COMPOSITIO MATHEMATICA

J. P. LABESSE

Cohomologie, L-groupes et fonctorialité

Compositio Mathematica, tome 55, n° 2 (1985), p. 163-184
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__55_2_163_0>

Compositio Mathematica 55 (1984) 163–184.

COHOMOLOGIE, L-GROUPES ET FONCTORIALITÉ

J.P. Labesse

Sommaire

Introduction

La motivation initiale de cet article était de prouver le résultat suivant: étant donné un morphisme de L-groupes ${}^L\tilde{G} \to {}^LG$ surjectif et de noyau un tore central de ${}^L\tilde{G}^0$, toute section admissible φ d'un groupe de Weil $W(K^{ab}/F)$ dans ${}^LG$ se relève en une section admissible $\tilde{\varphi}$ de $W(K^{ab}/F)$ dans ${}^L\tilde{G}$. Le cas local archimédien avait été traité par Langlands dans [$L(R)$2], et le cas non archimédien avec $\tilde{G} = GL_n$ et $G = SL_n$ par A. Weil [W] et G. Henniart [H].

La preuve produite ici repose sur des considérations cohomologiques qui fournissent, modulo le paragraphe 3, une démonstration "duale" de celle de Langlands de la paramétrisation des représentations automorphes des tores au moyen des L-groupes (§6). Bien que rien de nouveau n'apparaisse ici, nous avons inclu ces résultats car ils ne sont par ailleurs accessibles que dans un "preprint" déjà ancien [$L(R)$1], et ils sont fondamentaux dans l'étude de l'endoscopie (voir en particulier les travaux recents de R. Kottwitz [K] et D. Shelstad [Sh]).

Les résultats de relèvement prouvés aux paragraphes 7 et 8 sont duaux de résultats sur la fonctorialité pour les représentations automorphes sur lesquels nous espérons revenir dans un prochain article.

1. Notations et conventions

Dans toute la suite Γ désigne un groupe fini, C et D deux groupes abéliens topologiques (notés multiplicativement) munis d'une action continue de Γ:

$$\Gamma \times C \to C$$

$$(\sigma, c) \to \sigma(c)$$

(et de même pour D).

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_c(C, D)$ un homomorphisme continu de C dans D on posera

$$(\sigma\varphi)(c) \underset{\mathrm{def}}{=} \sigma\left(\varphi\left(\sigma^{-1}(c)\right)\right)$$

ce qui définit une action continue de Γ dans $\mathrm{Hom}_c(C, D)$.

On suppose donné un 2-cocycle $u \in Z^2(\Gamma, C)$, il définit une extension W de Γ par C:

$$1 \to C \to W \to \Gamma \to 1.$$

La loi de groupe s'écrit

$$(c_1, \sigma_1)(c_2, \sigma_2) = \left(c_1\sigma_1(c_2)u(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1\sigma_2\right).$$

On supposera le 2-cocycle normalisé, de sorte que $u(1, \sigma) = u(\sigma, 1) = 1 \in C$. On pourra alors identifier C et le sous groupe des $(c, 1)$ avec $c \in C$. On posera $w_\sigma = (1, \sigma)$; le cocycle étant normalisé on a $w_1 = (1, 1) = 1 \in W$. Plus généralement $(c, \sigma) = c\ w_\sigma$.

Soit A un W-module topologique, on note $C_c^*(W, A)$ le complexe des cochaines continues et Z_c^p (resp. B_c^p, H_c^p) les groupes de p-cocycles (resp. p-cobords, p-cohomologie) de ce complexe. Les groupes $H_c^p(W, A)$ sont appelés groupe de cohomologie continue.

Par restriction à $C \subset W$ on obtient un homomorphisme

$$\mathrm{Res}: H_c^p(W, A) \to H_c^p(C, A).$$

Le groupe W agit sur $H_c^p(C, A)$ et on vérifie que C agit trivialement, on a donc une action de Γ. Un simple calcul de cocycle montre que l'image de la restriction est dans le sous-groupe des classes Γ-invariantes, on a donc un morphisme naturel (encore noté Res)

$$\mathrm{Res}: H_c^p(W, A) \to H^0\left(\Gamma, H_c^p(C, A)\right).$$

Tout Γ-module topologique A est naturellement un W-module (continu) et on dispose donc d'un morphisme d'inflation:

$$\mathrm{Inf}: H^p(\Gamma, A) \to H_c^p(W, A).$$

Le groupe Γ est un groupe fini; on dispose de groupes de cohomologie ordinaire $H^p(\Gamma,.)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et de groupes de cohomologie "modifiés" $\hat{H}^p(\Gamma,.)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ (cf. [S]); ils coïncident pour $p \geqslant 1$.

Soient $a \in Z^p(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C, D))$ et $u \in Z^2(\Gamma, C)$, on définit un $p+2$ cocycle de Γ dans D en posant

$$\langle a, u\rangle(\sigma_1,\dots,\sigma_{p+2}) \underset{\text{def}}{=} a\big(\sigma_1,\dots,\sigma_p;\ \sigma_1\dots\sigma_p u(\sigma_{p+1},\sigma_{p+2})\big).$$

L'opération ainsi définie n'est autre que le cup produit associé à l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_c(C, D)\times C \to D.$$

Au niveau des groupes de cohomologie on a défini une application

$$u_c^p\colon H^p(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C, D)) \to H^{p+2}(\Gamma, D).$$

Par décalage on peut définir un morphisme

$$\hat{u}_c^p\colon \hat{H}^p(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C, D)) \to \hat{H}^{p+2}(\Gamma, D).$$

En omettant la condition de continuité sur $\mathrm{Hom}(C, D)$ on définirait de même des morphismes u^p et $\hat{u}^p$.

2. Deux suites exactes

La suite spectrale de Hochschild-Serre ([C.E.] p. 351)

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, H^q(C, A)) \Rightarrow H^{p+q}(W, A)$$

fournit une suite exacte ([C.E.] p. 328 th. 5.12)

$$O \to H^1(\Gamma, H^0(C, A)) \to H^1(W, A) \to H^0(\Gamma, H^1(C, A))$$
$$\to H^2(\Gamma, H^0(C, A)) \to H^2(W, A).$$

Nous allons établir une variante continue de cette suite exacte. Rappelons que D, est un Γ-module définissant par inflation un W-module continu. En particulier C agit trivialement et donc $H_c^0(C, D) = D$ et $H_c^1(C, D) = \mathrm{Hom}_c(C, D)$.

PROPOSITION 2.1: *La suite*

$$O \to H^1(\Gamma, D) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H_c^1(W, D) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C, D))$$
$$\xrightarrow{u_c^0} H^2(\Gamma, D) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H_c^2(W, D)$$

est exacte.

Ne disposant pas de l'analogue continu de la suite spectrale évoquée plus haut nous ferons la vérification explicitement sur les cocycles.

(a) en $H^1(\Gamma, D)$ et $H_c^1(W, D)$ l'exactitude est facile (cf [S], *p.* 125).

(b) soit $\varphi \in Z_c^1(W, D)$, sa restriction à C est un homomorphisme continu, Γ-invariant; nous devons vérifier que $\langle \varphi, u\rangle(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(u(\sigma_1, \sigma_2))$ est un cobord. De fait si on pose $\mathrm{f}(\sigma) = \varphi(w_\sigma)$ on a

$$\langle \varphi, u\rangle = \delta f.$$

Réciproquement, si $\psi \in H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C, D))$ et si $\langle \psi, \mathrm{u}\rangle = \delta \mathrm{g}$ avec $\mathrm{g} \in \mathrm{C}^1(\Gamma, \mathrm{D})$ on posera $\varphi(\mathrm{w}) = \varphi(\mathrm{c}\ \mathrm{w}_\sigma) = \psi(\mathrm{c})\mathrm{g}(\sigma)$ si $\mathrm{w} = \mathrm{c}\ \mathrm{w}_\sigma$ et on vérifie immédiatement que φ est un 1-cocycle continu de W dans D. L'exactitude en $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(\mathrm{C}, \mathrm{D}))$ est maintenant claire.

(c) Soit $\psi \in \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(\mathrm{C}, \mathrm{D}))$ et posons $\mathrm{b}(\mathrm{c}\ \mathrm{w}_\sigma) = \psi(\mathrm{c})$. Si $\mathrm{w}_\mathrm{i} = (\mathrm{c}_\mathrm{i}, \sigma_\mathrm{i})$ avec $\mathrm{i} \in \{1, 2\}$ on a

$$(\delta b)(w_1, w_2) = \psi(c_1)\sigma_1(\psi(c_2))\psi(c_1\sigma_1(c_2)u(\sigma_1, \sigma_2))^{-1}$$

$$= \psi(u(\sigma_1, \sigma_2))^{-1} = \mathrm{Inf}(\langle \psi, u\rangle)^{-1}(w_1, w_2).$$

Donc $\mathrm{Inf}(\psi, \mathrm{u}\rangle$ est un cobord. On remarque que b est une fonction continue.

Réciproquement, soit $\mathrm{a} \in \mathrm{Z}^2(\Gamma, \mathrm{D})$ tel que $\mathrm{a} = \delta \mathrm{b}$ avec $\mathrm{b} \in \mathrm{C}_c^1(\mathrm{W}, \mathrm{D})$. En modifiant a par un élément de $\mathrm{C}^1(\Gamma, \mathrm{D}) \hookrightarrow \mathrm{C}_c^1(\mathrm{W}, \mathrm{D})$ on peut supposer que a est normalisé c'est à dire que $\mathrm{a}(1, \sigma) = \mathrm{a}(\sigma, 1) = 1$. Il en résulte que $\mathrm{b}(\mathrm{c}\ \mathrm{w}_\sigma) = \mathrm{b}(\mathrm{c})\ \mathrm{b}(\mathrm{w}_\sigma)$ et que ψ: $\mathrm{c} \to \mathrm{b}(\mathrm{c})$ est un homomorphisme Γ-invariant. Par hypothèse b est continu, donc ψ est continu.

Posons $\mathrm{f}(\sigma) = \mathrm{b}(\mathrm{w}_\sigma)$ on voit que

$$a = \langle \psi, u\rangle^{-1} \cdot \delta f$$

On a ainsi vérifié l'exactitude en $\mathrm{H}^2(\Gamma, \mathrm{D})$. □

Soit B un Γ-module, on a la

PROPOSITION 2.2: *La suite*

$$O \to \hat{H}^{-1}(\Gamma, B) \to H_0(\Gamma, B) \overset{N}{\to} H^0(\Gamma, B) \to \hat{H}^0(\Gamma, B) \to O$$

est exacte.

Rappelons que N est l'application norme:

$$Nb = \prod_{\sigma \in \Gamma} \sigma(b), \quad b \in B.$$

L'exactitude est une conséquence immédiate des définitions de $\hat{H}^{-1}$ et $\hat{H}^0$ ([S], p. 135). □

Nous utiliserons cette suite exacte avec $B = \mathrm{Hom}_c(C, D)$.

3. Corestriction et cup produit

Dans ce paragraphe A désigne un W-module dont la structure de groupe abélien est notée additivement. La section $\sigma \to w_\sigma$ de Γ dans W permet de définir une norme

$$N: a \to \sum_{\sigma \in \Gamma} w_\sigma(a)$$

qui induit en cohomologie une application dite de corestriction ([S] p. 127)

$$\mathrm{Cor}: H^p(C, A) \to H^p(W, A).$$

Explicitons la pour $p = 1$; pour cela on considère $\mathbb{Z}[W]$ l'algèbre de groupe de W et I_W son idéal d'augmentation:

$$O \to I_W \to \mathbb{Z}[W] \to \mathbb{Z} \to O.$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[W], A)$, on fait agir $w \in W$ sur f par

$$(wf)(u) = w(f(uw)) \quad u \in W.$$

Le module $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[W], A)$ considéré comme W-module ou comme C-module (par restriction) est coinduit.

On dispose donc d'un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccc} H^0(C, \mathrm{Hom}(I_W\, A)) & \to H^1(C, A) & \to O \\ \downarrow \mathrm{Cor} & \downarrow \mathrm{Cor} & \\ H^0(W, \mathrm{Hom}(I_W\, A)) & \to H^1(W, A) & \to O \end{array}$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[W], A)$ dont la restriction à I_W est C-invariante i.e.

$$cf((w-1)c) = f(w-1) \qquad \text{pour tout} \quad c \in C \quad \text{et} \quad w \in W$$

alors f définit un élément de $H^0(C, \mathrm{Hom}(I_W, A))$ et son cobord $\partial f_c = cf - f$ est une fonction constante; en effet

$$\begin{aligned}(\partial f_c)(w) = cf(wc) - f(w) &= cf((w-1)c) + cf(c) - f(w-1) - f(1) \\ &= cf(c) - f(1).\end{aligned}$$

Posons $\varphi(c)=cf(c)-f(1)$, c'est le 1 cocycle de $Z^1(C, A)$ correspondant à f.

Soit maintenant $g=Nf=\Sigma w_\sigma(f)$ on $\partial g_w = wNf-Nf$; c'est encore une constante, plus précisément on a

$$\partial g_w(u)=\sum_{\sigma\in\Gamma} ww_\sigma\big(f(uww_\sigma)\big)-w_\sigma\big(f(uw_\sigma)\big).$$

Posons $ww_\sigma = w_\tau\beta$ où $\tau\in\Gamma$ est $\beta\in C$; la correspondance $\sigma\to\tau$ est une bijection (dépendant de w).

On obtient avec ces notations, compte tenu de l'invariance de $f|_{I_W}$

$$\partial g_w(u)=\sum_\sigma w_\tau\beta f((uw_\tau-1)\beta)-w_\tau\beta f(\beta)-w_\sigma\big(f(uw_\sigma)\big)$$

$$=\sum_\sigma w_\tau\big(\beta f(\beta)-f(1)\big)=\sum_\sigma w_\tau\varphi(\beta)$$

Soit donc $\varphi\in Z^1(C, A)$ on posera

$$(\operatorname{Cor}\varphi)(w)\underset{\text{def}}{=}\sum_{\sigma\in\Gamma} w_\tau\varphi\big(w_\tau^{-1}ww_\sigma\big)$$

où τ et σ sont liés par la relation $w_\tau^{-1}\, ww_\sigma\in C$. L'application $\varphi\to\operatorname{Cor}\varphi$ de $Z^1(C, A)$ dans $Z^1(W, A)$ induit en cohomologie la corestriction.

Supposons maintenant que A soit un W-module topologique, l'application $\varphi\to\operatorname{Cor}\varphi$ respecte les cochaines continues; on note encore Cor l'application induite en cohomologie continue ainsi définie:

$$\operatorname{Cor}\colon H_c^1(C, A)\to H_c^1(W, A).$$

Soit $\psi\in Z_c^1(C, A)$ et $\xi\in\Gamma$ et considérons $\varphi=(w_\xi-1)\psi$; le cocycle ψ est associé à une fonction $f\in\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[W], A)$ or $(w_\xi-1)\psi$ est associé à $(w_\xi-1)f$ et $\operatorname{Cor}\varphi$ est le cobord de $g=\Sigma w_\sigma(w_\xi-1)f$ (dans $C^*(W, \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[W], A))$. Mais $w_\sigma w_\xi = w_\nu\gamma_\nu$ avec $\gamma_\nu\in C$ et $g=\Sigma w_\nu((\gamma_\nu-1)f)$, or $(\gamma_\nu-1)f$ est une constante a_ν et $g=\Sigma w_\nu a_\nu$ est aussi constant; donc $(\operatorname{Cor}\varphi)(w)=wg-g$ est un cobord de W dans A. Autrement dit on a prouvé le

LEMME 3.1: *$I_\Gamma H_c^1(C, A)$ est dans le noyau de la corestriction.*
On a ainsi défini une application, encore appelée corestriction:

$$\operatorname{Cor}\colon H_0\big(\Gamma, H_c^1(C, A)\big)\to H_c^1(W, A);$$

Considérons encore $\varphi\in Z_c^1(C, A)$ et restreignons $\operatorname{Cor}\varphi$ à C, on a

$$(\operatorname{Cor}\varphi)(c)=\sum_{\sigma\in\Gamma} w_\tau\varphi\big(w_\tau^{-1}cw_\sigma\big)=\sum_{\sigma\in\Gamma} w_\sigma\varphi\big(w_\sigma^{-1}cw_\sigma\big)=(N\varphi)(c)$$

On a ainsi prouvé le

LEMME 3.2: *Res Cor* $\varphi = N\varphi$; *autrement dit, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H^1_c(W, A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^0(\Gamma, H^1_c(C, A)) \\ H_0(\Gamma, H^1_c(C, A)) \arrow[u, "\mathrm{Cor}"] \arrow[r, "N"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & H^0(\Gamma, H^1_c(C, A)) \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Nous supposerons désormais que C agit trivialement sur A. En vertu de nos conventions on pourrait poser $A = D$, à ceci près que nous conserverons dans ce paragraphe la notation additive. Considérons $\varphi \in Z^1_c(C, A) = \mathrm{Hom}_c(C, A)$ dans le noyau de la norme; soient $c \in C$ et $w \in W$, on a

$$\begin{aligned}(\mathrm{Cor}\ \varphi)(cw) &= \sum_\sigma w_\tau \varphi\left(w_\tau^{-1} cw_\tau w_\tau^{-1} ww_\sigma\right) \\ &= \sum_\tau (w_\tau\varphi)(c) + (\mathrm{Cor}\ \varphi)(w) \\ &= (N\varphi)(c) + \mathrm{Cor}\ \varphi(w) = \mathrm{Cor}\ \varphi(w)\end{aligned}$$

autrement dit, la classe de cor φ provient par inflation d'une classe dans $H^1(\Gamma, A)$, et on a ainsi défini une application que nous noterons $\widehat{\mathrm{Cor}}$:

$$\widehat{\mathrm{Cor}}: \hat{H}^{-1}(\Gamma, H^1_c(C, A)) \to H^1(\Gamma, A)$$

Nous allons démontrer que cette application coïncide avec $\hat{u}_c^{-1}$, c'est à dire que l'on a la

PROPOSITION 3.3: *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & H^1(\Gamma, A) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H^1_c(W, A) \\ O \arrow[r] & \hat{H}^{-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C, A)) \arrow[u, "\hat{u}_c^{-1}"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & H_0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C, A)) \arrow[u, "\mathrm{Cor}"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Nous disposons d'une formule pour la corestriction, et si $\varphi \in \mathrm{Hom}_c(C, A)$ est dans le noyau de la norme on a

$$\left(\widehat{\mathrm{Cor}}\ \varphi\right)(\xi) = \sum_{\sigma\in\Gamma} \tau\varphi\left(w_\tau^{-1} w_\xi w_\sigma\right) = \sum_{\sigma\in\Gamma} (\tau\varphi)\left(w_\xi w_\sigma w_\tau^{-1}\right)$$

$$= \sum_{\tau\in\Gamma} (\tau\varphi)\left(u(\xi, \xi^{-1}\tau)\right)$$

où u est le 2-cocycle définissant W.

Pour comparer avec le cup produit on procède par décalage: on utilise l'isomorphisme

$$H^1(\Gamma, A) \xrightarrow{d_1} H^2(\Gamma, A \otimes I_\Gamma)$$

où I_Γ est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[\Gamma]$, et l'isomorphisme

$$\hat{H}^{-1}(\Gamma, B) \xrightarrow{\hat{d}_{-1}} \hat{H}^0(\Gamma, B \otimes I_\Gamma)$$

avec $B = \mathrm{Hom}_c(C, A)$. Explicitons les: si $a \in Z^1(\Gamma, A)$ l'application d_1 étant induite par le cobord dans $C^*(\Gamma, A \otimes \mathbb{Z}[\Gamma])$ on voit que

$$(d_1 a)(\xi, \eta) = \xi a(\eta) \otimes (\xi - 1).$$

D'autre part $\hat{d}_{-1}$ est induit par la norme, et si b vérifie $Nb = 0$ on a

$$\hat{d}_{-1} b = N(b \otimes 1) - (Nb) \otimes 1 = \sum_\tau \tau b \otimes (\tau - 1).$$

La proposition 3.3 est équivalente au

LEMME 3.4: *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma, A) & \xrightarrow{\quad d_1 \quad} & H^2(\Gamma, A \otimes I_\Gamma) \\ \Big\uparrow \widehat{\mathrm{Cor}} & & \Big\uparrow \hat{u}_c^0 \otimes 1 \\ \hat{H}^{-1}(\Gamma, B) & \xrightarrow{\quad \hat{d}_{-1} \quad} & \hat{H}^0(\Gamma, B \otimes I_\Gamma) \end{array}$$

est commutatif.

Soit $\varphi \in B = \mathrm{Hom}_c(C, A)$ avec $N\varphi = 0$, on a

$$\left(d_1\, \widehat{\mathrm{Cor}}\ \varphi\right)(\xi, \eta) = \xi \sum_\tau (\tau\varphi)\left(u(\xi, \xi^{-1}\eta)\right) \otimes (\xi - 1)$$

et d'autre part

$$\left((\hat{u}_c^0 \otimes 1)\hat{d}_{-1}\varphi\right)(\xi, \eta) = \sum_\tau (\tau\varphi)(u(\xi, \eta)) \otimes (\tau - 1).$$

Mais un cobord dans $B^2(\Gamma, A \otimes I_\Gamma)$ est de la forme

$$\partial\Big(\sum_\tau F_\tau \otimes (\tau - 1)\Big)(\xi, \eta) = \sum_\tau \big(\xi \cdot F_{\xi^{-1}\tau}(\eta) - F_\tau(\xi\eta) - F_\tau(\xi)\big) \otimes (\tau - 1)$$

$$-\xi \sum_\tau F_\tau(\eta) \otimes (\xi - 1).$$

Maintenant posons $F_\tau(\eta) = (\tau\varphi)(u(\eta, \eta^{-1}\tau))$, on a

$$\partial \sum_\tau (F_\tau \otimes (\tau - 1)) - (\hat{u}_c^0 \otimes 1)\hat{d}_{-1}\varphi + d_1 \widehat{\mathrm{Cor}}\,\varphi\big](\xi, \eta) =$$

$$\sum_\tau (\tau\varphi)\big(\xi u(\eta, \eta^{-1}\xi^{-1}\tau) u(\xi\eta, \eta^{-1}\xi^{-1}\tau)^{-1} u(\xi, \xi^{-1}\tau) u(\xi, \eta)^{-1}\big)$$

mais en posant $\nu = \eta^{-1}\xi^{-1}\tau$, on obtient encore

$$= \sum_\tau (\tau\varphi)\big(\xi u(\eta, \nu) u(\xi\eta, \nu)^{-1} u(\xi, \eta\nu) u(\xi, \eta)^{-1}\big)$$

et chaque terme de la somme est nul car u est un 2-cocycle. Donc

$$\partial \sum_\tau (F_\tau \otimes (\tau - 1)) = (\hat{u}_c^0 \otimes 1)\hat{d}_{-1}\varphi - d_1 \widehat{\mathrm{Cor}}\,\varphi$$

ce qui démontre le lemme 3.4. □

REMARQUE: Les résultats de ce paragraphe sont duaux de résultats utilisés par Langlands dans [L(R)1], et les démonstrations sont analogues.

4. Un isomorphisme à la Tate Nakayama

Nous allons établir un résultat du type des théorèmes dits de Tate Nakayama ([L(S)]); c'est une version duale du théorème usuel ([S]). Dans toute la suite nous supposerons que C est un "class-module" au sens de [L(S)] III p. 94, et que $u \in Z^2(\Gamma, C)$ est dans la classe fondamentale et on sait sous ces hypothèses (cf. [L(S)] II, th. 5) qu'il existe un Γ-module C' cohomologiquement trivial et une suite exacte de Γ-modules

$$1 \to C \to C' \to I_\Gamma \to O$$

où I_Γ est l'idéal d'augmentation; on a bien sûr la suite exacte

$$O \to I_\Gamma \to \mathbb{Z}[\Gamma] \to \mathbb{Z} \to O.$$

Ces deux suites sont scindées en tant que suite exactes de groupes abéliens; on en déduit les suites exactes suivantes:

$$O \to \mathrm{Hom}(I_\Gamma, D) \to \mathrm{Hom}(C', D) \to \mathrm{Hom}(C, D) \to O$$

et

$$O \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\Gamma], D) \to \mathrm{Hom}(I_\Gamma, D) \to O.$$

PROPOSITION 4.1: *Si C est un class module, u fondamental et D divisible l'homomorphisme*

$$\hat{u}^p\colon \hat{H}^p(\Gamma, \mathrm{Hom}(C, D)) \to \hat{H}^{p+2}(\Gamma, D)$$

est un isomorphisme.

On commence par prouver le

LEMME 4.2: *Si D est divisible et A cohomologiquement trivial alors* $\mathrm{Hom}(A, D)$ *est cohomologiquement trivial.*
On remarque d'abord que D divisible implique que $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, D) = 0$ et le lemme est alors conséquence de [S] chap. IX théorème 9, *p*. 152. □

On déduit de ce lemme que $\mathrm{Hom}(C', D)$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\Gamma], D)$ sont cohomologiquement triviaux.

Maintenant, par décalage on obtient des isomorphismes

$$\hat{H}^p(\Gamma, \mathrm{Hom}(C, D)) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{p+1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(I_\Gamma, D))$$
$$\xrightarrow{\sim} \hat{H}^{p+2}(\Gamma, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D)).$$

De même $\hat{H}^2(\Gamma, C) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^1(\Gamma, I_\Gamma) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^0(\Gamma, \mathbb{Z})$.

La compatibilité des cup produits aux décalages fournit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^p(\Gamma, \mathrm{Hom}(C, D)) \otimes \hat{H}^2(\Gamma, C) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{p+2}(\Gamma, D) \\
\downarrow \approx & & \downarrow \approx \\
\hat{H}^{p+2}(\Gamma, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D)) \otimes \hat{H}^0(\Gamma, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{p+2}(\Gamma, D).
\end{array}$$

Comme par hypothèse u est fondamental, il correspond par décalage au générateur canonique de $\tilde{H}^0(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n = \mathrm{card}\ \Gamma$; l'homomorphisme $\hat{u}_p$ correspond à l'isomorphisme naturel défini grace à la flèche du bas, et est donc bien un isomorphisme. □

5. Cohomologie et continuité

Nous nous placerons désormais dans la situation suivante: F sera un corps local ou global, K une extension galoisienne finie et $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/F)$ le groupe de Galois de cette extension. Nous appliquerons les considérations des paragraphes précédents avec $C = C_K$ où $C_K = K^\times$ si K est local et $A_K^\times/K^\times$ si K est global; enfin $W(K/F) = W$ est défini au moyen d'un 2-cocycle fondamental u, et est donc un groupe de Weil. Nous aurons besoin du résultat de continuité suivant.

PROPOSITION 5.1: *Soit D un groupe de lie (réel) abélien connexe, muni d'une action de Γ (analytique) alors l'homomorphisme naturel*

$$\hat{H}^p(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C_K, D)) \to \hat{H}^p(\Gamma, \mathrm{Hom}(C_K, D))$$

est un isomorphisme pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

La démonstration sera faite en distinguant différents cas suivant la nature des corps F et K.

(a) $K = F$ ($= \mathbb{R}$ our $\mathbb{C}$), le lemme est trivial car les groupes sont nuls.

(b) $F = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ et donc $C_K = \mathbb{C}^\times$; la suite exacte

$$O \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^\times \to 1$$

fournit des suites exactes

$$O \to \mathrm{Hom}_c(\mathbb{C}^\times, D) \to \mathrm{Hom}_c(\mathbb{R}^2, D) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D) \to O$$

et

$$O \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, D) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, D) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D) \to O.$$

La première résulte de ce que D est un groupe de Lie abélien, connexe et la seconde de ce que D est divisible, et que donc $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^\times, D) = 0$.

La trivialité cohomologique de $\mathrm{Hom}_c(\mathbb{R}^2, D)$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, D)$ permet de remplacer $C_K = \mathbb{C}^\times$ par le groupe discret $\mathbb{Z}$, à un décalage près, et la proposition en résulte.

(c) F et K corps locaux non archimédiens. Soit U_K le groupe des unités de $K^\times$, on a $K^\times/U_K \simeq q^{\mathbb{Z}}$; et soit U_K^n le sous-groupe des unités congrues à 1 modulo la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'idéal maximal; on sait que (cf. [S] XII, §3) U_K^1 est cohomologiquement trivial ainsi que U_K^1/U_K^n pour tout n si K/F est non ramifié. On déduit du lemme 4.2 ci-dessus que $\mathrm{Hom}(U_K^1, D)$ et $\mathrm{Hom}(U_K^1/U_K^n, D)$ le sont aussi et comme

$$\mathrm{Hom}_c(U_K^1, D) = \varinjlim \mathrm{Hom}(U_K^1/U_K^n, D)$$

il en est de même de $\mathrm{Hom}_c(U_K^1, D)$. Il résulte de ces remarques que l'on peut remplacer $C_K = K^\times$ par $K^\times/U_K^1$ qui est discret ce qui prouve la proposition lorsque K/F est non ramifié. Dans le cas général on dispose de sous groupes V_k^n d'indice fini dans U_k^n cohomologiquement triviaux et la preuve est analogue.

Il convient de remarquer que si K/F est non ramifié alors U_K/U_K^1, le groupe multiplicatif du corps résiduel, est également cohomologiquement trivial ([S], chap. X, §7). On a donc prouvé le

LEMME 5.2: *Si K/F est non ramifié alors* $\mathrm{Hom}(U_K, D)$ *et* $\mathrm{Hom}_c(U_K, D)$ *sont cohomologiquement triviaux.*

(d) Cas global. Soit v une place de F et considérons

$$U_v = \prod_{w \mid v} U_{K_w}.$$

Choisissons une place w au dessus de v et soit Γ_w le groupe de décomposition de w; le lemme de Shapiro montre que

$$\hat{H}^p(\Gamma, U_v) = \hat{H}^p(\Gamma_w, U_{K_w})$$

qui est d'ailleurs trivial pour presque tout v d'après le lemme 5.2. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble fini des places non archimédiennes ramifiées au dessus de F. Posons

$$U_{nr} = \prod_{w \in \mathfrak{S}} V_{K_w}^1 \prod_{\substack{w \notin \mathfrak{S} \\ w \text{ finie}}} U_{K_w}.$$

D'après les remarques précédentes U_{nr} est cohomologiquement trivial ainsi que ses quotients par des sous-groupes ouverts; il en résulte que $\mathrm{Hom}(U_{nr}, D)$ et $\mathrm{Hom}_c(U_{nr}, D)$ sont cohomologiquement triviaux. Maintenant, on peut remplacer $C_K = \mathbb{A}_K^\times/K^\times$ par C_K/U_{nr} dans la proposition mais C_K/U_{nr} est un groupe de Lie, si K est un corps de nombres ou un groupe discret si K est un corps de fonctions, et on conclut comme en (b). □

Les groupes C_K sont des "class-modules" au sens de [L(S)] et le 2-cocycle u est supposé fondamental. Un groupe de Lie abélien connexe D est divisible; nous sommes donc en mesure d'appliquer les résultats du §4 à notre situation. En combinant 4.1 et 5.1 on obtient le résulat technique essentiel dans la suite:

PROPOSITION 5.3: *L'homomorphisme*

$$\hat{u}_c^p\colon \hat{H}^p(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C_K, D)) \to \hat{H}^{p+2}(\Gamma, D)$$

est un isomorphisme pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Cette proposition a le corollaire immédiat suivant.

COROLLAIRE 5.4: *L'homomorphisme*

$$u_c^0\colon H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C_K, D)) \to H^2(\Gamma, D)$$

est surjectif

Maintenant compte tenu de 2.1 on obtient la

PROPOSITION 5.5: (a) *La suite*

$$O \to H^1(\Gamma, D) \to H_c^1(W(K/F), D)$$

$$\to H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C_K, D)) \to H^2(\Gamma, D) \to O$$

est exacte.

(b) *L'homomorphisme*

$$H^2(\Gamma, D) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H_c^2(W(K/F), D)$$

est nul.

La partie (b) de la proposition 5.5 a été obtenue par Langlands dans [L(R)3] lemme 4, p. 718.

En tenant compte du §3, on peut alors montrer la

PROPOSITION 5.6: *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & H^1(\Gamma, D) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H_c^1(W, D) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^0(\Gamma, B) \arrow[r, "u_c^0"] & H^2(\Gamma, D) \arrow[r] & O \\
O \arrow[r] & \hat{H}^{-1}(\Gamma, B) \arrow[r] \arrow[u, "\hat{u}_c^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & H_0(\Gamma, B) \arrow[r, "N"] \arrow[u, "\mathrm{Cor}"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & H^0(\Gamma, B) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(3)"] & \hat{H}^0(\Gamma, B) \arrow[r] \arrow[u, "\hat{u}_c^0"] & O
\end{tikzcd}$$

où $B = \mathrm{Hom}_c(C_K, D)$, $W = W(K/F)$ *et* $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/F)$, *est commutatif avec des lignes exactes.*

En effet l'exactitude des lignes résulte de 5.5 et de 2.2; la commutativité de (1) et (2) est prouvée en 3.2 et 3.3, celle de (3) est évidente.

COROLLAIRE 5.7: *L'application*

$$\mathrm{Cor}\colon H_0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C_K, D)) \to H_c^1(W(K/F), D)$$

est bijective.

Dans le diagramme ci-dessus les verticales $\hat{u}_c^{-1}$ et $\hat{u}_c^0$ sont des isomorphismes en vertu de 5.3, ainsi que l'identité! la commutativité et l'exactitude impliquent que la dernière verticale l'est aussi.

REMARQUE 5.8: Les résultats 5.3 à 5.7 ci-dessus restent valables si on remplace le groupe D par un groupe topologique, abélien divisible quelconque lorsque F est local non archimédien ou global de caractéristique résiduelle positive. On pourra en particulier prendre pour D les points sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'un tore algébrique.

REMARQUE 5.9: Supposons F local non archimédien et K/F non ramifié. Soit $\varphi \in Z_c^1(W(K/F), D)$ on dira que φ est non ramifié si sa restriction à U_K est triviale, et on note $H_{nr}^1(W(K/F), D)$ le groupe des classes de cocycles non ramifiés. Grace au lemme 5.2 on obtient un isomorphisme

$$H_0(\Gamma, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D)) \to H_{nr}^1(W(K/F), D).$$

La proposition 5.1 spécialisée au cas $p = -1$ montre que l'homomorphisme naturel

$$H_0(\Gamma, \mathrm{Hom}_c(C_K, D)) \to H_0(\Gamma, \mathrm{Hom}(C_K, D))$$

est injectif et donc que

$$I_\Gamma \mathrm{Hom}(C_K, D) \cap \mathrm{Hom}_c(C_K, D) = I_\Gamma \mathrm{Hom}_c(C_K, D).$$

On en déduit le

LEMME 5.10: *Si D est un groupe compact, alors I_Γ* $\mathrm{Hom}_c(C_K, D)$ *est fermé dans* $\mathrm{Hom}_c(C_K, D)$ *(muni de la topologie de la convergence compacte).*

6. Dualité pour les tores

Nous allons maintenant supposer que $D = \mathrm{Hom}(X, T)$ où X est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module qui comme $\mathbb{Z}$-module est libre et de type fini, et où T est un groupe de Lie (réel) abélien et connexe, sur lequel Γ agit trivialement. Sous cette hypothèse D est un groupe de Lie abélien connexe.

On dispose d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_c(C_K \otimes X, T) \to \mathrm{Hom}_c(C_K, D)$$

où $C_K \otimes X \simeq C_K^n$ (avec $n = \mathrm{rang}\ X$) est muni de la topologie produit.

Supposons d'abord que $T=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, alors $\operatorname{Hom}_c(C_K, D)$ n'est autre que le dual de Pontryagin de $C_K \otimes X$. L'orthogonal du sous groupe des Γ-invariants dans $C_K \otimes X$ est le sous-groupe fermé

$$I_\Gamma \operatorname{Hom}_c(C_K \otimes X, T).$$

En effet si $\sigma \in \Gamma$ et $f \in \operatorname{Hom}_c(C_K \otimes X, T)$, on a $(\sigma \cdot f - f)(a) = f(\sigma^{-1}(a)) - f(a) = 0$ si $a = \sigma(a)$ (avec $a \in C_K \otimes X$), donc $I_\Gamma \operatorname{Hom}_c(C_K \otimes X, T)$ est dans le noyau de la restriction

$$\operatorname{Hom}_c(C_K \otimes X, T) \to \operatorname{Hom}_c\big(H^0(\Gamma, C_K \otimes X), T\big);$$

Réciproquement, si a $\notin H^0(\Gamma, C_K \otimes X)$ il existe $\sigma \in \Gamma$ avec $a \neq \sigma(a)$, or la dualité de Pontryagin sépare les points donc il existe f telle que

$$f\big(\sigma^{-1}(a) - a\big) \neq 0$$

et donc l'orthogonal de $I_\Gamma \operatorname{Hom}_c(\dots)$ est inclu dans $H^0(\Gamma, C_K \otimes X)$. On conclut grâce à 5.10.

Donc si $T=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'homomorphisme naturel

$$H_0(\Gamma, \operatorname{Hom}_c(C_K \otimes X, T)) \to \operatorname{Hom}_c\big(H^0(\Gamma, C_K \otimes X), T\big)$$

est un isomorphisme.

Lorsque $T=\mathbb{R}$, en utilisant que les homomorphismes continus dans $\mathbb{R}$ sont triviaux sur les sous-groupes compacts, on voit que

$$H_0(\Gamma, \operatorname{Hom}_c(C_K \otimes X, \mathbb{R})) = H_0(\Gamma, \operatorname{Hom}(X, \mathbb{R}))$$

$$= \operatorname{Hom}\big(H^0(\Gamma, X), \mathbb{R}\big) = \operatorname{Hom}_c\big(H^0(\Gamma, C_K \otimes X), \mathbb{R}\big)$$

On en déduit que si T est un groupe de Lie abélien connexe quelconque on a le

THÉORÈME 6.1 (*Langlands* [L(R)1]): *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\operatorname{Hom}_c\big(H^0(\Gamma, C_K \otimes X), T\big) \to H^1_c(W(K/F), \operatorname{Hom}(X, T)).$$

Cela résulte du corollaire 5.7 et des remarques ci-dessus. □

Langlands a obtenu ce résultat [L(R)1] par une méthode analogue mais duale, en ce sens qu'il a utilisé l'homologie au lieu de la cohomologie.

On en déduit la paramétrisation "de Langlands" des représentations automorphes des tores algébriques dans le cas local ou global. Soit S un tore algébrique défini sur F; il est construit au moyen d'un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module de type fini X, libre sur $\mathbb{Z}$. Pour tout F-anneau E on a

$$S(E)=H^0\left(\Gamma,\ X\otimes\left(K\underset{F}{\otimes}E\right)^{\times}\right),$$

On pose ${}^LS_T^0=\mathrm{Hom}(X,T)$; lorsque $T=\mathbb{C}^\times$ le groupe ${}^LS_T^0$ est simplement noté ${}^LS^0$, c'est la composante neutre du L-groupe de S; lorsque $T=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on obtient son compact maximal. Le théorème 6.1 fournit immédiatement le

THÉORÈME 6.2 (*Langlands* [L(R)1]): *Si F est un corps local on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_c(S(F),T)\xrightarrow{\sim}H_c^1\left(W(K/F),\ {}^LS_T^0\right).$$

REMARQUE 6.3: Si K/F est non ramifié, en notant $\mathrm{Hom}_{nr}(S(F),T)$ les homomorphismes triviaux sur le sous-groupe compact maximal on a, grace à la remarque 5.9, un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{nr}(S(F),T)\xrightarrow{\sim}H_{nr}^1\left(W(K/F),\ {}^LS_T^0\right).$$

Lorsque F est global on a une suite exacte

$$O\to S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F)\to H^0(\Gamma,\ X\otimes C_K)\to A\to O$$

où A est l'image de $\hat{H}^0(\Gamma,\ X\otimes C_K)$ dans $H^1(\Gamma,\ X\otimes K^X)$; mais $\hat{H}^0(\Gamma,\ X\otimes C_K)=\hat{H}^{-2}(\Gamma,\ X)$ d'après Tate-Nakayama puisque X est sans torsion. De plus $\hat{H}^{-2}(\Gamma,\ X)$ est fini car X est de type fini.

Le théorème 6.1 fournit alors le

THÉORÈME 6.4 (*Langlands* [L(R)1]): *On a un homomorphisme naturel surjectif et de noyau fini*

$$H_c^1\left(W(K/F),\ {}^LS_T^0\right)\to\mathrm{Hom}_c\left(S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F),\ T\right)$$

Le noyau est formé des classes localement triviales.

La surjectivité est claire, et le noyau $\mathrm{Hom}(A,T)$ est fini. Maintenant le diagramme de localisation

$$\begin{array}{ccc}
H_c^1(W(K/F),\ {}^LS_T^0) & \to & \mathrm{Hom}_c(S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F),\ T)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\prod_v H_c^1(W(K_w/F_v),\ {}^LS_T^0) & \to & \prod_v \mathrm{Hom}_c(S(F_v),\ T)
\end{array}$$

est commutatif (ici v parcourt les places de F et w désigne une place de K au dessus de v). La flèche horizontale du bas est un isomorphisme, *vu* le théorème 6.2 et la deuxième verticale est injective, la dernière assertion du théorème est ainsi prouvée. □

7. Relèvements de sections

Soient G et $\tilde{G}$ deux groupes algébriques réductifs connexes définis sur F et déployés sur K. Soient ${}^L G^0$ et ${}^L\tilde{G}^0$ les composantes neutres de leurs L-groupes à valeurs complexes (pour les définitions des L-groupes, on renvoie le lecteur à [B1]). Nous supposerons donné un homomorphisme surjectif

$$\pi\colon {}^L\tilde{G}^0 \to {}^L G^0$$

dont le noyau est un tore central ${}^L S^0$ dans ${}^L G^0$:

$${}^L S^0 = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{C}^\times)$$

On suppose de plus que π est compatible à l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/F)$ sur ${}^L\tilde{G}^0$ et ${}^L G^0$.

On appelle section de ${}^L G = {}^L G^0 \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ un homomorphisme φ continu de $W(K/F)$ dans ${}^L G$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} W(K/F) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & \mathrm{Gal}(K/F) & \end{tikzcd}$$

Une section est dite admissible si l'image de φ est composé d'éléments semi simples.

Les classes de conjugaison sous ${}^L G^0$ de sections admissibles forment un ensemble que nous noterons $H^1_a(W(K/F), {}^L G^0)$, c'est le sous ensemble de $H^1(W(K/F), {}^L G^0)$ formé des classes "admissibles". Le but de ce paragraphe est de prouver que si on pose

$$H^1_a\big(W(K^{ab}/F), {}^L G^0\big) \underset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{\substack{K \subset K' \subset K^{ab} \\ [K' : K] < \infty}} H^1_a\big(W(K'/F), {}^L G^0\big).$$

On a le

THÉORÈME 7.1: *L'application naturelle*

$$H_a^1\big(W\big(K^{ab}/F\big),\ {}^L\tilde{G}^0\big) \to H_a^1\big(W\big(K^{ab}/F\big),\ {}^L G^0\big)$$

est surjective.

Soit donc $\varphi \in \mathrm{Hom}_c(W(K/F),\ {}^L G)$ une section admissible de ${}^L G$; sa restriction à C_K à pour image $\varphi(C_K)$ un ensemble commutatif d'éléments semi-simples, son adhérence de Zariski est un groupe diagonalisable ([B2], chap. III, page 203). Sa composante neutre qui est d'indice fini, est donc un tore T dans ${}^L G^0$. Quitte à remplacer K par une extension abélienne finie ce qui est loisible, on peut supposer que $\varphi(C_K)$ est contenue dans T. L'image réciprogue $\tilde{T}$ de T dans ${}^L\tilde{G}^0$ est également un tore et l'extension de tores

$$1 \to {}^L S^0 \to \tilde{T} \to T \to 1$$

est scindable. Choississons un scindage s: $T \to \tilde{T}$.

Posons pour $c \in C_K$

$$\tilde{\varphi}(c) = s \circ \varphi(c).$$

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ choisissons un relèvement dans ${}^L\tilde{G}$ de $\varphi(w_\sigma)$ noté $\tilde{\varphi}(w_\sigma)$ (avec $w_\sigma = (1,\ \sigma) \in W(K/F)$):

$$\pi \circ \tilde{\varphi}(w_\sigma) = \varphi(w_\sigma).$$

La conjugaison par $\tilde{\varphi}(w_\sigma)$ induit une action de Γ sur $\tilde{T}$; le relèvement $\tilde{\varphi}$ est défini modulo ${}^L S^0$ qui est central et la conjugaison est donc indépendante des choix.

Remarquons que la conjugaison par $\tilde{\varphi}(w_\sigma)$ induit sur ${}^L S^0$ l'action de σ. Posons pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ et $c \in C_K$

$$\tilde{\lambda}(\sigma,\ c) = \tilde{\varphi}(w_\sigma)\tilde{\varphi}\big(\sigma^{-1}(c)\big)\tilde{\varphi}(w_\sigma)^{-1}\tilde{\varphi}(c)^{-1} = (\sigma\tilde{\varphi})(c)\tilde{\varphi}(c)^{-1}$$

or $\lambda(\sigma,\ c) = \pi(\tilde{\lambda}(\sigma,\ c)) = 1$ car φ est un homomorphisme et $w_\sigma c\ w_\sigma^{-1} = \sigma(c)$. Donc $\tilde{\lambda}$ prend ses valeurs dans ${}^L S^0$. On voit donc que $\tilde{\lambda}(\sigma,\ c)$ définit un élément de $C^1(\Gamma,\ \mathrm{Hom}_c(C_K,\ {}^L S^0))$, et c'est un 1-cocycle car c'est un cobord quand on le regarde comme élément de $C^1(\Gamma,\ \mathrm{Hom}_c(C_K,\ \tilde{T}))$.

Nous allons montrer que la classe de cohomologie de $\tilde{\lambda}$ est nulle. Pour cela on considère le cup produit

$$u_c^1\colon H^1\big(\Gamma,\ \mathrm{Hom}_c\big(C_K,\ {}^L S^0\big)\big) \to H^3(\Gamma,\ {}^L S^0),$$

on peut représenter l'image de $\tilde{\lambda}$ par le cocycle

$$(u_c^1(\tilde{\lambda}))(\sigma, \tau, \mu) = \tilde{\lambda}(\sigma, \sigma(u(\tau, \mu))).$$

LEMME 7.2: $u_c^1(\tilde{\lambda})$ *est un cobord.*

Posons $\tilde{g}(\tau, \mu) = \tilde{\varphi}(u(\tau, \mu))$; cette 2 cochaine de $C^2(G, \tilde{T})$ a pour cobord

$$\begin{aligned}(\delta\tilde{g})(\sigma, \tau, \mu) &= \sigma(\tilde{\varphi}(u(\tau, \mu)))\tilde{\varphi}(u(\sigma\tau, \mu))^{-1} \\ &\quad \times \tilde{\varphi}(u(\sigma, \tau\mu))\tilde{\varphi}(u(\sigma, \tau))^{-1} \\ &= \sigma(\tilde{\varphi}(u(\tau, \mu)))\tilde{\varphi}(\sigma u(\tau, \mu))^{-1}\end{aligned}$$

(en utilisant la relation de cocycle pour u) donc

$$u_c^1(\tilde{\lambda}) = \delta\tilde{g} \in B^3(\Gamma, \tilde{T}).$$

Mais ce n'est pas encore un cobord du bon espace. Pour cela considérons $\tilde{b}(\sigma, \tau) = \tilde{\varphi}(w_\sigma)\tilde{\varphi}(w_\tau)\tilde{\varphi}(w_{\sigma\tau})^{-1}$ on a $\pi\tilde{b} = \varphi(u(\sigma, \tau)) = \pi(\tilde{g}(\sigma, \tau))$, donc en modifiant $\tilde{g}$ par $\tilde{b}$ on obtient

$$\tilde{g}_1(\sigma, \tau) = \tilde{g}(\sigma, \tau)\tilde{b}(\sigma, \tau)^{-1}$$

qui est une 2-cochaine à valeurs dans ${}^LS^0$, on a

$$u_c^{-1}(\tilde{\lambda}) = \delta\tilde{g}_1 \in B^3(\Gamma, {}^LS^0)$$

car $\tilde{b}$ est un 2-cocycle à valeurs dans $\tilde{T}$: c'est un 2-cocycle associé à l'extension de $\tilde{T}$ par Γ

$$\tilde{T} \to * \to \Gamma$$

obtenue en combinant l'extension de T par Γ définie par φ avec l'extension $\tilde{T}$ de T par ${}^LS^0$ (prendre l'image réciproque de $\varphi(W)$. T dans ${}^L\tilde{G}$). □

Mais d'après la proposition 5.3, l'homomorphisme u_c^1 est un isomorphisme donc $\tilde{\lambda}$ est un cobord; c'est dire qu'il existe un homomorphisme continu $\theta \in \mathrm{Hom}_c(C_K, {}^LS^0)$ tel que

$$\tilde{\lambda}(\sigma, c) = (\sigma\theta)(c)\theta^{-1}(c)$$

On considère maintenant pour $c \in C$

$$\tilde{\varphi}_1(c) = \tilde{\varphi}(c)\theta(c)^{-1}$$

si bien que $\tilde{\varphi}(w_\sigma)\tilde{\varphi}_1(c)\tilde{\varphi}(w_\sigma)^{-1}=\tilde{\varphi}(\sigma(c))$. On posera $\tilde{\varphi}_1(c\ w_\sigma)=\tilde{\varphi}_1(c)\tilde{\varphi}(w_\sigma)$. Considérons maintenant le 2-cocycle continu sur W à valeurs dans ${}^LS^0$

$$d(w_1, w_2)=\tilde{\varphi}_1(w_1)\tilde{\varphi}_1(w_2)\tilde{\varphi}_1(w_1w_2)^{-1}.$$

Il est immédiat que si $w_1=c_1\ w_\sigma$ et $w_2=c_2\ w_\tau$ alors $d(w_1, w_2)=d(w_\sigma, w_\tau)$, d'après la définition de $\tilde{\varphi}_1$. C'est dire que la classe de d est dans l'image de l'inflation

$$\text{Inf: } H^2(\Gamma, {}^LS^0)\to H^2_c(W, {}^LS^0)$$

qui d'après la proposition 5.4 (b) est nulle; donc il existe β: $W(K/F)\to {}^LS^0$, une fonction continue, telle que

$$\begin{aligned} d(w_1, w_2)&=\beta(w_1)\sigma(\beta(w_2))\beta(w_1w_2)^{-1}\\ &=(\beta(w_1)\times\sigma)(\beta(w_2)\times\tau)(\beta(w_1w_2)\times\sigma\tau)^{-1}. \end{aligned}$$

En posant si $w=(c, \sigma)$

$$\tilde{\varphi}_2(w)=\tilde{\varphi}_1(w)(\beta(w)\times\sigma)^{-1}$$

on aura $\tilde{\varphi}_2(w_1)\tilde{\varphi}_2(w_2)=\tilde{\varphi}_2(w_1w_2)$ avec $\pi\circ\tilde{\varphi}_2=\varphi$. On a ainsi défini un relèvement (admissible) de la sections φ. □

REMARQUE 7.3: Lorsque F est local non archimédien ou global de caractéristique résiduelle positive, la remarque 5.8 montre que le théorème 7.1 est encore valable en remplaçant les L-groupes complexes par les L-groupes à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

Lorsque $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le théorème 7.1 n'est autre que le lemme 2.10 de [L(R)2]. Lorsque F est local $\tilde{G}=GL_n$ et $G=SL_n$ ce résultat se trouve dans [W] et [H].

§8. Cas des groupes de Weil étendus

On appelle groupe de Weil étendu le produit direct de $W(K/F)$ par $SL(2, \mathbb{C})$ que l'on note $W'(K/F)$:

$$W'(K/F)=W(K/F)\times SL(2, \mathbb{C}).$$

Les morphismes admissibles de $W'(K/F)$ dans un L-groupe ${}^LG$ sont les morphismes dont la restriction à $W(K/F)$ est admissible et qui sont algébriques sur $SL(2, \mathbb{C})$. Considérons comme ci-dessus une suite exacte

$$1 \to {}^LS^0 \to {}^L\tilde{G}^0 \xrightarrow{\pi} {}^LG^0 \to 1$$

et un morphisme admissible φ: $W'(K/F) \to {}^LG = {}^LG^0 \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ l'image de $SL(2, \mathbb{C})$ par φ est connexe et est donc contenue dans ${}^LG^0$. Notons $\varphi_1 = \varphi|_{SL(2,\mathbb{C})}$ la restriction de φ à $SL(2, \mathbb{C})$; comme $SL(2, \mathbb{C})$ est simplement connexe, on peut relever cet homomorphisme en un homomorphisme

$$\tilde{\varphi}_1 : SL(2, \mathbb{C}) \to {}^L\tilde{G}^0$$

analytique complexe (et donc algébrique).

Par ailleurs on a vu au §7 que $\varphi_2 = \varphi|_{W(K/F)}$ se relève en un homomorphisme $\tilde{\varphi}_2$ de $W(K^{ab}/F)$ dans ${}^L\tilde{G}$. Soit $g \in SL(2, \mathbb{C})$ et $w \in W(K^{ab}/F)$ on a

$$\tilde{\varphi}_2(w)^{-1}\tilde{\varphi}_1(g)\tilde{\varphi}_2(w) = \tilde{\varphi}_1(g)s(g, w)$$

avec $s(g, w) \in {}^LS^0$. Supposons un instant que g soit un élément unipotent dans $SL(2, \mathbb{C})$, $\tilde{\varphi}_1(g)$ est unipotent dans ${}^L\hat{G}^0$ ainsi que son conjugué par $\tilde{\varphi}_2(w)$ et $s(g, w)$ est semi-simple. L'unicité de la décomposition de Jordan montre alors que $s(g, w)$ est trivial pour g unipotent. Maintenant $SL(2, \mathbb{C})$ est engendré par ses éléments unipotents et donc l'automorphisme de conjugaison par $\tilde{\varphi}_2(w)$ est trivial sur $\tilde{\varphi}_1(SL(2, \mathbb{C}))$. En résumé on a le

THÉORÈME 8.1: *Le morphisme naturel*

$$H_a^1(W'(K^{ab}/F), {}^L\tilde{G}^0) \to H_a^1(W'(K^{ab}/F), {}^LG^0)$$

est surjectif.

REMARQUE 8.2: Le résultat ci-dessus est encore valable si on remplace $SL(2, \mathbb{C})$ par $H(\mathbb{C})$ où H est un groupe semi-simple connexe et simplement connexe.

Bibliographie

[B.1] A. BOREL: Automorphic L-functions. *Proc. Symp. Pure Math.* Vol. 33 (1979). AMS "Corvallis".

[B.2] A. BOREL: *Linear Algebraic Groups*. Benjamin (1969).

[C.E.] H. CARTAN and S. EILENBERG: *Homological Algebra*. Princeton University Press (1956).

[H] G. HENNIART: Representations du groupe de Weil d'un corps local. *L'enseignement Math.* 26 (1980) 155–172.

[K] R. KOTTWITZ: Stable Trace formula: Cuspidal Tempered terms. Preprint.

[L(R)1] R.P. LANGLANDS: Representations of abelian algebraic groups. Preprint, Yale Univ. (1968).

[L(R)2] R.P. LANGLANDS: On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. Preprint.

[L(R)3] R.P. LANGLANDS: Stable conjugary: definitions and lemma *Can. J. Math.* 31 (4) (1979) 700–725.

[L(S)] S. LANG: *Rapport sur la Cohomologie des Groupes*. Benjamin (1966).

[S] J.-P. SERRE: *Corps Locaux*. Hermann (1962).

[Sh] D. SHELSTAD: Twisted endoscopic groups in the abelian case. Preprint.

[W] A. WEIL: Exercices dyadiques. *Inv. Math.* 27 (1974) 1–22.

Oblatum 25-II-1983 & 12-III-1984

Physique Mathématique
Université de Dijon
BP 138
21004 Dijon Cedex
France