Compositio Mathematica

Laurent Clozel

Sur une conjecture de Howe. I

Compositio Mathematica, tome 56, nº 1 (1985), p. 87-110
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__56_1_87_0>

Compositio Mathematica 56 (1985) 87–110.

SUR UNE CONJECTURE DE HOWE-I

Laurent Clozel

Introduction

Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique 0, $\boldsymbol{G}$ un groupe connexe réductif défini sur F, $G = \boldsymbol{G}(F)$ le groupe des F-points de $\boldsymbol{G}$. Soit Ω un sous-ensemble compact de G, $\Omega^G = \{ g\omega g^{-1}\colon\ \boldsymbol{g} \in G,\ \omega \in \Omega \}$ l'ensemble engendré par Ω sous conjugaison par les éléments de G, Ω^G l'adhérence de Ω^G pour la topologie p-adique. Si K est un sous-groupe compact-ouvert de G, soit $\mathscr{H} = \mathscr{H}(G, K)$ l'algèbre de Hecke des fonctions localement constantes à support compact sur G qui sont invariantes à droite et à gauche par K. Soit $J(\Omega)$ l'ensemble des distributions invariantes sur G à support dans Ω^G. Notons $J(\Omega)|_{\mathscr{H}}$ l'espace des restrictions à H des distributions de $J(\Omega)$.

Il y a quelques années, Roger Howe [12] a conjecturé que l'espace $J(\Omega)|_{\mathscr{H}}$ est de dimension finie, pour tout groupe réductif G. Le propos de cet article est de démontrer qu'il en est bien ainsi modulo une hypothèse naturelle concernant les représentations de carré intégrable de G.

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Soit ω une représentation supercuspidale irréductible de M. Par induction parabolique, on définit une représentation de longueur finie $\pi = \mathrm{ind}_{MN}^{G}(\omega \otimes 1)$, admissible, de G.

Choisissons une uniformisante ϖ de F. On peut alors définir de façon naturelle un sous-groupe abélien libre C_M de la composante déployée de M tel que le centre de M/C_M soit compact. Puisque C_M est dans le centre de M, il agit dans l'espace de ω par un caractère (non-unitaire en général) $\chi_\omega\colon C_M \to \mathbb{C}^{x}$.

On dira qu'un caractère χ de C_M est un *exposant spécial* s'il existe une représentation supercuspidale ω de M telle que l'induite π contienne un sous-quotient irréductible qui soit une représentation de carré intégrable modulo le centre de G et que $\chi = \chi_\omega$.

Supposons G semi-simple. On dira que *G a un nombre fini d'exposants spéciaux* si pour tout parabolique $P = MN$ de G, l'ensemble des exposants spéciaux de C_M est fini. (Insistons sur le fait que c'est donc une assertion sur les exposants spéciaux relatifs à *tous* les sous-groupes de Levi de G).

Si $P = MN$ est la décomposition de Levi d'un parabolique de G, on appelle M un *sous-groupe de Levi* de G.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème démontré dans cet article:

THÉORÈME 1: *Soit $G = \mathbf{G}(F)$, $\mathbf{G}$ réductif connexe sur un corps p-adique F de caractéristique* 0.

Supposons que, pour tout sous-groupe de Levi M de G, M_{der} a un nombre fini d'exposants spéciaux, où M_{der} est l'ensemble des F-points du groupe dérivé algébrique $\mathbf{M}_{\mathrm{der}}$ de $\mathbf{M}$.

Alors, pour tout compact Ω de G, et tout sous-groupe compact-ouvert K, l'espace $J(\Omega)\,|_{H}$, où $\mathscr{H} = \mathscr{H}(G, K)$, est de dimension finie.

Ce résultat a aussi été annoncé par D. Kazhdan.

Si $\mathbf{G} = GL(n)$, la finitude de l'ensemble des exposants spéciaux résulte des travaux de Bernstein-Zelevinskii (cf. §6). Par conséquent, le Théorème 1 s'applique à $GL(n, F)$. Puisque l'affirmation du théorème est locale - elle est vraie pour Ω si celui-ci a un recouvrement fini par des Ω_i pour lesquels elle est vérifiée - et trivialement vraie pour les tores, on en déduit le résultat suivant:

COROLLAIRE: *Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F tel que $\mathbf{G}/\mathbf{Z} = PGL(n)$, où $\mathbf{Z}$ est le centre de $\mathbf{G}$.*

Soit $G = \mathbf{G}(F)$. Soit H une extension (topologique) centrale finie d'un sousgroupe ouvert d'indice fini de G. Alors la conjecture de Howe est vraie pour H.

Ceci s'applique, en particulier, à $SL(n, F)$, $PGL(n, F)$ et aux groupes métaplectiques.

Si $G = GL(n, D)$, D étant une algèbre à division sur un corps de caractéristique 0, la finitude de l'ensemble des exposants spéciaux résulte d'un théorème prouvé par Deligne, Kazhdan et Vignéras (§6). Enfin, on espère que le cas général sera accessible aux idées d' I.N. Bernstein.

Il est bien connu que la conjecture de Howe a d'importantes conséquences, remarquées depuis longtemps par Howe et Harish-Chandra, pour l'analyse sur les groupes réductifs. Citons les suivantes. Tout d'abord, Harish-Chandra a démontré que les relations d'orthogonalité, démontrées jusqu'ici seulement pour les représentations supercuspidales [9, Théorème 17], sont vraies pour les représentations de carré intégrable. Par ailleurs, on peut étendre à l'espace de Schwartz la théorie des germes de Shalika, et prouver que toutes les intégrales orbitales sur G définissent des distributions tempérées. Ceci permet aussi de démontrer l'équivalence de deux définitions naturelles d'"invariance stable" pour des distributions sur $SL(n, F)$, répondant ainsi à une question de Langlands. Nous donnerons des démonstrations complètes de ces résultats dans un article ultérieur.

L'organisation de cet article est la suivante. Dans les §1 à 5, nous démontrons (modulo l'hypothèse sur les exposants spéciaux) une forme faible de la conjecture de Howe, concernant seulement les intégrales orbitales (Prop. 1). Tout d'abord, supposant la conjecture de Howe vérifiée pour les sous-groupes de Levi propres de G - nous le pouvons par induction - la Prop. 1 est vraie pour les tores non-elliptiques de G (§2). Pour étudier le cas des tores elliptiques, nous dualisons le problème en utilisant l'analyse harmonique sur G. Grâce à un théorème de densité récemment annoncé par Kazhdan, la démonstration de la Prop. 1 est ramenée à une propriété des exposants des représentations elliptiques de G (Prop. 2). En utilisant un théorème de Casselman sur le caractère des représentations admissibles, ainsi que qu'une conséquence du théorème de densité d'Harish-Chandra due à Silberger, on montre que la Prop. 2 se déduit de la finitude de l'ensemble des exposants spéciaux. Dans le §4, on montre que la Prop. 1 se déduit de la Prop. 2. Dans le §5, on déduit la conjecture de Howe de la Prop. 1. Dans le §6, on vérifie l'hypothèse de finitude pour $GL(n)$ et, à l'aide du résultat de Deligne-Kazhdan-Vignéras, pour le groupe multiplicatif d'une algèbre simple centrale.

Je remercie H. Carayol et P. Gérardin, qui ont lu une version antérieure de ce travail et corrigé mes erreurs. Une partie de ce travail a été faite alors que je visitais le département de Mathématiques de l'Université de Michigan. Je remercie le département - et en particulier D. Lewis et D. Burns - de cette invitation.

Notations et définitions

Les notions et notations non définies sont celles de Cartier [6] ou Harish-Chandra [9]. Comme on l'a expliqué dans l'Introduction, la démonstration du Théorème 1. dans le cas réductif se ramène aisément au cas semi-simple. Pour ne pas nous embarrasser des exposants centraux, nous supposons donc que $\boldsymbol{G}$ est un groupe linéaire algébrique *semi-simple* connexe sur un corps local non-archimédien F de caractéristique 0; on note $G = \boldsymbol{G}(F)$. On note G_{reg} l'ensemble des éléments réguliers semi-simples de G; si $X \subset G$, $X_{\text{reg}} = X \cap G_{\text{reg}}$.

Fixons un sous-groupe compact-ouvert K de G; K définit une algèbre de Hecke $\mathscr{H} = \mathscr{H}(G, K)$.

Nous choisissons un parabolique minimal $P_0 = M_0 N_0$ de G. Un parabolique de G est *standard* s'il contient P_0. Soit $P = MN$ la décomposition de Levi d'un parbolique de G; soit A_M la composante déployée de M. Il existe alors un tore $\boldsymbol{A}_M$ de $\boldsymbol{G}$, déployé, tel que $A_M = \boldsymbol{A}_M(F)$. Soit X le réseau des caractères rationnels de $\boldsymbol{A}_M$, $\mathfrak{a}_M = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R})$, $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_M \otimes \mathbb{C}$. Il existe une application naturelle H: $M \to \mathfrak{a}_M$ ([8, p. 176]). Son image est un réseau $L \subset \mathfrak{a}_M$, et l'image de A_M un sous-réseau L_1 de L. Nous allons fixer, pour tout M, un sous-groupe abélien libre C_M de A_M se projetant sur L_1.

Nous fixons une fois pour toutes une uniformisante ϖ de F. Ses puissances forment un sous-groupe $\mathbb{Z}_\varpi \cong \mathbb{Z}$ de $F^\times$. Si A est un tore déployé sur F, on peut écrire $A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, F^\times)$, où X est le réseau des caractères de $\boldsymbol{A}$ et $A = \boldsymbol{A}(F)$. On définit alors $C_A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}_\varpi) \subset A$.

Soit w un automorphisme rationnel, défini sur F, de $\boldsymbol{A}$. Il y a alors une action naturelle de w sur X, notée $\chi \to w\chi$; son action sur $A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, F^\times)$ est alors donnée par $wt(\chi) = t(w^{-1}\chi)$, pour $t \in A$, $\chi \in X$. En particulier, si $c \in C_A \subset A$, on a $(wc)(\chi) = c(w^{-1}\chi) \in \mathbb{Z}_\varpi$ pour tout $\chi \in X$: donc $wc \in C_A$. Le groupe C_A est donc invariant par tous les automorphismes rationnels définis sur F de $\boldsymbol{A}$.

Remarquons aussi que C_A est un groupe abélien libre de rang égal à $\dim(\boldsymbol{A})$ et que, si $1 \to \boldsymbol{A}' \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'' \to 1$ est une suite exacte de tores déployés sur F, la suite exacte des groupes de caractères $0 \to X'' \to X \to X' \to 0$ définit une suite exacte $1 \to C_{A'} \to C_A \to C_{A''} \to 1$.

Nous appliquerons cette construction à la composante déployée $\boldsymbol{A}_M$ de $\boldsymbol{M}$. Elle définit un groupe C_{A_M}, que nous noterons C_M. Son rang est égal à $\dim(\boldsymbol{A}_M)$, et $M/_{C_M}$ est de centre compact. D'après ce qui précède, C_M est invariant par le groupe de Weyl $W(G, A_M) = N_G(A_M)/M$ (le normalisateur de A_M dans G divisé par M).

Rappelons la définition suivante, esquissée dans l'Introduction. Soit MN un parabolique de G, ω une représentation supercuspidale [1] de M. On notera χ_ω le caractère central de ω sur C_M. On note $\pi = \mathrm{ind}_{MN}^G(\omega \otimes 1)$ l'induite normalisée de ω à G (en particulier, π est unitaire si ω est unitaire). On dit que χ: $C_M \to \mathbb{C}^x$ est un *exposant spécial* s'il existe ω, représentation supercuspidale de M, telle que $\chi = \chi_\omega$ et que $\pi = \mathrm{ind}_{MN}^G(\omega \otimes 1)$ contienne un sous-quotient qui est une représentation de carré intégrable de G.

DÉFINITION 1: On dit que G a un nombre fini d'exposants spéciaux si, pour tout sous-groupe de Levi M de G, les exposants spéciaux de $\mathrm{C_M}$ sont en nombre fini.

Dorénavant, nous supposons que G est semi-simple.

Si $\boldsymbol{M}$ est un sous-groupe de Levi de $\boldsymbol{G}$, soit $\boldsymbol{M}_{\mathrm{der}}$ son groupe dérivé algébrique. Nous supposons, comme dans l'énoncé du Théorème 1, que $M_{\mathrm{der}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{der}}(F)$ a un nombre fini d'exposants spéciaux. Par récurrence sur la dimension de G, nous supposerons donc que la conjecture de Howe est vraie pour tous les sous-groupes de Levi propres de G. Nous fixons un sous-groupe compact-ouvert K de G; il définit une algèbre de Hecke $\mathscr{H} = \mathscr{H}(G, K)$.

1. Une forme faible de la conjecture de Howe

Nous démontrerons tout d'abord le résultat suivant, qui ne concerne que les intégrables orbitales régulières des fonctions de H. Soit T un sous-

[1] Pour alléger la rédaction, nous n'emploierons le terme "supercuspidale" que pour une représentation supercuspidale *irréductible*.

groupe de Cartan de G; si $t \in T_{\text{reg}}$, et $f \in C_c^\infty(G)$, soit

$$\Phi_f(t) = \int_{G/T} f(gtg^{-1}) \mathrm{d}g/\mathrm{d}t.$$

(On a choisi des mesures de Haar $\mathrm{d}g$ sur G et $\mathrm{d}t$ sur T).

PROPOSITION 1: *Soit ω un compact de T.*

Pour $t \in \omega \cap T_{\text{reg}}$, soit λ_t la forme linéaire sur $C_c(G)$ définie par $\lambda_t(f) = \Phi_f(t)$.

Alors les formes linéaires λ_t, pour $t \in \omega \cap T_{\text{reg}}$, engendrent un sous-espace de dimension finie du dual de $\mathscr{H}$.

Il est clair que le Théorème 1 pour G impliquerait la Proposition 1; la réciproque sera démontrée au §5. Les §2 à 4 seront consacrés à la démonstration de la Proposition 1.

2. Tores non elliptiques

Soit $T \subset G$ un sous-groupe de Cartan non elliptique de G: par définition, il existe un parabolique propre $P = MN$ de G tel que $T \subset P$. Si $f \in C_c^\infty(G)$, soit

$$\bar{f}(x) = \int_{K_0} f(kxk^{-1}) \mathrm{d}k, \quad (x \in G),$$

où K_0 est un sous-groupe compact maximal de Bruhat-Tits par rapport à A_0, la composante déployée de M_0 (cf. [16, p. 12]), et $\mathrm{d}k$ la mesure de Haar normalisée sur K_0.

A conjugaison intérieure près, nous pouvons supposer P *standard*. Soit

$$f^{(P)}(m) = \int_N f(mn) \mathrm{d}n, \quad m \in M$$

$$\Delta_{G/M}(m) = \det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(1 - \mathrm{Ad}(m)), \quad m \in M,$$

où $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ désignent les algèbres de Lie sur F de G et M. Pour $x \in F$, soit $|x|$ sa valeur absolue normalisée.

LEMME 1: *Pour des normalisations convenables des mesures de Haar* $\mathrm{d}g$, $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}m$ *et* $\mathrm{d}n$, *on a l'identité*:

$$\Phi_f(t) = |\Delta_{G/M}(t)|^{-1} \Phi^M_{\bar{f}^{(P)}}(t),$$

pour $t \in T_{\text{reg}}$, $f \in C_c^\infty(G)$.

(Dans le membre de droite, l'intégrale orbitale est prise dans M; $t \in T_{\text{reg}}$ est a fortiori régulier dans M).

Cela est bien connu - voir par exemple la démonstration de Kottwitz pour $GL(n)$ dans [13, Lemma 5.5]. Il suffit d'utiliser le fait que $G = K_0MN$ - ceci est déjà vrai pour $P = P_0$, cf. [16] - et que la mesure de Haar de G peut alors être écrite, avec des normalisations adéquates: $\mathrm{d}g = \mathrm{d}k\ \mathrm{d}m\ \mathrm{d}n$ (cf. [6, p. 145]. □

LEMME 2: *Soit K un sous-groupe compact-ouvert de G. Il existe alors un sous-groupe compact-ouvert K_M de M tel que*:

$$f \in \mathscr{H}(G, K) \text{ implique } \bar{f}^{(P)} \in \mathscr{H}(M, K_M).$$

DÉMONSTRATION: Soit $f \in \mathscr{H}(G, K)$. Soit $\{k_i\}$ un ensemble (fini) de représentants dans K_0 de $(K_0 \cap K)\backslash K_0$. Pour $x \in G$,

$$\bar{f}(x) = \int_{(K_0 \cap K)\backslash K_0} f(kxk^{-1})\mathrm{d}k = \sum_i f\left(k_i x k_i^{-1}\right).$$

Soit K' un sous-groupe compact-ouvert de K tel que, pour tout i:

$$k_i K' \subset K k_i$$

et

$$K' k_i^{-1} \subset k_i^{-1} K.$$

Un tel K' existe, puisqu'il existe une base de voisinage de 1 dans G formée de sous-groupes compacts-ouverts. Si $k \in K'$,

$$\bar{f}(kx) = \sum_i f\left(k_i k x k_i^{-1}\right) = \sum_i f\left(k_i x k_i^{-1}\right) = \bar{f}(x)$$

puisque $k_i k \in K k_i$; de même, $\bar{f}(xk) = \bar{f}(x)$. Donc, si $f \in \mathscr{H}(G, K)$, $\bar{f} \in \mathscr{H}(G, K')$. Soit $K_M = M \cap K'$: alors, pour $k \in K_M$:

$$\bar{f}^{(P)}(km) = \bar{f}^{(P)}(m);$$

$$\bar{f}^{(P)}(mk) = \int_N \bar{f}(mkn)\mathrm{d}n = \int_N \bar{f}(mnk)\mathrm{d}n = \bar{f}^{(P)}(m)$$

puisque la mesure $\mathrm{d}n$ est invariante par $\mathrm{Ad}(k)$. Ceci démontre le lemme 2. □

Si T est un tore non-elliptique, la Proposition 1 est maintenant évidente pour T. En effet, la conjecture de Howe étant vraie pour M, il existe des formes linéaires $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sur $\mathscr{H}(M, K_M)$ telles que, si $t \in \omega \cap T^M_{\text{reg}}$ (éléments de T réguliers pour M), et $h \in \mathscr{H}(M, K_M)$:

$$\Phi^M_h(t) = \sum_i a_i(t)\lambda_i(h)$$

pour certaines fonctions $a_i(t)$ de t. Appliquant cette relation à $h = \bar{f}^{(P)}$, et utilisant le Lemme 1, on voit que $\Phi_f(t) = \lambda_i(f)$ s'écrit aussi comme combinaison linéaire des formes linéaires $f \to \lambda_i(\bar{f}^{(P)})$ sur $\mathscr{H}$. □

3. Un peu d'analyse harmonique

Nous démontrons maintenant, en utilisant la théorie des représentations de G, une affirmation duale de la Proposition 1 pour les tores elliptiques. Rappelons une définition due à Harish-Chandra. Si π est une représentation irréductible tempérée de G, soit trace π son caractère-distribution: c'est, d'après Harish-Chandra [10], une fonction localement intégrable sur G. Soit G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G, c'est-à-dire l'ensemble des éléments réguliers contenus dans des tores elliptiques. Nous dirons que π est *elliptique* si la distribution trace π n'est pas identiquement nulle sur l'ouvert G_{ell}. Soit $\mathscr{E}_{\text{ell}}(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles elliptiques de G.

PROPOSITION 2: *Pour* $\pi \in \mathscr{E}_{\text{ell}}(G)$, $f \in C^\infty_c(G)$, *soit*

$$\langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\text{ell}} = \int_{G_{\text{ell}}} f(g) \text{ trace } \pi(g) dg.$$

Alors les formes linéaires $f \to \langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\text{ell}}$ *engendrent, quand* π *décrit* $\mathscr{E}_{\text{ell}}(G)$, *un sous-espace de dimension finie du dual de* $\mathscr{H}(G, K)$.

REMARQUE: La proposition s'étend de manière évidente aux groupes réductifs vérifiant les hypothèses du Théorème 1 (il faut alors considérer les représentations elliptique de caractère central donné).

Le démonstration occupera le reste de ce paragraphe. Nous éliminons tout d'abord un nombre fini de représentations:

LEMME 3: Pour toutes les représentations $\pi \in \mathscr{E}_{\text{ell}}(\text{G})$ sauf peut-être un nombre fini, on a

$$\langle \text{trace } \pi, f \rangle = 0 \text{ pour tout } f \in \mathscr{H}(G, K).$$

DÉMONSTRATION: D'après un principe bien connu, ceci veut dire que seul un nombre fini de $\pi \in \mathscr{E}_{\text{ell}}(G)$ peuvent avoir un vecteur fixe par K.

Supposons d'abord que π appartient *de plus* à la série discrète de G. [2] (Remarquer que, si la conjecture de Howe est vraie pour G, les relations d'orthogonalité pour les caractères de la série discrète impliquent qu'une représentation de carré intégrable est elliptique. Pour l'instant, néanmoins, nous ne connaissons pas ce fait, et nous ne l'utiliserons pas). Soit $C(G)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur G [8], ${}^\circ C(G)$ le sous-espace formé des fonctions dont le terme constant est nul le long de tous les paraboliques propres de G. D'après le théorème de Plancherel pour G (Harish-Chandra [11]), l'adhérence de ${}^\circ C(G)$ dans $L^2(G)$ est la partie discrète de $L^2(G)$. De plus, pour tout K, sous-groupe compact ouvert de G, l'espace des fonctions bi-invariantes par K de ${}^\circ C(G)$ est de dimension finie ([11, Lemme 3]). Donc l'ensemble des $\pi \in \mathscr{E}_2(G)$ - la série discrète de G - contenant un vecteur fixé par K est fini. (On peut aussi donner une démonstration différente; j'utilise les résultats et les notations de [16]. Si $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ est une orbite dans ${}^\circ\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(M)$ - c'est-à-dire une composante connexe de la variété des représentations de G induites de supercuspidales de M - où M est un sous-groupe de Levi de G, il n'y a qu'un nombre fini de points de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ où la représentation induite de G a un sous-quotient appartenant à $\mathscr{E}_2(G)$. Joint à la réciprocité de Frobenius, ceci implique le lemme pour π dans la série discrète). □

L'extension du lemme 3 à toutes les représentations elliptiques résultera du lemme suivant. Si M est un sous-groupe de Levi de G, et π une représentation admissible irréductible de M, nous noterons χ_π son caractère central restreint à $C_M \subset Z_M$.

LEMME 4: *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Il existe alors un ensemble fini X_M de caractères (unitaires) de C_M tels que, δ étant une représentation unitaire de carré intégrable de M: si la représentation* $\mathrm{ind}_{MN}^G(\delta \otimes 1)$ *contient un sous-module elliptique, alors $\chi_\delta \in X_M$.*

Grâce à ce lemme, qui sera démontré dans un instant, nous terminons la démonstration du lemme 3. Si π est une représentation elliptique de G, d'après Harish-Chandra, π est un sous-module d'une induite $\mathrm{ind}_{MN}^G(\delta)$, MN étant un parabolique de G (propre si $\pi \notin \mathscr{E}_2(G)$) et δ une représentation unitaire de carré intégrable de M. (cf. [3, Théorème XI.2.3]). D'après le lemme 4, χ_δ doit appartenir à X_M. Si $\pi|_K$ contient la représentation unité, $\delta|_{K \cap M}$ doit par réciprocité de Frobenius, contenir la représentation unité de $K \cap M$. Puisque $(Z_M \cap K)C_M$ est d'indice fini dans Z_M, ceci ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour le caractère central ω_δ de δ sur Z_M. Mais la partie déjà démontrée du lemme 3 s'étend facilement à G réductif: elle implique que si l'on fixe un caractère

[2] Nous dirons que π est de *carré intégrable*, ou qu'elle *appartient à la série discrète* de G, si ses coefficients sont de carré intégrable modulo le centre de G.

central χ: $Z_G \to \mathbb{C}^\times$, et si $\mathscr{E}_2(G, \chi)$ est l'ensemble des représentations de carré intégrable de caractère central χ, seul un nombre fini de $\pi \in \mathscr{E}_2(G, \chi)$ ont un vecteur fixe par K. Appliquant ceci à $K_M \subset M$, nous voyons qu'il n'y a qu'un nombre fini de possiblités pour δ. Ceci ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour π, démontrant ainsi le lemme 3. □

Le lemme 4 est lui-même un résultat assez profond, qui résulte essentiellement du théorème d'Harish-Chandra caractérisant l'algèbre des opérateurs d'entrelacement des représentations induites. Par commodité, nous citerons en fait une conséquence due à Silberger du théorème d'Harish-Chandra.

Soit δ une représentation unitaire de carré intégrable de M. Soit W_δ le stabilisateur de δ dans $W = W(G, A_M)$. Soit $A = A_M$. Si α est une racine réduite de A dans N, soit $A_\alpha = \mathbf{A}_\alpha(F)$, où $\mathbf{A}_\alpha$ est le tore maximal dans le noyau Ker α de α dans $\mathbf{A}$. Soit M_α le centralisateur de A_α dans G; $MN \cap M_\alpha$ est alors un sous-groupe parabolique maximal de M. Si $\nu \in \boldsymbol{a}_{\mathbb{C}}$, soit $\mu_\alpha(\delta, \nu)$ la fonction méromorphe de ν définie dans [8, p. 184]. La racine α est appelée *spéciale* si $\mu_\alpha(\delta, 0) = 0$.

THÉORÈME 2: (*Silberger* [17]).

(i) *Les racines spéciales forment un système de racines dans un sous-espace de* $\mathfrak{a}$. *Son groupe de Weyl* W_0 *est un sous-groupe invariant de* W_δ.

(ii) *Si* $\pi = \operatorname{ind}(\delta \otimes 1)$,

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_G(\pi, \pi) = [W_\delta : W_0]$$

Ce théorème a la conséquence suivante. Soit $P = M_1 N_1$ un parabolique de G tel que $P \subset P_1 \subset G$. Alors $W(M_1, A) = W_1$ est inclus dans W. Supposons que $W_\delta \subset W_1$. Si α est une racine spéciale de A dans N, $s_\alpha \in W_\delta$, donc $s_\alpha \in W_1$.

En particulier, $\alpha = 1$ sur $A_1 = A_{M_1}$. Donc $N_\alpha \subset M_1 = G^{A_1}$, et α est une racine de A dans $M_1 \cap N$; il est clair que c'est une racine réduite. De plus, $A_1 \subset A$ et donc $M_\alpha \subset M_1$. Cela implique que l'analogue $\mu^1_\alpha(\delta, \nu)$ de $\mu_\alpha(\delta, \nu)$ pour M_1 est en fait égal à $\mu(\delta, \nu)$, puisque le facteur μ_α est "défini dans M_α" [8, p. 184]. Donc les racines spéciales pour N sont les mêmes que les racines spéciales pour $M_1 \cap N$. D'après le théorème 2, on voit donc que:

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_G(\pi, \pi) = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{M_1}(\pi_1, \pi_1)$$

où $\pi_1 = \operatorname{ind}^{M_1}_{M(N \cap M_1)}(\delta \otimes 1)$. Mais alors:

COROLLAIRE: *Supposons que* $W_\delta \subset W_1 = W(M_1, A)$ *pour un parabolique* P_1 *contenant* P.

Alors toute sous-représentation irréductible de π est induite d'une représentation de π_1.

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 4. Supposons que $\pi = \mathrm{ind}_{MN}^{G}(\delta \otimes 1)$ contient un sous-module elliptique. Alors il n'existe pas de parabolique $P_1 \neq G$ satisfaisant aux conditions du Corollaire, car une représentation induite d'un parabolique propre ne peut être elliptique: cela résulte, par exemple des formules donnant le caractère d'une représentation induite (Van Dijk [18]). Par conséquent, pour tout $M_1 \subsetneqq G$ et contenant M, il existe $w \in W_\delta$ tel que $w \notin W(M_1, A)$ Nous allons montrer que ceci oblige $\chi = \chi_\delta$ à appartenir à un ensemble fini déterminé par W_δ.

Rappelons que W agit sur C_M. Puisque $w\delta = \delta$ si $w \in W_\delta$, on a $w\chi = \chi$. L'application $H: M \to \mathfrak{a}$ réalise un isomorphisme de C_M sur un réseau $L_M \subset \mathfrak{a}$. Le groupe des caractères de C_M s'identifie alors à $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*/L_M$, où $L_M = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*\colon \lambda(L_M) \in 2i\pi/\log q\mathbf{Z}\}$, par l'isomorphisme $\lambda \mapsto \chi : \chi(c) = q^{\langle \lambda, H(c)\rangle}$ pour $c \in C_M$. (On a posé $q = |\varpi|^{-1}$, avec la valeur absolue normalisée).

Supposons alors que l'ensemble $\{\chi \in \mathrm{Hom}(C_M, \mathbf{C}^x) : w_\chi = \chi$ pour $w \in W_\delta\}$ est infini. Le groupe W_δ, agissant par automorphismes algébriques sur le tore complexe $\mathrm{Hom}(C_M, \mathbf{C}^x) \cong \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*/L_M$, aurait alors un emsemble de points fixes infini. Ceux-ci forment un sous-groupe du tore complexe; en considérant son algèbre de Lie, on voit alors qu'il doit exister un vecteur non-nul $x^* \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ fixé par W_δ.

Si X est le réseau des caractères de $\boldsymbol{A}$, on a $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^* = X \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{C}$ et l'action de W sur $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ vient d'une action sur X. Par conséquent W fixe un sous-réseau non trivial de X; on a déduit qu'il existe un sous-tore $\boldsymbol{H}$, non trivial, de $\boldsymbol{A}$, fixé par W_δ.

Rappelons qu'un *tore standard* de G est un tore déployé de la forme A_M pour un sous-groupe de Levi M de G. Soit $H = \boldsymbol{H}(F)$, et soit A_1 le plus petit tore standard de G contenant H. Il est clair que $A_1 \subset A$. D'après un lemme de Casselman [4, lemma 1.1.], le centralisateur de H dans G est égal à celui de A_1.

Si $w \in W_\delta$, w centralise H et donc A_1. Soit M_1 le centralisateur de A_1 dans G: c'est un sous-groupe de Levi de G contenant M. Si $\omega \in G$ est un représentant de w, on voit que $\omega \in M_1$. On en déduit que W_δ est contenu dans $W_1 = W(M_1, A)$.

D'après le corollaire du Théorème 2, ceci contredit l'hypothèse que $\pi = \mathrm{ind}(\delta \otimes 1)$ contient un sous-module elliptique. On voit donc que si π contient un sous-module elliptique, l'ensemble des points fixes de W_δ sur $\mathrm{Hom}(C_M, \mathbf{C}^x)$ est fini, et χ_δ appartient à cet ensemble fini. En considérant tous les W_δ possibles apparaissant comme stabilisateurs d'une série discrète δ donnant après induction une représentation contenant un sous-module elliptique, on voit enfin que l'ensemble des χ_δ est fini. Ceci démontre le lemme 4. $\square$

Grâce au lemme 3 (dont la démonstration est maintenant complète), nous pouvons maintenant, pour démontrer la Prop. 2, considérer seulement les représentations $\pi \in \mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ sans vecteur fixé par K. On a alors trace $\pi(f)=0$ pour $f \in \mathscr{H}(G, K)$; la formule d'intégration de Weyl nous permet d'écrire:

$$-\langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\mathrm{ell}} = \sum_{\substack{T \subset G \\ T \text{ non-ell}}} \frac{1}{w_T} \int_{T_{\mathrm{reg}}} |\Delta(t)|^2 \text{ trace } \pi(t) \Phi_f(t) \mathrm{d}t \quad (*)$$

La sommation porte sur les sous-groupes de Cartan non-elliptiques à conjugaison près; w_T est le cardinal de $W(G, T)$, où $W(G, T)=N_G(T)/_T$ est le groupe de Weyl de T; la mesure $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$ définissant Φ_f (cf. §1) est la quotient de la mesure $\mathrm{d}g$ utilisée pour définir $\pi(f)$ et de la mesure $\mathrm{d}t$ figurant dans $\int_{T_{\mathrm{reg}}}$; enfin, $|\Delta(t)| = |D_G(t)|^{1/2}$, où D_G est défini comme en [8].

Nous allons montrer que, quand π est dans $\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)$, les termes figurant dans le membre de droite restent dans un espace fini du dual de $\mathscr{H}$. Pour cela, nous aurons besoin d'un théorème de W. Casselman que nous rappelons maintenant.

Pour l'énoncé de ce théorème, il suffira de supposer G *réductif*. Si T est un sous-groupe de Cartan de G, notons $A_T = A_T(F)$ sa composante déployée. A conjugaison près, on peut supposer $A_T \subset A_0$, où A_0 est la composante déployée de notre parabolique minimal standard.

Soit $\Delta = \Delta(G, A_0)$ l'ensemble des racines de G par rapport à A_0. Si $a \in A_0$, on définit un ensemble parabolique de racines Δ_a de Δ par

$$\alpha \in \Delta_a \Leftrightarrow |a^\alpha| \leqslant 1.$$

Soit $P_a = M_a N_a \supset P_0$ le sous-groupe parabolique de G associé à Δ_a. Les racines de M_a par rapport à A_0 sont l'ensemble $\Delta(M_a, A_0) = \{\alpha \in \Delta(G, A_0): |a^\alpha| = 1\}$; les racines de N_a sont l'ensemble

$$\Delta(N_a, A_0) = \{\alpha \in \Delta(G, A_0): |a^\alpha| < 1\}.$$

Si $\boldsymbol{U}$ est le sous-tore anisotrope maximal de $\boldsymbol{T}$, et $U = \boldsymbol{U}(F)$, $\boldsymbol{T}$ est isogène à $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{A}_T$; en particulier, si $t \in T$, il existe une puissance t^N de t qui se décompose sous la forme $t^N = sa$, $s \in U$, $a \in A_T$. Le groupe $P_t = M_t N_t$ sera alors, par définition, égal à P_a; on vérifie facilement qu'il ne dépend ni de la puissance de t ni de la décomposition choisie. L'élément t appartient à M_t [4].
Remarque: Le groupe P_t est seulement semi-standard - i.e., il contient M_0 - pas nécessairement standard. On peut néanmoins le rendre standard en remplaçant t par un conjugué).

Si $t \in G_{\text{reg}}$, t est *a fortiori* régulier dans M_t. Soit π une représentation admissible de longueur finie de G; son module de Jacquet π_{N_t} est une représentation admissible de M_t [5].

CONVENTION: Si M est un groupe réductif, nous considérons l'espace vectoriel nul comme une représentation de M, de caractère central égal à 0. (En particulier, 0 est considéré comme un caractère de Z_M et C_M). Le caractère-distribution de la représentation nulle est égal à 0. Une représentation irréductible, par définition, est non-nulle.

THÉORÈME 3: (*Casselman* [4]). *Soit π une représentation admissible de longueur finie de G, T un sousgroupe de Cartan de G. Soit $t \in T_{\text{reg}}$, $P_t = M_t N_t$. Alors*:

$$\operatorname{trace} \pi(t) = \operatorname{trace} \pi_{N_t}(t).$$

L'égalité est une égalité de fonctions (les deux caractères sont définis au point t). Si π est supercuspidale, ceci est dû à Deligne [7].

Décomposons, suivant le théorème de Casselman, chaque sous-groupe de Cartan T de G en une réunion finie de sous-ensembles S nommés *strates* de T, définis par la condition suivante: t, t' sont dans la méme strate si $P_t = P_{t'}$. Une strate S définit donc un parabolique $P_S = M_S N_S$.

Soit S une strate de T. Soit T_0 le sous-groupe compact maximal de T. Comme la définition de S ne met en jeu que des valeurs absolues de racines, il est clair que S est invariante par multiplication par T_0. Notons C_S le groupe C_{M_S} défini après l'Introduction pour $M = M_S$.

LEMME 5: *Il existe une famille finie (t_i) d'éléments de T, et pour tout i un sous-ensemble C_S^i de C_S, tels que S soit une réunion (disjointe)*:

$$S = \coprod_i \coprod_{c \in C_S^i} (t_i c T_0).$$

DÉMONSTRATION: (On supposera toujours que G, pour l'instant, est seulement réductif). La condition définissant S ne portant que sur des valeurs absolues, S contient des éléments réguliers de T. On a vu que t appartenait à M_t, donc $S \subset M_S$. Si $t \in S$ est régulier, $t \in M_S$ implique que $T \subset M_S$ puisque M_S est un sous-groupe de Levi. Donc: $S \subset T \subset M_S$.

Supposons d'abord que $M_S = G$. Soit Z le centre de G, $T_{\text{ad}} = T/Z$. S est alors l'image réciproque dans T du sous-groupe de T_{ad} où toutes les racines de G (prises peut-être sur une extension algébrique) sont de valeur absolue égale à 1. Il est clair que $S/C_S = S/C_G$ est compact. Puisque T_0 est ouvert dans T, on peut évidemment trouver des t_i en nombre fini tels que $S = \coprod_i \coprod_{c \in C_S} t_i c T_0$.

Considérons maintenant le cas général; soit $S \subset T \subset M_S$. Si $s \in S$, nous pouvons considérer, en utilisant M_S au lieu de G comme groupe de référence, le groupe $(M_S)_s$ défini par la construction précédant le théorème 3. Il est clair qu'alors $(M_S)_s = M_S$. Soit Σ l'ensemble des t tels que $(M_S)_t = M_S$. D'après ce qui précède, on a $\Sigma = \coprod_t \coprod_{c \in C_S} t_t c T_0$, avec des t_t en nombre fini. Puisque $S \subset \Sigma$, et que S est stable par T_0, ceci implique le lemme 5. □

Nous utilisons maintenant le théorème de Casselman, et la décomposition en strates, pour réécrire l'expression $(*)$ donnant le caractère elliptique de π sur $f \in \mathscr{H}$ lorsque π n'a pas de vecteur fixe par K:

$$-\langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\text{ell}} = \sum_{\substack{T \subset G \\ T \text{ non-ell}}} \sum_{\substack{S \\ \text{strate de} \\ T}} \frac{1}{w_T}$$

$$\times \int_{S \cap T_{\text{reg}}} |\Delta(t)|^2 \text{ trace } \pi_{N_S}(t) \Phi_f(t) \mathrm{d}t. \qquad (**)$$

Nous commençons maintenant la démonstration de la Proposition 2. Bien que cela ne soit pas logiquement indispensable, nous divisons l'ensemble $\mathscr{E}_{\text{ell}}(G)$ en trois sous-ensembles: les représentations supercuspidales, les représentations de la série discrète (non supercuspidales), les représentations elliptiques (n'appartenant pas à la série discrète). Pour chaque sous-ensemble, nous montrerons que les formes linéaires $\langle$trace $\pi, . \rangle_{\text{ell}}$ restent dans un espace fini.

Soit donc, tout d'abord, π supercuspidale. Considérons la somme figurant dans le membre de droite de $(**)$. D'après le Théorème 3, pour π supercuspidale, une seule strate de chaque tore T donne une contribution non nulle, la strate S telle que $M_S = G$. D'après le lemme 5, S est compacte modulo C_G; puisque G est semi-simple, S est compacte. Nous pouvons donc appliquer la Proposition 1 pour les tores non-elliptiques, où elle est déjà démontrée: grâce à elle, on voit facilement que pour chaque tore T, le terme associé à T dans $(**)$, considéré comme une forme linéaire en $f \in H$, reste dans un espace fixe de dimension finie du dual de H. Cela démontre la Proposition 2 pour les représentations supercuspidales.

Considérons maintenant les π appartenant à la série discrète. Pour vérifier que $f \mapsto \langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\text{ell}}$ reste dans un espace de dimension finie, il suffit de considérer séparément chaque terme du membre de droite de $(**)$. Fixons donc une strate $S \subset T$.

Supposons que trace $\pi_{N_S} \not\equiv 0$ sur S, d'où $\pi_{N_S} \neq 0$. Si $\sigma' = \sigma\delta_S^{1/2}$ est un quotient irréductible de π_{N_S} (σ est donc une représentation de M_S), on a, par réciprocité de Frobenius [(1,5]):

$$\operatorname{Hom}_G\left(\pi, \operatorname{ind}_{M_S N_S}^G(\sigma \otimes 1)\right) = \operatorname{Hom}_{M_S}\left(\pi_{N_S}, \sigma\delta_S^{1/2}\right) \neq 0,$$

δ_S désignant la fonction module de P_S, considérée comme caractère de M_S.

D'après un théorème de Jacquet (cf. [1,5,16], on peut réaliser σ comme sous-module d'une représentation de M_S induite à partir d'une représentation supercuspidale τ de M_1, où $P_1 = M_1 N_1$ est un parabolique inclus dans M_S:

$$\sigma \hookrightarrow \operatorname{ind}_{M_1(N_1 \cap M_S)}^{M_S}(\tau \otimes 1)$$

où $\hookrightarrow$ désigne un plongement de représentations admissibles. Par induction par étages:

$$\pi \hookrightarrow \operatorname{ind}_{M_1 N_1}^{G}(\tau \otimes 1).$$

On a supposé que G avait un nombre fini d'exposants spéciaux. Autrement dit, si MN est un parabolique (propre) de G, il existe un ensemble fini, que nous noterons Y_M, de caractères de C_M, tel que tout exposant spécial de M soit dans Y_M.

Appliquant ceci à M_1, on voit que le caractère central χ_τ de τ sur C_{M_1} appartient à Y_{M_1}. Puisque $M_S \supset M_1$, on a $A_S \subset A_1 = A_{M_1}$, d'où $C_S \subset C_{M_1}$. Il est clair que sur C_S, χ_τ et χ_σ coïncident. Par conséquent, le caractère central de σ sur C_S appartient à $Y_{M_1}|_{C_S}$. Si l'on considère tous les $M_1 \subset M_S$, on voit qu'en définitive χ_σ, et donc aussi χ_σ, doit rester dans un ensemble fini, indépendant de π, de caractères de C_S. On peut appliquer ceci à tous les quotients irréductibles σ' de π_{N_S}. Puisque π_{N_S} admet une décomposition en somme directe suivant les caractères de C_S, on en déduit enfin que les caractères de C_S apparaissant comme caractères centraux dans π_{N_S} restent dans un ensemble fini, indépendant de π.

Nous utilisons maintenant la décomposition du lemme 5:

$$S = \coprod_i \coprod_{c \in C_S'} (t_i c T_0).$$

Dans cette décomposition, la restriction à S de la mesure de Haar sur T est un multiple fixe de $\mathrm{d}t_0$, la mesure de Haar sur T_0. On peut donc réécrire le terme associé à S dans $(**)$, à un scalaire près, comme

$$I_S = \sum_i \sum_{c \in C_S'} \int_{T_0} |\Delta(t_i c t_0)|^2 \text{ trace } \pi_{N_S}(t_i c t_0) \Phi_f(t_i c t_0) \mathrm{d}t_0.$$

Décomposant π_{N_S} suivant l'ensemble (fini) de caractères χ de C_S qui peuvent y apparaître comme caractères centraux, on obtient enfin une expression de la forme $I_S = \sum_\iota \sum_\chi I_{S,\iota,\chi}$ avec

$$I_{S,\iota,\chi} = \sum_{c \in C_S^\iota} \int_{T_0} |\Delta(t_\iota c t_0)|^2 \text{ trace } \pi_{N_S}^\chi(t_\iota t_0)\chi(c) \cdot \Phi_f(t_\iota c t_0) \mathrm{d}t_0,$$

où $\pi_{N_S}^\chi$ est le sous-module de type χ de π_{N_S}.

Soit $P = MN = M_S N_S$. Ecrivons $g = \bar{f}^{(P)}$. Puisque $T \subset M$, on a, d'après le lemme 1:

$$\Phi_f(t) = |\Delta_{G/M}(t)|^{-1} \Phi_g^M(t).$$

Si $c \in C_S = C_M$, c est central dans M. Donc, en notant $c * g$ la fonction $m \mapsto g(\mathrm{cm})$ sur M:

$$\Phi_g^M(ct) = \Phi_{c*g}^M(t), \qquad t \in T_{\text{reg}}, \quad c \in C_M.$$

Par conséquent:

$$I_{S,\iota,\chi} = \sum_{c \in C_S^\iota} \int_{T_0} |\Delta(t_\iota c t_0)|^2 \chi(c) |\Delta_{G/M}(t_\iota c t_0)|^{-1} \cdot$$

$$\cdot \text{trace } \pi_N^\chi(t_\iota t_0) \Phi_{c*g}^M(t_\iota t_0) \mathrm{d}t_0.$$

Puisque T_0 est compact dans T, on a, d'après la Proposition 1:

$$\Phi_g^M(t_\iota t_0) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(g) a_j(t_\iota t_0) \quad \text{pour } g \in \mathscr{H}(M, K_M);$$

ici, K_M est défini comme dans le lemme 2; les λ_j sont des formes linéaires sur $\mathscr{H}(M, K_M)$, que nous supposons linéairement indépendantes; cela implique que $a_j(t_\iota t_0)$ est, pour tout j, de la forme $\Phi_{g_j}^M(t_\iota t_0)$ pour une certaine fonction $g_j \in \mathscr{H}(M, K_M)$: en particulier $a_j(t_\iota t_0)$ est une fonction localement constante sur $(t_\iota T_0) \cap T_{\text{reg}}$, intégrable sur $t_\iota T_0$. On peut donc réécrire:

$$I_{S,i,\chi} = \sum_{j=1}^N \Bigg(\sum_{c \in C_S^\iota} \int_{T_0} |\Delta(t_i c t_0)|^2 \chi(c) |\Delta_{G/M}(t_i c t_0)|^{-1} \cdot$$

$$\cdot \text{trace } \pi_N^\chi(t_i t_0) \lambda_j(c * g) a_j(t_\iota t_0) \mathrm{d}t_0 \Bigg).$$

LEMME 6: *Il existe, pour tout i, une fonction* η_i: $C_S \to \mathbb{R}_+$ *telle que si* $t = t_i c t_0$, *avec* $t_0 \in T_0$, $c \in C_s$, $t \in S$:

$$|\Delta_{G/M}(t)| = \eta_i(c).$$

C'est clair: *si* $\mathfrak{g}$ *est l'algèbre de Lie de* G, $\mathfrak{m}$ *celle de* M,

$$|\Delta_{G/M}(t)| = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(1 - \mathrm{Ad}(t))| \quad \text{pour } t \in T.$$

Le tore T se déploie sur une extension assez grande, soit E, de F; sur E, on a une décomposition triangulaire $\mathfrak{g} \otimes E = (\mathfrak{m} \otimes E) \oplus (\mathfrak{n}^+ \otimes E) \oplus (\mathfrak{n}^- \otimes E)$ et, pour une normalisation convenable de la valeur absolue sur E, l'on a:

$$|\Delta_{G/M}(t)| = \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}_E^+, \mathfrak{t}_E)} |1 - t^\alpha|_E \cdot |1 - t^{-\alpha}|_E$$

où les α sont maintenant des caractères rationnels du tore déployé. On a alors: $|(t_i c t_0)^\alpha| < 1$ et donc $|1 - (t_i c t_0)^\alpha| = 1$, $|1 - (t_i c t_0)^{-\alpha}| = |(t_i c t_0)^{-\alpha}| = |(t_i c)^{-\alpha}|$ indépendemment de t_0. Ceci démontre le Lemme. □

Si Δ_M est l'analogue de Δ, mais défini dans le groupe M au lieu de G, on a $|\Delta(t)|^2 |\Delta_{G/M}(t)|^{-1} = |\Delta_M(t)|^2 \cdot |\Delta_{G/M}(t)|$; de plus $\Delta_m(ct) = \Delta_M(t)$ si $c \in C_M$, car Δ_M s'exprime à l'aide des racines de T dans M et C_M est central. En appliquant le lemme 6, on obtient:

$$I_{S,i,\chi} = \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{c \in C_S^i} \eta_i(c) \chi(c) \lambda_j(c * g) \Big) \int_{T_0} |\Delta_M(t_i t_0)|^2 .$$

$$\cdot \operatorname{trace} \pi_N^\chi(t_i t_0) a_j(t_i t_0) \mathrm{d} t_0 .$$

Mais ceci exprime $I_{S,i,\chi}$ comme une combinaisons linéaire (avec des coefficients dépendant de π) des formes linéaires sur H:

$$f \to \sum_{c \in C_S^i} \eta_i(c) \chi(c) \lambda_j(c * \bar{f}^{(P)}).$$

Prenant la somme des termes sur tous les triplets (S, i, χ), on voit enfin que la forme linéaire $f \mapsto \langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\mathrm{ell}}$ est dans un espace fixe de fonctionnelles sur $\mathscr{H}$, indépendantes de π. Ceci achève la démonstration de la Proposition 2 en ce qui concerne les représentations de la série discrète.

Nous devons encore considérer les représentations elliptiques qui n'appartiennent pas à la série discrète. Soit $P = MN$ un parabolique (standard) de G. On va montrer qu'il existe un ensemble fini de caractères de C_M tel que, si π est une représentation elliptique (non discrète) de G et si $\pi_N \neq 0$, les exposants centraux de π_N sur C_M appartiennent à cet ensemble. A partir de cela, la démonstration procède exactement comme pour les représentations de la série discrète.

Supposons donc π (irréductible) elliptique. Supposons que $\pi \hookrightarrow \mathrm{ind}_{M_1N_1}^G(\delta)$ pour une représentation unitaire irréductible de la série discrète de M_1. (Un tel plongement existe d'après un théorème d'Harish-Chandra, cf. Borel-Wallach [3, Théorème XI.2.3].) D'après un théorème de Jacquet déjà cité, on peut supposer que $\delta \hookrightarrow \mathrm{ind}_{M_2(N_2 \cap M_1)}^{M_1}(\sigma_2)$, σ_2 étant une représentation supercuspidale de $M_2 \subset M$.

Soit $P = MN$, et supposons que le module de Jacquet π_N est non nul. Par réciprocité de Frobenius, il existe donc un plongement $\pi \hookrightarrow \mathrm{ind}_{MN}^G(\sigma)$, pour tout quotient irréductible σ de $\pi_N \delta_p^{-1/2}$. Réalisons σ comme un sous-module de $\mathrm{ind}_{M_3(N_3 \cap M)}^M(\sigma_3)$, σ_3 étant une représentation supercuspidale irréductible de M_3. L'induction par étapes nous donne des applications:

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{ind}_{M_1N_1}^G \ \mathrm{ind}_{M_2(N_2 \cap M_1)}^{M_1} \sigma_2 = \mathrm{ind}_{M_2N_2}^G \sigma_2$$

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{ind}_{MN}^G \ \mathrm{ind}_{M_3(N_3 \cap M)}^M \sigma_3 = \mathrm{ind}_{M_3N_3}^G \sigma_3.$$

Si MN et $M'N'$ sont des paraboliques, et σ, σ' des représentations *supercuspidales* de M et M' respectivement, le résultat fondamental de classification des représentations irréductibles admissibles (Théorème 6.3.6 de [5], cf. aussi [1,16]) dit que les induites à G de σ et σ' sont disjointes à moins que les données (M, σ) et (M', σ') ne soient conjuguées. En appliquant cela à (M_2, σ_2) *et* (M_3, σ_3), on voit qu'il existe $g \in G$ tel que

$$M_3 = gM_2g^{-1} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = g \cdot \sigma_2.$$

Si MN et $M'N'$ sont des paraboliques associés - c'est-à-dire si M et M' sont conjugués - il est facile de calculer les exposants de π_N en fonction de ceux de $\pi_{N'}$. (cf. par ex. [5, Théorème 6.3.6 et Corollaire 6.3.7]). Grâce à cela, nous pouvons supposer, tout d'abord que $M_3 = M_2$, puis que $P_3 = P_2$, et $\sigma_3 = \sigma_2$. En particulier, $P \supset P_2$.

Considérons de nouveau les plongements:

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{ind}_{M_1N_1}^G(\delta)$$

$$\delta \hookrightarrow \mathrm{ind}_{M_2(M_1 \cap N_2)}^{M_1}(\sigma_2).$$

D'après le lemme 4, le caractère central χ_δ de δ sur C_{M_1} appartient à l'ensemble fini X_{M_1}.

Soit $M_{1,\mathrm{der}}$ le groupe dérivé de M_1. La représentation restreinte $\delta\,|\,_{M_{1,\mathrm{der}}}$ est une somme de représentations de la série discrète (en fait une somme finie d'après un résultat de Silberger, mais nous n'avons pas besoin de ce fait). Soit $C_{M_2}^{\mathrm{der}}$ le groupe C_A (§0) pour $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{M_2} \cap \boldsymbol{M}_{1,\mathrm{der}}$. L'hypothèse fondamentale du théorème 1 sur les exposants spéciaux, appliquée à M_1, dit que la restriction de χ_{σ_2} au sous-groupe $C_{M_2}^{\mathrm{der}}$ de C_{M_2} est dans un ensemble fini $Y_{M_2}^{\mathrm{der}}$, indépendant de π.

Puisque $M_2 \subset M_1$, $C_{M_2} \supset C_{M_1}$. Il est clair, par induction de M_2 à M_1, que χ_δ et χ_{σ_2} coïncident sur C_{M_1}. Puisque les groupes C associés aux tores déployés ont les mêmes relations d'inclusion que les réseaux de cocaractères des tores, le groupe $C_{M2}^{\mathrm{der}} \cdot C_{M_1}$ est commensurable à C_{M_2} (i.e., $C_{M_2} \cap C_{M_2}^{\mathrm{der}} C_{M_1}$ est d'indice fini dans C_{M_2}). Puisque nous avons vu qu'il n'y avait qu'un nombre fini de possiblités pour la restriction de χ_{σ_2} à C_{M_1} (grâce au lemme 4) et à $C_{M_2}^{\mathrm{der}}$ (grâce à l'hypothèse fondamentale), nous obtenons un ensemble fixe, indépendant de π, contenant le caractère central χ_{σ_2} sur C_{M_2}.

Revenant alors au parabolique $P = MN$ tel que $\pi_N \neq 0$, et au plongement $\sigma \to {}^{M}_{M_3(N_3 \cap M)}(\sigma_3)$, nous voyons que $\chi_\sigma = \chi_{\sigma_3}\,|\,_{C_M} = \chi_{\sigma_2}\,|\,_{C_M}$ appartient de nouveau à un ensemble fini, indépendant de π, de caractères de C_M. Nous pouvons appliquer ceci à tous quotients irréductibles σ de $\pi_N \delta_p^{-1/2}$: nous voyons donc que les exposants centraux (sur C_M) de π_N sont dans un ensemble fixe et fini. Ceci termine la démonstration de la Proposition 2. □

4. Démonstration de la proposition 1 (tores elliptiques)

Nous pouvons maintenant démontrer la Proposition 1 pour les sous-groupes de Cartan elliptiques. Nous utilisons un résultat de densité démontré récemment par D. Kazhdan, à l'aide de la forme faible de la formule des traces de Selberg due à Deligne et Kazhdan.

THÉORÈME 4: (*D. Kazhdan*). *Soit* $\boldsymbol{G}$ *un groupe réductif connexe défini sur* F *et soit* $G = \boldsymbol{G}(F)$.

Soit $f \in C_c^\infty(G)$ *une fonction telle que, pour toute représentation tempérée de* G, trace $\pi(f) = 0$. *Alors, si* Θ *est une distribution invariante sur* G,

$$\langle \Theta, f \rangle = 0.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1: Nous appliquerons ceci aux distributions λ_t: $f \to \Phi_f(t)$ associés aux éléments elliptiques réguliers. Nous supposons de nouveau que G satisfait aux hypothèses du théorème 1. Soit r un plongement de $\boldsymbol{G}$ dans $GL(N)$ défini sur F, pour un N assez grand. Considérons l'application p: GL(N) $\to \mathbb{A}^N$, l'espace affine de dimension N, donnée par les coefficients du polynôme caractéristique. Si Ω est compact dans G, et engendre par conjugaison l'ensemble Ω^G, l'ensemble $r \circ p(\Omega) = r \circ p(\Omega^G)$ est compact dans $F^N = \mathbb{A}^N(F)$. Soit ω un sous-ensemble compact et ouvert de F^N contenant $r \circ p(\Omega)$. Alors $(r \circ p)^{-1}(\omega)$ est un ensemble ouvert fermé, et invariant de G contenant Ω; son intersection avec tous les sous-groupes de Cartan de G est compacte (cf. [19]).

En particulier, il existe un sous-ensemble invariant, ouvert et fermé V de G contenant tous les sous-groupes de Cartan elliptiques et tel que, si T est un sous-groupe de Cartan (elliptique ou non) de G, $V \cap T$ est compact. Considérons alors les formes linéaires suivantes sur $\mathscr{H}(G, K)$:
(a) $f \to \langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\text{ell}}, \quad \pi \in \mathscr{E}_{\text{ell}}(G)$.
(b) $f \to \Phi_f(t)$, $t \in T_{\text{eg}} \cap V$, $\quad T$ non elliptique.

D'après la Proposition 1 pour les tores non-elliptiques, les formes (b) engendrent un espace de dimension finie. D'après la proposition 2, il en est de même pour les formes (a). Si (λ_i) est une base de l'ensemble engendré par les formes (a) et (b) dans le dual de H, et si (f_i) est un ensemble dual dans H, on voit que pour tout $f \in H$, la fonction $h = f - \Sigma\lambda_i(f) f_i$ satisfait:
(a′) $\langle \text{trace } \pi, f \rangle_{\text{ell}} = 0, \quad \pi \in \mathscr{E}_{\text{ell}}(G)$
(b′) $\Phi_h(t) = 0, \quad t \in T_{\text{reg}} \cap V, \quad T$ non elliptique.

Soit $g = \chi_V h \in C_c^\infty(G)$, où χ_V est la fonction caractéristique de l'ensemble V. Alors

$$\langle \text{trace } \pi, g \rangle_{\text{ell}} = \langle \text{trace } \pi, h \rangle_{\text{ell}} = 0$$

pour tout $\pi \in E_{\text{ell}}(G)$, et $\Phi_g(t) = 0$ pour tout $t \in T_{\text{reg}}$, et T non-elliptique.

Puisque les représentations tempérées non-elliptiques ont, par définition, un caractère nul sur l'ensemble elliptique, la nullité des intégrales orbitales non-elliptiques implique que $\langle \text{trace } \pi, g \rangle = 0$, π tempérée non-elliptique; de plus, si π est elliptique:

$$\langle \text{trace } \pi, g \rangle = \langle \text{trace } \pi, g \rangle_{\text{ell}} = 0.$$

Donc la trace de g est nulle dans toutes les représentations tempérées; d'après le théorème de Kazhdan, toutes les intégrales orbitales de g sont nulles. Ceci implique que les intégrales orbitales de h sur l'ensemble régulier elliptique sont nulles, ce qui, à son tour, signifie que toutes les intégrales orbitales régulières elliptiques, comme formes linéaires sur H, sont dans l'espace engendré par les λ_i. Ceci démontre la Proposition 1. $\square$

5. Demonstration de la conjecture de Howe pour les groupes à nombre fini d'exposants spéciaux

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 1. Rappelons-le: K est un sous-groupe ouvert-compact de G, $\mathscr{H}=\mathscr{H}(G, K)$, $J(\Omega)$ est l'espace des distributions invariantes à support dans $\overline{\Omega^G}$.

THÉORÈME 1: (*On suppose que, pour tout sous-groupe de Levi M de G, M_{der} a un nombre fini d'exposants spéciaux*).
Alors l'espace des restrictions à $\mathscr{H}$ des distributions de $J(\Omega)$ est de dimension finie.

Pour la démonstration, nous utiliserons le théorème suivant (non publié) de Harish-Chandra; on peut en fournir une démonstration utilisant des résultats (maintenant) bien connus sur les germes de Shalika (cf. Vignéras [19]), y compris l'indépendance linéaire des germes de Shalika démontrée par Harish-Chandra [10] et étendue par Rogawski ([15, lemma 2.5]).

THÉORÈME 5: (*Harish-Chandra*).
Soit $f \in C_c^\infty(G)$ une fonction telle que

$$\Phi_f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in G_{\mathrm{reg}}.$$

Alors, si Θ est une distribution invariante sur G,

$$\langle \Theta, f \rangle = 0.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1: Comme dans le §5, choisissons un sous-ensemble invariant, ouvert et fermé V de G contenant $\overline{\Omega^G}$ et tel que $V \cap T$ est compact pour tout sous-groupe de Cartan T de G. D'après la Proposition 1, nous pouvons trouver des formes linéaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur H et des fonctions $f_1, \dots, f_n \in H$ telles que, si $g = f - \Sigma\lambda_i(f)f_i$:

$$\Phi_g(t) = 0, \quad \text{si } t \in V \cap T_{\mathrm{reg}}, \text{ pour tout } T.$$

Soit $h = \chi_V g \in C_c^\infty(G)$. Toutes les intégrales orbitales régulières de h s'annulent, donc, d'après le théorème de Harish-Chandra, $\langle \Theta, h \rangle = 0$ pour toute distribution invariante Θ sur G. Si le support de Θ est dans $\overline{\Omega^G} \subset V$, on a $\chi_V \Theta = \Theta$. Ceci implique: $\langle \Theta, g \rangle = \langle \chi_V \Theta, g \rangle = \langle \Theta, \chi_V g \rangle = 0$. Ceci implique que Θ, comme forme linéaire sur H, est dans l'espace engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. □

6. Finitude de l'ensemble des exposants spéciaux pour $SL(n)$

On vérifie ici que $GL(n)$ satisfait aux hypothèses du Théorème 1. Il s'agit de vérifier que, pour tout n, $SL(n, F)$ a un nombre fini d'exposants spéciaux.

Soit d'abord $G = GL(n, F)$. D'après Zelevinsky [22], toute représentation de la série discrète de G se réalise de la façon suivante. Soit $P = MN$ un parabolique homogène de G, i.e., un parabolique tel que $M \cong GL(a, F) \times \ldots \times GL(a, F)$ (b facteurs), où $n = ab$ est une décomposition de n en facteurs. Si $g \in GL(a, F)$, soit $\nu(g) = |\det g|_F$, la valeur absolue normalisée du déterminant de g. Soit ω une représentation irréductible supercuspidale de $GL(a, F)$. Alors l'induite

$$\mathrm{ind}_{MN}^{G}(\omega \otimes \nu\omega \otimes \ldots \otimes \nu^{b-1}\omega)$$

a un unique quotient irréductible π: c'est une représentation irréductible de carré intégrable de G. De plus, toutes les représentations de carré intégrable de G sont obtenues de cette manière, et toute représentation induite (d'une supercuspidale) contenant un sous-quotient de carré intégrable est de la forme $\mathrm{ind}_{MN}^{G}(\omega_M)$ pour un parabolique homogène MN et pour une représentation ω_M conjuguée par le groupe de Weyl $W(G, A_M)$ d'une représentation du type indiqué.

Considérons le parabolique homogène P et son sous-groupe de Levi $M \cong GL(a, F)^b$. Le centre Z_M de M est évidemment isomorphe à $(F^\times)^b$, et $C_M \subset Z_M$ s'identifie naturellement à $\mathbb{Z}^b \cong (\mathbb{Z}_\varpi)^b \subset (F^\times)^b$ (cf. §0). Soit alors $\omega_M = \omega \otimes \nu\omega \otimes \ldots \otimes \nu^{b-1}\omega$ un "point spécial" dans le dual supercuspidal de M. (Modulo $W(G, A_M)$, tous sont donc de ce type). Si χ_ω est le caractère central de restreint à $\mathbb{Z}_\varpi \subset F^x \subset GL(a, F)$, le caractère central de ω_M sur $C_M \cong (\mathbb{Z}_\varpi)^b$ s'écrit donc:

$$\chi_{\omega_M} = \chi_\omega \otimes \left(|\,|_F^{a}\chi_\omega\right) \otimes \ldots \otimes \left(|\,|_F^{a(b-1)}\chi_\omega\right).$$

Le groupe C_G associé à G s'identifie évidemment à $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_\omega$, plongé diagonalement dans $C_M = (\mathbb{Z}_\varpi)^b$. Supposons que de plus le caractère central χ_ω sur C_G est fixé. Alors on doit avoir

$$\chi_\pi = \chi_{\omega_M}|_{C_G} = (\chi_\omega)^b \cdot \left(|\,|_F^{a+2a+\ldots+a(b-1)}\right)$$

soit:

$$\chi_\pi = (\chi_\omega)^b \cdot |\,|_F^{ab(b-1)/2}.$$

Si χ_π est fixé, ceci ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour χ_ω. Il n'y a encore qu'un nombre fini de possiblités pour les permutés de χ_ω par $W(G, A_M)$; on a donc démontré:

PROPOSITION 3: *Soit* $G = GL(n, F)$. *Soit* $C_G = \mathbb{Z}_{\varpi} \subset F^{\times} \cong Z_G$.

Si $P = MN$ *est un parabolique de* G, *et si* χ *est un caractère de* C_G, *il existe un ensemble fini* $Y_M(\chi)$ *ayant la propriété suivante*:

Si ω_M *est une représentation supercuspidale de* M *telle que la représentation* $\operatorname{ind}_{MN}^G(\omega_M \otimes 1)$ *de* G *contient un sous-quotient de carré intégrable et de caractère central* χ *sur* C_G, *alors le caractère central* χ_{ω_M} *de* ω_M *sur* C_M *appartient à* $Y_M(\chi)$.

Soit maintenant $G = SL(n, F)$. Si π est une représentation tempérée irréductible de G, il existe une représentation tempérée irréductible $\tilde{\pi}$ de GL(n, F) dont la restriction à G est de longueur finie et contient π (cf. e.g. [20, lemma 2.3]. Si π est de plus supposée de carré intégrable, il est clair que $\tilde{\pi}$ est aussi de carré intégrable. On voit alors facilement qu'on obtient les exposants spéciaux de SL(n) par restriction (aux groupes $C_M \subset C_{\tilde{M}}$, ou MN est un parabolique de G et MN le parabolique engendré par MN dans GL(n, F)) des exposants spéciaux de GL(n). Par conséquent:

COROLLAIRE: $G = SL(n, F)$ *a un nombre fini d'exposants spéciaux.*

On remarquera qu'on n'a pas eu à supposer ici le corps F de caractéristique nulle.

Nous terminons en expliquant comment la démonstration donnée ici de la conjecture de Howe s'étend, modulo un résultat très plausible sur la fonctorialité de Langlands pour les algèbres simples centrales, aux groupes multiplicatifs des algèbres simples centrales sur F.

Soit donc D une algèbre simple centrale sur le corps F, de degré m^2. Considérons le groupe $G = GL(r, D)$, avec $r > 1$. (On suppose aussi $m > 1$). Le groupe G est une forme intérieure, sur F, du groupe $GL(n, F)$ où $n = mr$. Les sous-groupes de Cartan de G s'identifient naturellement à certains sous-groupes de Cartan de $GL(n, F)$; si g est un élément semi-simple de G, il s'identifie alors à un élément de $GL(n, F)$ bien défini à conjugaison près, et les éléments réguliers s'envoient ainsi sur des éléments réguliers de $GL(n, F)$ (cf. e.g. [21]). Soit $\tilde{G} = GL(n, F)$. Si $t \in G$, on notera $\psi(t)$ son image dans $\tilde{G}$, définie donc à conjugaison près.

HYPOTHÈSE 1: *Il existe une bijection* ψ_*: $\mathscr{E}_2(G) \to \mathscr{E}_2(\tilde{G})$ *entre les séries discrètes de* G *et* $\tilde{G}$, *satisfaisant la condition suivante*: *soit* $\pi \in \mathscr{E}_2(G)$, $\tilde{\pi} = \psi_*(\pi) \in \mathscr{E}_2(G)$; *soit* Θ_π, $\Theta_{\tilde{\pi}}$ *leurs caractères. Alors, si* $t \in G_{reg}$:

$$(-1)^r \Theta_\pi(t) = (-1)^n \Theta_{\tilde{\pi}}(\psi(t)).$$

Cette égalité a un sens, puisque $\Theta_{\tilde{\pi}}$ *est invariant par conjugaison.*

Le théorème formulé ici comme "Hypothèse 1" a été annoncé par Deligne, Kazhdan et Vignéras, et l'on espère qu'une démonstration paraîtra bientôt. Si $r = 1$, de sorte que $G = D^{\times}$, une démonstration a été donnée par Rogawski [21] - mais la conjecture de Howe pour G est alors évidente! (Nous n'avons en fait pas besoin de l'assertion complète de l'Hypothèse 1: il suffirait qu'il existe au moins, pour tout $\pi \in \mathscr{E}_2(G)$, une représentation $\tilde{\pi}$ satisfaisant l'identité des caractères).

Si l'Hypothèse 1 est vérifiée, l'identité de caractères entre π et $\tilde{\pi}$ implique immédiatement, à l'aide du Théorème 3 reliant caractères et modules de Jacquet, la finitude de l'ensemble des exposants spéciaux pour les sous-groupes de levi de G. On a donc:

PROPOSITION 4: *Supposons que l'Hypothèse* 1 *est vraie.*
Alors la conjecture de Howe est vraie pour G.

Ajouté sur épreuves: l'Hypothese 1, ainsi que le Théoréme 5, sont maintenant démontres dans: Bernstein, Deligne, Kazhdan, Vignéras, *Representation des groupes reductifs sur un corps local*, Hermann, Paris 1984. Le Theorème 4 est démontré dans D. Kazhdan, "Cuspidal Geometry of p-adic Groups", à paraître.

Bibliographie

[1] I.N. BERNSTEIN, A.V. ZELEVINSKI: Induced representations of reductive p-adic groups I. *Ann. Sc. E.N.S.* 4e série 10 (1977) 441–472.

[2] A. BOREL, J. TITS: Groupes réductifs sur un corps local I. *Publ. Math. I.H.E.S.* 41 (1972) 5–252

[3] A. BOREL, N. WALLACH: *Continuous chohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Annals of Math. Studies.* Princeton U. Press (1980).

[4] W. CASSELMAN: Characters and Jacquet modules. *Math. Ann.* 230 (1977) 101–105.

[5] W. CASSELMAN: Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, to appear in Annals of Math. Studies.

[6] P. CARTIER: Representations of p-adic groups. In: *Automorphic Forms, Representations and L-functions, Proceedings of Symposia in Pure Math.* XXXIII (1) (1979) 111–155.

[7] P. DELIGNE: Le support du caractère d'une représentation supercuspidale. *C.R. Acad. Sc. Paris Ser.* A-B 283 n°4 (1976) Aii, A155–A157.

[8] HARISH-CHANDRA: Harmonic Analysis on Reductive p-adic groups. *Proc. Sympos. in Pure Math.* XXVI (1974) 167–192.

[9] HARISH-CHANDRA: *Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups, Springer Lecture Notes in math.* 162 (1970).

[10] HARISH-CHANDRA: Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups. *Queen's Papers in Pure and Applied Math.* 48 (1978) 281–347.

[11] HARISH-CHANDRA: *The Plancherel formula for reductive p-adic groups,* notes. Princeton: Institute for advanced Study.

[12] R. HOWE: Two Conjectures about Reductive p-adic Groups. *Proc. Sympos. Pure Math.* XXVI (1973) 377–380.

[13] R.E. KOTTWITZ: Orbital Integrals on GL(3). *Am. J. Math.* 102 (1980) 327–384.

[14] P.A. MISCHENKO: *Invariant Tempered Distributions on the Reductive p-adic group GL(n, F_p), C.R. Mathematical Reports of the Academy of Science of Canada* IV (2) (1982).

[15] J. ROGAWSKI: *Application of the building to orbital integrals*, thèse. Princeton University (1980).

[16] A.J. SILBERGER: *Introduction to Harmonic Analysis on reductive p-adic groups*, Mathematical notes. Princeton U. Press (1979).
[17] A.J. SILBERGER: The Knapp-Stein Dimension theorem for p-adic groups. *Proc. A.M.S.* 68 (2) 243–266.
[18] G. VAN DIJK: Computation of certain induced characters of p-adic groups. *Math. Ann.* 199 (1972) 229–240.
[19] M.-F. VIGNÉRAS: Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* IA 28 (3) 945–961.
[20] S.S. GELBART et A.W. KNAPP: L-indistinguishability and R-groups for the special linear group. *Advances in Math.* 43 (1982) 101–121.
[21] J.D. ROGAWSKI: Representations of GL(n) and division algebras over a p-adic field. *Duke Math. J.* 50 (1) (1983) 161–196.
[22] A.V. ZELEVINSKY: Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of GL(n). *Ann. Sc. E.N.S.* Ser. 4 13 (1980) 165–210.

(Oblatum 10-VIII-1983 & 20-III-1984)

Université Paris VII - UER de Mathématiques
Tour 45-55 - 5e étage
2, place Jussieu
75 251 - PARIS CEDEX 05

Present adress:
University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, MI 48109
U.S.A.