COMPOSITIO MATHEMATICA

G. XIAO

L'irrégularité des surfaces de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau

Compositio Mathematica, tome 56, n° 2 (1985), p. 251-257

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__56_2_251_0>

Compositio Mathematica 56 (1985) 251–257.

L'IRRÉGULARITÉ DES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL DONT LE SYSTÈME CANONIQUE EST COMPOSÉ D'UN PINCEAU

G. Xiao

Soit S une surface lisse et projective de type général sur le corps complexe $\mathbb{C}$. Nous avons l'application canonique Φ_K: $S \dashrightarrow \boldsymbol{P}^{p_g(S)-1}$ qui est définie par la partie mobile du système canonique $|K_S|$. Quitte à éclater quelques points de S, on peut supposer que Φ_K soit un morphisme. Nous disons que $|K_S|$ est composé d'un pinceau si l'image de Φ_K est une courbe, dans ce cas Φ_K se factorise par une fibration de S:

$$\Phi_K \colon S \xrightarrow{f} C \to \boldsymbol{P}^{p_g(S)-1},$$

où C est une courbe lisse, et les fibres de f sont connexes. Notons par F une fibre générale de f, et soient $g = g(F)$, $b = g(C)$ les genres de F et C. On a $g \geqq 2$ puisque S est de type général, et il est bien connu que $q(S) < b + g$ (voir [1]).

Pour les surfaces de type général, on sait que sauf quelques rares exceptions, les applications pluricanoniques Φ_{nK} définies par $|nK_S|$ sont génériquement finies pour $n \geqq 2$, et sont birationnelles pour $n \geqq 3$ ([2] et [3]). Le cas où le système canonique est composé d'un pinceau constitue un cas très particulier des surfaces de type général. Dans [4], Beauville a démontré qu'il y a des familles illimitées de telles surfaces, et qu'il y a une limite supérieure pour g. La question naturelle que l'on peut alors poser est: si $|K_S|$ est composé d'un pinceau, l'irrégularité $q(S)$ est-elle bornée? ou de façon équivalente, b est-il borné? Le but de cette note est de répondre positivement à cette question en montrant le théorème suivant:

THÉORÈME: *Soit S une surface de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau. Alors S est dans l'un des cas suivants*:
1) $q(S) = b = 1$;
2) $b = 0$, $q(S) \leqq 2$.

§1. Le cas où $b > 0$

Nous regardons le faisceau $f_*\omega_S = f_*\omega_{S/C} \otimes \omega_C$ qui est localement libre de rang g sur C. d'après [5], pour tout quotient localement libre E de $f_*\omega_S$, on a $\lambda(E) \geqq 2b - 2$, où $\lambda(E) = \deg(\mathrm{E})/\mathrm{rang}(E)$. Remarquons aussi qu'il y a un isomorphisme canonique $H^0(S, \omega_S) = H^0(C, f_*\omega_S)$, et la condition que Φ_K se factorise par f se traduit par le fait que le sous-fibré E_1 de $f_*\omega_S$ engendré par les sections globales est inversible. Soit donc E_2 le quotient de $f_*\omega_S$ par E_1, nous avons alors une filtration

$$0 \to E_1 \to f_*\omega_S \to E_2 \to 0,$$

avec

$$h^0(E_1) = h^0(f_*\omega_S) = p_g(S) \geqq 2.$$

Puisque $\lambda(E_2) \geqq 2b-2$, rang$(E_2) = g-1$, Riemann-Roch donne $h^0(E_2) \geqq (b-1)(g-1)$. Donc la suite exacte de cohomologie

$$H^0(E_1) \to H^0(f_*\omega_S) \to H^0(E_2) \to H^1(E_1)$$

dit que nous devons avoir $h^1(E_1) \geqq h^0(E_2) \geqq (b-1)(g-1)$. Or il est évident que deg$(E_1) > 0$, donc $h^1(E_1) \leqq b-1$ parce que $h^0(E_1) \leqq$ deg(E_1), ce qui nous laisse deux possibilités: soit $b=1$, soit $g=2$.

Si $b=1$, on a $h^0(E_2) \leqq h^1(E_1) = 0$, et $h^1(E_2) = 0$ par Riemann-Roch. Comme $h^1(f_*\omega_S) \leqq h^1(E_1) + h^1(E_2) = 0$, on obtient $q(S) = 1$ puisque

$$q(S) = h^1(\omega_S) = h^1(f_*\omega_S) + h^0(\omega_C) \tag{1}$$

d'après la suite spectrale de Leray. Donc S est dans le cas 1) du théorème.

Supposons $g=2$, $b \geqq 2$. Alors E_2 est inversible, et $h^1(E_1) = h^0(E_2) = b-1$ donne deg$(E_1) \leqq 2$ (par le lemme de Clifford), deg$(E_2) \leqq 2b-2$ (par Riemann-Roch). Comme deg$(E) \geqq 4b-4$ par le résultat de [5], on doit avoir deg$(E_1) =$ deg$(E_2) = b = 2$, $E_1 \cong \omega_C$ (parce que $h^1(E_1) > 0$), donc $p_g(S) = h^0(E_1) = 2$. De plus, on a $q(S) \leqq p_g(S) = 2$ car S est de type général, donc par (1), $q(S) = 2$. Maintenant par [1], on voit que f est isotriviale et lisse. Nous devons montrer que ce cas n'existe pas.

En effet, regardons la suite exacte

$$0 \to f^*\omega_C \to \Omega_S^1 \to \omega_{S/C} \to 0. \tag{2}$$

Puisque $h^0(f^*\omega_C) = 2$, $h^0(\omega_{S/C}) = h^0(f_*\omega_S \otimes \omega_C^{\otimes -1}) = 1$, il suffit de montrer que la suite (2) est scindée, parce que dans ce cas

$$q(S) = h^0(\Omega_S^1) = h^0(f^*\omega_C) + h^0(\omega_{S/C}) = 3,$$

contradiction.

Comme f est isotriviale et lisse, il y a un changement de base étale π: $C_1 \to C$ tel que le pull-back f_1: $S' \to C_1$ soit une fibration triviale:

$$\begin{array}{ccccc} S' \cong & C_1 \times & C_2 \\ f_1 = p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ C_1 & & C_2 \end{array}$$

Le pull-back de (2) devient

$$0 \to f_1^* \omega_{C_1} \to \Omega^1_{S'} \to \omega_{S'/C_1} \to 0 \tag{2'}$$

qui est scindée parce que $\omega_{S'/C_1} \cong p_2^* \omega_{C_2}$. Comme π est galoisien, il y a un groupe G d'automorphismes de S' tel que S soit le quotient de S' par l'action de G. Il est clair que G respecte la décomposition de S': $g(x, y) = (gx, gy)$, où $g \in G$, $x \in C_1$, $y \in C_2$, donc les sous-fibrés $f_i^* \omega_{C_i} (i = 1, 2)$ de $\Omega^1_{S'}$ sont stable sous l'action induite de G sur $\Omega^1_{S'}$. Par conséquent l'image de $p_2^* \omega_{C_2}$ dans Ω^1_S est un sous-fibré inversible qui se projette surjectivement sur $\omega_{S/C}$, d'où (2) est scindée.

Le théorème est démontré dans le cas $b > 0$.

§2. Le cas où $b = 0$

Nous raisonnons par absurde, en supposant $q(S) \geqq 3$.

Lemme: *Soit S une surface de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau, et supposons $q(S) \geqq 3$. Alors l'image de l'application d'Albanese de S est une courbe.*

Démonstration: Par le §1, la base de la fibration f: $S \to C$ induite par Φ_K est rationnelle.

Supposons d'abord qu'il y a deux 1-formes holomorphes de S, α et β, linéairement indépendantes dans $H^0(\Omega^1_S)$, telles que $\alpha \wedge \beta = 0$. Dans ce cas il est bien connu [6, Proposition X.9] qu'il y a une fibration ϕ: $S \to E$, où E est une courbe de genre supérieur ou égal à 2, telle que α et β soient les images réciproques de deux 1-formes holomorphes sur E. Le diviseur D des zéros de α est donc contenu dans un nombre fini de fibres de ϕ. Nous pouvons supposer que α soit l'image réciproque d'une forme holomorphe assez générale sur E, the sorte que D contienne une fibre V assez générale de ϕ, qui n'est pas dans la partie fixe de $|K_S|$. De plus f et ϕ sont deux fibrations différentes de S, ce qui entraîne qu'aucun diviseur dans la partie mobile de $|K_S|$ ne contient V. Maintenant si l'image d'Albanese de S est une surface, on peut trouver une autre 1-forme γ telle que $\alpha \wedge \gamma \neq 0$. Mais dans ce cas $\operatorname{div}(\alpha \wedge \gamma)$ contient V, contradiction. Cette image est donc une courbe.

Nous pouvons maintenant supposer que pour toutes formes α et β linéairement indépendantes dans $H^0(\Omega^1_S)$, $\alpha \wedge \beta \neq 0$. Soient F une fibre assez générale de f, et x un point de F qui n'est pas contenu dans la partie fixe de $|K_S|$. Parce que $h^0(\Omega^1_S) = q(S) \geqq 3$, il existe un forme $\alpha \in H^0(\Omega^1_S)$ qui s'annule sur x. Montrons que α s'annule sur la fibre F entière:

En effet, sinon il y a un autre point général y sur F tel que α n'est pas nulle sur y. Par la généralité de F, on peut trouver une autre forme β

telle que $\alpha \wedge \beta$ ne s'annule pas sur y. Le diviseur D des zéros de $\alpha \wedge \beta$ est donc un diviseur dans $|K_S|$ qui passe par x mais pas par y, ce qui n'est pas possible parce que x n'est pas contenu dans la partie fixe de $|K_S|$, et la partie mobile de $|K_S|$ est composée de fibres de la fibration f.

Maintenant comme la base C de f est isomorphe à $\boldsymbol{P}^1$, on peut trouver une fonction s sur C, avec un pôle simple sur l'image de F, et holomorphe ailleurs. f^*s est alors une fonction sur S telle que $(f^*s)\alpha$ soit aussi une forme holomorphe. Mais ceci contrdit notre hypothèse, puisque $(f^*s)\alpha$ et α sont deux formes linéairement indépendantes dans $H^0(\Omega_S^1)$ evec $\alpha \wedge (f^*s)\alpha = 0$. CQFD

Maintenant soit ρ: $S \to S'$ la contraction des courbes exceptionnelles de S(S' est donc le modèle minimal de S), K' un diviseur canonique effectif de S', $F' = \rho(F)$. K' est linéairement équivalent à $(p_g(S)-1)F'$ plus une partie fixe Z. On a

$$9p_g(S) - 18 \geqq 9\chi(\mathcal{O}_S) \geqq K'^2 \geqq \big(p_g(S)-1\big)F'K',$$

$$K'F' \geqq \big(p_g(S)-1\big)F'^2,$$

donc

$$K'F' \leqq 9\left(1 - \frac{1}{p_g - 1}\right),$$

et

$$K'F' + F'^2 \leqq \left(1 + \frac{1}{p_g - 1}\right)K'F' \leqq 9\left(1 - \frac{1}{(p_g-1)^2}\right) < 9,$$

ce qui donne par la formule d'adjonction

$$g = g(F') \leqq p_a(F') = \tfrac{1}{2}(K'F' + F'^2) + 1 \leqq 5.$$

Par [1], on a $q(S) \leqq g$; de plus si $q(S) = g$, la fibration f sera triviale, ce qui n'est évidemment pas notre cas (par exemple parce que S n'est pas réglée), donc $q(S) < g$, ce qui nous laisse 3 possibilités à exclure: i) $q(S) = 4$, $g = 5$; ii) $q(S) = 3$, $g = 4$; iii) $q(S) = 3$, $g = 5$.

Le lemme nous donne une fibration ϕ: $S \to E$ induite par l'application d'Albanese de S, où E est l'image de S dans Alb(S), qui est donc une courbe lisse avec $g(E) = q(S)$ [6, V. 15]. ϕ induit un morphisme surjectif de F sur la courbe E:

$$\psi\colon F \to E.$$

Puisque ψ n'est pas un isomorphisme, la formule de Riemann-Hurwitz donne $g \geqq 2g(E)-1 = 2q(S)-1$, ce qui élimine les deux premières possibilités. Pour la troisième, ψ est un morphisme étale de degré 2. On en déduit donc un morphisme τ au-dessus de C qui est génériquement de degré 2:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & & T = E \times C \arrow[dl, "p_2"] \\ & C \cong \boldsymbol{P}^1 & \end{tikzcd}$$

où τ restreint à F est le morphisme ψ. (Remarquons que τ est partout défini parce que $p_1 \circ \tau$ et $p_2 \circ \tau$ le sont.)
Par construction, le diviseur de branchement D de τ dans la surface T est composé d'un nombre fini de fibres de p_2. Comme D est lisse, on peut factoriser τ comme suit:

$$\tau\colon S \xrightarrow{\rho} S' \xrightarrow{\tau'} T,$$

où ρ est un morphisme birationnel, τ' un revêtement double. D'après les formules bien connues sur les revêtement doubles des susfaces (cf. [7]), et compte tenu de $p_g(T)=0$, nous avons $|K_{S'}| = \tau'^*|K_T + \delta|$, où δ est un élément dans $\mathrm{Pic}(T)$ tel que $2\delta \equiv D$. Puisque D est une somme de fibres de p_2, il y a un élément ν dans $\mathrm{Pic}(C)$ et un élément η dans $\mathrm{Pic}^0(E)$ tels que

$$\delta \equiv p_1^*(\eta) + p_2^*(\nu).$$

On a donc

$$\begin{aligned} |K_T + \delta| &= |p_1^*(K_E + \eta) + p_2^*(\nu - 2p)| \\ &\supset |p_1^*(K_E + \eta)| + p_2^*(\nu - 2p), \end{aligned}$$

où p est un point sur C. Mais $h^0(K_E + \eta) \geqq 2$, donc $|p_1^*(K_E + \eta)|$ restreint à une fibre de p_2 est un système linéaire à dimension positive, ce qui entraîne que $|K_{S'}|$ bouge sur les fibres générales de la fibration $S' \to C$ induite par f, ou $|K_S|$ bouge sur les fibres générales de f, ce qui contredit l'hypothèse que Φ_K se factorise par f. Ce dernier cas est donc éliminé.

Le théorème est entièrement démontré.

Les bornes données dans le théorème sont les meilleures possibles dans leur sens. Dans [4], Beauville a construit une famille illimitée de surfaces pour chaque paire de b et q vérifiant le théorème: son exemple 1 a $b=q=0$ $(g=2)$; exemple 2 a $b=0$, $q=2$ $(g=3)$; la variante de l'exemple 2 a $b=0$, $q=1$ $(g=2)$; exemple 3 a $b=q=1$ $(g=2)$. Nous finissons cette note par un autre exemple:

EXEMPLE: Une famille de surfaces de type général avec $q(S)=1$, dont le système canonique est composé d'un pinceau de courbes de genre 3 à base elliptique.

Soient E une courbe elliptique, η un élément d'ordre 2 dans $\mathrm{Pic}^0(E)$. Dans le produit $E\times \boldsymbol{P}^1$, prenons un diviseur D composé de 6 fibres distinctes de la deuxième projection p_2. Alors la classe du diviseur

$$\delta' = p_1^*(\eta) + p_2^*(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(3))$$

est un élément dans $\mathrm{Pic}(E\times \boldsymbol{P}^1)$ tel que $2\delta'\equiv D$. On peut donc construire un revêtement double

$$r\colon T\to E\times \boldsymbol{P}^1$$

ramifié le long de D, tel que $K_T\equiv r^*(K_{E\times \boldsymbol{P}^1}+\delta')$, et

$$p_g(T)=p_g(E\times \boldsymbol{P}^1)+h^0\big(E\times \boldsymbol{P}^1,\ \mathcal{O}(K_{E\times \boldsymbol{P}^1}+\delta')\big)=0$$

(voir [7]). T a une fibration en courbes de genre 2 sur E:

$$\phi\colon T\to E,$$

qui est induite par $p_1\colon E\times \boldsymbol{P}^1\to E$. La fibration ϕ est isotriviale et lisse, mais pas triviale. Le lieu de ramification de r dans T est composé de 6 sections de ϕ; soient C_1 et C_2 deux d'entre elles. On a $2C_1\equiv 2C_2$.

Maintenant soient a un entier $\geqq 2$, B un diviseur (réduit) dans E composé de $2a$ points distincts. Il y a un diviseur A de degré a dans E tel que $2A\equiv B$. Soient $\delta=\phi^*A+C_1-C_2$, $R=\phi^*B$. Comme $2\delta\equiv R$ dans T, il y a un revêtement double ramifié le long de R:

$$s\colon S\to T,$$

tel que $K_S\equiv s^*(K_T+\delta)$. La fibration ϕ induit une fibration isotriviale

$$f\colon S\to E$$

dont les fibres générales sont des courbes de genre 3. Les formules des revêtements doubles donnent

$$p_g(S)=a,\quad q(S)=1,\quad K_S^2=8a.$$

De plus $p_g(T)=0$ dit que $|K_S|=s^*|K_T+\delta|$, mais $|K_T+\delta|$ restreint à une fibre de ϕ ne bouge pas, donc $|K_S|$ restreint à une fibre de f ne bouge pas, ce qui veut dire que Φ_{K_S} se factorise par f.

Bibliographie

[1] A. Beauville: L'inégalité $p_g \geqq 2q - 4$ pour les surfaces de type général. Appendice à O. Debarre: "Inégalités numériques pour les surfaces de type général". *Bull. Soc. Math. France* 110 (1982) 319–346.
[2] E. Bombieri: Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math. IHES* 42 (1973) 171–219.
[3] G. Xiao: Finitude de l'application bicanonique des surfaces de type général, à paraître.
[4] A. Beauville: L'application canonique pour les surfaces de type général, *Inv. Math.* 55 (1979) 121–140.
[5] T. Fujita: On Kähler fiber spaces over curves, *J. Math. Soc. Japan* 30 (1978) 779–794.
[6] A. Beauville: *Surfaces Algébriques Complexes*, *Astérisque* 54, SMF (1978).
[7] U. Persson: Double coverings and surfaces of general type. In: *Algebraic Geometry*, *Springer Lecture Notes in Math.* 687 (1978).

(Oblatum 1-XI-1983)

Départment de Mathématiques
Université de Paris-Sud
Bâtiment 425, 91405 Orsay
France

Current address:
Department of mathematics
East China normal University
3663 Zhongsan Rod (Northern)
Shanghai 200062
China