), il existe alors un polynôme  $g \in K[X]$  tel que

$$R_{F(a)}(x) - g(x) \in \mathcal{P} \quad \text{pour tout } x \in D(\mathcal{P}) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}.$$

2ème cas: Il existe un idéal premier  $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{P}(a)$  tel que  $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ . On va utiliser le Lemme (3.8.2). On a dit que  $R_{F(a)}$  est une  $\mathcal{P}(a)$ -fraction dont tous les pôles sont  $\mathcal{P}(a)$ -proches de  $a$ . De plus  $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}(a)} \setminus \mathcal{R}$  et  $\mathcal{R} \not\subseteq \mathcal{P}(a)$ . D'après ce lemme, il existe donc un idéal premier  $\mathcal{Q}' \not\subseteq \mathcal{P}(a)$  pour lequel on a la propriété suivante: pour tout idéal premier  $\mathcal{L}$  tel que  $\mathcal{Q}' \supset \mathcal{L} \not\subseteq \mathcal{P}(a)$  et pour tout  $c \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{P}(a)$ , il existe une fraction rationnelle  $g$  ayant pour unique pôle  $b = a - c$  et telle que  $R_{F(a)} - g$  soit  $\mathcal{L}$ -négligeable sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}'} \setminus (a + \mathcal{L})$ .

Choisissons  $\mathcal{L}$  tel que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}' \supset \mathcal{L} \not\subseteq \mathcal{P}(a)$ ; c'est possible. Alors  $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}'} \setminus D(\mathcal{L})$ , donc  $a + \mathcal{L} \not\subset D$ . Il existe donc  $c \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{P}(a)$  tel que  $a - c = b \notin D$ . Pour ce choix de  $c$ , la fraction rationnelle  $g$  n'a pas de pôle dans  $D$ , et l'on a  $D(\mathcal{P}) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{Q}'}$ . De plus, on a  $(a + \mathcal{P}) \cap D(\mathcal{P}) = \emptyset$ , donc  $D(\mathcal{P}) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{Q}'} \setminus (a + \mathcal{L})$ ; de sorte que  $R_{F(a)} - g$  est  $\mathcal{P}$ -négligeable sur  $D(\mathcal{P})$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) C'est immédiat.

(iv)  $\Rightarrow$  (i).

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$u_n = R_{F(n)} - S_n.$$

Ainsi, par hypothèse,  $u_n$  est  $\mathcal{P}_n$ -négligeable sur  $D_n$ . Pour chaque  $x \in D \setminus T$ , la série  $\sum_i u_i(x)$  est convergente. Posons  $v(x) = \sum_i u_i(x)$  pour  $x \in D \setminus T$ , et  $v(x) = \infty$  pour  $x \in T$ . On va montrer que  $v$  est une fonction méromorphe sur  $D$  et que, pour chaque  $n$ , la partie principale de  $v$  dans  $D_{n+1} \setminus D_n$  n'est autre que  $R_{F(n)}$ .

En effet: Pour chaque  $n$ , la série  $\sum_{i \geq n} u_i$  converge uniformément sur  $D_n$  vers une fonction  $v_n \in H(D_n)$  et, d'autre part,  $g_n = \sum_{i < n} u_i$  est une fraction rationnelle dont la partie principale dans  $D_n$  est égale à  $\sum_{i < n} R_{F(i)}$  et l'on a  $v = g_n + v_n$ .

On pose enfin  $f = R_{Z \setminus T} + v$ .

La fonction  $f$  possède la propriété (i).

Fin de la démonstration.

#### 4.4. Contre exemple

On considère une suite de points  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $a_0 = 0$  et  $a_i - a_j \notin \mathcal{P}_0$  pour  $i \neq j$ . Ainsi les ensembles  $V_n = a_n + \mathcal{P}_n$  sont deux à

deux disjoints. On considère une suite d'éléments  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  $A_n \in K \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . On pose

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \text{ et } Z = \{a_n : n > 0\} \text{ et } R_n(x) = \frac{A_n}{1 - \frac{X}{a_n}}$$

pour  $n > 0$ .

Il n'existe pas de fonction méromorphe sur  $D$  dont la partie principale en chaque point  $a_n$  serait égale à  $R_n$ .

**DÉMONSTRATION:** Supposons qu'il existe une telle fonction méromorphe  $f$  sur  $D$ . On a  $0 \in D \setminus Z$ , chaque  $V_n$  est un  $\mathcal{P}_n$ -ouvert de  $D$ , et la partie principale de  $f$  dans  $V_n$  n'est autre que  $R_n$ . D'après le Théorème (4.3.), chaque  $R_n$ , sauf un nombre fini, devrait donc être une  $\mathcal{P}_n$ -fraction. Or aucune  $R_n$  n'est une  $\mathcal{P}_n$ -fraction puisque  $A_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ .

C.Q.F.D.

### 5. L'anneau $F(D)$ des fonctions analytiques sur un ouvert $D$ de $K$

5.1. THÉORÈME: Soit  $D$  un ouvert de  $K$ .

(1) S'il existe un idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  tel que  $D$  soit un  $\mathcal{P}$ -ouvert alors  $F(D)$  est un anneau principal.

(2) Sinon, l'anneau  $F(D)$  n'est pas bezoutien, ni même prüferien.

**DÉMONSTRATION:**

(1) Si  $D$  est un  $\mathcal{P}$ -ouvert, alors  $F(D) = H(D)$  d'après le Théorème (2.1), et le résultat est déjà démontré dans [5] page 71.

(2) Par translation, on se ramène au cas où  $0 \in D$ .

On suppose que  $D$  n'est  $\mathcal{P}$ -ouvert pour aucun idéal premier  $\mathcal{P}$ . La suite  $(D_n)$  des  $\mathcal{P}_n$ -intérieurs de  $D$  n'est donc pas stationnaire et, quitte à utiliser une suite extraite, on peut se ramener au cas où cette suite est strictement croissante.

On va construire deux fonctions analytiques "très proches" sur  $D$ . Choisissons une suite de points  $a_n \neq 0$  tels que  $a_n \in D_n \setminus D_{n-1}$  et une suite de points  $b_n \neq 0$  tels que  $0 \neq b_n - a_n \in \mathcal{P}_n$ .

Distinguons deux cas (comme dans la démonstration de la proposition 4, page 72 de [5]):

1er cas: si  $a_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{n-1}}$  (et donc  $b_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{n-1}}$ ) on pose  $u_n(X) = 1 - X/a_n$  et  $v_n(X) = 1 - X/b_n$ .

2ème cas: si  $a_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{n-1}}$  (alors  $b_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{n-1}}$ ), on choisit  $c_n \in (a_n + \mathcal{P}_{n-1}) \setminus D$  et on pose

$$u_n(X) = \frac{X - a_n}{X - c_n} \text{ et } v_n(X) = \frac{X - b_n}{X - c_n}.$$

Enfin on pose

$$f = \prod_{n \geq 1} u_n \text{ et } g = \prod_{n \geq 1} v_n.$$

On va montrer successivement que:

- (a)  $f \in F(D)$  et  $g \in F(D)$ .
- (b) Les zéros de  $f$  sont les  $a_n$ , les zéros de  $g$  sont les  $b_n$ . Donc  $f$  et  $g$  n'ont d'autres diviseurs communs dans  $F(D)$  que les éléments inversibles de  $F(D)$ .
- (c) L'idéal  $(f, g)$  engendré par  $f$  et  $g$  n'est pas égal à  $F(D)$ .
- (d) L'anneau  $F(D)$  n'est pas bezoutien.
- (e) L'anneau  $F(D)$  n'est pas prüférien.

(a) Soit  $f_n(X) = \prod_{1 \leq i \leq n} u_i(X)$ , et soit  $x \in D_n$ .

On va montrer que  $f_n(x)$  et  $f_{n+1}(x)$  sont  $\mathcal{P}_n$ -proches. En effet, on a

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = f_n(x)[1 - u_{n+1}(x)].$$

Ainsi

1<sup>er</sup> cas:  $1 - u_{n+1}(x) = x/(a_{n+1})$ ;  $1/(a_{n+1}) \in \mathcal{P}_n$  et  $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  donc  $x/(a_{n+1}) \in \mathcal{P}_n$ .

2<sup>ème</sup> cas:  $1 - u_{n+1}(x) = (c_{n+1} - a_{n+1})/(x - c_{n+1})$ ;  $c_{n+1} - a_{n+1} \in \mathcal{P}_n$ ;  $x - c_{n+1} \notin \mathcal{P}_n$  donc  $1 - u_{n+1}(x) \in \mathcal{P}_n$ .

Dans les deux cas on a  $1 - u_{n+1}(x) \in \mathcal{P}_n$ . D'autre part, pour  $1 \leq i \leq n$ , on a  $u_i(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . En effet:

1<sup>er</sup> cas:  $u_i(x) = 1 - x/a_i$ ;  $a_i \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{i-1}}$  donc  $1/a_i \in \mathcal{P}_{i-1} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ .

2<sup>ème</sup> cas:  $u_i(x) = (x - a_i)/(x - c_i)$ ;  $x - c_i \notin \mathcal{P}_n$  donc  $1/(x - c_i) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ .

$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ .

Finalement, pour tout  $x \in D_n$ , on a  $f_n(x) - f_{n+1}(x) \in \mathcal{P}_n$ . La suite  $(f_n)$  converge donc uniformément sur chaque  $D_m$ . On montre de même que le produit infini  $\prod_{n \geq 1} v_n$  converge uniformément sur chaque  $D_m$ .

Remarquons également que  $f(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  et  $g(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  pour tout  $x \in D_n$ , puisqu'alors  $f_n(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  et  $g_n(x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ .

(b) Les  $a_n$  sont des zéros de  $f$ . Pour montrer que ce sont les seuls, il suffit de montrer que  $h_{n+1}(X) = \prod_{i \geq n+1} u_i(X)$  n'a aucun zéro dans  $D_n$ . Or, pour tout  $i \geq n+1$ , on a  $1 - u_i(x) \in \mathcal{P}_n$  quand  $x \in D_n$ , et par conséquent  $h_{n+1}(x) \notin \mathcal{P}_n$ .

(c) Montrons que l'idéal  $(f, g)$  n'est pas égal à  $F(D)$ .

Si  $(f, g)$  était égal à  $F(D)$  il existerait  $u$  et  $v$  dans  $F(D)$  tels que  $1 = uf + vg$ . On aurait alors

$$\frac{1}{fg} = \frac{u}{g} + \frac{v}{f}.$$

La fonction méromorphe  $u/g$  a pour seuls pôles les points  $b_n$ . Les deux fonctions méromorphes  $1/fg$  et  $v/f$  devraient donc avoir les mêmes parties principales en chacun des pôles  $a_n$ .

Autrement dit, il existerait une fonction méromorphe sur  $D$ , à savoir  $v/f$ , dont les seuls pôles seraient les  $a_n$  et qui aurait, en chaque  $a_n$ , pour partie principale la partie principale  $R_n(X)$  de  $1/fg$ .

Calculons  $R_n(X)$ , et pour cela posons  $s(X) = \prod_{i \neq n} u_i(X)$ ,  $t(X) = \prod_{i \neq n} v_i(X)$ , et distinguons les deux cas:

1<sup>er</sup> cas:  $u_n(X) = 1 - X/a_n$ ;  $a_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{n-1}}$  donc  $b_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{n-1}}$

$$R_n(X) = \frac{A_n}{1 - \frac{X}{a_n}} \quad \text{où } A_n = \frac{1}{s(a_n)t(a_n)} \frac{1}{1 - \frac{a_n}{b_n}}.$$

Par un raisonnement analogue à celui fait en a) on montre que  $s(a_n) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  et  $t(a_n) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . Il en résulte que  $A_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . En effet si  $A_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  alors  $A_n s(a_n) t(a_n) = b_n / (b_n - a_n) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . Or si  $b_n / (b_n - a_n) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  et  $b_n - a_n \in \mathcal{P}_n$  alors  $b_n \in \mathcal{P}_n$ . Or par hypothèse  $b_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_{n-1}}$  donc  $b_n \notin \mathcal{P}_n$ .

2<sup>ème</sup> cas:  $u_n(X) = (X - a_n) / (X - c_n)$ ;

$$R_n(X) = \frac{A_n}{X - a_n} = -\frac{A_n}{a_n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{X}{a_n}}$$

$$\text{où } A_n = \frac{1}{s(a_n)t(a_n)} \frac{(a_n - c_n)^2}{a_n - b_n}.$$

Donc  $A_n/a_n \notin \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . En effet si  $A_n/a_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  alors  $A_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$  car  $a_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ . Mais si  $A_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ , alors  $A_n(a_n - b_n)s(a_n)t(a_n) = (a_n - c_n)^2 \in \mathcal{P}_n$ , donc  $a_n - c_n \in \mathcal{P}_n$  et par conséquent  $c_n \in D$  contrairement à l'hypothèse. Ainsi  $R_n(X)$  n'est jamais une  $\mathcal{P}_n$ -fraction. On conclut à l'aide du Théorème (4.3.).

(d) Si  $F(D)$  était un anneau de Bezout, l'idéal  $(f, g)$  serait principal. Or  $f$  et  $g$  n'ont d'autres diviseurs communs dans  $F(D)$  que les éléments inversibles de  $F(D)$ , et on aurait donc  $(f, g) = F(D)$ !

(e) Montrons, enfin, que l'anneau  $F(D)$  n'est pas prüférien. On se réfère à [2], exercice 12, pages 93-94. Il suffit de montrer que l'idéal  $(f, g)$  n'est pas *inversible*.

S'il l'était, il existerait deux fonctions *méromorphes*  $u$  et  $v$  sur  $D$ , telles que  $1 = uf + vg$  et telles que  $uf$ ,  $vg$ ,  $ug$  et  $vf$  soient analytiques sur  $D$ . Mais alors les pôles de  $u$  et de  $v$  devraient appartenir à l'ensemble  $Z(f) \cap Z(g)$  des zéros communs à  $f$  et  $g$ , donc  $u$  et  $v$  seraient analytiques, et on aurait alors  $(f, g) = F(D)$ . C.Q.F.D.

**5.2. PROPOSITION:** *L'anneau  $F(D)$  est pseudo-principal, donc pseudo-bezoutien.*

DÉMONSTRATION: (Pour les définitions, voir [2] page 86, exercice 21, par exemple). Désignons par  $M^*$  le groupe multiplicatif des fonctions méromorphes non nulles sur  $D$ , par  $I$  le sous-groupe des fonctions analytiques inversibles sur  $D$ , et par  $G$  le groupe quotient  $M^*/I$ .

Dans  $G$  on définit la relation d'ordre suivante:

$$\bar{u} \leq \bar{v} \text{ lorsque } \frac{v}{u} \text{ est analytique sur } D.$$

Dire que  $F(D)$  est pseudo-principal (respectivement pseudo-bezoutien) veut dire que le groupe ordonné  $G$  est complètement réticulé (respectivement réticulé).

Démontrons que  $G$  est complètement réticulé, ce qui veut dire qu'il est filtrant et que toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.

A chaque fonction méromorphe non nulle  $u$  associons la famille  $\tilde{u}: (\tilde{u}(a))_{a \in D} \in \mathbb{Z}^D$  où

$$\begin{aligned} \tilde{u}(a) &\text{ est l'ordre de multiplicité de } a \text{ si } u(a) = 0. \\ -\tilde{u}(a) &\text{ est l'ordre du pôle } a \text{ si } u(a) = \infty. \\ \tilde{u}(a) &= 0 \text{ si } a \text{ n'est ni pôle ni zéro de } u. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un homomorphisme injectif et croissant du groupe ordonné  $G$  dans le groupe additif  $\mathbb{Z}^D$  muni de l'ordre produit.

Dans ce langage, le théorème "de type Weierstrass" que nous avons rappelé ci-dessus (2.2) s'exprime alors comme suit: ( $W$ ) "Soit  $d \in \mathbb{Z}^D$ . Il existe une fonction  $u$  méromorphe sur  $D$  telle que  $\tilde{u} = d$  si et seulement si le support de  $d$ ,  $S = \{a \in D: d(a) \neq 0\}$ , est tel que  $S \cap D(\mathcal{P})$  soit fini pour tout idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$ ".

Soient alors  $u$  et  $v$  deux fonctions méromorphes non nulles sur  $D$ . Une borne supérieure de  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  dans  $G$  est une fonction méromorphe  $w$  pour laquelle  $\tilde{w}(a) = \sup\{\tilde{u}(a), \tilde{v}(a)\}$  pour tout  $a \in D$ .

L'existence d'une telle fonction résulte immédiatement de l'énoncé ( $W$ ).

Le groupe  $(G, \leq)$  est donc filtrant et même réticulé. Montrons qu'il est complètement réticulé. (Voir [1] page VI. 33, exercice 29). Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille non vide de fonctions méromorphes sur  $D$  non nulles telles que

$$\tilde{u}_i(a) \geq 0 \quad \text{pour tout } a \in D.$$

Il suffit de montrer qu'il existe une fonction  $v$  analytique sur  $D$  telle que  $\tilde{v}(a) = \inf_{i \in I} \tilde{u}_i(a)$  pour tout  $a \in D$ .

Or cela découle également de l'énoncé ( $W$ ).

5.3. PROPOSITION: *L'anneau  $F(D)$  est complètement intégralement clos.*

DÉMONSTRATION: Cela veut dire que: si  $u$  est une fonction méromorphe sur  $D$ , si  $f$  est une fonction non nulle méromorphe sur  $D$  telle que  $fu^n$  soit une fonction analytique sur  $D$  pour tout  $n \geq 0$ , alors  $u$  est une fonction analytique sur  $D$ .

Et cela est évidemment vrai car si  $u$  possédait un pôle au point  $a \in D$ , alors  $f$  posséderait un zéro d'ordre au moins égal à  $n$  au point  $a$  pour tout entier  $n > 0$ . Mais alors  $f$  aurait un zéro d'ordre infini au point  $a$ .  
C.Q.F.D.

5.4. PROPOSITION: Pour que l'anneau  $F(D)$  soit factoriel il faut et il suffit qu'il existe un idéal premier non nul  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $D$  soit un  $\mathcal{P}$ -ouvert.

DÉMONSTRATION: Si  $D$  est un  $\mathcal{P}$ -ouvert on sait que  $F(D)$  est un anneau principal donc factoriel.

Supposons que  $D$  n'est  $\mathcal{P}$ -ouvert pour aucun idéal premier  $\mathcal{P}$  non nul de  $\mathcal{A}$ . Reprenons la construction de la suite  $u_n(X)$  faite dans la démonstration du Théorème (5.1) (2).

Pour chaque  $n \geq 1$ , posons  $h_n(X) = \prod_{i \geq n} u_i(X)$ . Ainsi  $h_n \in F(D)$  et la suite des idéaux principaux  $(h_n)$  est une suite strictement croissante, donc elle n'admet pas d'élément maximal et par conséquent l'anneau  $F(D)$  n'est pas factoriel.

### Bibliographie

- [1] N. BOURBAKI: *Algèbre*, Chapitres 4 à 7, Masson, Paris (1981).
- [2] N. BOURBAKI: *Algèbre Commutative*, Chapitre 7, Hermann, Paris (1965).
- [3] Y. FENEYROL-PERRIN: Fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables sur certains corps valués au sens de Krull, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI (1980).
- [4a] Y. FENEYROL-PERRIN: Ensembles analytiques, éléments et fonctions analytiques sur un corps algébriquement clos, valué au sens de Krull, *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A*, 284 (1977) 1547–1548.
- [4b] Y. FENEYROL-PERRIN: Fonctions analytiques sur un corps algébriquement clos, muni d'une valuation au sens de Krull et complet, *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A*, 287 (1978) 71–73.
- [4c] Y. FENEYROL-PERRIN: Répartition des zéros des éléments et des fonctions analytiques sur un ouvert d'un corps valué au sens de Krull, complet et algébriquement clos, *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A*, 287 (1978) 131–132.
- [5] Y. FENEYROL-PERRIN: Fonctions analytiques dans les corps valués de rang supérieur à un, *Compositio Math.* 49 (1983) 51–74.
- [6] M. KRASNER: Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes, *Bull. Soc. Math. France, Mémoire* 39-40 (1974) 131–254.
- [7] M. LAZARD: Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, *Publ. Math. IHES*, Fascicule 14, (1963) 47–75.

(Oblatum 12-VI-1984)

Département de Mathématiques Pures  
 Université de Clermont II  
 B.P. 45  
 F-63170 Aubière  
 France