Composition Mathematica

J.-L. Waldspurger

Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie

Compositio Mathematica, tome 54, n° 2 (1985), p. 173-242

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__54_2_173_0>

Compositio Mathematica 54 (1985) 173–242.

SUR LES VALEURS DE CERTAINES FONCTIONS L AUTOMORPHES EN LEUR CENTRE DE SYMETRIE

J-L. Waldspurger

Il y a quelques années, Vignéras a démontré le résultat suivant. Soit f une forme modulaire holomorphe parabolique de poids k pair, de caractère trivial, pour un groupe de congruence $\Gamma_0(N)$. On suppose que f est une newform. Pour un nombre premier p, soit a_p la valeur propre de l'opérateur de Hecke T_p associée à f. Notons $\mathbb{Q}(f)$ le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les a_p. C'est une extension finie de $\mathbb{Q}$. Soient χ un caractère de Dirichlet quadratique, de conducteur premier à N, et tel que $\chi(-1)=1$, et f' la newform telle que, pour presque tout p, f' soit propre pour l'opérateur de Hecke T_p, de valeur propre $\chi(p)a_p$. Notons $L(f, s)$, $L(f', s)$, les fonctions L habituelles associées à f et f', supposons $L(f, k/2)\neq 0$, $L(f', k/2)\neq 0$. Alors, à un facteur explicite près, le rapport $L(f', k/2)L(f, k/2)^{-1}$ est le carré d'un élément de $\mathbb{Q}(f)$ ([V]). Pour démontrer ce résultat, Vignéras exprimait ces valeurs de fonctions L en termes the coefficients de Fourier de formes modulaires de poids demi-entier. On démontre ici ce même résultat, sous une forme plus générale, par une méthode tout-à-fait différente.

Soient F un corps de nombres, M une algèbre de quaternions définie sur F, G le groupe de ses éléments inversibles, E' un sousmodule irréductible de l'espace des formes automorphes paraboliques sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ (cf. ci-dessous *notations* et II,1), π' la représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ dans E', ω son caractère central, π la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ associée à π' par la correspondance de Jacquet-Langlands, T un sous-tore maximal de G défini sur F, F_T l'extension quadratique de F associée à T, Ω un caractère de $T(F)\backslash T(\mathbb{A})$ coïncidant avec ω sur le centre $Z(\mathbb{A})$ de $G(\mathbb{A})$, Π la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(F_T(\mathbb{A}))$ qui relève π (cf. *notations*). On peut considérer Ω comme un caractère de $F_T^\times(\mathbb{A})$, et définir la fonction $L(\Pi\otimes\Omega^{-1}, s)$. Soit $e'\in E'$, considérons l'intégrale

$$\int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} e'(t)\Omega^{-1}(t)\mathrm{d}t.$$

Le point fondamental est de montrer que (grosso modo) le carré de cette intégrale est égale au produit de trois termes: un terme indépendant de T

et Ω, un terme lui-même produit de termes locaux élémentaires, et enfin $L(\Pi \otimes \Omega^{-1}, 1/2)$ (cf. proposition 7). On utilise pour cela les travaux de Shimizu sur les formes automorphes sur une algèbre de quaternions ([Shimizu]), et le théorème de Siegel ([We], ci-dessous I,5).

On en déduit d'abord une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $e' \in E'$ tel que l'intégrale ci-dessus soit non nulle (théorème 2).

Supposons maintenant $\omega = 1$, et imposons certaines conditions aux composantes locales π_v de π aux places archimédiennes v de F (cf. IV,7). Par exemple si v est réelle, on suppose π_v de la série discrète. On a montré dans [W3] que les intégrales ci-dessus possédaient des propriétés d'algébricité. On en déduit alors des propriétés d'algébricité de certaines valeurs de fonctions L. Plus précisément, soient π comme ci-dessus, $\mathbb{Q}(\pi)$ son corps de rationalité ([W3]), χ un caractère quadratique de $\mathbb{A}^\times/F^\times$. Supposons $L(\pi, 1/2)L(\pi \otimes \chi, 1/2) \neq 0$. On peut définir une algèbre de quaternions M comme ci-dessus, dépendant de χ, E' et π' comme ci-dessus, tels que π soit associée à π' par la correspondance de Jacquet-Langlands, et un élément $e' \in E' - \{0\}$, tels que le produit $L(\pi, 1/2)L(\pi \otimes \chi, 1/2)$ soit égal au produit des quatre termes suivants

- un terme lui-même produit de termes élémentaires ou indépendants de χ,
- un terme lui-même produit de "termes locaux",
- $(e', e')^{-1}$, où (e', e') est le carré de la norme L^2 de e',
- le carré d'un élément de $\mathbb{Q}(\pi)$,

(théorème 3). On définira un terme explicite $p(\chi)$ dépendant seulement de χ et des composantes π_v de π aux places archimédiennes v de F. Les résultats ci-dessus impliquent

Soient π comme ci-dessus, χ_1, χ_2 deux caractères quadratiques de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tels que

(i) *pour toute place archimédienne v de F, $\chi_{1,v} = \chi_{2,v}$,*

(ii) $L(\pi \otimes \chi_2, 1/2) \neq 0$.

Alors il existe $q \in \mathbb{Q}(\pi)$ tel qu'on ait l'égalité

$$L(\pi \otimes \chi_1, 1/2)L(\pi \otimes \chi_2, 1/2)^{-1} = qp(\chi_1)p(\chi_2)^{-1}.$$

Supposons de plus

(iii) *pour toute place finie v de F telle que π_v soit ramifiée, $\chi_{1,v} = \chi_{2,v}$.*

Alors il existe $q \in \mathbb{Q}(\pi)$ tel qu'on ait l'égalité

$$L(\pi \otimes \chi_1, 1/2)L(\pi \otimes \chi_2, 1/2)^{-1} = q^2p(\chi_1)p(\chi_2)^{-1}.$$

(cf. corrollaire au théorème 4, et théorème 6). Cette seconde assertion est la généralisation du théorème de Vignéras. La première a été obtenue par Shimura ([Shimura]), ainsi que par Harder ([H]).

Notations. Preliminaires

La lettre F désigne soit un corps local, soit un corps de nombres.

(a) Si F est un corps local, on note $|.|$ sa valeur absolue habituelle. En particulier si $F = \mathbb{C}$, x, $y \in \mathbb{R}$, $|x + \mathrm{i}y| = x^2 + y^2$.

REMARQUE: Il arrive que le corps $\mathbb{C}$ apparaisse autrement que comme cas particulier de corps local. Par exemple quand on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. On munit dans ce cas $\mathbb{C}$ de sa valeur absolue usuelle, qui est la racine carrée de la précédente. On espère que cela ne crée pas de confusion.

Si de plus F n'est pas archimédien, on note v sa valuation, $\mathcal{o}$ son anneau des entiers, $\mathcal{o}^\times$ son groupe des unités. On fixe une uniformisante ϖ.

(b) Si F est un corps de nombres, on note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finies, $\mathbb{A}^\times$ le groupe des idèles, S l'ensemble des places archimédiennes de F. Si v est une place de F, on note F_v le complété de F en v. On indice par v les objets définis dans le cas local relatifs à F_v, par exemple $\mathcal{o}_v$ etc ... Si ψ, resp. χ, est un caractère de $\mathbb{A}$, resp. $\mathbb{A}^\times$, on note ψ_v, resp. χ_v, la composante locale de ψ, resp. χ, en une place v. C'est un caractère de F_v, resp. $F_v^\times$. Soit G un groupe algébrique défini sur F. On note $G(F)$, $G(\mathbb{A})$, $G(\mathbb{A}_f)$, $G(F_v)$, ou G_F, $G_{\mathbb{A}}$, G_f, G_v, le groupe des points de G à coefficients dans F, $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_f$, ou un complété F_v. On pose $G_\infty = \prod_{v \in S} G_v$. On adopte des notations analogues pour les groupes métaplectiques, bien qu'ils ne soient pas algébriques. Un espace vectoriel sur F est un groupe algébrique. De même si F' est une extension de F, on peut considérer F', ou son groupe des éléments inversibles $F'^\times$, comme des groupes algébriques sur F. Alors, par exemple, $F'(\mathbb{A})$ est l'anneau des adèles de F'.

Dans certains cas, on se donnera un groupe G et, pour $v \in S$ et pour presque toute place finie v, un sous-groupe compact maximal de G_v. On définit alors l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}$ de G relative à ces sousgroupes. On adopte des notations analogues, par exemple $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}$, $\mathscr{H}_v$, etc ...

(c) Soient F un corps local, ψ un caractère continu unitaire de F, non trivial. On munit F de la mesure de Haar dx autoduale pour ψ. On munit $F^\times$ de la mesure de Haar $\zeta(1)|x|^{-1}\mathrm{d}x$, où ζ est la fonction zêta du corps F.

REMARQUE: cette définition est valable y compris si F est archimédien.

Soient F un corps de nombres, ψ un caractère continu non trivial de $\mathbb{A}/F$. Pour toute place v, on munit F_v et $F_v^\times$ des mesures ci-dessus relatives à ψ_v. On munit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^\times$ des mesures produits. Ces dernières sont indépendantes de ψ.

Dans les trois premiers chapitres, un caractère ψ est donné. Les mesures sont relatives à ce caractère. Dans le dernier chapitre, les mesures sont relatives au caractère standard ψ_F suivant:

- si $F = \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$, $\psi_{\mathbb{R}}(x) = e^{2\pi i x}$,
- si $F = \mathbb{Q}$, $\psi_{\mathbb{Q}}$ est le caractère de $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}$ de composante $\psi_{\mathbb{R}}$ en la place réelle,
- si $F = \mathbb{Q}_p$, pour un nombre premier p, ψ_F est la composante en p de $\psi_{\mathbb{Q}}$,
- si F' est une extension finie de F, $\psi_{F'} = \psi_F \circ \mathrm{Tr}_{F'/F}$, *où* $\mathrm{Tr}_{F'/F}$ est la trace.

On munit les groupes discrets de la mesure de comptage, et les espaces quotients de mesures quotients, en un sens rendu clair par le contexte.

Soit F un corps de nombres. On considérera souvent un groupe de quaternions G défini sur F, et son centre Z. On munira $Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})$ d'une mesure de Tamagawa. On munira le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ d'une mesure produit de mesures sur les groupes locaux $\mathrm{GL}_2(F_v)$, telles que pour presque toute place finie v de F, $\mathrm{mes}(\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)) = 1$.

Remarque: il peut arriver que G soit isomorphe à GL_2. Les mesures ci-dessus ne coïncident pas. On espère que le contexte indique clairement si GL_2 intervient "en tant que GL_2", ou en tant que cas particulier de groupe G.

I. Rappels sur les representations de Weil

1. Définitions locales

Soient F un corps local de caractéristique O, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F)$ le groupe métaplectique, revêtement de degré 2 de $\mathrm{SL}_2(F)$ (non trivial si $F \neq \mathbb{C}$). On réalise ce groupe comme le produit $\mathrm{SL}_2(F) \times \{\pm 1\}$, muni d'une certaine topologie, où le produit de deux éléments est donné par une formule

$$(\sigma, \epsilon).(\sigma', \epsilon') = (\sigma\sigma', \epsilon\epsilon'\beta(\sigma, \sigma')),$$

β étant un certain cocycle. Si $\sigma \in \mathrm{SL}_2(F)$, on note encore σ l'élément $(\sigma, 1)$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F)$.

Soient $\psi \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}^\times)$ un caractère continu non trivial, V un espace vectoriel sur F de dimension finie n, muni d'une forme quadratique q non dégénérée. Notons encore q la forme bilinéaire

$$q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y),$$

pour tous x, $y \in V$. Soient $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}(V, q)$ le groupe orthogonal, dont on note $(g, x) \mapsto g.x$ l'action sur V, pour $g \in \boldsymbol{O}$, $x \in V$, $\mathrm{S}(V)$ l'espace des fonctions de Schwartz sur V. On sait définir une représentation de Weil

$r = r[\psi, q]$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F) \times \boldsymbol{O}$ dans $\mathrm{S}(V)$. Nous rappelons ci-dessous les formules de définition. On note $r' = r'[\psi, q]$, resp. $r'' = r''[\psi, q]$, la composée de r et du plongement naturel $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F) \to \widetilde{\mathrm{SL}}_2(F) \times \boldsymbol{O}$, resp. $\boldsymbol{O} \to \widetilde{\mathrm{SL}}_2(F) \times \boldsymbol{O}$. Pour tous $f \in \mathrm{S}(V)$, $x \in V$, $\beta \in F$, $\alpha \in F^\times$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$, $g \in \boldsymbol{O}$, on a

(i) $r'\left(\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f(x) = \psi(\beta q(x)) f(x)$,

(ii) $r'\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \epsilon\right) f(x) = \epsilon^n \gamma[\psi, q] \int_V f(y) \psi(q(x, y)) \mathrm{d}y$,

(iii) $r'\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\right) f(x) = |\alpha|^{n/2} \chi[\psi, q](\alpha) f(\alpha x)$,

(iv) $r''(g) f(x) = f(g^{-1}.x)$,

où $\mathrm{d}y$ est une mesure autoduale, en un sens évident, $\gamma[\psi, q]$ est un certain élément de $\{z \in \mathbb{C};\ z^8 = 1\}$, et $\chi[\psi, q]$ une certaine application de $F^\times$ dans $\{z \in \mathbb{C};\ z^4 = 1\}$. Si n est pair, r' est une représentation de $\mathrm{SL}_2(F)$.

Soient (V_1, q_1), (V_2, q_2) deux espaces quadratiques comme ci-dessus, (V, q) leur somme directe orthogonale. L'espace $\mathrm{S}(V_1) \otimes \mathrm{S}(V_2)$ se plonge dans $\mathrm{S}(V)$, est dense dans cet espace (et lui est même égal si F n'est pas archimédien). Alors la représentation $r'[\psi, q]$ est le prolongement par continuité de $r'[\psi, q_1] \otimes r'[\psi, q_2]$.

2. Cas archimédien

Supposons $F = \mathbb{R}$. Soient $K^s = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $\tilde{K}^s$ son image réciproque dans $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$. Fixons une base de V dans laquelle q s'écrit

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2.$$

Pour $x \in V$, posons

$$q_0(x) = |a_1| x_1^2 + \ldots + |a_n| x_n^2.$$

Soit K^0 le sous-groupe des $g \in \boldsymbol{O}$ tels que $q_0(g.x) = q_0(x)$ pour tout $x \in V$. Les groupes $\tilde{K}^s$ et K^0 sont des sous-groupes compacts maximaux de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, resp. $\boldsymbol{O}$. On définit relativement à ces sous-groupes les algèbres de Hecke $\tilde{\mathscr{H}}^s$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{H}^0$ de $\boldsymbol{O}$. On déduit de r une représentation de $\tilde{\mathscr{H}}^s \otimes \mathscr{H}^0$ dans $\mathrm{S}(V)$, qu'on note encore r.

Soit $c \in \mathbb{R}^\times$ l'élement tel que $\psi(x) = \mathrm{e}^{2\pi i c x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons $\mathrm{S}_\psi(V)$ l'espace des fonctions sur V de la forme

$$x \mapsto P(x_1, \ldots, x_n)\ \mathrm{e}^{-2\pi |c| q_0(x)},$$

où P est un polynôme quelconque. Cet espace est dense dans $\mathrm{S}(V)$. Il n'est pas stable par la représentation r du groupe $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{O}$, mais l'est par celle des algèbres de Hecke $\tilde{\mathscr{H}}^s$ et $\mathscr{H}^0$. En particulier il est stable par la représentation de $\tilde{K}^s \times K^0$. De plus chacun de ses éléments est $\tilde{K}^s \times K^0$-fini.

Supposons maintenant $F = \mathbb{C}$. Soient $K^s = \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $\tilde{K}^s$ son image réciproque dans $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{C})$. On fixe une base de V comme ci-dessus, on note q_0 la forme hermitienne sur V

$$q_0(x) = |a_1|^{1/2}|x_1| + \ldots + |a_n|^{1/2}|x_n|.$$

On définit K^0 comme ci-dessus. Soient $c \in \mathbb{C}^\times$ l'élément tel que $\psi(x) = \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} \mathrm{Re}(cx)}$ pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\mathrm{S}_\psi(V)$ l'espace des fonctions sur V de la forme

$$x \mapsto P(x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n)\, \mathrm{e}^{-4\pi|c|^{1/2} q_0(x)},$$

où P est un polynôme quelconque. Avec ces définitions, on a les mêmes propriétés que dans le cas $F = \mathbb{R}$.

3. *Passage à GL_2*

Soient GO le groupe des similitudes de V, et pour $g \in \mathrm{GO}$, $q(g) \in F^\times$ le terme tel que $q(g.x) = q(g)q(x)$ pour tout $x \in V$. Notons $\mathrm{S}(V \times F^\times)$ l'espace des fonctions de Schwartz sur $V \times F^\times$. Supposons, pour simplifier, n pair. On peut induire la représentation de Weil en une représentation de $\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GO}$ dans $\mathrm{S}(V \times F^\times)$, notée encore $r = r[\psi, q]$. On en déduit des représentations r' de $\mathrm{GL}_2(F)$, r'' de GO. Pour $f \in \mathrm{S}(V \times F^\times)$ et $u \in F^\times$, notons $f_u \in \mathrm{S}(V)$ la fonction définie par $f_u(x) = f(x, u)$ pour tout $x \in V$. On a les formules suivantes, pour tous $f \in \mathrm{S}(V \times F^\times)$, $x \in V$, $u \in F^\times$, $\sigma \in \mathrm{SL}_2(F)$, $\delta \in F^\times$, $g \in \mathrm{GO}$,

(i) $(r'(\sigma)f)_u(x) = [r'[\psi, uq](\sigma)(f_u)](x)$,

(ii) $r'\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\right) f(x, u) = |\delta|^{-n/4} f(x, \delta^{-1}u)$,

(iii) $r''(g)f(x, u) = f(g^{-1} \cdot x, uq(g))$.

Supposons $F = \mathbb{R}$, soient $K^l = O_2(\mathbb{R})$, q_0 comme au (I.2), K le sousgroupe des $g \in \mathrm{GO}$ tels que $q_0(g \cdot x) = q_0(x)$ pour tout $x \in V$. Les groupes K^l et K^g sont des sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, resp. GO. Pour c comme au (I.2), soit $\mathrm{S}_\psi(V \times \mathbb{R}^\times)$ l'espace engendré linéairement par les fonctions sur $V \times \mathbb{R}^\times$ de la forme

$$(x, u) \mapsto h(u) P(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{e}^{-2\pi|cu| q_0(x)},$$

où P est un polynôme et h une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^\times$. Avec ces définitions, on a une théorie analogue à celle du (I.2).

Supposons $F = \mathbb{C}$, soient $K^\ell = U_2(\mathbb{C})$, q_0 comme au (I.2), K^g comme cidessus. Pour c comme au (I.2), soit $\mathrm{S}_\psi(V \times \mathbb{C}^\times)$ l'espace engendré linéairement par les fonctions sur $V \times \mathbb{C}^{\times}$ de la forme

$$(x, u) \mapsto u^m h(|u|) P(x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n)\, \mathrm{e}^{-4\pi |cu|^{1/2} q(x)},$$

où P est un polynôme, h une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}_+^{\times}$, et $m \in \mathbb{Z}$. On a des propriétés analogues à celles du (I.2).

4. *Définitions globales*

Soient F un corps de nombres, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A})$ le groupe métaplectique, revêtement de degré 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$. Il existe une section, unique, $\mathrm{SL}_2(F) \to \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A})$, on identifie $\mathrm{SL}_2(F)$ et son image.

Soient $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{A}/F, \mathbb{C}^{\times})$ un caractère continu non trivial, V un espace vectorial sur F de dimension finie n, muni d'une forme quadratique q non dégénérée, $\boldsymbol{O}$ le groupe orthogonal de V. Pour toute place v de F, ces données définissent par localisation des données analogues à celles du (I.1), d'où des representations $r[\psi_v, q_v]$, etc .... Soit $\mathrm{S}(V_{\mathbb{A}})$ l'espace des fonctions de Schwartz sur $V_{\mathbb{A}}$. Par tensorisation des représentations locales, on définit une représentation $r = r[\psi, q]$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{O}(\mathbb{A})$ dans $\mathrm{S}(V_{\mathbb{A}})$.

Fixons une base orthogonale de V_F. Si v est une place archimédienne de F, on définit, grâce au choix de cette base, des groupes $\tilde{K}_v^s$ et K_v^0 comme au (I.2). Si v est une place finie, posons $K_v^s = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_v)$, notons $\tilde{K}_v^s$ l'image réciproque de K_v^s dans $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_v)$, K_v^0 le stabilisateur dans $\boldsymbol{O}(F_v)$ du $\mathcal{O}_v$-réseau engendré par la base choisie. Pour presque toute place, ces groupes sont des sous-groupes compacts maximaux de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_v)$, resp. $\boldsymbol{O}(F_v)$. Posons $K_{\mathbb{A}}^s = \prod_v K_v^s$, $K_{\mathbb{A}}^0 = \prod_v K_v^0$, soit $\tilde{K}_{\mathbb{A}}^s$ l'image réciproque de $K_{\mathbb{A}}^s$ dans $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A})$. On définit relativement à ces groupes les algèbres de Hecke $\tilde{\mathscr{H}}_{\mathbb{A}}^s$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A})$ et $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^0$ de $\boldsymbol{O}(\mathbb{A})$. On déduit de r une représentation encore notée r de $\tilde{\mathscr{H}}_{\mathbb{A}}^s \otimes \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^0$. Notons $\mathrm{S}_\psi(V_{\mathbb{A}})$ le produit tensoriel restreint des espaces $\mathrm{S}(V_v)$ pour les places v finies de F et $\mathrm{S}_{\psi_v}(V_v)$ pour les places v archimédiennes. C'est un sous-espace de $\mathrm{S}(V_{\mathbb{A}})$, dense, et stable par la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}_{\mathbb{A}}^s \otimes \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^0$.

Soient $f \in \mathrm{S}(V_{\mathbb{A}})$, $\sigma \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A})$, $g \in \boldsymbol{O}(\mathbb{A})$. Posons

$$\theta_f(\sigma, g) = \theta(f, \sigma, g) = \sum_{x \in V_F} r(\sigma, g) f(x).$$

Cette série converge absolument. On a la proposition fondamentale bien connue

PROPOSITION 1: *Soit $f \in \varphi(V_{\mathbb{A}})$. La fonction θ_f définie sur $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{O}(\mathbb{A})$ est invariante à gauche par $\mathrm{SL}_2(F) \times \boldsymbol{O}(F)$. Elle est C^∞, à croissance modérée. Si de plus $f \in \varphi_\psi(V_{\mathbb{A}})$, elle est $\tilde{K}_{\mathbb{A}}^s \times K_{\mathbb{A}}^0$-finie à droite.* □

Supposons n pair. On peut comme dans le cas local induire la représentation de Weil. On adapte de façon évidente les notations ci-dessus et celles de (I.3). On définit donc des représentations $r = r[\psi, q]$ de $GL_2(\mathbb{A}) \times GO(\mathbb{A})$ dans $S(V_{\mathbb{A}} \times \mathbb{A}^{\times})$, et de $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^{\ell} \otimes \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^{g}$ dans un sousespace $S_{\psi}(V_{\mathbb{A}} \times \mathbb{A}^{\times})$, où $\mathscr{H}^{\ell}$ et $\mathscr{H}^{g}$ sont les algèbres de Hecke de GL_2 et GO. Soient $f \in S(V_{\mathbb{A}} \times \mathbb{A}^{\times})$, $\sigma \in GL_2(\mathbb{A})$, $g \in GO(\mathbb{A})$. Posons

$$\theta_f(\sigma, g) = \theta(f, \sigma, g) = \sum_{x \in V_F,\, u \in F^{\times}} r(\sigma, g) f(x, u).$$

Cette série converge absolument. La fonction θ_f ainsi définie vérifie des propriétés analogues à celles décrites dans la proposition 1.

5. Deux variantes du théorème de Siegel

Soient F, ψ comme au (I.4). Nous allons considérer les deux cas particuliers (A) et (B) suivants d'espaces quadratiques (V, q).

Cas (A). Soient F' une extension quadratique (non triviale) de F, χ le caractère quadratique de $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$ associé à F'. On pose $V = F'$ considéré comme espace de dimension 2 sur F. Il est muni de la forme norme $q = N_{F'/F}$. Le groupe spécial orthogonal SO est le groupe des éléments de $F'^{\times}$ de norme 1, agissant sur F' par multiplication. D'après le théorème 90 de Hilbert, il y a une suite exacte

$$1 \to F^{\times} \to F'^{\times} \to SO \to 1$$

Le groupe $SO(\mathbb{A})$ est donc muni d'une mesure (cf. *préliminaires*). Le quotient $SO(F)\backslash SO(\mathbb{A})$ est de mesure finie égale à $2L(\chi, 1)$, où L est la fonction usuelle. On pose $m = L(\chi, 1)$, $s_0 = 1/2$.

Cas (B). Soient M une algèbre de quaternions définie sur F, non déployée, $G = M^{\times}$, PG le groupe G quotienté par son centre. On prend pour espace V l'espace de dimension 3 des éléments de M de trace nulle, et pour forme q la norme réduite $N_{M/F}$. Le groupe spécial orthogonal SO est le groupe PG agissant dans V par conjugaisons. On munit $SO(\mathbb{A})$ d'une mesure de Tamagawa. Le quotient $SO(F)\backslash SO(\mathbb{A})$ est de mesure 2. On pose $m = 2$, $s_0 = 1$.

Dans les deux cas, posons $r' = r'[\psi, q]$, et munissons-nous des données suivantes:

- un sous-ensemble $\Sigma' \subset GL_2(\mathbb{A})$, ouvert, relativement compact, un réel $c > 0$, une place archimédienne v_0 de F,
- une fonction $f_f \in S(V_f)$,
- une variété C^{∞}, Z, et une application

$$Z \to S(V_{\infty})$$

$$z \mapsto f_{\infty, z},$$

- pour tout ensemble fini $D = \{D_1, \dots, D_m\}$ d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur V, une fonction continue c_D sur Z.

  On suppose:
- pour tous $\sigma \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_\infty)$, $x \in V_\infty$, l'application $z \mapsto r'(\sigma) f_{\infty,z}(x)$ est C^∞ sur Z,
- pour tout ensemble D comme ci-dessus, il existe une fonction de Schwartz f_D sur V_∞ telle que pour tous $i = 1, \dots, m$, $z \in Z$, $x \in V_\infty$,

$$|D_i f_{\infty,z}(x)| \leqslant c_D(z) f_D(x).$$

Soit Σ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\sigma$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^\times \subset F_{v_0}^\times$, $|\alpha|_{v_0} > c$, $\sigma \in \Sigma'$. Il y a une notion de fonction à croissance modérée sur Σ. Soit v une place de F. On définit sur $\mathrm{GL}_2(F_v)$ un fonction A_v par la formule

$$A_v\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\kappa\right) = \left|\frac{\alpha}{\delta}\right|_v^{1/2}$$

pour tous $\alpha, \delta \in F_v^\times$, $\beta \in F_v$, $\kappa \in K_v$. On définit sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ la fonction $A = \bigotimes_v A_v$. Soit B^1 le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de SL_2. Enfin, pour $z \in Z$, soit $f_z \in S(V_{\mathbb{A}})$, la fonction $f_z = f_f \otimes f_{\infty,z}$.

Pour $s \in \mathbb{C}$, $z \in Z$, $\sigma \in \Sigma$, posons

$$E(s, z, \sigma) = \sum_{\delta \in B^1(F) \backslash \mathrm{SL}_2(F)} A(\delta\sigma)^{s-s_0} r'(\delta) f_z(0),$$

$$|E|(s, z, \sigma) = \sum_{\delta \in B^1(F) \backslash \mathrm{SL}_2(F)} |A(\delta\sigma)^{s-s_0} r'(\delta) f_z(0)|.$$

Lemme 1:

(i) *Il existe* $R \in \mathbb{R}$ *tel que les séries* $|E|(s, z, \sigma)$ *et* $E(s, z, \sigma)$ *convergent si* $(s, z, \sigma) \in \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > R\} \times Z \times \Sigma$. *La fonction E définie sur cet ensemble est analytique en s,* C^∞ *en z et σ.*

(ii) *Soit* $\Omega \subset \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > R\}$ *un sous-ensemble compact. Il existe un ensemble fini D d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur* V_∞, *une fonction* λ *sur* Σ, *à croissance modérée, tels que pour tout* $(s, z, \sigma) \in \Omega \times Z \times \Sigma$, *on ait les inégalités*

$$|E|(s, z, \sigma) \leqslant \lambda(\sigma) c_D(z),\ |E(s, z, \sigma)| \leqslant \lambda(\sigma) c_D(z).$$

(iii) *Il existe un ouvert connexe U de* $\mathbb{C}$, *contenant* $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > R\} \cup \{s_0\}$, *et une fonction E sur* $U \times Z \times \Sigma$ *prolongeant la fonction ci-dessus, analytique en s,* C^∞ *en z et σ, et vérifiant une majoration comme au* (ii) *pour tout sous-ensemble compact* $\Omega \subset U$.

Pour tout $z \in Z$, posons

$$I_z = \int_{\mathrm{SO}(F)\backslash \mathrm{SO}(\mathbf{A})} \theta(f_z, 1, g)\mathrm{d}g.$$

L'intégrale converge car le domaine d'intégration est compact.

Proposition 2: *Pour tous $z \in Z$, $\sigma \in \Sigma$, on a l'égalité*

$$I_z = mE(s_0, z, \sigma).$$

Remarque: le membre de gauche est indépendant de σ, donc celui de droite également, ce qui est assez naturel, compte tenu de la définition de E.

Dans le cas (A), la proposition 2 est démontrée, pour Z réduite à un point, dans [W1], p. 101 à 119, en suivant bien sûr pas à pas la démonstration donnée par Weil du théorème de Siegel ([We]). Il n'est pas difficile, en précisant les nombreuses majorations utilisées dans cette démonstration, d'obtenir les résultats ci-dessus. Les propriétés décrites au lemme 1 sont d'ailleurs pour l'essentiel des propriétés bien connues des séries d'Eisenstein. Une démonstration analogue s'applique au cas (B). La proposition 2 dans ce cas a été démontrée par Schulze-Pillot. □

II. La construction de Shimizu. Applications

1. Le théorème de Shimizu

Soient F un corps de nombres, M une algèbre de quaternions sur F déployée ou pas, $G = M^\times$. On applique les constructions du (I.4) à l'espace de dimension 4 $V = M$ muni de la forme $q = N_{M/F}$, la norme réduite. Notons Z le centre de G, $\Delta = \{(z, z^{-1});\ z \in Z\} \subset G \times G$, $D = (G \times G)/\Delta$. Le groupe D s'identifie à un sous-groupe d'indice 2 du groupe des similitudes GO. En effet D agit sur V par

$$(g_1, g_2) \cdot x = g_1 x \bar{g}_2$$

pour g_1, $g_2 \in D$, $x \in V = M$, où $g \mapsto \bar{g}$ est l'antiinvolution de l'algèbre M.

Fixons une base orthogonale de V_F, contenant l'élément unité de M_F. Pour toute place v finie de F, soit K_v^m le stabilisateur dans G_v du $\mathcal{O}_v$-réseau engendré par cette base, où G agit dans M par translations à gauche. Pour toute place v archimédienne, introduisons q_0 comme en (I.2), soit K_v^m l'ensemble des $g \in G_v$ tels que $q_0(gx) = q_0(x)$ pour tout $x \in M_v$. On voit que pour toute place archimédienne et pour presque toute place finie v, K_v^m est un sous-groupe compact maximal de G_v, et l'image de $K_v^m \times K_v^m$ par l'application

$$G_v \times G_v \to D_v = (G_v \times G_v)/\Delta_v \to \mathrm{GO}_v$$

est égale à $D_v \cap K_v^g$ (cf. I.3). Introduisons l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m$ de $G(\mathbb{A})$ relative à ces sous-groupes. Il y a une application naturelle $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m \otimes \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m \to \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^g$.

Soient ψ un caractère continu non trivial de $\mathbb{A}/F$, $\mathrm{S}_{\mathbb{A}} = \varphi(V(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times)$, $\mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}} = \mathrm{S}_\psi(V(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times)$ les espaces définis aux (I.3,4). Les considérations ci-dessus permettent de définir des représentations de Weil $r = r[\psi, q]$, resp. $r' = r'[\psi, q]$, resp. $r'' = r''[\psi, q]$, de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$, resp. de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, resp. de $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$, dans $\mathrm{S}_{\mathbb{A}}$, et de $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^\ell \otimes \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m \otimes \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m$, resp. de $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^\ell$, resp. de $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m \otimes \mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m$, dans $\mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}}$.

Soit $\mathscr{A}(G)$ l'espace des formes automorphes sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. C'est un $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m$-module. Si M est déployée sur F, soit $\mathscr{A}_0(G)$ le sous-espace des formes paraboliques. Si M n'est pas déployée sur F, soit $\mathscr{A}_0(G)$ le sous-espace somme des sous-espaces irréductibles de dimension infinie de $\mathscr{A}(G)$. Notons $A_0(G)$ l'ensemble des sous-modules irréducibles de $\mathscr{A}_0(G)$. D'après le théorème de multiplicité un, on peut considérer $A_0(G)$ comme un ensemble de représentations. On notera π, E, ou (π, E) un élément de $A_0(G)$, E étant un sous-espace de $\mathscr{A}_0(G)$, et π la représentation de $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m$ dans E. On sait que si $\pi \in A_0(G)$ il existe pour toute place v de F une représentation admissible irréductible π_v de $\mathscr{H}_v^m$, telle que $\pi \sim \bigotimes_v \pi_v$.

Remarque: si M est déployée sur F, les considérations ci-dessus définissent $\mathscr{A}(\mathrm{GL}_2)$, $\mathscr{A}_0(\mathrm{GL}_2)$, etc ...

Pour toute place v de F, il existe une injection JL (pour: Jacquet-Langlands) qui, à une représentation admissible irréductible de $\mathscr{H}_v^m$, associe une telle représentation de $\mathscr{H}_v^\ell$. Il existe une injection JL: $A_0(G) \to A_0(\mathrm{GL}_2)$ telle que si $\pi \in A_0(G)$ et $\pi \sim \bigotimes_v \pi_v$, $\mathrm{JL}(\pi) \sim \bigotimes_v \mathrm{JL}(\pi_v)$. L'image de JL est l'ensemble des $\pi \in A_0(\mathrm{GL}_2)$ telles que π_v est de carré intégrable (i.e. π_v est spéciale ou cuspidale si v est finie, de la série discrète si v est réelle) pour toutes les places v de F telles que M_v ne soit pas déployée.

Soit $E \in A_0(\mathrm{GL}_2)$. Pour $\varphi \in E$, $f \in \mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}}$, $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, posons

$$\begin{aligned}\theta_{f,\varphi}(g_1, g_2) &= \theta(f, \varphi, g_1, g_2)\\ &= \int_{\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \varphi(\sigma)\theta(f, \sigma, g_1, g_2)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

(cf. I.4). Notons $\Theta(E)$ l'ensemble des fonctions $\theta_{f,\varphi}$, pour $\varphi \in E$, $f \in \mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}}$. On peut d'ailleurs fixer $\varphi \neq 0$ et $\Theta(E)$ est l'ensemble des fonctions $\theta_{f,\varphi}$ pour $f \in \mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}}$. Enfin si X est un ensemble et $\mathscr{F}$ un espace de fonctions sur X, notons $\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}$ l'espace des fonctions sur $X \times X$ engendré par les fonctions

$$(x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1) f_2(x_2)$$

pour $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$.

THÉORÈME 1: *Soit* $E \in A_0(\mathrm{GL}_2)$.

(1) *Si E n'appartient pas à l'image de* JL, $\Theta(E) = \{0\}$.

(2) *Si E appartient à l'image de* JL, *soit* $E' \in A_0(G)$ *tel que* $\mathrm{JL}(E') = E$, *alors* $\Theta(\mathrm{E}) = \mathrm{E}' \otimes \mathrm{E}'$.
([Shimizu]).

2. *Modèles de Whittaker dans le cas déployé*

On suppose ici M déployée, $G = \mathrm{GL}_2$. Si v est une place de F et π_v une représentation admissible irréductible de $\mathscr{H}_v^{\ell}$, de dimension infinie, notons $W(\pi_v, \psi_v)$ son modèle de Whittaker relatif à ψ_v. Notons ψ^- le caractère de $\mathbb{A}/F$ défini par $\psi^-(x) = \psi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{A}/F$.

Soit $(\pi, E) \in A_0(\mathrm{GL}_2)$, fixons $\varphi \in E$, $\varphi \neq 0$. Pour $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, posons

$$W(\sigma) = \int_{F \backslash \mathbb{A}} \psi(\beta) \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma\right) \mathrm{d}\beta.$$

On suppose, ce qui est légitime, qu'il existe pour toute place v un élément $W_v \in W(\pi_v, \psi_v^-)$, tels que

(i) $W_v(1) = 1$, pour presque toute place v,

(ii) pour tout $\sigma = (\sigma_v) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $W(\sigma) = \prod_v \mathrm{W_v}(\sigma_\mathrm{v})$.

Soit v une place de F. Pour toute $f \in \mathrm{S}_v = \mathrm{S}(M_v \times F_v^\times)$, définissons $\hat{f} \in \mathrm{S}(F_v^4 \times F_v^\times)$ par la formule

$$\hat{f}(a, d, c, b, u) = \int_{F_v} f\left(\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d \end{pmatrix}, u\right) \psi_v(ubb')|u|_v^{1/2} \mathrm{d}b'.$$

L'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de S_v sur $\mathrm{S}(F_v^4 \times F_v^\times)$. Munissons F_v^2 de la forme quadratique $q_1((a, d)) = ad$. Il existe une représentation de Weil $r'[\psi, q_1]$ de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ dans $\mathrm{S}(F_v^2 \times F_v^\times)$. Il existe une représentation ρ de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ dans $\mathrm{S}(F_v^2)$ définie par

$$\rho(\sigma) f(c, b) = f((c, b)\sigma),$$

pour tous $f \in \mathrm{S}(F_v^2)$, $(c, b) \in F_v^2$, $\sigma \in \mathrm{GL}_2(F_v)$. L'espace $\mathrm{S}(F_v^2 \times F_v^\times) \otimes \mathrm{S}(F_v^2)$ s'injecte de façon évidente dans $\mathrm{S}(F_v^4 \times F_v^\times)$. Notons $\hat{r}'$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ dans $\mathrm{S}(F_v^4 \times F_v^\times)$ déduite par continuité de $r'[\psi, q_1] \otimes \rho$. On vérifie les formules suivantes, pour $f \in \mathrm{S}_v$, $\sigma \in \mathrm{GL}_2(F_v)$, $n, m, a, d, c, b \in F_v$, $a_1, a_2, d_1, d_2, u \in F_v^\times$:

$$(r'(\sigma) f)\hat{} = \hat{r}'(\sigma)\hat{f},$$

$$\left(r''\left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f\right)\hat{}(a, d, c, b, u)$$

$$= \psi_v(ub(-am + dn + cmn))\hat{f}(a - cn, d + cm, c, b, u),$$

$$\left(r''\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\right) f\right)\hat{}\,(a, d, c, b, u)$$

$$= \left|\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2}\right|_v^{1/2} \hat{f}\Big(a(a_1 d_2)^{-1}, d(d_1 a_2)^{-1}, c(d_1 d_2)^{-1},$$

$$b(d_1 d_2)^{-1}, u a_1 a_2 d_1 d_2\Big).$$

Pour $f \in \mathrm{S}_v$, $g_1, g_2 \in G_v$, posons

$$U_f(g_1, g_2) = U(f, g_1, g_2) = \int_{N_v \backslash \mathrm{GL}_{2,v}} W_v(\sigma)$$

$$\times (r(\sigma, g_1, g_2) f)\hat{}\,(1, -1, 0, 1, -1) \mathrm{d}\sigma,$$

où N est le groupe des matrices unipotentes supérieures. On vérifie que l'intégrale converge et qu'on a l'égalité

$$U_f\left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2\right) = \psi_v(n+m) U_f(g_1, g_2)$$

pour tous $n, m \in F_v$, $g_1, g_2 \in G_v$.

Revenons à la situation globale. Soit $f \in \mathrm{S}_{\mathbf{A}}$ une fonction de la forme $f = \bigotimes_v f_v$, où $f_v \in \mathrm{S}_v$ pour toute place v. Pour $g_1, g_2 \in G(\mathbf{A})$, posons

$$U(f, g_1, g_2) = \int_{(F\backslash \mathbf{A}) \times (F \backslash \mathbf{A})} \psi(-n-m)$$

$$\times \theta\left(f, \varphi, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2\right) \mathrm{d}n \mathrm{d}m.$$

Posons $g_1 = (g_{1,v})$, $g_2 = (g_{2,v})$.

PROPOSITION 3:

(1) *Pour presque toute place v, $U(f_v, g_{1,v}, g_{2,v}) = 1$.*

(2) *On a l'égalité*

$$U(f, g_1, g_2) = \prod_v U(f_v, g_{1,v}, g_{2,v}).$$

DÉMONSTRATION: Le (1) résulte d'un calcul facile. Démontrons (2). Posons $\hat{f} = \bigotimes_v \hat{f}_v$. D'après la formule de Poisson, on a l'égalité

$$\theta(f, \sigma, g_1, g_2) = \sum_{a,b,c,d \in F,\ u \in F^\times} [r(\sigma, g_1, g_2) f]\hat{}\,(a, d, c, b, u),$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Soit B^0 le groupe des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in F^\times$, $\beta \in F$, posons

$$\theta_1(f, \sigma, g_1, g_2) = \sum_{\delta \in B^0(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} \sum_{a,\, d \in F,\, u \in F^\times} \times [r(\delta\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(a, d, 0, 1, u),$$

$$\theta_2(f, \sigma, g_1, g_2) = \sum_{a,\, d \in F,\, u \in F^\times} [r(\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(a, d, 0, 0, u).$$

D'après les considérations précédant la proposition, et la définition de la représentation ρ, on a l'égalité

$$\theta(f, \sigma, g_1, g_2) = \theta_1(f, \sigma, g_1, g_2) + \theta_2(f, \sigma, g_1, g_2).$$

La fonction θ_2 est invariante, comme fonction de (g_1, g_2), par $N(\mathbb{A}) \times N(\mathbb{A})$. D'où

$$\int_{(F\backslash \mathbb{A})^2} \psi(-n-m)\theta_2\left(f, \sigma, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2\right) \mathrm{d}n\, \mathrm{d}m = 0.$$

On calcule

$$\theta_1(f, \sigma, g_1, g_2) = \sum_{\delta \in N(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} \sum_{a,\, d \in F} \times [r(\delta\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(a, d, 0, 1, -1),$$

d'où

$$\int_{(F\backslash \mathbb{A})^2} \psi(-n-m)\theta_1\left(f, \sigma, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2\right) \mathrm{d}n\, \mathrm{d}m$$
$$= \sum_{\delta \in N(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} [r(\delta\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(1, -1, 0, 1, -1).$$

Alors

$$U(f, g_1, g_2) = \int_{\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \varphi(\sigma) \times \sum_{\delta \in N(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} [r(\delta\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(1, -1, 0, 1, -1)\mathrm{d}\sigma,$$

$$= \int_{N(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})} \varphi(\sigma) \times [r(\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(1, -1, 0, 1, -1)\mathrm{d}\sigma,$$

$$= \int_{N(\mathbf{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})} \int_{F\backslash \mathbf{A}} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma\right) \times \left[r\left(\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma, g_1, g_2\right)f\right]\hat{}(1, -1, 0, 1, -1)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\sigma.$$

L'intégrale en β vaut $W(\sigma)[r(\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(1, -1, 0, 1, -1)$, d'où

$$U(f, g_1, g_2) = \int_{N(\mathbf{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})} W(\sigma) \times [r(\sigma, g_1, g_2)f]\hat{}(1, -1, 0, 1, -1)\mathrm{d}\sigma,$$

$$= \prod_v U(f_v, g_{1,v}, g_{2,v}). \qquad \square$$

Modifions nos hypothèses. Soient v une place de F, π_v une représentation admissible irréductible de $\mathscr{H}_v^{\ell}$, de dimension infinie, W_v un élément non nul de $W(\pi_v, \psi_v^-)$. Conservons les mêmes définitions.

COROLLAIRE: *Supposons qu'il existe $\pi \in A_0(\mathrm{GL}_2)$ dont la composante en v soit π_v. Alors l'espace des fonctions U_f sur $\mathrm{GL}_{2,v} \times \mathrm{GL}_{2,v}$, quand f décrit $\mathrm{S}_{\psi,v}$, est égal à $W(\pi_v, \psi_v) \otimes W(\pi_v, \psi_v)$.*

Cela résulte du théorème 1, de la proposition 3, et de l'unicité des modèles de Whittaker. $\square$

3. Intégrales locales sur un tore

Soient v une place de F, π_v une représentation admissible irréductible de $\mathscr{H}_v^{\ell}$, qui soit la composante locale d'une représentation $\pi \in A_0(\mathrm{GL}_2)$. On se place sur F_v, on abandonne tous les indices v pour alléger les notations (on pose en particulier $F = F_v$, $\pi = \pi_v \ldots$).

Notons ω le caractère central de π, fixons un élément W non nul de $W(\pi, \psi^-)$. Soient T un sous-tore maximal de G, F_T l'extension quadratique de F associée à T (éventuellement $F_T = F \oplus F$), Ω un caractère continu de T tel que $\Omega_{|Z} = \omega$, Π la représentation de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_2(F_T)$ qui relève π, χ_T le caractère quadratique de $F^\times$ associé à T. Soient $f'' \in \mathrm{S}_\psi$, g_1, $g_2 \in G$, $f = r''(g_1, g_2)f''$. Pour $s \in \mathbb{C}$, posons au moins formellement

$$P(f, \Omega, s) = \int_{ZN\backslash GL_2} \int_T W(\sigma) A(\sigma)^{s-1/2} r'(\sigma) f\left(t, q(t)^{-1}\right)$$

$$\times \Omega(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}\sigma,$$

$$P^0(f, \Omega, s) = L(\chi_T, s+1/2) L\left(\Pi \otimes \Omega^{-1}, s/2+1/4\right)^{-1}$$

$$\times P(f, \Omega, s),$$

où on note également Z le centre de GL_2, A est la fonction définie au (I.5). Remarquons que $T \subset G \subset M$. La forme $q_{|T}$ s'identifie à la norme $N_{F_T/F}$ de l'extension quadratique F_T. Dans la deuxième formule on identifie Ω à un caractère de $F_T^\times$.

Appelons cas général le cas où v est finie impaire; M_v déployée; F_T, ψ, ω, Ω non ramifiés; W invariante à droite par $GL_2(\mathcal{o})$, $W(1) = 1$; f est le produit des fonctions caractéristiques de L et de $\mathcal{o}^\times$, où L est un réseau autodual de M dont l'intersection avec T s'identifie à l'ensemble des entiers de F_T inversibles dans F_T; les mesures de $GL_2(\mathcal{o})$ et de $\mathcal{o}$ sont égales à 1.

LEMME 2: *Supposons T non déployé.*

(i) *Il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $D = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > 1/2 - \epsilon\}$,*

(a) *l'intégrale ci-dessus converge si $s \in D$, uniformément quand s reste dans un sous-ensemble compact de D;*

(b) *les fonctions $P(f, \Omega, s)$ et $P^0(f, \Omega, s)$ sont holomorphes dans D.*

(ii) *Dans le cas général, $P^0(f, \Omega, s) = 1$ pour tout $s \in D$.*

DÉMONSTRATION: Les fonctions qui interviennent sont K^{ℓ}-finies. La décomposition d'Iwasawa nous ramène à considérer l'intégrale

$$J(s) = \int_{F^\times} \int_T W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |\alpha|^{s/2-1/4} r'\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f\left(t, q(t)^{-1}\right)$$

$$\times \Omega(t)\, dt |\alpha|^{-1} \mathrm{d}\alpha.$$

Pour $\alpha \in F^\times$, posons

$$L(\alpha) = \int_T r'\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f\left(t, q(t)^{-1}\right) \Omega(t) \mathrm{d}t.$$

On a

$$I(\alpha)=|\alpha|\int_T f\left(\alpha t,\ \alpha^{-1}q(t)^{-1}\right)\Omega(t)\mathrm{d}t,$$

$$=|\alpha|\Omega(\alpha^{-1})\int_T f\left(t,\ \alpha q(t)^{-1}\right)\Omega(t)\mathrm{d}t.$$

Identifions T à $F_T^\times$. Il existe deux constantes $c_1,\ c_2>0$ et une fonction de Schwartz h sur F_T telles que pour tous $t\in T,\ u\in F^\times$,

$$f(t,\ u)=0,\qquad \text{si}\quad |u|>c_2\qquad \text{ou}\quad |u|<c_1,$$

$$|f(t,\ u)|\leqslant h(t),\qquad \text{si}\quad c_1\leqslant|u|\leqslant c_2.$$

Alors

$$|I(\alpha)|\leqslant|\alpha|\left|\Omega(\alpha)^{-1}\right|\int_X h(t)|\Omega(t)|\mathrm{d}t,$$

où $X=\{t\in T;\ |\alpha|c_2^{-1}\leqslant|q(t)|\leqslant|\alpha|c_1^{-1}\}$. On voit que l'intégrale ci-dessus est $O(|\omega(\alpha)|^{1/2})$ quand $|\alpha|$ tend vers 0, nulle, resp. à décroissance rapide, quand $|\alpha|$ tend vers ∞, si v est finie, resp. archimédienne. Donc $I(\alpha)$ vérifie la même propriété quand $|\alpha|$ tend vers ∞, et est $O(|\alpha||\omega(\alpha)|^{-1/2})$ quand $|\alpha|$ tend vers 0.

Comme π est la composante d'une représentation automorphe parabolique, $\pi\otimes|\omega|^{-1/2}$ est unitaire. Il existe $\nu>0$ tel que

$$\left|W\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right|=O\left(|\alpha|^{\nu}|\omega(\alpha)|^{1/2}\right)$$

quand $|\alpha|$ tend vers 0 ([G], p. 1.36). Quand $|\alpha|$ tend vers ∞, $W\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est nulle si v est finie, à dècroissance rapide si v est archimédienne.

Toutes les fonctions en question sont localement constantes si v est finie, C^∞ si v est archimédienne. Les propriétés (i)(a) sont alors équivalentes aux mêmes propriétés pour l'intégrale

$$\int_{|\alpha|<1}|\alpha|^{\nu}|\omega(\alpha)|^{1/2}|\alpha|^{(\mathrm{Re}\,s)/2-1/4}|\alpha||\omega(\alpha)|^{-1/2}|\alpha|^{-1}\mathrm{d}\alpha,$$

i.e.

$$\int_{|\alpha|<1}|\alpha|^{\nu+(\mathrm{Re}\,s)/2-1/4}\mathrm{d}\alpha.$$

En choisissant $\epsilon<2\nu$, ces propriétés sont claires.

(i)(b) résulte de (i)(a).

Dans le cas général, $P(f, \Omega, s) = J(s)$. Reprenons les calculs cidessus. Notons $\mathscr{o}_T$ l'anneau des entiers de F_T. Pour $\alpha \in F^\times$, on a

$$\int_T f\left(t, \alpha q(t)^{-1}\right)\Omega(t)\mathrm{d}t = \int_X \Omega(t)\mathrm{d}t,$$

où ici $X = \{t \in \mathscr{o}_T;\ |q(t)| = |\alpha|\}$. Les normes de $F_T^\times$ sont les éléments de $F^\times$ de valuation paire, donc

$$\int_T f\left(t, \alpha q(t)^{-1}\right)\Omega(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{si } v(\alpha) < 0 \text{ ou } v(\alpha) \text{ impaire,} \\ \omega(\varpi)^{v(\alpha)/2}, & \text{si } v(\alpha) \geqslant 0 \text{ et} \\ & v(\alpha) \text{ paire.} \end{cases}$$

Soient μ_1, μ_2 deux caractères de $F^\times$ tels que $\pi \sim \pi(\mu_1, \mu_2)$. Alors

$$W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v(\alpha) < 0, \\ |\alpha|^{1/2} \dfrac{\mu_1(\varpi\alpha) - \mu_2(\varpi\alpha)}{\mu_1(\varpi) - \mu_2(\varpi)}, & \text{si} \quad v(\alpha) \geqslant 0, \end{cases}$$

cette expression pouvant être définie même si $\mu_1 = \mu_2$. Alors

$$J(s) = \int_Y |\alpha|^{1/2} \frac{\mu_1(\varpi\alpha) - \mu_2(\varpi\alpha)}{\mu_1(\varpi) - \mu_2(\varpi)} |\alpha|^{s/2 - 1/4} \omega(\varpi)^{-v(\alpha)/2} \mathrm{d}\alpha,$$

où $Y = \{\alpha \in F^\times;\ v(\alpha) \geqslant 0 \text{ et } v(\alpha) \text{ paire}\}$. On obtient

$$\begin{aligned} J(s) &= \left(1 + |\varpi|^{s+1/2}\right)\left(1 - \mu_1^2\omega^{-1}(\varpi)|\varpi|^{s+1/2}\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(1 - \mu_2^2\omega^{-1}(\varpi)|\varpi|^{s+1/2}\right)^{-1}, \\ &= L(\chi_T, s + 1/2) L\left(\Pi \otimes \Omega^{-1}, s/2 + 1/4\right), \end{aligned}$$

(la valeur absolue de ϖ dans F_T est le carré de sa valeur absolue dans F). D'où (ii). □

Supposons maintenant T déployé. Alors M $(= M_v \ldots)$ l'est aussi, on peut identifier M à $M_2(F)$, G à $\mathrm{GL}_2(F)$ et T au sous-tore des matrices diagonales. Il existe deux caratères ω_1, ω_2 de $F^\times$ tels que

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \omega_1(a)\omega_2(d)$$

pour tous a, $d \in F^\times$. Par hypothèse $\omega_1\omega_2 = \omega$, donc ω_1 détermine Ω. On sait qu'on peut munir l'ensemble des caractères de $F^\times$ d'une structure de variété analytique (non connexe). On en déduit une sur l'ensemble des caractères Ω de T tels que $\Omega_{|Z} = \omega$. Si μ est un caractère de $F^\times$, notons $s(\mu)$ le nombre réel tel que $|\mu(x)| = |x|^{s(\mu)}$ pour tout $x \in F^\times$ (la valeur absolue du membre de gauche est la valeur absolue usuelle de $\mathbb{C}$). Posons $s(\Omega) = s(\omega_1) - s(\omega_2)$.

On a défini au (II.2) un terme $U(f, g_1, g_2)$. Posons, au moins formellement

$$Q(f, \Omega) = \int_{F^{\times 2}} U\left(f, \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \omega_1(a_1)^{-1} \omega_2(a_2)^{-1} \times \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2,$$

$$Q^0(f, \Omega) = L\left(\pi \otimes \omega_1^{-1}, 1/2\right)^{-1} L\left(\pi \otimes \omega_2^{-1}, 1/2\right)^{-1} Q(f, \Omega).$$

LEMME 3: *Supposons T déployé.*

(i) *Il existe $\epsilon' > 0$ tel que si $D' = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s > 1/2 + |s(\Omega)| - \epsilon'\}$,*
 (a) *l'intégrale définissant $P(f, \Omega, s)$ converge si $s \in D'$, uniformément quand s reste dans un sous-ensemble compact de D';*
 (b) *les fonctions $P(f, \Omega, s)$ et $P^0(f, \Omega, s)$ sont holomorphes dans D'.*

(ii) *Dans le cas général, $P^0(f, \Omega, s) = 1$ pour tout $s \in D'$.*

(iii) *Il existe $\epsilon'' > 0$ tel que si $D'' = \{\Omega;\ |s(\Omega)| < \epsilon''\}$, les intégrales définissant $P(f, \Omega, 1/2)$ et $Q(f, \Omega)$ convergent pour $\Omega \in D''$, et définissent dans ce domaine des fonctions holomorphes de Ω. Les fonctions $P^0(f, \Omega, 1/2)$ et $Q^0(f, \Omega)$ se prolongent en des fonctions holomorphes définies pour tout Ω.*

(iv) *On a l'égalité $P^0(f, \Omega, 1/2) = Q^0(f, \Omega)$ pour tout Ω.*

(v) *Pour tout Ω, il existe $f \in \mathrm{S}_\psi$ tel que $Q^0(f, \Omega) \neq 0$.*

(vi) *Dans le cas général, $Q^0(f, \Omega) = 1$.*

DÉMONSTRATION: (i) Comme dans la démonstration du lemme 2, nous sommes ramenés à l'intégrale $J(s)$, puis à étudier, pour $\alpha \in F^\times$, l'intégrale $I(\alpha)$. On a

$$I(\alpha) = |\alpha| \omega(\alpha)^{-1} \int_{F^{\times 2}} f\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \alpha(xy)^{-1}\right) \omega_1(x) \omega_2(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Il existe deux constantes c_1, $c_2 > 0$ et deux fonctions de Schwartz h_1, h_2 sur F telles que pour tous x, y, $u \in F^\times$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, u\right) = 0, \qquad \text{si} \quad |u| > c_2 \quad \text{ou} \quad |u| < c_1,$$

$$\left|f\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, u\right)\right| \leqslant h_1(x)h_2(y), \qquad \text{si} \quad c_1 \leqslant |u| \leqslant c_2.$$

Alors

$$|I(\alpha)| \leqslant |\alpha| |\omega(\alpha)^{-1}| \int_{F^\times} h_1(x)|\omega_1(x)| \int_{X(\alpha x^{-1})} h_2(y)|\omega_2(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

où pour tout $x \in F^\times$, $X(x) = \{y \in F^\times;\ |x|c_2^{-1} \leqslant |y| \leqslant |x|c_1^{-1}\}$. Quitte à majorer h_1, on peut supposer que pour tout $x \in F^\times$,

$$\int_{X(x)} h_2(y)|\omega_2(y)|\mathrm{d}y \leqslant |\omega_2(x)|h_1(x).$$

Alors

$$|I(\alpha)| \leqslant |\alpha| |\omega_1(\alpha)^{-1}| \int_{F^\times} h_1(x)h_1(\alpha x^{-1})|\omega_1\omega_2^{-1}(x)|\mathrm{d}x.$$

On vérifie facilement le lemme suivant. Soient h une fonction de Schwartz sur F, μ un caractère continu de $F^\times$, à valeurs réeles positives, $\alpha \in F^\times$, Posons

$$J_{h,\mu}(\alpha) = \int_{F^\times} h(x)h(\alpha x^{-1})\mu(x)\mathrm{d}x.$$

LEMME 4:

(i) *L'intégrale ci-dessus converge.*

(ii) *La fonction $J_{h,\mu}$ est nulle, resp. à décroissance rapide, quand $|\alpha|$ tend vers ∞, si v est finie, resp. archimédienne.*

(iii) *Pour tout $\epsilon > 0$, $J_{h,\mu}(\alpha) = O(|\alpha|^{-\epsilon}(1 + \mu(\alpha)))$, quand $|\alpha|$ tend vers 0.* □

On en déduit la même propriété pour $I(\alpha)$ quand $|\alpha|$ tend vers ∞, et que pour tout $\epsilon > 0$,

$$|I(\alpha)| = O\left(|\alpha|^{1-\epsilon}\left(|\omega_1(\alpha)|^{-1} + |\omega_2(\alpha)|^{-1}\right)\right)$$

quand $|\alpha|$ tend vers 0. En reprenant les notations de la démonstration du lemme 2, les propriétés (i)(a) sont équivalentes aux mêmes propriétés pour l'intégrale

$$\int_{|\alpha|<1} |\alpha|^{\nu} |\omega(\alpha)|^{1/2} |\alpha|^{(\mathrm{Re}\, s)/2 - 1/4} |\alpha|^{1-\epsilon}\left(|\omega_1(\alpha)|^{-1} + |\omega_2(\alpha)|^{-1}\right)|\alpha|^{-1}\mathrm{d}\alpha,$$

où on peut fixer ϵ arbitrairement petit, i.e. pour les deux intégrales

$$\int_{|\alpha|<1} |\alpha|^{\nu+(\operatorname{Re} s)/2-1/4-\epsilon} |\omega(\alpha)|^{1/2} |\omega_i(\alpha)|^{-1} \mathrm{d}\alpha,$$

pour $i=1, 2$. En remarquant que pour tout $\alpha \in F^\times$,

$$|\omega(\alpha)|^{1/2} |\omega_1(\alpha)|^{-1} = |\alpha|^{-s(\Omega)/2},$$

$$|\omega(\alpha)|^{1/2} |\omega_2(\alpha)|^{-1} = |\alpha|^{s(\Omega)/2},$$

on obtient (i)(a). Les assertions (i)(b) en résultent.

Dans le cas général, on a pour tout $\alpha \in F^\times$

$$\int_{F^{\times 2}} f\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \alpha(xy)^{-1}\right) \omega_1(x)\omega_2(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{F^\times \cap \mathfrak{o}} \omega_1(x) \int_{Y(\alpha, x)} \omega_2(y) \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

où $Y(\alpha, x) = \{y \in F^\times;\ v(y) \geq 0,\ v(y) = v(\alpha x^{-1})\}$, i.e.

$$Y(\alpha, x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \ v(\alpha x^{-1}) < 0, \\ \alpha x^{-1} \mathfrak{o}^\times, & \text{si } \ v(\alpha x^{-1}) \geq 0. \end{cases}$$

L'intégrale ci-dessus est donc nulle si $v(\alpha) < 0$ et vaut

$$\int_{x,\, 0 \leq v(x) \leq v(\alpha)} \omega_1(x)\omega_2(\alpha x^{-1}) \mathrm{d}x = \frac{\omega_2(\alpha\varpi) - \omega_1(\alpha\varpi)}{\omega_2(\varpi) - \omega_1(\varpi)},$$

si $v(\alpha) \geq 0$. Avec les mêmes notations qu'au lemme 2, on obtient

$$J(s) = \int_{\alpha,\, v(\alpha)\geq 0} |\alpha|^{s/2+1/4} \frac{\mu_1(\varpi\alpha) - \mu_2(\varpi\alpha)}{\mu_1(\varpi) - \mu_2(\varpi)}$$

$$\times \omega(\alpha)^{-1} \frac{\omega_2(\varpi\alpha) - \omega_1(\varpi\alpha)}{\omega_2(\varpi) - \omega_1(\varpi)} \mathrm{d}\alpha.$$

On calcule aisément cette intégrale. On obtient (ii).

La première assertion du (iii) résulte de (i). Pour $\sigma \in \mathrm{GL}_2$, posons

$$I(\sigma) = \int_{F^{\times 2}} r'(\sigma) f\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, (xy)^{-1}\right) \omega_1(x)\omega_2(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Introduisons la fonction $\hat{f}$ (cf.II.2). Par inversion de Fourier

$$I(\sigma)=\int_{F^{\times 2}}\int_F \hat{r}'(\sigma)\hat{f}\big(x,\ y,\ 0,\ b,\ (xy)^{-1}\big)|xy|^{-1/2}\mathrm{d}b$$
$$\times\,\omega_1(x)\omega_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{A}$$

Remplaçons la variable $b\in F$ par une variable $z\in F^\times$ et la mesure de Haar db sur F par une mesure de Haar dz sur $F^\times$. On a db $=\zeta(1)^{-1}|z|\mathrm{d}z$. Posons ensuite $a_1=zx^{-1}$, $a_2=zy^{-1}$. Alors

$$I(\sigma)=\zeta(1)^{-1}\int_{F^{\times 3}}\hat{r}'(\sigma)\hat{f}\big(za_1^{-1},\ za_2^{-1},\ 0,\ z,\ z^{-2}a_1a_2\big)$$
$$\times\,\omega(z)\omega_1(a_1)^{-1}\omega_2(a_2)^{-1}|a_1a_2|^{1/2}\mathrm{d}z\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2$$

i.e.

$$I(\sigma)=\zeta(1)^{-1}\int_{F^{\times 3}}$$
$$\times\left[r\left(\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\sigma,\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -a_2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)f\right]\hat{}\,(1,\ -1,0,1,\ -1)$$
$$\times\,\omega(z)\omega_1(a_1)^{-1}\omega_2(a_2)^{-1}\mathrm{d}z\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2.$$

Par définition

$$P(f,\Omega,1/2)=\int_{\mathrm{ZN}\backslash\mathrm{GL}_2}W(\sigma)I(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Remplaçons $I(\sigma)$ par son expression ci-dessus, et calculons formellement. En interprétant l'intégrale en z comme une intégrale sur Z et en permutant les intégrales, on obtient

$$P(f,\Omega,1/2)=\zeta(1)^{-1}\int_{F^{\times 2}}\int_{N\backslash\mathrm{GL}_2}W(\sigma)$$
$$\times\left[r\left(\sigma,\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -a_2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)f\right]\hat{}\,(1,\ -1,0,1,\ -1)$$
$$\times\,\mathrm{d}\sigma\omega_1(a_1)^{-1}\omega_2(a_2)^{-1}\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2,$$
$$=\zeta(1)^{-1}Q(f,\Omega).$$

Comme $L(\chi_T,1)=\zeta(1)$, on obtient formellement l'égalité (iv). Il suffit pour justifier ce calcul, et démontrer la deuxième assertion du (iii), de montrer qu'il existe $\epsilon'' > 0$ tel que si $\Omega \in D''$, l'intégrale

$$\int_{ZN\backslash GL_2} |W(\sigma)||I|(\sigma)d\sigma$$

converge, où pour $\sigma \in GL_2$, $|I|(\sigma)$ est égale à l'intégrale (A) dans laquelle on remplace tous les termes par leurs valeurs absolues. Pour $\alpha \in F^\times$, on a

$$|I|\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \int_{F^{\times 2}}\int_F |\alpha|^{1/2} \left|\hat{f}\left(\alpha x, \alpha y, 0, b, \alpha^{-1}(xy)^{-1}\right)\right| db$$
$$\times |xy|^{-1/2}|\omega_1(x)||\omega_2(y)|dx dy.$$

On démontre comme précédemment que cette intégrale converge et que pour tout $\epsilon > 0$

$$|I|\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = O\left(|\alpha|^{1-\epsilon}\left(|\omega_1(\alpha)|^{-1} + |\omega_2(\alpha)|^{-1}\right)\right)$$

quand $|\alpha|$ tend vers 0. L'existence de ϵ'' en résulte comme précédemment.

D'après le corollaire à la proposition 3, il existe un ensemble fini I, pour tout $i \in I$, des éléments $W_{1,i}$, $W_{2,i} \in W(\pi, \psi)$, g_1, $g_2 \in GL_2$, tels que pour tous g_1', $g_2' \in GL_2$,

$$U(f, g_1', g_2') = \sum_{i \in I} W_{1,i}(g_1'g_1)W_{2,i}(g_2'g_2).$$

Alors

$$Q(f, \Omega) = \sum_{i \in I} \int_{F^\times} W_{1,i}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1\right)\omega_1(a)^{-1}da$$
$$\times \int_{F^\times} W_{2,i}\left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2\right)\omega_2(a)^{-1}da.$$

Pour tous $W \in W(\pi, \psi)$, $g \in GL_2$, la fonction

$$\mu \mapsto L(\pi \otimes \mu^{-1}, 1/2)^{-1} \int_{F^\times} W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\mu(a)^{-1}da$$

se prolonge en une fonction holomorphe définie pour tout caractère μ de $F^\times$. De plus, pour μ donné, il existe $W \in W(\pi, \psi)$ tel que pour $g = 1$, sa valeur soit non nulle en μ. La définition de Q^0 montre alors que $Q^0(f, \Omega)$ se prolonge en une fonction holomorphe définie pour tout Ω. L'égalité (iv), démontrée pour $\Omega \in D''$, définit le prolongement de

$P^0(f, \Omega, 1/2)$, ce qui achève la démonstration de (iii), et de (iv). Le (v) résulte des considérations ci-dessus. Si $\Omega \in D''$, (vi) résulte de (ii) et (iv). L'égalité se prolonge par holomorphie. □

4. *Intégrales globales sur un tore*

Revenons à la situation globale (cf.II.1). Soit $(\pi, E) \in A_0(\mathrm{GL}_2)$, fixons $\varphi \in E$, $\varphi \neq 0$. On définit W comme au (II.2). On suppose que W vérifie (i), (ii) (cf.II.2). Notons ω le caractère central de π. Soient T un sous-tore maximal de G, défini sur F, déployé ou pas, F_T l'extension quadratique de F associée à T, Ω un caractère continu de $T(F)\backslash T(\mathbb{A})$ tel que $\Omega_{|Z(\mathbb{A})} = \omega$. On peut identifier T à $F_T^\times$ et Ω à un caractère du groupe des idèles de F_T. Notons χ_T le caractère quadratique de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ associé à T, Π la représentation automorphe de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_2(F_T(\mathbb{A}))$ qui relève π. Soit $f'' \in \mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}}$, de la forme $f'' = \bigotimes_v \mathrm{f}''_v$, où pour toute place v, $f''_v \in \mathrm{S}_{\psi,v}$. *Soient* $g_1 = (g_{1,v})$, $g = (g_{2,v}) \in G(\mathbb{A})$, $f = r''(g_1, g_2)f''$, et pour toute place v, $f_v = r''(g_{1,v}, g_{2,v})f''_v$. Posons

$$P(f, \Omega) = \int_{[T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})]^2} \theta(f, \varphi, t_1, t_2)\Omega^{-1}(t_1\bar{t}_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,$$

(l'antiinvolution $g \mapsto \bar{g}$ préserve T et induit sur T l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_T/F)$). Cette intégrale converge: si T n'est pas déployé, le domaine d'intégration est compact; si T est déployé, M l'est aussi et $\theta_{f,\varphi}$ est à décroissance rapide d'après le théorème 1. Introduisons pour toute place v un terme $P^0(f_v, \Omega_v, s)$ comme au (II.3), relatif bien sûr à la composante locale π_v et à l'élément W_v fixé plus haut.

Proposition 4: *Pour toute* $f = \bigotimes_v f_v \in \mathrm{S}_{\mathbb{A}}$, *comme ci-desus, on a l'égalité*

$$P(f, \Omega) = L\Big(\prod \otimes\ \Omega^{-1}, 1/2\Big)\prod_v P^0(f_v, \Omega_v, 1/2).$$

D'après les lemmes 2, 3, (ii), ce produit converge.

Démonstration: (1) Supposons T non déployé.

(a) Identifions T à $F_T^\times$, notons $x \mapsto \bar{x}$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_T/F)$. Il existe $d \in F^\times$ tel que M soit isomorphe à l'algèbre des matrices

$$\begin{pmatrix} x & \mathrm{d}y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}, \quad x, y \in F_T,$$

T s'identifiant au sous-groupe diagonal. On voit que l'espace quadratique

(M, q) s'identifie à la somme directe $(F_T, N_{F_T/F}) \oplus (F_T, -\mathrm{d}N_{F_T/F})$, et que l'action de $T \times T$ dans M, via $T \times T \to \mathrm{GO}$, s'identifie à

$$(t_1, t_2) \cdot (x \oplus y) = xt_1\bar{t}_2 \oplus yt_1t_2,$$

pour $t_1, t_2 \in T$, x, $y \in F_T$. Effectuons ces identifications, posons $t_1 = t$, $t_2 = (\overline{t\tau})^{-1}$, dans l'intégrale $P(f, \Omega)$. Alors

$$P(f, \Omega) = \int_{[T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})]^2} \theta\Big(f, \varphi, t, \big(\overline{t\tau}\big)^{-1}\Big)\Omega(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau,$$

$$= \int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} \int_{\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \varphi(\sigma)I(\tau, \sigma)\Omega(\tau)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau,$$

où, pour $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $\tau \in T(\mathbb{A})$,

$$I(\tau, \sigma) = \int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} \theta\big(f, \sigma, t, \bar{t}^{-1}\bar{\tau}^{-1}\big)\mathrm{d}t,$$

$$= \int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} \sum_{x,\, y \in F_T,\, u \in F^\times}$$

$$\times r(\sigma, 1, \bar{\tau}^{-1})f\big(x \oplus y\bar{t}t^{-1}, u\big)\mathrm{d}t.$$

(b) Pour $s \in \mathbb{C}$, $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $\tau \in T(\mathbb{A})$, posons

$$I(s, \tau, \sigma) = \sum_{\delta \in B(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} A(\delta\sigma)^{s-1/2}$$

$$\times \sum_{x \in F_T,\, u \in F^\times} r(\delta\sigma, 1, \bar{\tau}^{-1})f(x \oplus 0, u),$$

où B est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de GL_2. Nous allons montrer

(i) il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que cette série converge quand $\mathrm{Re}\, s > R$;

(ii) il existe un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, contenant $\{s;\ \mathrm{Re}\, s > R\} \cup \{1/2\}$, tel que I se prolonge en une fonction définie sur $U \times T(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, holomorphe en s, C^∞ en les composantes archimédiennes de τ et σ, invariante par un sous-groupe ouvert de $T(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, invariante à gauche par $T(F) \times \mathrm{GL}_2(F)$.

(iii) Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 des sous-ensembles compacts de U, resp. $T(\mathbb{A})$, resp. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, v_0 une place archimédienne de F, $c > 0$. Il existe un sous-ensemble compact Δ_4 de $\mathbb{A}^\times/F^\times$, un entier N, et $c' > 0$, tels que pour tous $s \in \Delta_1$, $\tau \in \Delta_2$, $\sigma \in \Delta_3$, $z \in \mathbb{A}^\times/F^\times$, $\alpha \in \{\alpha \in F_{v_0}^\times;\ |\alpha|_{v_0} > c\}$, on ait

$$I\left(s,\ \tau,\ \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\sigma\right) = 0, \qquad \text{si} \quad z \notin \Delta_4, \tag{iii)(a}$$

$$\left|I\left(s,\ \tau,\ \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\sigma\right)\right| \leqslant c'|\alpha|_{v_0}^N, \qquad \text{si} \quad z \in \Delta_4. \tag{iii)(b}$$

(iv) Pour tous $\tau \in T(\mathbb{A})$, $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, on a l'égalité

$$I(\tau, \sigma) = L(\chi_T, 1)I(1/2, \tau, \sigma).$$

Démonstration: On peut supposer τ dans un ouvert relativement compact Δ' assez petit de $T(\mathbb{A})$, σ dans un domaine de Siegel assez petit de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Comme f est à support compact en u, il existe un sous-ensemble compact Δ de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tel que $I(s, \tau, \sigma) = 0$ si $\det \sigma \notin \Delta$. On en déduit d'abord l'existence de Δ_4 vérifiant (iii)(a). On peut ensuite introduire Σ', c, v_0, Σ comme au (I.5) et supposer $\sigma \in \Sigma$. Alors $\det \sigma$ reste dans un compact de $\mathbb{A}^\times$. Dans la définition de $I(s, \tau, \sigma)$, on peut remplacer la somme sur $\delta \in B(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)$ en une somme sur $\delta \in B^1(F)\backslash \mathrm{SL}_2(F)$. Alors $\det \delta = 1$. Pour la même raison que ci-dessus, la somme en $u \in F^\times$ devient une somme finie. Quitte à effectuer des combinaisons linéaires, on peut supposer qu'un seul term u_0 intervient. De même on se ramène au cas où $\Sigma' = \Sigma'_f \times \Sigma'_\infty$, $\Delta' = \Delta'_f \times \Delta'_\infty$, en un sens évident, où il existe deux fonctions de Schwartz f_f^1, $f_f^2 \in S(F_T(\mathbb{A}_f))$, telles que pour tous $\sigma \in \Sigma'_f$, $\tau \in \Delta'_f$, x, $y \in F_T(\mathbb{A}_f)$,

$$r(\sigma, 1, \bar{\tau}^{-1})f_f(x \oplus y, u_0) = f_f^1(x)f_f^2(y),$$

où on a posé $f_f = \bigotimes_{v \notin S} f_v$.

Nous allons utiliser les résultats du (I.5) dans la situation suivante. Soient $V = F_T$, muni de la forme $-\mathrm{d}N_{F_T/F}$, Σ', v_0, c comme cidessus, posons désormais $f_f = f_f^2$, soient Σ_∞ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}\sigma$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^\times \subset F_{v_0}^\times$, $|\alpha|_{v_0} > c$, $\sigma \in \Sigma'_\infty$, $Z = F_{T,\infty} \times \Delta'_\infty \times \Sigma_\infty$, et pour $z = (x, \tau, \sigma) \in Z$, $y \in V_\infty$,

$$f_{\infty,z}(y) = r(\sigma, 1, \bar{\tau}^{-1})f_\infty(x \oplus y, u_0),$$

où $f_\infty = \bigotimes_{v \in S} f_v$. Pour tout ensemble fini D d'opérateurs différentiels sur V_∞,, on peut trouver une fonction de Schwartz c_D^1 sur $F_{T,\infty}$, et une fonction à croissance modérée c_D^2 sur Σ_∞, telles que la fonction c_D définie sur Z par

$$c_D(x, \tau, \sigma) = c_D^1(x)c_D^2(\sigma)$$

pour tout $(x, \tau, \sigma) \in Z$, soit telle que les hypothèses du (I.5) soient vérifiées.

Dans la série définissant $I(s, \tau, \sigma)$, la somme intérieure en x est une série thêta, relative à un espace de dimension 2. Elle est donc invariante par l'action de $\mathrm{SL}_2(F)$, agissant via la représentation de Weil associée à cet espace. On peut remplacer $r(\delta)$ par $r_2(\delta)$, si r_2 désigne la représentation de Weil associée à l'espace supplémentaire, i.e. l'espace des y. Alors, pour $s \in \mathbf{C}$, $\tau \in \Delta'$, $\sigma \in \Sigma$,

$$I(s, \tau, \sigma) = \sum_{x \in F_T} \sum_{\delta \in B^1(F) \backslash \mathrm{SL}_2(F)} A(\delta\sigma)^{s-1/2} r_2(\delta) f_z(0) f_f^1(x),$$

où z désigne le triplet des composantes archimédiennes de x, τ, σ. D'où

$$I(s, \tau, \sigma) = \sum_{x \in F_T} f_f^1(x) E(s, z, \sigma), \tag{B}$$

avec les notations du (I.5). D'après le lemme 1, chaque terme de la série ci-dessus converge pour Re s assez grand, et il existe un ouvert U de $\mathbf{C}$ vérifiant les conditions de (ii) tel que chaque terme se prolonge à $U \times \Delta' \times \Sigma$. D'après le choix des fonctions c_D, si s reste dans un compact de U, il existe une fonction de Schwartz h sur $F_{T,\infty}$, une fonction à croissance modérée λ sur Σ, telles que

$$|E(s, z, \sigma)| \leqslant h(x)\lambda(\sigma)$$

pour tous $x \in F_T$, $\tau \in \Delta'$, $\sigma \in \Sigma$, z comme ci-dessus, Alors

$$|I(s, \tau, \sigma)| \leqslant \lambda(\sigma) \sum_{x \in F_T} h(x) \left| f_f^1(x) \right|.$$

Cette série converge. On obtient les assertions (i), (ii), (iii). En utilisant la proposition 2, en remontant ensuite le calcul conduisant à la formule (B), et en remarquant que T/Z, agissant sur V par

$$(t, y) \mapsto y\bar{t}t^{-1},$$

pour $y \in V$, $t \in T$, s'identifie au groupe spécial orthogonal de V, on obtient (iv).

(c) Pour $s \in U$, posons

$$P(f, \Omega, s) = \int_{T(F)Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})} \int_{\mathrm{GL}_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})} \varphi(\sigma)$$

$$\times I(s, \tau, \sigma) \Omega(\tau) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau.$$

D'après (b) (ii) et (iii), et la décroissance rapide de φ, cette intégrale converge et définit une fonction holomorphe sur U. D'après (iv), on a l'égalité

$$P(f, \Omega) = L(\chi_T, 1) P(f, \Omega, 1/2).$$

(d) Calculons $P(f, \Omega, s)$ pour $\operatorname{Re} s > R$. On identifie le centre Z de GL_2 à $F^\times$ et T à $F_T^\times$. Pour $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $\tau \in T(\mathbb{A})$, posons

$$\theta(\sigma, \tau) = \sum_{x \in F_T,\, u \in F^\times} r(\sigma, 1, \bar{\tau}^{-1}) f(x \oplus 0, u).$$

Par définition

$$\begin{aligned} P(f, \Omega, s) &= \int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} \int_{B(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \varphi(\sigma) A(\sigma)^{s-1/2} \\ &\quad \times \theta(\sigma, \tau) \Omega(\tau) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau, \\ &= \int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} \int_{B(F)Z(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \\ &\quad \times \int_{F^\times\backslash \mathbb{A}^\times} \varphi(z\sigma) A(z\sigma)^{s-1/2} \theta(z\sigma, \tau) \Omega(\tau) \mathrm{d}z \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Or $\varphi(z\sigma) = \omega(z)\varphi(\sigma)$, $A(z\sigma) = A(\sigma)$, $\theta(z\sigma, \tau) = \theta(\sigma, z\tau)$, $\omega(z)\Omega(\tau) = \Omega(z\tau)$, d'où

$$\begin{aligned} P(f, \Omega, s) &= \int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} \int_{B(F)Z(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \\ &\quad \times \int_{F^\times\backslash \mathbb{A}^\times} \varphi(\sigma) A(\sigma)^{s-1/2} \theta(\sigma, z\tau) \Omega(z\tau) \mathrm{d}z \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau, \\ &= \int_{B(F)Z(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \varphi(\sigma) A(\sigma)^{s-1/2} \Theta(\sigma) \mathrm{d}\sigma, \end{aligned}$$

où pour tout $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$,

$$\begin{aligned} \Theta(\sigma) &= \int_{T(F)\backslash T(\mathbb{A})} \theta(\sigma, \tau) \Omega(\tau) \mathrm{d}\tau, \\ &= \int_{F_T^\times \backslash F_T^\times(\mathbb{A})} \sum_{x \in F_T,\, u \in F^\times} r'(\sigma) f\big(x\tau \oplus 0, u(\tau\bar{\tau})^{-1}\big) \Omega(\tau) \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Décomposons la somme en x en une somme sur les $x \neq 0$ et une réduite à $x=0$:

$$\Theta(\sigma)=\Theta_1(\sigma)+\Theta_2(\sigma),$$

où

$$\Theta_2(\sigma)=\int_{F_T^\times\backslash F_T^\times(\mathbb{A})}\sum_{u\in F^\times} r'(\sigma)f\left(0,\, u(\tau\bar\tau)^{-1}\right)\Omega(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\Theta_1(\sigma)=\int_{F_T^\times\backslash F_T^\times(\mathbb{A})}\sum_{x\in F_T^\times,\, u\in F^\times} r'(\sigma)f\left(x\tau\oplus 0,\, u(\tau\bar\tau)^{-1}\right)\Omega(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$=\int_{F_T^\times(\mathbb{A})}\sum_{u\in F^\times} r'\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&u\end{pmatrix}\sigma\right)f\left(\tau\oplus 0,\, (\tau\bar\tau)^{-1}\right)\Omega(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$=\sum_{\delta\in Z(F)N(F)\backslash B(F)}\int_{T(\mathbb{A})} r'(\delta\sigma)f\left(t,\, q(t)^{-1}\right)\Omega(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction $\Theta_2(\sigma)$ est invariante à gauche par $N(\mathbb{A})$. Son intégrale contre φ disparait, car φ est parabolique. D'où

$$P(f,\Omega,s)=\int_{B(F)Z(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}\varphi(\sigma)A(\sigma)^{s-1/2}\Theta_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

$$=\int_{N(F)Z(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}\int_{T(\mathbb{A})}\varphi(\sigma)A(\sigma)^{s-1/2}$$

$$\times r'(\sigma)f\left(t,\, q(t)^{-1}\right)\Omega(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma.$$

En factorisant par une intégrale sur $N(F)\backslash N(\mathbb{A})$, on obtient

$$P(f,\Omega,s)=\int_{N(\mathbb{A})Z(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}\int_{T(\mathbb{A})}W(\sigma)A(\sigma)^{s-1/2}$$

$$\times r'(\sigma)f\left(t,\, g(t)^{-1}\right)\Omega(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma.$$

Cette intégrale est le produit des intégrales locales $P(f_v,\Omega_v,s)$. En introduisant les termes $P^0(f_v,\Omega_v,s)$, on obtient

$$P(f,\Omega,s)=L(\chi_T,\, s+1/2)^{-1}L\left(\prod\otimes\Omega^{-1},\, s/2+1/4\right)$$

$$\times\prod_v P^0(f_v,\Omega_v,s).$$

(e) Soit v une place de F telle que T_v soit déployé. Je dis que $s(\Omega_v)=0$. En effet, pour $t\in T(\mathbb{A})$, posons

$$\Omega'(t)=|\Omega(t)||\omega(q(t))|^{-1/2}.$$

On a $\Omega'_{|T(F)Z(\mathbb{A})}=1$. Or $T(\mathbb{A})/T(F)Z(\mathbb{A})$ est compact donc $\Omega'=1$. En particulier $\Omega'_v=1$. On en déduit l'assertion. On peut alors appliquer les lemmes 2 et 3: l'égalité du (d) ci-dessus se prolonge jusqu'en $s=1/2$. Jointe à l'égalité du (c), elle conduit à l'égalité de l'énoncé.

(2) (a) Supposons T déployé. Alors M l'est aussi. Identifions M à $M_2(F)$, G à $\mathrm{GL}_2(F)$, T au tore des matrices diagonales. Il existe deux caractères ω_1, ω_2 de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tels que

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\right)=\omega_1(a)\omega_2(d)$$

pour tous a, $d\in\mathbb{A}^\times$. D'après le théorème 1 et par linéarité, on peut supposer qu'il existe φ_1, $\varphi_2\in E$, g_1, $g_2\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, et pour toute place v, $W_{1,v}$, $W_{2,v}\in W(\pi_v,\psi_v)$ tels que

(i) pour tous h_1, $h_2\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$,

$$\theta(f,\varphi,h_1,h_2)=\varphi_1(h_1g_1)\varphi_2(h_2g_2),$$

(ii) pour $i=1,2$, $W_{i,v}(1)=1$ pour presque toute place v,

(iii) pour $i=1$, 2, et tout $h=(h_v)\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$,

$$\int_{F\backslash\mathbb{A}}\varphi_i\left(\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}h\right)\psi(-n)\mathrm{d}n=\prod_v W_{i,v}(h_v).$$

D'après la proposition 3, on peut supposer en outre que pour toute place v, tous $h_{1,v}$, $h_{2,v}\in\mathrm{GL}_2(F_v)$,

$$U(f_v,h_{1,v},h_{2,v})=W_{1,v}(h_{1,v}g_{1,v})W_{2,v}(h_{2,v}g_{2,v}),\tag{iv}$$

où on a posé $g_i=(g_{i,v})$ pour $i=1$, 2.

(b) On a par définition

$$P(f,\Omega)=\int_{(F^\times\backslash\mathbb{A}^\times)^2}\theta\left(f,\varphi,\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$\times\omega_1(a_1)^{-1}\omega_2(a_2)^{-1}\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2,$$
$$=\prod_{i=1,2}\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\varphi_i\left(\begin{pmatrix} a_i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_i\right)\omega_i(a_i)^{-1}\mathrm{d}a_i.$$

On sait calculer ces intégrales. Pour $i = 1, 2$ et toute place v de F, posons

$$J_{i,v} = L(\pi_v \otimes \omega_{i,v}^{-1}, 1/2)^{-1} \int_{F_v^\times} W_{i,v}\left(\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{i,v}\right) \omega_{i,v}(a_i)^{-1} \mathrm{d}a_i.$$

Cette intégrale est définie si $s(\omega_{i,v}) \ll 0$. Elle se prolonge en une fonction définie pour tout $\omega_{i,v}$, holomorphe, et on a $J_{i,v} = 1$ pour presque tout place v. On a les égalités

$$\int_{F^\times \backslash \mathbf{A}^\times} \varphi_i\left(\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_i\right) \omega_i(a_i)^{-1} \mathrm{d}a_i = L(\pi \otimes \omega_i^{-1}, 1/2) \prod_v J_{i,v},$$

$$P(f, \Omega) = L(\pi \otimes \omega_1^{-1}, 1/2) L(\pi \otimes \omega_2^{-1}, 1/2) \prod_v (J_{1,v} J_{2,v}).$$

D'après (iv) et les définitions

$$J_{1,v} J_{2,v} = \omega_{2,v}(-1) Q^0(f_v, \Omega_v)$$

pour toute place v de F. De plus

$$L(\pi \otimes \omega_1^{-1}, 1/2) L(\pi \otimes \omega_2^{-1}, 1/2) = L(\Pi \otimes \Omega^{-1}, 1/2),$$

$$\prod_v \omega_{2,v}(-1) = 1.$$

Les égalités ci-dessus et le lemme 3, (iv) démontrent l'égalité de l'énoncé. □

5. *Produit bilinéaire local*

Soit v une place de F, on se place sur F_v, on supprime les indices v. Soient π, ω, W, f'', g_1, g_2, f comme au (II.3). Notons $\zeta(s)$ la fonction zêta du corps $F(= F_v \dots)$, $L_2(\pi, s)$ la fonction L du relèvement de π à PGL_3 (cf. [GJ]). Si v est finie, μ_1, μ_2 sont deux caractères non ramifiés de $F^\times$, et $\pi \sim \pi(\mu_1, \mu_2)$, on a l'égalité

$$L_2(\pi, s) = \left(1 - \mu_1\mu_2^{-1}(\varpi)|\varpi|^s\right)^{-1} \left(1 - |\varpi|^s\right)^{-1} \left(1 - \mu_2\mu_1^{-1}(\varpi)|\varpi|^s\right)^{-1}.$$

Pour $s \in \mathbf{C}$, posons, au moins formellement

$$B(f, s) = \int_{\mathrm{ZN}\backslash \mathrm{GL}_2} \int_{F^\times} W(\sigma) A(\sigma)^{s-1} r'(\sigma) f(x, x^{-2}) \omega(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}\sigma,$$

où $F^\times$ est identifié au centre de G, lui-même étant plongé dans M,

$$B^0(f, s) = \zeta(2s) L_2(\pi, s)^{-1} B(f, s).$$

Si M est déployée, fixons un isomorphisme $M \simeq M_2(F)$, introduisons un terme $U(f, g_1, g_2)$ comme au (II.2), posons

$$C(f) = \int_{F^\times} U\left(f, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \omega^{-1}(a) \mathrm{d}a,$$

$$C^0(f) = \zeta(2)\zeta(1)^{-1} L_2(\pi, 1)^{-1} C(f).$$

LEMME 5:

(i) *Il existe $\epsilon > 0$ tel que si $D = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\ s > 1 - \epsilon\}$,*

(a) *l'intégrale définissant $B(f, s)$ converge si $s \in D$, uniformément quand s reste dans un sous-ensemble compact de D,*

(b) *les fonctions $B(f, s)$et $B^0(f, s)$ sont holomorphes dans D.*

(ii) *Dans le cas général, $B^0(f, s) = 1$ pour tout $s \in D$.*

(iii) *Supposons M déployée. L'intégrale définissant $C(f)$ converge. On a l'égalité*

$$C^0(f) = B^0(f, 1).$$

DÉMONSTRATION: Les assertions (i) et (ii) se démontrent comme au lemme 2. Supposons M déployée. Identifions M à $M_2(F)$, posons pour $\sigma \in \mathrm{GL}_2$

$$I(\sigma) = \int_{F^\times} r'(\sigma) f\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, x^{-2}\right) \omega(x) \mathrm{d}x.$$

Introduisons la fonction $\hat{f}$ (cf.II.2). Par inversion de Fourier

$$I(\sigma) = \int_{F^\times} \int_F \hat{r}'(\sigma) \hat{f}(x, x, 0, b, x^{-2}) |x|^{-1} \mathrm{d}b\, \omega(x) \mathrm{d}x.$$

Remplaçons b par une variable $z \in F^\times$, la mesure $\mathrm{d}b$ par une mesure de Haar $\mathrm{d}z$ sur $F^\times$. On a $\mathrm{d}b = \zeta(1)^{-1} |z| \mathrm{d}z$. Posons ensuite $a = zx^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \zeta(1)^{-1} \int_{F^{\times 2}} \hat{r}'(\sigma) \hat{f}(za^{-1}, za^{-1}, 0, z, z^{-2}a^2) \\ &\quad \times \omega(z) \omega(a)^{-1} |a| \mathrm{d}z \mathrm{d}a, \\ &= \zeta(1)^{-1} \int_{F^{\times 2}} \\ &\quad \times \left[r\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\sigma, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f \right]^\wedge (1, -1, 0, 1, -1) \\ &\quad \times \omega(z) \omega(a)^{-1} \mathrm{d}z \mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Par définition

$$B(f,1)=\int_{\mathrm{ZN}\backslash\mathrm{GL}_2} W(\sigma)I(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

On remplace $I(\sigma)$ par l'expression ci-dessus. L'intégrale triple converge. On interprète l'intégrale en z comme une intégrale sur Z, on permute les intégrales. Alors

$$\begin{aligned} B(f,1)=\zeta(1)^{-1}&\int_{F^\times}\int_{N\backslash\mathrm{GL}_2} W(\sigma)\\ &\times\left[r\left(\sigma,\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)f\right]^\wedge(1,-1,0,1,-1)\\ &\times \mathrm{d}\sigma\omega(a)^{-1}\mathrm{d}a,\\ =\zeta(1)^{-1}&C(f),\end{aligned}$$

d'où l'égalité (iii). □

6. Produit bilinéaire global

Revenons à la situation globale. Soient $(\pi, E)\in A_0(\mathrm{GL}_2)$, ω, φ, W, $f = \bigotimes_v f_v$ comme au (II.4). On introduit les fonctions globales $\zeta(s)$, $L_2(\pi, s)$ (cf.II.5). Notons N la norme (réduite) N_M/F, munissons $Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ d'une mesure de Tamagawa, posons

$$B(f)=\int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\theta(f,\varphi,g,g)\omega^{-1}\circ N(g)\mathrm{d}g.$$

L'intégrale converge: si M n'est pas déployée, le domaine d'intégration est compact; si M est déployée, la fonction à intégrer est à décroissance rapide d'après le théorème 1. Introduisons pour toute place v un terme $B(f_v, s)$ comme au (II.5), relatif à la composante locale π_v et à l'élément W_v fixé plus haut (plus exactement au (II.4)).

PROPOSITION 5:

(1) *La fonction* $L_2(\pi, s)$ *n'a ni zéro ni pôle en* $s=1$.

(2) *Pour toute* $f=\bigotimes_v f_v\in \mathrm{S}_{\mathbb{A}}$ *comme ci-dessus, on a l'égalité*

$$B(f)=2\zeta(2)^{-1}L_2(\pi,1)\prod_v B^0(f_v,1).$$

D'après le lemme 5, (ii), ce produit converge.

DÉMONSTRATION: (1) d'après [GJ] th.2.2.(4), la fonction $\zeta(s)L_2(\pi, s)$ a un pôle simple en $s=1$. C'est aussi le cas de $\zeta(s)$. D'où l'assertion (1).

Remarque: le relèvement π^2 de π à PGL_3 n'est pas toujours parabolique. Il peut exister un caractère χ de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tel que $L(\pi^2\otimes\chi, s)$ ait un pôle en $s=1$. L'assertion (1) signifie qu'alors $\chi\neq 1$.

(2) Supposons M non déployée. Remarquons que pour tout $g\in G(\mathbb{A})$,

$$\theta(f, \varphi, g, g)\omega^{-1}\circ N(g)=\theta\big(f, \varphi, g, gN(g)^{-1}\big),$$

$$gN(g)^{-1}=\bar{g}^{-1}.$$

Décomposons l'espace quadratique (M, q) en la somme directe orthogonale $(F, q_1)\oplus(V, q_2)$, où F s'identifie au centre de M, $q_1=q_{|F}$, qui s'identifie à la forme $q_1(x)=x^2$, V est le sous-espace des éléments de M de trace nulle, $q_2=q_{|V}$. Pour $g\in G$, l'action de l'élément $(g, \bar{g}^{-1})$ sur M, via $G\times G\to \mathrm{GO}$, s'identifie à

$$(g, \bar{g}^{-1})(x\oplus v)=x\oplus gvg^{-1},$$

pour $x\in F$, $v\in V$. Alors

$$B(f)=\int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\int_{\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}\varphi(\sigma)\theta(f, \sigma, g, \bar{g}^{-1})\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}g,$$

$$=\int_{\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}\varphi(\sigma)I(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

où

$$I(\sigma)=\int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\theta(f, \sigma, g, \bar{g}^{-1})\mathrm{d}g,$$

$$=\int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\sum_{x\in F,\ v\in V(F),\ u\in F^\times} r'(\sigma)f\big(x\oplus g^{-1}vg, u\big)\mathrm{d}g.$$

Pour $s\in\mathbb{C}$, $\sigma\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, posons

$$I(s, \sigma)=\sum_{\delta\in B(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} A(\delta\sigma)^{s-1}\sum_{x\in F,\ u\in F^\times} r'(\delta\sigma)f(x\oplus 0, u).$$

Cette fonction vérifie des propriétés analogues de (i), (ii), (iii) de la démonstration de la proposition 4, pour un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ contenant $\{s;\ \mathrm{Re}\ s>\mathrm{R}\}\cup\{1\}$. On a cette fois l'égalité

(iv) pour tout $\sigma\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $I(\sigma)=2I(1, \sigma)$

(cf. proposition 2). Pour $s\in U$, on pose

$$B(f, s)=\int_{\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}\varphi(\sigma)I(s, \sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Cette intégrale converge et définit une fonction holomorphe sur U. On a l'égalité

$$B(f)=2B(f,1). \tag{C}$$

Pour Re s assez grand, on calcule $B(f, s)$ par les mêmes procédés qu'au (II.4), i.e. par la méthode de Rankin. On obtient

$$B(f,s)=\prod_v B(f_v,s).$$

En introduisant les termes $B^0(f_v, s)$, on obtient

$$B(f,s)=\zeta(2s)^{-1}L_2(\pi,s)\prod_v B^0(f_v,s). \tag{D}$$

Les égalités (C) et (D) démontrent l'assertion (2). (3) Supposons M déployée. Faisons les mêmes hypothèses que dans la démonstration de la proposition 4, (2). On introduit donc φ_1, φ_2, g_1, g_2, $W_{1,v}$, $W_{2,v}$. On a

$$B(f)=\int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\varphi_1(gg_1)\varphi_2(gg_2)\omega^{-1}\circ\det(g)\mathrm{d}g.$$

Pour toute place v de F, on a l'égalité

$$C(f_v)=\int_{F_v^\times}W_{1,v}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}g_{1,v}\right)W_{2,v}\left(\begin{pmatrix}-a&0\\0&1\end{pmatrix}g_{2,v}\right)\omega_v^{-1}(a)\mathrm{d}a.$$

L'assertion résulte du lemme 5, (iii) et de la proposition 6 cidessous. □

Modifions nos hypothèses. Soient $(\pi, E)\in A_0(\mathrm{GL}_2)$, ω le caractère central de π, φ_1, $\varphi_2\in E$, et pour toute place v de F, $W_{1,v}$, $W_{2,v}\in W(\pi_v,\psi_v)$. On suppose

(i) pour presque toute place v, $W_{1,v}(1)=W_{2,v}(1)=1$,

(ii) pour $i=1, 2$, tout $g=(g_v)\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$,

$$\int_{F\backslash\mathbb{A}}\varphi_i\left(\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}g\right)\psi(-b)\mathrm{d}b=\prod_v W_{i,v}(g_v).$$

Soient $g_1=(g_{1,v})$, $g_2=(g_{2,v})\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Posons

$$b(\varphi_1,\varphi_2,g_1,g_2)=\int_{\mathrm{GL}_2(F)Z(\mathbb{A})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}\varphi_1(gg_1)$$
$$\times\varphi_2(gg_2)\omega^{-1}\circ\det(g)\mathrm{d}g,$$

où ici la mesure sur $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ est une mesure de Tamagawa; pour toute place v

$$b(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}) = \int_{F_v^\times} W_{1,v}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{1,v}\right)$$

$$\times W_{2,v}\left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{2,v}\right) \omega_v^{-1}(a) \mathrm{d}a,$$

$$b^0(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}) = \zeta_v(1)^{-1} \zeta_v(2) L_2(\pi_v, 1)^{-1}$$

$$\times b(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}).$$

On vérifie que l'intégrale ci-dessus converge.

PROPOSITION 6: *Sous ces hypothèses*

(1) $b^0(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}) = 1$, *pour presque toute place* v,

(2) *on a l'égalité*

$$b(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2) = 2\zeta(2)^{-1} L_2(\pi, 1) \prod_v b^0(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}).$$

DÉMONSTRATION: On utilise la méthode de Rankin.

(a) Soient ϕ une fonction de Schwartz sur $\mathbb{A}^2$, $s \in \mathbb{C}$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Posons

$$e_\phi(s, g) = |\det g|^{(s+1)/2} \int_{\mathbb{A}^\times} \phi((0, y)g) |y|^{s+1} \mathrm{d}y,$$

$$E_\phi(s, g) = \sum_{\delta \in B(F) \backslash \mathrm{GL}_2(F)} e_\phi(s, \delta g).$$

Cette série converge si Re s est assez grand. La fonction ainsi définie se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{A}^2$, posons

$$\hat{\phi}(x, y) = \int_{\mathbb{A}^2} \phi(x', y') \psi(x'y - xy') \mathrm{d}x' \mathrm{d}y'.$$

Notons m le résidu de la fonction $\zeta(s)$ en $s = 1$. On a l'égalité

$$\lim_{s \to 1} (s-1) E_\phi(s, g) = m\hat{\phi}(0, 0)$$

pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Posons

$$b_\phi(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2, s) = \int_{\mathrm{GL}_2(F) Z(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \varphi_1(gg_1)$$

$$\times \varphi_2(gg_2) \omega^{-1} \circ \det(g) E_\phi(s, g) \mathrm{d}g.$$

Cette intégrale converge si s n'est pas un pôle de E_ϕ, définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On a l'égalité

$$\lim_{s\to 1}(s-1)b_\phi(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2, s) = m\hat{\phi}(0,0)b(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2).$$

(b) Les mesures sur $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ et $N(\mathbb{A})$ définissent une mesure sur $N(\mathbb{A})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$. On peut supposer qu'elle est le produit sur toutes les places v de F des mesures d_1 sur $N(F_v)\backslash\mathrm{PGL}_2(F_v)$ définies par la formule

$$\int_{N(F_v)\backslash\mathrm{PGL}_2(F_v)} f(g)\mathrm{d}_1 g = \int_{F_v^2} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1\end{pmatrix}\right)|a|_v^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}c \qquad \text{(b1)}$$

pour toute fonction f continue à support compact sur $N(F_v)\backslash\mathrm{PGL}_2(F_v)$, où d$a$ et dc sont les mesures de Haar sur le groupe additif F_v. Fixons sur le groupe compact maximal K_v^ℓ de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ la mesure dk de masse totale 1. On définit sur $N(F_v)\backslash\mathrm{PGL}_2(F_v)$ une mesure d_2 par

$$\int_{N(F_v)\backslash\mathrm{PGL}_2(F_v)} f(g)\mathrm{d}_2 g = \int_{F_v^\times\times K_v^\ell} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}k\right)|a|_v^{-1}\mathrm{d}a\mathrm{d}k, \qquad \text{(b2)}$$

où da est ici notre mesure de Haar sur $F_v^\times$. Comme d_1 et d_2 sont invariantes par translations à droite, il existe un réel positif δ_v tel que $\mathrm{d}_1 = \delta_v \mathrm{d}_2$. On montrera plus loin que $\delta_v = \zeta_v(2)^{-1}$ pour presque toute place v. Supposons $\phi = \bigotimes_v \phi_v$ où pour toute place v, $\phi_v \in \mathrm{S}(F_v^2)$. Posons pour toute place v et tout $g \in \mathrm{GL}_2(F_v)$

$$e_{\phi_v}(s, g) = |\det g|_v^{(s+1)/2}\int_{F_v^\times}\phi_v((0,y)g)|y|_v^{s+1}\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned} &b_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s) \\ &\quad = \int_{N(F_v)\backslash\mathrm{PGL}_2(F_v)} W_{1,v}(gg_{1,v})W_{2,v}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}gg_{2,v}\right) \\ &\qquad \times \omega_v^{-1}\circ\det(g)e_{\phi_v}(s,g)\mathrm{d}_1 g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &b^0_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s) \\ &\quad = \zeta_v(2)\zeta_v\left(\frac{s+1}{2}\right)^{-1}L_2\left(\pi_v, \frac{s+1}{2}\right)^{-1} \\ &\qquad \times b_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s). \end{aligned}$$

On a

(b3) pour toute place v, il existe $\epsilon > 0$ tel que les intégrales définissant

$b_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s)$ convergent dans le domaine $\{s \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}\, s > 1-\epsilon\}$. Cette fonction est holomorphe dans ce domaine.

(b4) Pour presque toute place v,

$$b^0_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s) = 1$$

pour tout s.

(b5) On a l'égalité

$$\lim_{s\to 1}(s-1) b_\phi(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2, s)$$

$$= 2m\zeta(2)^{-1} L_2(\pi, 1) \prod_v b^0_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, 1)$$

DÉMONSTRATION: Pour presque toute place finie v, ϕ_v est la fonction caractéristique de $\mathscr{o}_v \times \mathscr{o}_v$, $g_{1,v} = g_{2,v} = 1$, $W_{1,v} = W_{2,v}$ est invariante par K_v^ℓ, mes $\mathscr{o}_v =$ mes $\mathscr{o}_v^\times = 1$. La fonction $e_{\phi_v}(s, g)$ est invariante par K_v^ℓ. On remplace d_1 par $\delta_v d_2$:

$$b_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s)$$

$$= \delta_v \int_{F_v^\times} W_{1,v}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) W_{2,v}\left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \omega_v^{-1}(a)$$

$$\times e_{\phi_v}\left(s, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |a|_v^{-1} \mathrm{d}a.$$

On calcule

$$e_{\phi_v}\left(s, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |a|_v^{(s+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} |\varpi|_v^{n(s+1)} = \zeta_v(s+1)|a|_v^{(s+1)/2}.$$

Soient μ_1, μ_2 les deux caractères non ramifiés de $F_v^\times$ tels que $\pi_v \sim \pi(\mu_1, \mu_2)$. Alors

$$W_{1,v}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = W_{2,v}\left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } v(a) < 0, \\ \dfrac{\mu_1(a\varpi) - \mu_2(a\varpi)}{\mu_1(\varpi) - \mu_2(\varpi)} |a|_v^{1/2} & \text{si } v(a) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\mu_1\mu_2 = \omega_v.$$

D'où

$$b_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s)$$
$$= \delta_v \zeta_v(s+1) \sum_{n=0}^{\infty} |\varpi|_v^{n(s+1)/2}$$
$$\times \left[\frac{\mu_1(\varpi)^{n+1} - \mu_2(\varpi)^{n+1}}{\mu_1(\varpi) - \mu_2(\varpi)}\right]^2 \mu_1\mu_2(\varpi)^{-n}.$$

Le calcul de cette série conduit à l'égalité (b4). Des calculs analogues, joints aux majorations de $W_{1,v}$ et $W_{2,v}$ résultant du fait que π_v est composante locale d'une représentation automorphe parabolique, conduisent à (b3). Le calcul standard de Rankin conduit à l'égalité

$$b_\phi(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2, s) = \prod_v b_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s)$$

pour Re s assez grand. D'où

$$b_\phi(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2, s) = \zeta(2)^{-1}\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)L_2\left(\pi, \frac{s+1}{2}\right)$$
$$\times \prod_v b^0_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, s).$$

D'après (b3), (b4), ce dernier produit est holomorphe en $s=1$. La fonction L_2 également. On a

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2m,$$

d'où l'égalité (b5).

(c) Supposons $\hat{\phi}(0, 0) \neq 0$, i.e. $\hat{\phi}_v(0, 0) \neq 0$ pour toute place v. Alors (a) et (b3) montrent que

$$b(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2)$$
$$= 2\zeta(2)^{-1}L_2(\pi, 1)\prod_v \hat{\phi}_v(0,0)^{-1} b^0_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, 1). \tag{c1}$$

L'application $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto b(\varphi_1, \varphi_2, 1, 1)$ définit une forme linéaire sur $E \otimes E$, non nulle, indépendante de ϕ (!), telle que pour toutes $f \in \mathscr{H}^\ell_{\mathbf{A}}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in E$

$$b(\pi(f)\varphi_1, \varphi_2, 1, 1) = b(\varphi_1, \pi(\check{f})\varphi_2, 1, 1)$$

où pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $\check{f}(g) = \omega^{-1} \circ \det(g)\, f(g^{-1})$. Pour toute place v, l'application

$$(W_{1,v}, W_{2,v}) \mapsto \ell(W_{1,v}, W_{2,v}) = \hat{\phi}_v(0, 0)^{-1} b^0_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, 1, 1, 1)$$

définit donc une forme linéaire sur $W(\pi_v, \psi_v) \otimes W(\pi_v, \psi_v)$, non nulle, indépendante de ϕ_v, telle que pour toutes $f \in \mathscr{H}_v^{\ell}$, $W_{1,v}, W_{2,v} \in W(\pi_v, \psi_v)$

$$\ell(\pi_v(f) W_{1,v}, W_{2,v}) = \ell(W_{1,v}, \pi_v(\check{f}) W_{2,v}),$$

où $\check{f}$ est définie comme ci-dessus. On sait que l'application

$$(W_{1,v}, W_{2,v}) \mapsto b^0(W_{1,v}, W_{2,v}, 1, 1)$$

vérifie des propriétés analogues. Or une telle application est unique à une constante près. Il existe $c_v \in \mathbb{C}^{\times}$ telle que pour toute fonction ϕ_v, vérifiant $\hat{\phi}_v(0, 0) \neq 0$, tous $W_{1,v}, W_{2,v} \in W(\pi_v, \psi_v)$,

$$\hat{\phi}_v(0, 0)^{-1} b^-_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, 1, 1, 1) = c_v b^0(W_{1,v}, W_{2,v}, 1, 1).$$

On en déduit facilement que pour tous ϕ_v, $W_{1,v}$, $W_{2,v}$, et $g_{1,v}, g_{2,v} \in \mathrm{GL}_2(F_v)$

$$\hat{\phi}_v(0, 0)^{-1} b^0_{\phi_v}(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}, 1)$$
$$= c_v b^0(W_{1,v}, W_{2,v}, g_{1,v}, g_{2,v}).$$

La proposition 6 résulte de (b4), (c1) et de l'égalité
(c2) pour toute place v, $c_v = 1$,
que nous alons maintenant démontrer.

(d) Soit v une place de F, plaçons-nous sur F_v et abandonnons les indices v. Pour $\phi \in S(F^2)$, telle que $\hat{\phi}(0, 0) \neq 0$, on a donc défini sur $W(\pi, \psi) \otimes W(\pi, \psi)$ une forme linéaire

$$(W_1, W_2) \mapsto \ell(W_1, W_2) = \hat{\phi}(0, 0)^{-1} \int_{N \backslash \mathrm{PGL}_2} W_1(g)$$
$$\times W_2\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \omega^{-1} \circ \det(g) e_{\phi}(1, g) \mathrm{d}_1 g,$$

qui est indépendante de ϕ. On a d'autre part sur $W(\pi, \psi) \otimes W(\pi, \psi)$ une forme linéaire

$$(W_1, W_2) \mapsto \ell'(W_1, W_2) = \int_{F^{\times}} W_1\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) W_2\left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$\times \omega^{-1}(a) \mathrm{d}a.$$

Pour tous $W_1, W_2 \in W(\pi, \psi)$, on a l'égalité

$$\ell(W_1, W_2) = c_v \ell'(W_1, W_2).$$

Supposons ϕ invariante par l'action du sous-groupe compact maximal K^ℓ. Alors e_ϕ l'est aussi. Remplaçons d_1 par $\delta_v \mathrm{d}_2$ dans la définition de ℓ. On obtient

$$\ell(W_1, W_2) = \hat{\phi}(0, 0)^{-1}\delta_v$$

$$\times \int_{F_\ell^\times \times K^\ell} W_1\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) W_2\left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)$$

$$\times \omega^{-1} \circ \det(k) \omega^{-1}(a) e_\phi\left(1, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |a|^{-1} \mathrm{d}a \mathrm{d}k.$$

On a

$$e_\phi\left(1, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |a| e_\phi(1, 1).$$

On voit que

$$\ell(W_1, W_2) = \delta_v \hat{\phi}(0, 0)^{-1} e_\phi(1, 1) \int_{K^\ell} \ell'(\pi(k) W_1, \pi(k) W_2)$$

$$\times \omega^{-1} \circ \det(k) \mathrm{d}k.$$

Mais la propriété d'invariance de ℓ' et le choix de la mesure sur K^ℓ montrent que cette intégrale est égale à $\ell'(W_1, W_2)$. D'où

$$\ell(W_1, W_2) = \delta_v \hat{\phi}(0, {}'0)^{-1} e_\phi(1, 1) \ell'(W_1, W_2),$$

$$c_v = \delta_v \hat{\phi}(0, 0)^{-1} e_\phi(1, 1). \tag{d1}$$

(e) Supposons v finie, notons h la mesure de $\mathcal{O}$ pour la mesure de Haar sur le groupe additif F, choisissons pour ϕ la fonction caractéristique de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$. On a

$$\hat{\phi}(0, 0) = h^2 \tag{e1}$$

La mesure de Haar sur $F^\times$ est $(1 - |\varpi|)^{-1} |y|^{-1} \mathrm{d}y$, où ici dy est la mesure sur F. D'où

$$e_\phi(1,1)=(1-|\varpi|)^{-1}\int_F \phi(0,y)|y|\mathrm{d}y,$$

$$=(1-|\varpi|)^{-1}\int_{\mathcal{O}}|y|\mathrm{d}y,$$

$$e_\phi(1,1)=h\left(1-|\varpi|^2\right)^{-1}. \tag{e2}$$

Soit f la fonction sur $N\backslash\mathrm{PGL}_2$, image naturelle de la fonction caratéristique du sous-ensemble ZNK′ de GL_2, où

$$K'=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O});\ v(c)\geqslant 1\right\}.$$

Pour $a\in F^\times$, $c\in F$, $k\in K^{\ell}$, on a

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad v(a)\neq 0\quad \text{ou}\quad v(c)<1,\\ 1, & \text{si}\quad v(a)=0\quad \text{et}\quad v(c)\geqslant 1,\end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\right)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad v(a)\neq 0\quad \text{ou}\quad k\notin K',\\ 1, & \text{si}\quad v(a)=0\quad \text{et}\quad k\in K'.\end{cases}$$

De plus $[K:K']=1+|\varpi|^{-1}$. En utilisant (b1) et (b2), on voit que

$$\int_{N\backslash\mathrm{PGL}_2} f(g)\mathrm{d}_1 g=h^2|\varpi|(1-|\varpi|),$$

$$\int_{N\backslash\mathrm{PGL}_2} f(g)\mathrm{d}_2 g=h|\varpi|(1+|\varpi|)^{-1}.$$

D'où

$$\delta_v=h\left(1-|\varpi|^2\right). \tag{e3}$$

Ces relations démontrent $c_v=1$.

(f) Supposons v réelle, soit $\alpha\in\mathbb{R}^\times$ tel que $\psi(x)=\mathrm{e}^{2\pi i\alpha x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, choisissons pour ϕ la fonction

$$\phi(x,y)=\mathrm{e}^{-\pi|\alpha|(x^2+y^2)}.$$

Notons $\mathrm{d}x$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Notre mesure sur F est

$|\alpha|^{1/2}\mathrm{d}x$. Celle sur $F^\times$ est $|\alpha|^{1/2}|x|^{-1}\mathrm{d}x$. On calcule

$$\hat{\phi}(0,0)=1, \tag{f1}$$

$$e_\phi(1,1)=|\alpha|^{1/2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi|\alpha|y^2}|y|\mathrm{d}y,$$

$$e_\phi(1,1)=|\alpha|^{-1/2}\pi^{-1}. \tag{f2}$$

Soit f la fonction sur $N\backslash \mathrm{PGL}_2$, image naturelle de la fonction caractéristique du sous-ensemble $\mathrm{ZNA'}K^\ell$, où

$$\mathrm{A}'=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ a>1\right\}.$$

On rappelle que $K^\ell=O_2(\mathbb{R})$. Pour $a\in\mathbb{R}^\times$, $c\in\mathbb{R}$, $k\in O_2(R)$, on a

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{cases}1, & \text{si } 1+c^2<|a|,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\right)=\begin{cases}1, & \text{si } 1<|a|,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

On calcule grâce à (b1) et (b2)

$$\int_{N\backslash \mathrm{PGL}_2} f(g)\mathrm{d}_1 g=|\alpha|\int_{\mathbb{R}}2\int_{1+c^2}^{\infty}a^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}c=2\pi|\alpha|,$$

$$\int_{N\backslash \mathrm{PGL}_2} f(g)\mathrm{d}_2 g=|\alpha|^{1/2}2\int_{1}^{\infty}a^{-2}\mathrm{d}a=2|\alpha|^{1/2},$$

d'où

$$\delta_v=\pi|\alpha|^{1/2}, \tag{f3}$$

et $c_v=1$.

(g) Supposons v complexe, soit $\alpha\in\mathbb{C}^\times$ tel que $\psi(z)=\mathrm{e}^{4\pi i\mathrm{Re}(\alpha z)}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, choississons pour ϕ la fonction

$$\phi(x,y)=\mathrm{e}^{-2\pi|\alpha|^{1/2}}(|x|+|y|).$$

Notons $\mathrm{d}x$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Notre mesure $\mathrm{d}z$ sur F est $2|\alpha|^{1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, si $z=x+iy$, celle sur $F^\times$ est $2\pi^{-1}|\alpha|^{1/2}(x^2+y^2)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

On calcule

$$\hat{\phi}(0,0)=1, \tag{g1}$$

$$e_{\phi}(1,1)=2\pi^{-1}|\alpha|^{1/2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi|\alpha|^{1/2}(x^2+y^2)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$e_{\phi}(1,1)=2^{-1}\pi^{-2}|\alpha|^{-1/2}. \tag{g2}$$

Soit f la fonction sur $N\backslash \mathrm{PGL}_2$, image naturelle de la fonction caractéristique du sous-ensemble $\mathrm{ZNA}'K^{\ell}$, où

$$\mathrm{A}'=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ |a|>1\right\}.$$

On rappelle que $K^{\ell}=U_2(\mathbb{C})$. Pour $a\in\mathbb{C}^{\times}$, $c\in\mathbb{C}$, $k\in U_2(\mathbb{C})$, on a

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{cases}1, & \text{si } |1+c\bar{c}|<|a|,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\right)=\begin{cases}1, & \text{si } 1<|a|,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

On calcule grâce à (b1) et (b2) et l'usage des coordonnées polaires

$$\int_{N\backslash\mathrm{PGL}_2} f(g)\mathrm{d}_1 g=4|\alpha|(2\pi)^2\int_0^{\infty}\int_{1+r^2}^{\infty}u^{-3}\mathrm{d}ur\mathrm{d}r=4|\alpha|\pi^2,$$

$$\int_{N\backslash\mathrm{PGL}_2} f(g)\mathrm{d}_2 g=4|\alpha|^{1/2}\int_1^{\infty}r^{-3}\mathrm{d}r=2|\alpha|^{1/2},$$

d'où

$$\delta_v=2\pi^2|\alpha|^{1/2}, \tag{g3}$$

et $c_v=1$. □

7. *Interprétation*

Soient $(\pi', E')\in A_0(G)$, $(\pi, E)=\mathrm{JL}(\pi', E')\in A_0(\mathrm{GL}_2)$, fixons $\varphi\in E$ comme au (II.2), des représentations locales (π_v', E_v') et un isomorphisme i': $\bigotimes_v \mathrm{E}_v'\to E'$. Pour $f\in \mathrm{S}_{\psi,\mathbf{A}}$, posons $j(f)=\theta_{f,\varphi}$. D'après le théorème 1, j: $\mathrm{S}_{\psi,\mathbf{A}}\to E'\otimes E'$ est un homomorphisme surjectif de $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}^m\otimes\mathscr{H}_{\mathbf{A}}^m$-modules. Il résulte de la construction de Shimizu qu'il existe pour toute place v un homomorphisme surjectif de $\mathcal{H}_v^m \otimes \mathcal{H}_v^m$-modules j_v: $S_{\psi,v} \to E'_v \otimes E'_v$, tel que pour presque toute place v, l'image par j_v de l'élément "marqué" de $S_{\psi,v}$ est l'élément "marqué" de $E'_v \otimes E'_v$, et que le diagramme ci-dessous soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_v S_{\psi,v} \arrow[r, "\bigotimes_v j_v"] \arrow[d] & \bigotimes_v (E'_v \otimes E'_v) \arrow[d, "i' \otimes i'"] \\ S_{\psi,\mathbb{A}} \arrow[r, "j"] & E' \otimes E' \end{tikzcd}$$

(a) Pour e_1, $e_2 \in E'$, posons

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} e_1(g) e_2(g) \omega^{-1} \circ N(g) \mathrm{d}g.$$

Cette formule définit une forme bilinéaire non nulle sur E', telle que pour toute $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^m$, tous e_1, $e_2 \in E'$,

$$\langle \pi'(h) e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, \pi'(\check{h}) e_2 \rangle,$$

où $\check{h}$ est définie par $\check{h}(g) = \omega^{-1} \circ N(g) h(g^{-1})$, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$. Plus généralement pour e_1, $e_2 \in E'$, g_1, $g_2 \in G(\mathbb{A})$, posons

$$\langle \pi'(g_1) e_1, \pi'(g_2) e_2 \rangle = \int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} e_1(g g_1) e_2(g g_2) \times \omega^{-1} \circ N(g) \mathrm{d}g.$$

On a la relation

$$\langle \pi'(g g_1) e_1, \pi'(g g_2) e_2 \rangle = \omega \circ N(g) \langle \pi'(g_1) e_1, \pi'(g_2) e_2 \rangle,$$

pour tous e_1, $e_2 \in E'$, g, g_1, $g_2 \in G(\mathbb{A})$. Soient e_1, $e_2 \in E'$, g_1, $g_2 \in G(\mathbb{A})$, $f'' \in S_{\psi,\mathbb{A}}$ telle que $j(f'') = e_1 \otimes e_2$, $f = r''(g_1, g_2) f''$. Par définition (cf.II.6),

$$B(f) = \langle \pi'(g_1) e_1, \pi'(g_2) e_2 \rangle.$$

(b) Soient v une place de F, e_1, $e_2 \in E'_v$, $f''_v \in S_{\psi,v}$ telle que $j_v(f''_v) = e_1 \otimes e_2$. Posons

$$\langle e_1, e_1 \rangle = B(f''_v, 1)$$

(cf.II.5).

LEMME 6:

(i) *Le terme ci-dessus ne dépend pas du choix de* f_v''.

(ii) *L'application ainsi définie est une forme bilinéaire non nulle sur* E_v', *telle que pour toute* $h \in \mathscr{H}_v^m$, *tous* $e_1, e_2 \in E_v'$,

$$\langle \pi_v'(h) e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, \pi_v'(\check{h}) e_2 \rangle.$$

La fonction $\check{h}$ est définie comme ci-dessus.

DÉMONSTRATION: Cela résulte des définitions, du (a) et de la proposition 5. □

Une telle forme bilinéaire étant donnée, on peut définir, pour tous e_1, $e_2 \in E_v'$, une fonction continue sur $G_v \times G_v$ notée

$$(g_1, g_2) \mapsto \langle \pi_v'(g_1) e_1, \pi_v'(g_2) e_2 \rangle$$

([JL] p. 156). Elle vérifie les relations

$$\langle \pi_v'(gg_1) e_1, \pi_v'(gg_2) e_2 \rangle = \omega_v \circ N(g) \langle \pi_v'(g_1) e_1, \pi_v'(g_2) e_2 \rangle,$$

$$\langle \pi_v'(h) e_1, e_2 \rangle = \int_{G_v} h(g) \langle \pi_v'(g) e_1, e_2 \rangle \mathrm{d}g,$$

pour tous $e_1, e_2 \in E_v'$, $g, g_1, g_2 \in G_v$, $h \in \mathscr{H}_v^m$. Soient $e_1, e_2 \in E_v'$, g_1, $g_2 \in G_v$, $f_v'' \in \mathrm{S}_{\psi,v}$ telle que $j_v(f_v'') = e_1 \otimes e_2$, $f_v = r''(g_1, g_2) f_v''$. Il est clair qu'on a l'égalité

$$\langle \pi_v'(g_1) e_1, \pi_v'(g_2) e_2 \rangle = B(f_v, 1).$$

(c) Soient T un sous-tore maximal de G défini sur F, Ω un caractère de $T(F) \backslash T(\mathbb{A})$ tel que $\Omega_{|Z(\mathbb{A})} = \omega$. Pour $e \in E'$, $g \in G(\mathbb{A})$, posons

$$p(e, g, T, \Omega) = \int_{T(F) Z(\mathbb{A}) \backslash T(\mathbb{A})} \Omega(t)^{-1} e(tg) \mathrm{d}t.$$

On définit un caractère $\tilde{\Omega}$ de $T(F) \backslash T(\mathbb{A})$ par $\tilde{\Omega}(t) = \Omega(\bar{t})$ pour tout $t \in T(\mathbb{A})$. Soient $e_1, e_2 \in E'$, $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, $f'' \in \mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}}$ telle que $j(f'') = e_1 \otimes e_2$, $f = r''(g_1, g_2) f''$. On a l'égalité (cf.II.4)

$$P(f, \Omega) = p(e_1, g_1, T, \Omega) p(e_2, g_2, T, \tilde{\Omega}).$$

(d) Soient v une place de F, $e_1, e_2 \in E_v'$, $g_1, g_2 \in G_v$, $f_v'' \in \mathrm{S}_{\psi,v}$ telle que $j_v(f_v'') = e_1 \otimes e_2$, $f_v = r''(g_1, g_2) f_v''$. On a (cf.II.3)

LEMME 7: *Supposons T_v non déployé, ou $s(\Omega_v)=0$. L'intégrale ci-après converge et on a l'égalité*

$$P(f_v, \Omega_v, 1/2) = \int_{Z_v\backslash T_v} \langle \pi_v'(tg_1)e_1, \pi_v'(g_2)e_2\rangle \Omega_v^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION: L'intégrale converge d'après les lemmes 2, 3, (i) (a). Il résulte des définitions que

$$P(f_v, \Omega_v, 1/2) = \int_{Z_v\backslash T_v} B\big(r''(t^{-1}, 1)f_v, 1\big)\Omega_v(t)\,\mathrm{d}t.$$

On change t en t^{-1} et on interprète B comme ci-dessus (b). □

III. Integrale d'une forme automorphe parabolique sur un tore

1. Modèles locaux

Soit ici F un corps local. Considérons un groupe G égal soit à $\mathrm{GL}_2(F)$, soit, si $F \neq \mathbb{C}$, au groupe des éléments inversibles de l'algèbre de quaternions sur F, non déployée. Notons Z le centre de G, fixons un sous-groupe compact maximal K de G, soit $\mathscr{H}$ l'algèbre de Hecke de G relative à ce sous-groupe. Soit (π, E) une représentation admissible irréductible de G. Si $G=\mathrm{GL}_2(F)$, on suppose la dimension de E infinie. Notons ω le caractère central de π. Soient T un soustore maximal de G, Ω un caractère continu de T tel que $\Omega_{|Z}=\omega$, $U(T, \Omega)$ l'espace des fonctions u: $G \to \mathbb{C}$ telles que

(i) u est continue,

(ii) pour tous $t \in T$, $g \in G$, $u(tg) = \Omega(t)u(g)$.

L'algèbre $\mathscr{H}$ agit dans $U(T, \Omega)$ via les translations à droite, on note ρ cette action.

LEMME 8:

(i) *Il existe au plus un sous-espace U de $U(T, \Omega)$, stable par ρ, tel que la représentation de $\mathscr{H}$ dans U soit isomorphe à π.*

(ii) *Si T est déployé, un tel sous-espace existe.*

(iii) *Si $G=\mathrm{GL}_2(F)$ et π n'est pas de carré intégrable, un tel sousespace existe.*

C'est démontré dans [W1] prop. 9, 10, pour $\omega=1$, $\Omega=1$, dans [Tu] si F est p-adique. Le cas général se démontre par des méthodes analogues.□

Si un tel sous-espace existe, on le note $U(\pi, T, \Omega)$. Par abus de langage, on dit que $U(\pi, T, \Omega)$ existe ou n'existe pas si un tel sousespace existe ou n'existe pas.

Supposons de plus F non archimédien, ou $T \subset \mathrm{ZK}$. Alors T lui-même agit dans E. Notons E^* le dual de E, posons

$$E(T, \Omega) = \{ e \in E;\ \forall t \in T,\ \pi(t)e = \Omega(t)e \},$$

$$E^*(T, \Omega) = \{ \ell \in E^*;\ \forall t \in T, \forall e \in E,\ \ell(\pi(t)e) = \Omega(t)\ell(e) \}.$$

LEMME 9:

(i) $\dim_{\mathbb{C}} E^*(T, \Omega) \leqslant 1$.

(ii) $U(\pi, T, \Omega)$ *existe si et seulement si* $\dim_{\mathbb{C}} E^*(T, \Omega) = 1$.

(iii) *Si T n'est pas déployé*, $\dim_{\mathbb{C}} E(T, \Omega) = \dim_{\mathbb{C}} E^*(T, \Omega)$.

Même démonstration que ci-dessus. □

2. Intégrale sur un tore et nullité

Revenons à la situation globale. On adopte les hypothèses et notations du (II.7), en particulier (c). Soit v une place de F.

LEMME 10: *Il existe $f_v \in \mathrm{S}_{\psi,v}$ telle que $P^0(f_v, \Omega_v, 1/2) \neq 0$ si et seulement si l'espace $U(\pi'_v, T_v, \Omega_v)$ existe.*

DÉMONSTRATION: Si T_v est déployé, cela résulte du lemme 3, (iv), (v), et du lemme 8, (ii). Supposons T_v non déployé. On peut remplacer P^0 par P. Le lemme 7 montre que l'existence de $f_v \in \mathrm{S}_{\psi,v}$ telle que $P^0(f_v, \Omega_v, 1/2) \neq 0$ équivaut à l'existence de $e_1, e_2 \in E'_v$ tels que

$$\int_{Z_v \backslash T_v} \langle \pi'_v(t)e_1, e_2 \rangle \Omega_v^{-1}(t)\mathrm{d}t \neq 0. \tag{E}$$

Si un tel couple existe, fixons-en un (e_1, e_2), et, pour tout $e \in E'_v$, définissons une fonction u_e sur G_v par

$$u_e(g) = \int_{Z_v \backslash T_v} \langle \pi'_v(tg)e, e_2 \rangle \Omega_v^{-1}(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $g \in G_v$. Il est clair que $u_e \in U(T_v, \Omega_v)$, que l'application $e \mapsto u_e$ est un morphisme de $\mathscr{H}_v^m$-modules. Comme $u_{e_1}(1) \neq 0$, l'image de cette application est un espace $U(\pi'_v, T_v, \Omega_v)$. Supposons réciproquement que $U(\pi'_v, T_v, \Omega_v)$ existe, et $F_v = \mathbb{R}$ (le cas p-adique est encore plus simple). Il existe $g \in G_v$ tel que $g^{-1}T_v g \subset \mathrm{ZK}$. Soient $T'_v = g^{-1}T_v g$, Ω'_v le caractère de T'_v défini par $\Omega'_v(t') = \Omega_v(gt'g^{-1})$ pour tout $t' \in T'_v$. En translatant à gauche par g les fonctions de $U(\pi'_v, T_v, \Omega_v)$, on voit que l'espace $U(\pi'_v, T'_v, \Omega'_v)$ existe. D'après le lemme 9, $E'_v(T'_v, \Omega'_v) \neq \{0\}$. *Soit* $e'_1 \in E'_v(T'_v, \Omega'_v)$, $e'_1 \neq 0$. D'après le lemme 6, (ii), il existe $e'_2 \in E'_v$ tel que

$\langle e_1', e_2'\rangle \neq 0$. On a

$$\int_{Z_v\backslash T_v'} \langle \pi_v'(t')e_1', e_2'\rangle \Omega_v'^{-1}(t')\mathrm{d}t' = \mathrm{mes}(Z_v\backslash T_v')\langle e_1', e_2'\rangle \neq 0,$$

d'où

$$\int_{Z_v\backslash T_v} \langle \pi_v'(tg)e_1', \pi_v'(g)e_2'\rangle \Omega_v^{-1}(t)\mathrm{d}t \neq 0.$$

En approximant la mesure de Dirac en g par une fonction de $\mathscr{H}_v^m$, il existe alors e_1, e_2 vérifiant (E). □

Démontrons maintenant le premier résultat que nous avions en vue. Rappelons les hypothèses pour plus de clarté.

THÉORÈME 2: *Soient M une algèbre de quaternions définie sur F, G le groupe de ses éléments inversibles, $(\pi', E')\in A_0(G)$, $\pi = \mathrm{JL}(\pi')$, T un sous-tore maximal de G défini sur F, F_T l'extension quadratique de F associée à T, Π la représentation automorphe "de $\mathrm{GL}_2(F_T(\mathbb{A}))$" qui relève π, Ω un caractère continu de $T(F)\backslash T(\mathbb{A})$ dont la restriction au centre de $G(\mathbb{A})$ soit égale au caractère central de π. Alors il existe $e'\in E'$ tel que l'intégrale*

$$\int_{T(F)Z(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})} e'(t)\Omega^{-1}(t)\mathrm{d}t$$

soit non nulle si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

(i) *pour toute place v de F, $U(\pi_v', T_v, \Omega_v)$ existe,*

(ii) $L(\Pi\otimes\Omega^{-1}, 1/2)\neq 0$.

DÉMONSTRATION: (a) L'intégrale figurant dans l'énoncé est $p(e', 1, T, \Omega)$. Supposons qu'il existe $e_1\in E'$ tel que $p(e_1, 1, T, \Omega)\neq 0$. Montrons qu'il existe $e_2\in E'$ tel que $p(e_2, 1, T, \tilde{\Omega})\neq 0$ (cf.II.7, (c)). Il existe un élément $w\in G(F)$, qui normalise T et n'appartient pas à $T(F)$. Pour tout $t\in T(\mathbb{A})$, on a $w^{-1}tw=\bar{t}$. On calcule

$$p(e_1, w, T, \tilde{\Omega}) = p(e_1, 1, T, \Omega),$$

d'où $p(e_1, w, T, \tilde{\Omega})\neq 0$. En approximant la mesure de Dirac en w par une fonction de $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}^m$, cette relation implique l'existence du e_2 cherché.

(b) D'après (a) et (II.7, (c)), l'existence de $e'\in E'$ tel que $p(e', 1, T, \Omega)\neq 0$ équivaut à celle de $f\in \mathrm{S}_{\psi,\mathbb{A}}$ telle que $P(f, \Omega)\neq 0$.

(c) Par décomposition linéaire, l'existence de $f \in S_{\psi,\mathbb{A}}$ telle que $P(f, \Omega) \neq 0$, équivaut à l'existence de f, de la forme $f = \bigotimes_v f_v$, telle que $P(f, \Omega) \neq 0$. D'après la proposition 4 et le lemme 10, cela équivaut à (i) et (ii). □

3. *La formule fondamentale*

Conservons les hypothèses du (II.7), supposons de plus $\omega = 1$, et Ω unitaire. La représentation π' est unitaire, ses composantes locales le sont aussi. Soient v une place de F, b un produit scalaire invariant sur E'_v (linéaire en la première variable), $e \in E'_v - \{0\}$, $g \in G_v$. Posons

$$\alpha(e, g, T_v, \Omega_v) = \zeta_v(2)^{-1} L(\Pi_v \otimes \Omega_v^{-1}, 1/2)^{-1} L(\chi_{T_v}, 1) L_2(\pi_v, 1)$$
$$\times \int_{Z_v \backslash T_v} b(\pi'_v(tg)e, \pi'_v(g)e) b(e, e)^{-1} \Omega_v(t)^{-1} \mathrm{d}t.$$

L'intégrale converge. Si $g = 1$, ou $\Omega_v = 1$, on les supprime de la notation. Remarquons que comme b est unique à homothétie près, l'intégrale ne dépend pas de b. Pour $e_1, e_2 \in E'$, posons

$$(e_1, e_2) = \int_{G(F)Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} e_1(g) \overline{e_2(g)} \mathrm{d}g.$$

On rappelle que la mesure sur $Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})$ est de Tamagawa.

Pour $e \in E'$, $g \in G(\mathbb{A})$, on a défini $p(e, g, T, \Omega)$ (cf.II.7, (c)).

Soient pour toute place v de F un élément $e_v \in E'_v - \{0\}$, égal pour presque toute place à l'élément "marqué", $e = i'(\bigotimes_v e_v)$, $g_v \in G_v$ pour toute place v archimédienne, g l'élément de $G(\mathbb{A})$ de composante 1 aux places finies et g_v en une place v archimédienne, S l'ensemble des places archimédiennes de F.

PROPOSITION 7: *Sous ces hypothèses*

(1) *pour presque toute place* v, $\alpha(e_v, T_v, \Omega_v) = 1$,

(2) *on a l'égalité*

$$\frac{p(e, g, T, \Omega)\overline{p(e, g, T, \Omega)}}{(e, e)} = \frac{\zeta(2) L(\Pi \otimes \Omega^{-1}, 1/2)}{2 L_2(\pi, 1)}$$
$$\times \left[\prod_{v \notin S} \alpha(e_v, T_v, \Omega_v)\right]$$
$$\times \left[\prod_{v \in S} \alpha(e_v, g_v, T_v, \Omega_v)\right].$$

DÉMONSTRATION: Soit σ l'isomorphisme antilinéaire de E' défini par $\sigma(e')=\overline{e'}$ pour tout $e'\in E'$. Il existe pour toute place v un isomorphisme antilinéaire σ_v de E'_v tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_v E'_v \arrow[r, "\bigotimes_v \sigma_v"] \arrow[d, "i'"'] & \bigotimes_v E'_v \arrow[d, "i'"] \\ E' \arrow[r, "\sigma"] & E' \end{tikzcd}$$

Soit v une place de F. D'après (II.7, (b)), on peut définir un produit scalaire invariant b sur E'_v par la formule

$$b(e_1,e_2)=\langle e_1,\sigma_v(e_2)\rangle$$

pour tous e_1, $e_2\in E'_v$. On utilise ce produit dans la définition de α. Soient $f''_v\in S_{\psi,v}$ telle que $j_v(f''_v)=e_v\otimes\sigma_v(e_v)$, $f_v=f''_v$ si v est finie, $f_v=r''(g_v,g_v)f''_v$ si v est archimédienne. Il résulte des définitions (II.3), (II.5), de l'interprétation (II.7, (b)), et du lemme 7 qu'on a l'égalité

$$P^0(f_v,\Omega_v,1/2)B^0(f_v,1)^{-1}=\begin{cases}\alpha(e_v,T_v,\Omega_v), & \text{si } v \text{ est finie},\\ \alpha(e_v,g_v,T_v,\Omega_v), & \text{si } v\in S.\end{cases}$$

L'assertion (1) résulte des lemmes 2, 3, 5, (ii). Posons $f=\bigotimes_v f_v$. D'après (II.7, (a)), $B(f)=(\pi'(g)e,\pi'(g)e)$ (rappelons que cette expression est bien définie, bien que $\pi'(g)e$ ne le soit pas). Par invariance du produit scalaire, $B(f)=(e,e)$. Enfin, comme $\tilde\Omega=\Omega^{-1}=\overline{\Omega}$, on a d'après (II.7, (c))

$$P(f,\Omega)=p(e,g,T,\Omega)\overline{p(e,g,T,\Omega)}.$$

Il suffit d'effectuer le quotient des égalités des propositions 4 et 5 pour obtenir la formule de l'énoncé. □

IV. Valeurs de fonctions L

On suppose désormais les mesures définies à l'aide des caractères standards.

1. Modèles locaux quand le caractère central est trivial

Soient F un corps local de caractéristique nulle, G, $\mathcal{H}$, (π,E) comme au (II.1). On suppose π unitaire, de caractère central trivial. On fixe un produit scalaire hermitien invariant b sur E. Si $G=\mathrm{GL}_2(F)$, on pourra supposer que E est le modèle de Kirillov de π relatif à un caractère non ramifié si F est non archimédien, resp. standard si F est archimédien, et que b est défini par

$$b(e_1, e_2)=\int_{F^\times} e_1(x)\overline{e_2(x)}\mathrm{d}x$$

pour tous $e_1, e_2 \in E$.

Posons $\epsilon(G)=1$ si $G=\mathrm{GL}_2(F)$, $\epsilon(G)=-1$ si G n'est pas déployé. Pour tout caractère ψ de F, continu, unitaire, non trivial, on sait définir un facteur $\epsilon(\pi, s, \psi)$. Sa valeur en $s=1/2$ est indépendante de ψ. On la note $\epsilon(\pi, 1/2)$. Soient T un sous-tore maximal de G, F_T l'extension quadratique de F et χ_T le caractère quadratique de $F^\times$ associés à T.

PROPOSITION 8: *L'espace $U(\pi, T, 1)$ existe si et seulement si*

$$\epsilon(\pi\otimes\chi_T, 1/2)=\epsilon(G)\chi_T(-1)\epsilon(\pi, 1/2),$$

Cf. [W2] th. 2, [Tu]. □

Si χ est un caractère quadratique de $F^\times$, on pose

$$\left(\frac{\chi}{\pi}\right)=\epsilon(\pi\otimes\chi, 1/2)\epsilon(\pi, 1/2)\chi(-1).$$

C'est un élément de $\{\pm 1\}$.

Pour $e\in E$, $g\in G$, posons

$$\beta(e, g, T)=\int_{Z\backslash T} b(\pi(tg)e, \pi(g)e)\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale converge. Si de plus $e\neq 0$, on pose

$$\alpha(e, g, T)=\zeta(2)^{-1}L(\pi, 1/2)^{-1}L(\pi\otimes\chi_T, 1/2)^{-1}L(\chi_T, 1)$$
$$\times L_2(\pi, 1)b(e, e)^{-1}\beta(e, g, T).$$

Les fonctions ζ et L sont bien sûr les fonctions locales. Si G n'est pas déployé, $L(\pi, s)=L(\mathrm{JL}(\pi), s)$, $L_2(\pi, s)=L_2(\mathrm{JL}(\pi), s)$ par définition. Si $g=1$, on l'omet de la notation.

Dans les paragraphes suivants, on fixe un sous-corps L de $\mathbb{C}$. On définit alors dans $\mathbb{C}^\times$ deux relations d'équivalence: pour $a, b\in\mathbb{C}^\times$, $a\sim_1 b$, resp. $a\sim_2 b$, si et seulement si il existe $q\in L^\times$ tel que $a=bq$, resp. $a=bq^2$.

2. *Cas non archimédien*

On suppose de plus F non archimédien. On définit le corps de rationalité $\mathbb{Q}(\pi)$ ([D] p. 82, [W3] §I.1). Il est réel. Soit L un souscorps de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{Q}(\pi) \subset L \subset \mathbb{R}$. Il existe un sous-$L$-espace E^0 de E tel que

(i) $\mathrm{E} = \mathrm{E}^0 \underset{L}{\otimes} \mathbb{C}$,

(ii) pour tout $g \in G$, E^0 est stable par $\pi(g)$.

L'espace E^0 est unique à homothétie près ([D], p. 82, [W3] lemme I.2.1).

LEMME 11: *Il existe E^0 comme ci-dessus tel que $b(e_1, e_2) \in L$ pour tous e_1, $e_2 \in E^0$.*

C'est un exercise facile. □

Fixons E^0 vérifiant ces diverses conditions, posons

$$E^{*0} = \{\ell \in E^*; \forall e \in E^0, \ell(e) \in L\}.$$

Soit T un sous-tore maximal de G, notons $E^T = E(T, 1)$, $E^{*T} = E^*(T, 1)$ (cf.III.1).

LEMME 12: *On a les égalités*

$$\dim_{\mathbb{C}} E^{*T} = \dim_L (E^{*T} \cap E^{*0}),$$

$$\dim_{\mathbb{C}} E^T = \dim_L (E^T \cap E^0).$$

La seconde résulte du lemme I.1 de [W3], la première d'une démonstration analogue à celle de ce lemme. □

Soient D le discriminant de F, i.e. $D = [\mathcal{O} : \delta]$, où δ est l'idéal différente de $\mathcal{O}$, et D_T le discriminant de F_T. Si T est déployé, $D_T = D^2$.

LEMME 13:

(i) *Soient T un sous-tore maximal de G, $e \in E - \{0\}$. Il existe $g \in G$ tel que $\beta(\pi(g)e, T) \neq 0$ si et seulement si $E^{*T} \neq \{0\}$.*

(ii) *Soient T un sous-tore maximal de G, $e \in E^0 - \{0\}$, tels que $\alpha(e, T) \neq 0$. Alors $\alpha(e, T) \sim_1 D^{1/2} D_T^{-1/2}$.*

(iii) *Soient T_1, T_2 deux sous-tores maximaux de G, conjugués, e_1, $e_2 \in E^0 - \{0\}$. Supposons $\beta(e_i, T_i) \neq 0$ pour $i = 1, 2$. Alors $\beta(e_1, T_1) \sim_2 \beta(e_2, T_2)$.*

DÉMONSTRATION: Soit T un sous-tore maximal de G. Pour $e_2 \in E$, considérons la forme linéaire sur E définie par

$$\ell_{e_2}(e_1) = \int_{Z \backslash T} b(\pi(t)e_1, e_2) \mathrm{d}t$$

pour tout $e_1 \in E$. Alors $\ell_{e_2} \in E^{*T}$. Comme au lemme 10, on voit que $E^{*T} \neq \{0\}$ si et seulement si il existe e_2 tel que $\ell_{e_2} \neq 0$. On en déduit la condition nécessaire du (i). Supposons $E^{*T} \neq \{0\}$. Fixons $\ell \in (E^{*T} \cap E^{*0})$, $\ell \neq 0$ (lemme 12). Pour tout $e_2 \in E$, il existe $c(e_2) \in \mathbb{C}$ tel que $\ell_{e_2} = c(e_2)\ell$. Mais $\ell_{e_2}(e_1) = \overline{\ell_{e_1}(e_2)}$ pour tous e_1, $e_2 \in E$. Alors il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que pour tout $e_2 \in E$, $c(e_2) = c\overline{\ell(e_2)}$, d'où

$$\beta(e, T) = c\ell(e)\overline{\ell(e)}$$

pour tout $e \in E$. L'irréductibilité de π implique la condition suffisante de (i). Si $e \in E^0$, on a $\ell(e) \in L$ et $\ell(e) = \overline{\ell(e)}$. On en déduit (iii) si $T_1 = T_2$. Pour $e \in E$, $g \in G$, on a $\beta(e, T) = \beta(\pi(g)e, gTg^{-1})$, d'où le cas général de (iii). D'après (iii) et le lemme 11, il suffit de démontrer (ii) pour un élément particulier e. Si T n'est pas déployé, on prend $e \in E^T \cap E^0$, $e \neq 0$. Alors $b(e, e)^{-1}\beta(e, T) = \mathrm{mes}(Z\backslash T)$. D'après le choix de nos mesures et [T] p. 319, $\mathrm{mes}(Z\backslash T) \sim_1 D^{1/2}D_T^{-1/2}$. Si T est déployé, supposons E et b comme au (IV.1), soit e la fonction caractéristique de $\mathcal{O}^\times$. On vérifie qu'on peut supposer $e \in E^0$. Alors $b(e, e) = \mathrm{mes}(\mathcal{O}^\times)$, $\beta(e, T) = \mathrm{mes}(\mathcal{O}^\times)^2$, d'où encore $b(e, e)^{-1}\beta(e, T) \sim_1 D^{1/2}D_T^{-1/2}$. On vérifie que les facteurs ζ et L appartiennent à $\mathbb{Q}(\pi)^\times$, d'où l'assertion (ii). □

3. *Cas non archimédien "général"*

On suppose de plus $G = \mathrm{GL}_2(F)$ et π non ramifiée.

LEMME 14: *Soient e un nouveau vecteur de π, T un sous-tore maximal de G, $g \in G$. Si $\alpha(\pi(g)e, T) \neq 0$, alors $\alpha(\pi(g)e, T) \sim_2 D^{1/2}D_T^{-1/2}$.*

Remarquons que e est proportionnel à un élément de E^0.

DÉMONSTRATION: On suppose E et b comme au (IV.1). Soit μ un caractère non ramifié de $F^\times$ tel que $\pi \sim \pi(\mu, \mu^{-1})$. On peut supposer e défini par

$$e(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu(x\varpi) - \mu^{-1}(x\varpi)}{\mu(\varpi) - \mu^{-1}(\varpi)}|x|^{1/2}, & \text{si} \quad v(x) \geqslant 0, \\ 0, \quad \text{si} \quad v(x) < 0. \end{cases}$$

Comme π est unitaire, on a $\mu\bar{\mu} = 1$ ou $\mu = \bar{\mu}$, et e est à valeurs réelles. On calcule

$$\begin{aligned} b(e, e) &= D^{-1/2}(1 + |\varpi|)(1 - |\varpi|)^{-1}(1 - \mu^2(\varpi)|\varpi|)^{-1} \\ &\quad \times (1 - \mu^{-2}(\varpi)|\varpi|)^{-1}, \\ &= D^{-1/2}\zeta(1)\zeta(2)^{-1}L_2(\pi, 1). \end{aligned}$$

D'après le lemme 13, (iii), on peut supposer $g=1$, et remplacer T par un de ses conjugués.

(i) Si T est déployé, on peut supposer T diagonal. Alors

$$\begin{aligned}\beta(e,T) &= \int_{F^{\times 2}} e(xt)e(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\ &= \left[\int_{F^\times} e(x)\mathrm{d}x\right]^2,\\ &= D^{-1}L(\pi,1/2)^2.\end{aligned}$$

Ici $D_T=D^2$, $L(\chi_T,1)=\zeta(1)$, $L(\pi\otimes\chi_T,1/2)=L(\pi,1/2)$, on obtient la formule cherchée.

(ii) Supposons T non déployé, F_T non ramifiée sur F. On peut supposer $T\subset Z\cdot \mathrm{GL}_2(\mathcal{o})$, donc e invariant par T. Alors

$$\beta(e,T)=\mathrm{mes}(Z\backslash T)b(e,e).$$

Ici $\mathrm{mes}(Z\backslash T)=D^{1/2}D_T^{-1/2}$, $L(\pi,1/2)L(\pi\otimes\chi_T,1/2)=L_2(\pi,1)$ $\zeta(1)^{-1}$, $L(\chi_T,1)=\zeta(2)\zeta(1)^{-1}$, d'où la formule cherchée.

(iii) Supposons T non déployé et F_T ramifiée sur F. Notons $\mathcal{o}_T$ l'anneau des entiers de F_T, ϖ_T une uniformisante, identifions T et $F_T^\times$. On peut supposer que $\mathcal{o}_T^\times\subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{o})$ et qu'il existe $k\in \mathrm{GL}_2(\mathcal{o})$ tel que

$$\varpi_T=\begin{pmatrix}\varpi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k.$$

On calcule alors

$$\beta(e,T)=\mathrm{mes}(\mathcal{o}^\times\backslash\mathcal{o}_T^\times)[b(e,e)+b(\pi(\varpi_T)e,e)],$$

$$\begin{aligned}b(\pi(\varpi_T)e,e) &= b\left(\pi\left(\begin{pmatrix}\varpi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)e,e\right),\\ &= \int_{F^\times} e(x\varpi)e(x)\mathrm{d}x,\\ &= D^{-1/2}|\varpi|^{1/2}[\mu(\varpi)+\mu^{-1}(\varpi)](1-|\varpi|)^{-1}\\ &\quad\times(1-\mu^2(\varpi)|\varpi|)^{-1}(1-\mu^{-2}(\varpi)|\varpi|)^{-1},\end{aligned}$$

d'où

$$b(e,e)+b(\pi(\varpi_T)e,e)=D^{-1/2}\zeta(1)L(\pi,1/2),$$

et

$$\beta(e, T) = D_T^{-1/2}\zeta(1)L(\pi, 1/2).$$

Ici $L(\chi_T, 1) = L(\pi \otimes \chi_T, 1) = 1$, d'où encore la formule cherchée. □

4. Définition des termes locaux dans le cas non archimédien

Soient donc F un corps local non archimédien, de caractéristique nulle, (π, E) une représentation admisible irréductible de $\mathrm{GL}_2(F)$. On suppose vérifiées les hypothèses de (IV.1), on introduit des termes comme en (IV.2).

(a) Soit χ un caractère quadratique de $F^\times$ tel que $\left(\frac{\chi}{\pi}\right) = 1$. On définit un terme $\alpha(\pi, \chi) \in \mathbb{C}^\times$, à équivalence $\sim_2$ près, de la façon suivante. Soient e un nouveau vecteur de π, T un sous-tore maximal de $\mathrm{GL}_2(F)$ tel que $\chi_T = \chi$. On peut supposer $e \in E^0$, $\alpha(e, T) \neq 0$ (proposition 8 et lemme 13, (i)). On pose

$$\alpha(\pi, \chi) = D_T^{-1/2}D^{1/2}\alpha(e, T)^{-1}.$$

D'après le lemme 13, (iii), ce terme est bien définie à équivalence $\sim_2$ près. On a $\alpha(\pi, \chi) \in L^\times$ (lemme 13, (ii)) et $\alpha(\pi, \chi) \sim_2 1$ si π n'est pas ramifiée (lemme 14).

(b) Soient $\tilde{\chi}$, χ deux caractères quadratiques de $F^\times$ tels que $\left(\frac{\tilde{\chi}}{\pi}\right) = \left(\frac{\chi}{\pi}\right) = -1$. On définit un terme $\alpha(\pi, \tilde{\chi}, \chi) \in \mathbb{C}^\times$, à équivalence $\sim_2$ près. Soient G le groupe de quaternions non déployé sur F, (π', E') la représentation admissible irréductible de G telle que $\mathrm{JL}(\pi') = \pi$. Cette représentation existe d'après le lemme 8, (iii), et la proposition 8. On effectue les constructions de (IV.1, 2) pour la représentation π'. Soient $\tilde{T}$, T deux sous-tores maximaux de G tels que $\chi_{\tilde{T}} = \tilde{\chi}$, $\chi_T = \chi$, $e \in E'^{\tilde{T}} - \{0\}$ (lemme 8 et proposition 8). On peut supposer $e \in E'^0$, $\alpha(e, T) \neq 0$. On pose

$$\alpha(\pi, \tilde{\chi}, \chi) = D_T^{-1/2}D^{1/2}\alpha(e, T)^{-1}.$$

Ce terme est bien défini à équivalence $\sim_2$ près, et $\alpha(\pi, \tilde{\chi}, \chi) \in L^\times$.

(c) Soient χ_1, χ_2 deux caractères quadratiques de $F^\times$ tels que $(\chi_1/\pi) = (\chi_2/\pi)$. On définit un terme $p(\pi, \chi_1, \chi_2) \in \mathbb{C}^\times$, à équivalence $\sim_2$ près. Supposons $(\chi_1/\pi) = (\chi_2/\pi) = 1$. Soient T_1, T_2 deux sous-tores maximaux de $\mathrm{GL}_2(F)$ tels que $\chi_{T_1} = \chi_1$, $\chi_{T_2} = \chi_2$, e_1, e_2 des éléments de E^0 tels que $\beta(e_1, T_1) \neq 0$, $\beta(e_2, T_2) \neq 0$ (proposition 8, lemme 13, (i)).

Posons

$$p(\pi, \chi_1, \chi_2) = D_{T_1}^{-1/2} D_{T_2}^{1/2} L(\chi_2, 1) L(\chi_1, 1)^{-1} L(\pi \otimes \chi_1, 1/2)$$

$$\times L(\pi \otimes \chi_2, 1/2)^{-1} \beta(e_2, T_2) \beta(e_1, T_1)^{-1}.$$

Ce terme est bien défini à équivalence $\sim_2$ près, et appartient à $L^\times$. On a d'ailleurs

$$p(\pi, \chi_1, \chi_2) = \alpha(\pi, \chi_1)\alpha(\pi, \chi_2)^{-1}.$$

Si maintenant $(\chi_1/\pi) = (\chi_2/\pi) = -1$, on introduit G, (π', E') comme au (b). On définit $p(\pi, \chi_1, \chi_2)$ comme ci-dessus, en remplaçant $\mathrm{GL}_2(F)$ par G et E par E'. Dans ce cas si $\tilde{\chi}$ est un troisième caractère quadratique de $F^\times$ tel que $(\tilde{\chi}/\pi) = -1$, on a

$$p(\pi, \chi_1, \chi_2) = \alpha(\pi, \tilde{\chi}, \chi_1)\alpha(\pi, \tilde{\chi}, \chi_2)^{-1}.$$

Remarque: Dans le cas (c) supposons pour simplifier $\chi_1 \neq 1$, $\chi_2 \neq 1$. On peut supposer $e_1 \in E^0 \cap E^{T_1}$, $e_2 \in E^0 \cap E^{T_2}$ (ou $e_1 \in (E')^0 \cap (E')^{T_1}$, etc ...). A des termes élémentaires près (fonctions L, mesures ...), $p(\pi, \chi_1, \chi_2)$ est égal au rapport

$$b(e_2, e_2) b(e_1, e_1)^{-1}.$$

Je ne sais pas calculer ce rapport, à équivalence $\sim_2$ près, en toute généralité.

5. Représentations aux places archimédiennes

On considère un groupe G égal soit à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, soit à $\mathbb{H}^\times$, soit à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, où $\mathbb{H}$ est l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{R}$. On fixe un sousgroupe compact maximal K égal soit à $O_2(\mathbb{R})$, soit à $\mathbb{H}_1^\times$, soit à $U_2(\mathbb{C})$, où $\mathbb{H}_1^\times = \{g \in \mathbb{H}^\times;\ g\bar{g} = 1\}$, et un sous-tore maximal $\tilde{T}$ de G égal au tore diagonal si $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ou $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Soit h un entier pair $\geqslant 2$. On définit une représentation $(\pi[h], E[h])$ de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}$ de G

- si $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, resp. $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, c'est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\mathrm{B}(\mu, \mu^{-1})$, où μ est le caractère de $\mathbb{R}^\times$, resp. $\mathbb{C}^\times$, défini par $\mu(x) = |x|^{(\mathrm{h}-1)/2}$,
- si $G = \mathbb{H}^\times$, c'est l'unique représentation irréductible de dimension $h - 1$, de caractère central trivial.

Cette représentation est admissible, irréductible, unitaire, de caractère central trivial. A homothétie près, il existe un unique vecteur $\tilde{e} \in E[\mathrm{h}]$ non nul tel que

(i) $\tilde{e}$ appartient au K-type minimal de $\pi[h]$,

(ii) $\tilde{e}$ est invariant par $K \cap \tilde{T}$.

On fixe un tel vecteur. On introduit des termes comme au (IV.1), pour $\pi = \pi[\mathrm{h}]$, et un sous-corps L de $\mathbb{C}$ quelconque.

Soit T un sous-tore maximal de G. Si $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on suppose T déployé. Alors T est conjugé à $\tilde{T}$. Soit $g_T \in G$ tel oue $g_T^{-1} T g_T = \tilde{T}$. Posons

$$\alpha(\pi, T) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \\ \pi^{-1}(h-1)!, & \text{si} \quad G = \mathbb{H}^\times, \\ 2\pi^{-2}(2h-1)!, & \text{si} \quad G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \end{cases}$$

(à droite $\pi = 3, 14 \ldots$).

LEMME 15: *Sous ces hypothèses,* $\alpha(\tilde{e}, g_T, T) \sim {}_2\alpha(\pi, T)$.

DÉMONSTRATION: On se ramène au cas $T = \tilde{T}$, $g_T = 1$.

(a) Supposons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On peut supposer $\tilde{e}$ défini par

$$\tilde{e}(x) = |x|^{h/2} \mathrm{e}^{-2\pi|x|}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^\times$. Comme $\zeta(1) = 1$, notre mesure sur $\mathbb{R}^\times$ est $|x|^{-1}\mathrm{d}x$, où ici dx est la mesure de Lebesgue. On calcule

$$b(\tilde{e}, \tilde{e}) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{e}(x)^2 |x|^{-1} \mathrm{d}x = 2(4\pi)^{-h}\Gamma(h),$$

$$\beta(\tilde{e}, 1, \tilde{T}) = \left[\int_{\mathbb{R}} \tilde{e}(x)|x|^{-1}\mathrm{d}x\right]^2 = 4(2\pi)^{-h}\Gamma(h/2)^2.$$

D'autre part

$$\zeta(2) = \pi^{-1},\ L(\pi, 1/2) = 2(2\pi)^{-h/2}\Gamma(h/2),$$

$$\chi_{\tilde{T}} = 1,\ L(\chi_{\tilde{T}}, 1) = 1,$$

$$L_2(\pi, 1) = 2^{1-h}\pi^{-(h+1)}\Gamma(h)(\text{[GJ] §6.5.11}).$$

D'où le résultat.

(b) Supposons $\mathrm{G} = \mathbb{H}^\times$. Alors $Z\backslash\tilde{T}$ est compact, et $\tilde{e}$ est invariant par $\tilde{T}$. Donc $\beta(\tilde{e}, 1, \tilde{T}) = \mathrm{mes}(Z\backslash\tilde{T}) b(\tilde{e}, \tilde{e})$. Ici

$$\mathrm{mes}(Z\backslash\tilde{T}) = 2,\ \zeta(2) = \pi^{-1},\ L(\pi, 1/2) = L(\pi \otimes \chi_{\tilde{T}}, 1/2)$$
$$= 2(2\pi)^{-h/2}\Gamma(h/2),$$

$$L(\chi_{\tilde{T}}, 1) = \pi^{-1},\ L_2(\pi, 1) = 2^{1-h}\pi^{-(h+1)}\Gamma(h).$$

D'où le résultat.

(c) Supposons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. La mesure sur $\mathbb{C}^\times$ est $\mathrm{d}z = 2\pi^{-1}(x^2 + y^2)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en un point $z = x + \mathrm{i}y$, où $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont les mesures de Lebesgue. On peut supposer que $\tilde{e}$ vérifie les conditions suivantes

(i) $\tilde{e}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \tilde{e}(r)$, pour tous $r \in \mathbb{R}^\times$, $\theta \in \mathbb{R}$,

(ii) $\tilde{e}(z) = \overline{\tilde{e}(z)}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$,

(iii) pour tout $s \in \mathbb{C}$, avec Re s assez grand,

$$\int_{\mathbb{C}^\times} \tilde{e}(z)|z|^{s-1/2}\mathrm{d}z = \pi^{-1}G\left(s + \frac{h-1}{2}\right)^2,$$

où $G(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$. Dans ce cas, d'après [J] p. 101, on a $b(\tilde{e}, \tilde{e}) = 2G(h)^4 G(2h)^{-1}$.

On a aussi

$$\beta(\tilde{e}, 1, \tilde{T}) = \pi^{-2}G(h/2)^4.$$

D'autre part

$$\zeta(2) = 2^{-1}\pi^{-2},\ L(\pi, 1/2) = G(h/2)^2,\ \chi_{\tilde{T}} = 1,\ L(\chi_{\tilde{T}}, 1) = \pi^{-1},$$

$$L_2(\pi, 1) = \pi^{-1}G(h)^2.$$

D'où le résultat. □

6. *Définition des termes locaux dans le cas archimédien*

Soient toujours h un entier pair $\geqslant 2$, L un sous-corps de $\mathbb{C}$. On définit des termes à équivalence $\sim_2$ près.

(a) Soient π la représentation $\pi[h]$ de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, χ un caractère quadratique de $\mathbb{R}^\times$. On pose

$$\alpha(\pi, \chi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi = 1, \\ \pi(h-1)!, & \text{si } \chi = \mathrm{sgn}. \end{cases}$$

(b) Soient π la représentation $\pi[h]$ de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, χ le caractère trivial de $\mathbb{C}^\times$. On pose

$$\alpha(\pi, \chi) = 2\pi^2(2h-1)!.$$

7. *Le théorème principal*

Soient F un corps de nombres, et pour toute place $v \in S$, h_v un entier pair $\geqslant 2$. Soit $(\pi, E) \in A_0(\mathrm{GL}_2)$. On suppose π de caractère central trivial, et pour toute place $v \in S$, $\pi_v \sim \pi[h_v]$ (cf.IV.5). Notons $\Sigma(=\Sigma(\pi))$ l'ensemble des places v de F telles que v est réelle ou v est finie et π_v est spéciale ou cuspidale; $\Sigma^1(=\Sigma^1(\pi))$ l'ensemble des places v finies telles que π_v n'admet pas de vecteur non nul invariant par $K_v^{\ell}(=\mathrm{GL}_2(\mathscr{o}_v))$; $\Sigma^0=\Sigma^0(\pi)=\Sigma^1 \cup S$; $E(=E(\pi))$ l'ensemble des suites $(\epsilon_v)_{v\in\Sigma}$ telles que $\epsilon_v \in \{\pm 1\}$ pour tout $v \in \Sigma$, et $\prod_{v\in\Sigma}\epsilon_v = 1$; $L=\mathbb{Q}(\pi)$ le corps de rationalité de π([W3] §I.8).

Soit $\epsilon=(\epsilon_v)_{v\in\Sigma}\in\mathscr{E}$. Il existe une unique algèbre de quaternions M^{ϵ} définie sur F, telle que M_v^{ϵ} soit déployée, resp. non déployée, aux places v de F telles que $v\notin\Sigma$ ou $v\in\Sigma$ et $\epsilon_v=1$, resp. $v\in\Sigma$ et $\epsilon_v=-1$. Notons G^{ϵ} le groupe de ses éléments inversibles. Fixons un sous-tore T^{ϵ} de G^{ϵ}, défini sur F, tel que si χ^{ϵ} est le caractère quadratique de $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$ associé à T^{ϵ}, $(\chi_v^{\epsilon}/\pi_v)=\epsilon_v$ pour toute place $v\in\Sigma$ (cf.IV.1). Soit A^{ϵ} la sous-algèbre de M^{ϵ} telle que $A^{\epsilon}\cap G^{\epsilon}=T^{\epsilon}$. On fixe une base orthogonale de M_F^{ϵ} formée d'une base de A_F^{ϵ} et d'une base de son orthogonal. On définit pour toute place v de F un sous-groupe compact K_v^{ϵ} de G_v^{ϵ}, maximal si $v\in S$ (cf.II.1), à l'aide de cette base. On vérifie que si $v\in S$, $T_v^{\epsilon}\cap K_v^{\epsilon}$ est le sous-groupe compact maximal de T_v^{ϵ}, et T_v^{ϵ} est déployé si M_v^{ϵ} l'est. En particulier si v est réelle et M_v^{ϵ} déployé, resp. si v est complexe, il existe un isomorphisme $G_v^{\epsilon}\sim\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, resp. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, identifiant T_v^{ϵ} au sous-groupe diagonal et K_v^{ϵ} à $O_2(\mathbb{R})$, resp. $U_2(\mathbb{C})$. On introduit l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}^{\epsilon}$ de G^{ϵ}. Il existe $(\pi^{\epsilon}, E^{\epsilon})\in A_0(G^{\epsilon})$ tel que $\mathrm{JL}(\pi^{\epsilon})=\pi$. Fixons des modèles locaux E_v^{ϵ} et un isomorphisme i^{ϵ}: $\otimes_v E_v^{\epsilon}\to E^{\epsilon}$. Pour $v\in S$, soit $\tilde{e}_v^{\epsilon}\in E_v^{\epsilon}$ un élément vérifiant les conditions (i) et (ii) de (IV.5). Posons

$$\tilde{E}^{\epsilon}=i^{\epsilon}\left(\left(\bigotimes_{v\notin S}E_v^{\epsilon}\right)\otimes\left(\bigotimes_{v\in S}\tilde{e}_v^{\epsilon}\right)\right).$$

Soient T un sous-tore maximal de G^{ϵ} défini sur F, Ω un caractère de $T(F)Z^{\epsilon}(\mathbb{A})\backslash T(\mathbb{A})$, où Z^{ϵ} est le centre de G^{ϵ}, tels que

(F) (i) pour toute place v réelle, si M_v^{ϵ} est déployée, T_v l'est aussi,

(F) (ii)T n'est pas déployé sur F,

(F) (iii) $\Omega|_{Tv}=1$ si $v\in S$, et les valeurs de Ω sont dans $L^{\times}$.

Pour tout place $v\in S$, soit $g_{T,v}\in G_v^{\epsilon}$ tel que $g_{T,v}^{-1}T_v g_{T,v}=T_v^{\epsilon}$. Soit $g=(g_v)\in G^{\epsilon}(\mathbb{A})$ tel que

(F) (iv) pour tout $v\in S$, $g_v=g_{T,v}$.

Si $e\in\tilde{E}^{\epsilon}$, on définit $p(e, g, T, \Omega)$ (cf.II.7, (c)). Soient enfin $\xi\in F^{\times}$ tel que $F(\sqrt{\xi})$ soit l'extension quadratique associée à T,

$$p(T)=\prod_{v\in S}|\xi|_v^{h_v/4}.$$

On note $\tilde{E}^{\epsilon,0}$ le L-espace des $e\in\tilde{E}^{\epsilon}$ tels que pour tout triplet (T, Ω, g) vérifiant (F) (i) à (F) (iv), on ait

$$p(T)^{-1}p(e, g, T, \Omega)\in L.$$

D'autre part pour toute place v finie, fixons un L-espace $E_v^{\epsilon,0}$ comme au (IV.2), contenant le vecteur "marqué" de E_v^ϵ pour presque tout v.

Supposons $\epsilon(\pi, 1/2) = 1$ (cf.IV.1). D'après [W3] th.III.5.1, on peut normaliser i^ϵ de telle sorte que

$$\tilde{E}^{\epsilon,0} = i^\epsilon\left(\left(\bigotimes_{v \notin S} E_v^{\epsilon,0}\right) \otimes \left(\bigotimes_{v \in S} \tilde{e}_v^\epsilon\right)\right).$$

Pour toute place v finie, on fixe un élément non nul $e_v^\epsilon \in E_v^{\epsilon,0}$ tel que
(G) (i) si M_v est déployée, e_v^ϵ est un nouveau vecteur de π_v^ϵ,
(G) (ii) si M_v n'est pas déployée, e_v^ϵ est invariant par T_v^ϵ,
(G) (iii) pour presque toute place v, e_v^ϵ est le vecteur "marqué" de E_v^ϵ.
C'est possible (cf. proposition 8, lemme 12). On pose

$$e^\epsilon = i^\epsilon\left(\left(\bigotimes_{v \notin S} e_v^\epsilon\right) \otimes \left(\bigotimes_{v \in S} \tilde{e}_v^\epsilon\right)\right).$$

Remarque: Ce vecteur e^ϵ est caractérisé, à homothétie près par un élément de $L^\times$ par les conditions d'invariance (G) (i) et (G) (ii), et son appartenance à notre espace de formes "arithmétiques" $\tilde{E}^{\epsilon,0}$.

On pose (cf.III.3)

$$(e^\epsilon, e^\epsilon) = \int_{G^\epsilon(F)Z^\epsilon(\mathbb{A})\backslash G^\epsilon(\mathbb{A})} e^\epsilon(g)\overline{e^\epsilon(g)}\,dg,$$

où la mesure sur $Z^\epsilon(\mathbb{A})\backslash G^\epsilon(\mathbb{A})$ est de Tamagawa.

Soit χ un caractère quadratique de $\mathbb{A}^\times/F^\times$. Posons $(\chi/\pi) = ((\chi_v/\pi_v))_{v \in \Sigma}$, et $\Sigma(\pi, \chi) = \{v \in \Sigma;\ v \notin S \text{ et } (\chi_v/\pi_v) = -1\}$ (cf.IV.1). Soit $\xi \in F^\times$ un élément tel que $F(\sqrt{\xi})$ soit l'extension quadratique de F associée à χ. Notons D, resp. D_χ, la valeur absolue (usuelle) du discriminant de F, resp. $F(\sqrt{\xi})$. Posons

$$p(\chi) = \left(\prod_{v \in S} |\xi|_v^{h_v/2}\right) D_\chi^{1/2}.$$

Ce terme est bien défini à équivalence $\sim_2$ près, ce qui est suffisant pour les énoncés ci-dessous. On a défini pour toute place v des termes $\alpha(\pi_v, \chi_v) \in \mathbb{C}^\times$, ou $\alpha(\pi_v, \chi_v^\epsilon, \chi_v) \in \mathbb{C}^\times$, bien définis eux aussi à équivalence $\sim_2$ près (IV.4, 6). Posons enfin

$$p = \zeta(2)^{-1} D^{-1/2} L_2(\pi, 1),$$

où ζ est la fonction zêta de F.

THÉORÈME 3: *Soient* $\pi \in A_0(\mathrm{GL}_2)$, χ *un caractère quadratique de* $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$. *On suppose* π *de caractère central trivial, et* $\pi_v \sim \pi[h_v]$ *pour toute place* $v \in S$.

(i) *Si* $\epsilon(\pi, 1/2) = -1$, $L(\pi, 1/2) = 0$.

(ii) *Si* $\epsilon(\pi, 1/2) = 1$ *et* $(\chi/\pi) \notin \mathscr{E}(\pi)$, $L(\pi \otimes \chi, 1/2) = 0$.

(iii) *Supposons* $\epsilon(\pi, 1/2) = 1$, $(\chi/\pi) \in \mathscr{E}(\pi)$, *posons* $\epsilon = (\chi/\pi)$. *Il existe* $q \in \mathbb{Q}(\pi)$ *tel qu'on ait l'égalité*

$$L(\pi, 1/2)L(\pi \otimes \chi, 1/2)$$
$$= pp(\chi)(e^{\epsilon}, e^{\epsilon})^{-1}q^2\left[\prod_{v \in \Sigma^0(\pi) - \Sigma(\pi, \chi)} \alpha(\pi_v, \chi_v)\right]$$
$$\times\left[\prod_{v \in \Sigma(\pi, \chi)} \alpha(\pi_v, \chi_v^{\epsilon}, \chi_v)\right].$$

DÉMONSTRATION:

(i) On a l'équation fonctionnelle

$$L(\pi, 1-s) = \epsilon(\pi, s)L(\pi, s),$$

d'où l'assertion.

(ii) Si $v \notin \Sigma$, on a $(\chi_v/\pi_v) = 1$ (lemme 8, (iii), et proposition 8). Alors par construction

$$\prod_{v \in \Sigma}\left(\frac{\chi_v}{\pi_v}\right) = \epsilon(\pi \otimes \chi, 1/2)\epsilon(\pi, 1/2).$$

Les hypothèses impliquent donc $\epsilon(\pi \otimes \chi, 1/2) = -1$, d'où l'assertion comme ci-dessus.

(iii) Pour toute place v de F, l'égalité $(\chi_v/\pi_v) = -1$ implique $\chi_v \neq 1$. On peut donc choisir un sous-tore maximal T de G^{ϵ} dont χ soit le caractère associé. On voit de même que T vérifie (F)(i). On introduit des éléments $g_{T,v}$ pour toute place $v \in S$. Pour toute place v finie, l'espace $(E_v^{\epsilon *})^{T_v}$ est non nul d'après le lemme 9, la proposition 8, et la définition de G^{ϵ}. On peut choisir $h_v \in G_v^{\epsilon}$ tel que $\alpha(\pi_v^{\epsilon}(h_v)e_v^{\epsilon}, T_v) \neq 0$ (lemme 13, (i)). On peut supposer $h_v = 1$ pour presque toute place v. Soient $e_v = \pi_v^{\epsilon}(h_v)e_v^{\epsilon}$, $e = i^{\epsilon}((\otimes_{v \notin S} e_v) \otimes (\otimes_{v \in S} \tilde{e}_v^{\epsilon}))$, g l'élément de $G(\mathbb{A})$ de composante 1 aux places finies et $g_{T,v}$ en une place $v \in S$. Appliquons la proposition 7 à e, g, T, et $\Omega = 1$. Comme le produit scalaire est invariant par translation, on a

$$(e, e) = (e^{\epsilon}, e^{\epsilon}).$$

Il résulte de nos constructions, des définitions (IV.4, 6) et du lemme 15, que pour toute place v de F, les termes suivants sont non nuls et vérifient

- si $v \in S$, $\alpha(e_v, g_v, T_v) \sim {}_2\alpha(\pi_v, \chi_v)^{-1}$,
- si v est finie et G_v^ϵ non déployé, i.e. si $v \in \Sigma(\pi, \chi)$,

$$\alpha(e_v, T_v) \sim {}_2 D_{\chi_v}^{1/2} D_v^{-1/2} \alpha(\pi_v, \chi_v^\epsilon, \chi_v)^{-1},$$

- si v est finie et G_v^ϵ déployé,

$$\alpha(e_v, T_v) \sim {}_2 D_{\chi_v}^{1/2} D_v^{-1/2} \alpha(\pi_v, \chi_v)^{-1}.$$

Dans ce dernier cas, si en outre $v \notin \Sigma^0(\pi)$, on a $\alpha(\pi_v, \chi_v) \sim {}_2 1$ (lemme 14). On a $e \in \tilde{E}^{\epsilon,0}$. Supposons $\chi \neq 1$. Le triplet $(T, 1, g)$ vérifie les conditions (F)(i) à (F)(iv). Donc il existe $q \in L$ tel que

$$p(e, g, T, 1) = p(T)q.$$

En particulier $p(e, g, T, 1)$ est réel. Enfin

$$L(\Pi, 1/2) = L(\pi, 1/2) L(\pi \otimes \chi, 1/2).$$

On remplace tous les termes par leurs valeurs dans l'égalité de la proposition 7. On obtient l'égalité cherchée. On traitera plus loin (IV.8) le cas $\chi = 1$. □

8. Comparaison de valeurs de fonctions L

On conserve les mêmes hypothèses.

THÉORÈME 4: *Soient $\pi \in A_0(\mathrm{GL}_2)$, χ_1, χ_2 deux caractères quadratiques de $\mathbb{A}^\times/F^\times$. On suppose π de caractère central trivial, et $\pi_v \sim \pi[h_v]$ pour toute place $v \in S$. Supposons les conditions suivantes vérifiées*

(a) $(\chi_1/\pi) = (\chi_2/\pi)$,
(b) $L(\pi \otimes \chi_2, 1/2) \neq 0$.

Alors il existe $q \in \mathbb{Q}(\pi)$ tel qu'on ait l'égalité

$$L(\pi \otimes \chi_1, 1/2) L(\pi \otimes \chi_2, 1/2)^{-1} = q^2 p(\chi_1) p(\chi_2)^{-1} \times \prod_{v \in \Sigma^1(\pi)} p(\pi_v, \chi_{1,v}, \chi_{2,v}).$$

DÉMONSTRATION: (a) Supposons $L(\pi, 1/2) \neq 0$, $\chi_1 \neq 1$, $\chi_2 \neq 1$. On peut appliquer le théorème 3 aux couples (π, χ_1) et (π, χ_2), ce théorème étant déjà démontré pour $\chi \neq 1$. On fait le quotient des égalités obtenues. Le terme ϵ étant le même pour les deux couples, les produits scalaires disparaissent. Les termes locaux aux places archimédiennes étant les mêmes, ils disparaissent. Ceux aux places finies deviennent ceux de l'énoncé (IV.4).

(b) Fixons une place finie v. Si μ est un caractère quadratique de $F_v^\times$, notons D_μ le discriminant de l'extension quadratique de $F_v^\times$ associée à μ (cf.IV.2).

LEMME 16: *Soient μ, μ_1, μ_2 trois caractères quadratiques de $F_v^\times$. Supposons $(\mu_1/\pi_v) = (\mu_2/\pi_v)$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées*

(i) $(\mu\mu_1/\pi_v \otimes \mu) = (\mu\mu_2/\pi_v \otimes \mu)$,

(ii) $D_{\mu_1}^{1/2} D_{\mu_2}^{-1/2} p(\pi_v, \mu_1, \mu_2) \sim {}_2 D_{\mu\mu_1}^{1/2} D_{\mu\mu_2}^{-1/2} p(\pi_v \otimes \mu, \mu\mu_1, \mu\mu_2)$.

DÉMONSTRATION: L'assertion (i) résulte des définitions (IV.1). Pour (ii), l'assertion étant locale, on peut se permettre de modifier F et π. Quitte à effectuer un changement de base quadratique, ce qui n'accroit pas le corps $\mathbb{Q}(\pi)$, on peut supposer

(i) $\epsilon(\pi, 1/2) = 1$.

(ii) ou bien $v \notin \Sigma$, ou bien $v \in \Sigma$ et Σ a au moins 2 éléments.

Rappelons le

THÉORÈME 5: *Soient $\pi \in A_0(\mathrm{GL}_2)$, V un ensemble fini de places de F. Supposons π de caractère central trivial, $\epsilon(\pi, 1/2) = 1$. Alors il existe un caractère quadratique χ de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tel que*

(1) *pour toute place $v \in V$, $\chi_v = 1$,*

(2) *$L(\pi \otimes \chi, 1/2) \neq 0$.*

([*W*2] *théorème* 4). □

Appliquons ce théorème à π et $V = \{v\}$, remplaçons π par la représentation $\pi \otimes \chi$ obtenue. On a alors

(iii) $L(\pi, 1/2) \neq 0$,

Grâce à (ii), il existe un caractère quadratique ν de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tel que

(iv) $\nu_v = \mu$,

(v) $\epsilon(\pi \otimes \nu, 1/2) = 1$.

En utilisant de nouveau le théorème 5, on peut supposer

(vi) $L(\pi \otimes \nu, 1/2) \neq 0$.

Posons $\pi' = \pi \otimes \nu$, fixons une place finie $u \notin \Sigma^0(\pi) \cup \Sigma^0(\pi') \cup \{v\}$. Grâce aux hypothèses $(\mu_1/\pi_v) = (\mu_2/\pi_v)$ et (ii), il existe deux caractères quadratiques ν_1, ν_2 de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tels que

(vii) $\nu_{1,v} = \mu_1$, $\nu_{2,v} = \mu_2$,

(viii) pour toute place $w \in \Sigma^0(\pi) \cup \Sigma^0(\pi')$, $w \neq v$, $\nu_{1,w} = \nu_{2,w}$,

(ix) $\nu_{1,u} \neq 1$, $\nu_{2,u} \neq 1$, $\nu_{1,u} \neq \nu_u$, $\nu_{2,u} \neq \nu_u$,

(x) $\epsilon(\pi \otimes \nu_1, 1/2) = \epsilon(\pi \otimes \nu_2, 1/2) = 1$.

Appliquons le théorème 5 à $\pi \otimes \nu_1$, $V = \Sigma^0(\pi) \cup \Sigma^0(\pi') \cup \{v, u\}$, puis à $\pi \otimes \nu_2$ et le même ensemble V, on voit qu'on peut supposer de plus

(xi) $L(\pi \otimes \nu_1, 1/2) \neq 0$, $L(\pi \otimes \nu_2, 1/2) \neq 0$.

D'aprés (ix), $\nu_1 \neq 1$, $\nu_2 \neq 1$. D'après l'hypothèse de l'énoncé et (vii) et (viii), $(\nu_1/\pi) = (\nu_2/\pi)$. D'après (iii) et (xi), le triplet (π, ν_1, ν_2) vérifie les hypothèses de la partie déjà démontrée (a) du théorème 4. Posons $\nu_1' = \nu\nu_1$, $\nu_2' = \nu\nu_2$. Le triplet (π', ν_1', ν_2') vérifie ces mêmes hypothèses. On a donc les relations

$$L(\pi \otimes \nu_1, 1/2) L(\pi \otimes \nu_2, 1/2)^{-1} \sim {}_2\, p(\nu_1) p(\nu_2)^{-1} \times \prod_{w \in \Sigma^1(\pi)} p(\pi_w, \nu_{1,v}, \nu_{2,w}),$$

$$L(\pi' \otimes \nu_1', 1/2) L(\pi' \otimes \nu_2', 1/2)^{-1} \sim {}_2\, p(\nu_1') p(\nu_2')^{-1} \times \prod_{w \in \Sigma^1(\pi')} p(\pi_w', \nu_{1,w}', \nu_{2,w}').$$

Comme $\pi' \otimes \nu_1' = \pi \otimes \nu_1$, $\pi' \otimes \nu_2' = \pi \otimes \nu_2$, les fonctions L sont les mêmes dans ces deux relations. Soit $w \in \Sigma^1(\pi) \cup \Sigma^1(\pi')$, $w \neq v$. D'après (viii) et les définitions (IV.4),

$$p(\pi_w, \nu_{1,w}, \nu_{2,w}) \sim {}_2 1, \quad p(\pi_w', \nu_{1,w}', \nu_{2,w}') \sim {}_2 1.$$

D'après (iv) et (vii),

$$p(\pi_v, \nu_{1,v}, \nu_{2,v}) = p(\pi_v, \mu_1, \mu_2),$$

$$p(\pi_v', \nu_{1,v}', \nu_{2,v}') = p(\pi_v \otimes \mu, \mu\mu_1, \mu\mu_2).$$

D'où

(xii) $p(\pi_v, \mu_1, \mu_2) p(\pi_v \otimes \mu, \mu\mu_1, \mu\mu_2) \sim {}_2\, p(\nu_1') p(\nu_1)^{-1} p(\nu_2) p(\nu_2')^{-1}$.

On voit que

(xiii) $p(\nu_1') p(\nu_1)^{-1} p(\nu_2) p(\nu_2')^{-1} \sim {}_2 \prod_{w \notin S} [D_{\nu_{1,w}'} D_{\nu_{1,w}}^{-1} D_{\nu_{2,w}} D_{\nu_{2,w}'}^{-1}]^{1/2}$. Soit w une place finie. Si $w \notin \Sigma^0(\pi) \cup \Sigma^0(\pi')$, π_w et π_w' sont non ramifiées donc ν_w ne l'est pas non plus, et

$$D_{\nu_{1,w}} = D_{\nu_{1,w}'}, \quad D_{\nu_{2,w}} = D_{\nu_{2,w}'}.$$

Si $w \in \Sigma^0(\pi) \cup \Sigma^0(\pi')$, $w \neq v$, l'hypothèse (viii) implique

$$D_{\nu_{1,w}} = D_{\nu_{2,w}}, \quad D_{\nu_{1,w}'} = D_{\nu_{2,w}'}.$$

Enfin, pour $w = v$, d'après (iv) et (vii),

$$D_{\nu_{1,w}} = D_{\mu_1}, \quad D_{\nu_{1,w}'} = D_{\mu\mu_1}, \quad D_{\nu_{2,w}} = D_{\mu_2}, \quad D_{\nu_{2,w}'} = D_{\mu\mu_2}.$$

Alors (xii) et (xiii) impliquent la relation de l'énoncé. □

(c) Achevons la démonstration du théorème 4. En utilisant comme cidessus le théorème 5, on peut choisir un caractère quadratique ν de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tel que $L(\pi\otimes\nu, 1/2)\neq 0$, $\nu\chi_1\neq 1$, $\nu\chi_2\neq 1$. Posons $\pi'=\pi\otimes\nu$, $\chi_1'=\nu\chi_1$, $\chi_2'=\nu\chi_2$. On peut appliquer la partie déjà démontrée (a) du théorème 4 au triplet (π', χ_1', χ_2'). Il existe donc $q\in\mathbb{Q}(\pi)$ tel que

$$L(\pi'\otimes\chi_1', 1/2)L(\pi'\otimes\chi_2', 1/2)^{-1}=q^2p(\chi_1')p(\chi_2')^{-1} \times \prod_{v\in\Sigma^1(\pi')} p(\pi_v', \chi_{1,v}', \chi_{2,v}').$$

Comme $\pi'\otimes\chi_1'=\pi\otimes\chi_1$, $\pi'\otimes\chi_2'=\pi\otimes\chi_2$, le membre de gauche est celui de l'énoncé. En utilisant le lemme 16 pour toute place v finie, on voit par un calcul facile que le membre de droite est aussi celui de l'énoncé. □

COROLLAIRE: *Soient $\pi\in A_0(\mathrm{GL}_2)$, χ_1, χ_2 deux caractères quadratiques de $\mathbb{A}^\times/F^\times$. On suppose π de caractère central trivial et $\pi_v\sim\pi[h_v]$ pour toute place $v\in S$. Supposons en outre*
(a) *pour toute place $v\in\Sigma^0(\pi)$, $\chi_{1,v}=\chi_{2,v}$,*
(b) $L(\pi\otimes\chi_2, 1/2)\neq 0$.
Alors il existe $q\in\mathbb{Q}(\pi)$ tel qu'on ait l'égalité

$$L(\pi\otimes\chi_1, 1/2)L(\pi\otimes\chi_2, 1/2)^{-1}=q^2p(\chi_1)p(\chi_2)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION: D'après (a), $(\chi_1/\pi)=(\chi_2/\pi)$. On applique le théorème 4. Si $v\in\Sigma^1(\pi)$, $p(\pi_v, \chi_{1,v}, \chi_{2,v})=1$ par définition et d'après (a). □

Ce corollaire est essentiellement le résultat de Vignéras ([V]).

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (cas $\chi=1$): Supposons $\epsilon(\pi, 1/2)=1$, et même $L(\pi, 1/2)\neq 0$, sinon l'assertion est triviale, posons $\epsilon=(1/\pi)$. En utilisant le théorème 5, on peut choisir un caractère μ tel que $\mu\neq 1$, $\mu_v=1$ pour toute place $v\in\Sigma^0(\pi)$, $L(\pi\otimes\mu, 1/2)\neq 0$. On a encore $(\mu/\pi)=\epsilon$. D'après la partie déjà démontrée du théorème 3,

$$L(\pi, 1/2)L(\pi\otimes\mu, 1/2)\sim{}_2\,pp(\mu)(e^\epsilon, e^\epsilon)^{-1}\prod_{v\in\Sigma^0(\pi)}\alpha(\pi_v, 1).$$

On applique le corollaire ci-dessus au triplet $(\pi, 1, \mu)$, d'où

$$L(\pi, 1/2)L(\pi\otimes\mu, 1/2)^{-1}\sim{}_2\,p(1)p(\mu)^{-1}.$$

On fait le produit de ces deux formules, on obtient la formule cherchée. □

9. Comparaison de deux termes locaux

Soient ici F un corps local non archimédien de caractéristique 0, (π, E) une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(F)$, unitaire, de caractère central trivial, de dimension infinie, χ un caractère quadratique de $F^\times$, L un sous-corps de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{Q}(\pi) \subset L \subset \mathbb{R}$. Posons $\pi' = \pi \otimes \chi$, réalisons π' dans un espace E'. Fixons un produit scalaire invariant b sur E, un sous-L-espace E^0 de E vérifiant les conditions du (IV.2), $\tilde{e} \in E$ un nouveau vecteur. On suppose $\tilde{e} \in E^0$, ce qui est légitime. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$K_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o});\ v(c) \geqslant n \right\}.$$

Soit n' le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que l'espace des invariants E'^{K_n} soit non nul. A une constante près, il existe un unique vecteur non nul $e'' \in E$ tel que pour tout $k \in K_{n'}$, $\pi(k)e'' = \chi \circ \det(k)e''$. D'après [W3], lemme 1, on peut supposer $e'' \in E^0$. Posons alors

$$\beta(\pi, \chi) = \frac{b(\tilde{e}, \tilde{e})}{b(e'', e'')} \frac{\alpha(\pi \otimes \chi, 1)}{\alpha(\pi, 1)}.$$

A équivalence $\sim_2$ près, ce terme ne dépend pas des choix de b, E^0, $\tilde{e}$, e''. Il ne dépend pas non plus de la mesure de Haar utilisée pour définir $\alpha(\pi, 1)$ et $\alpha(\pi \otimes \chi, 1)$.

LEMME 17: *Sous ces hypothèses, on a la relation*

$$\beta(\pi, \chi) \sim_2 D_\chi.$$

Cf. (IV.8, (b)) pour la définition de D_χ.

DÉMONSTRATION: (a) Soit ψ un caractère non ramifié de F, non trivial. On munit ici F et $F^\times$ des mesures déduites de ψ, i.e. on a $\mathrm{mes}(\mathfrak{o}) = 1$, $\mathrm{mes}(\mathfrak{o}^\times) = 1$. On suppose que E est le modèle de Kirillov de π relatif à ψ, que b est la forme définie au (IV.1). Soient $\mathcal{J}$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$, $\mathcal{J}(L)$ le sous-groupe des $\sigma \in \mathcal{J}$ tels que $\sigma(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in L$. Pour $\sigma \in \mathcal{J}$, il existe un unique $u_\sigma \in \mathfrak{o}^\times$ tel que pour tout $x \in F$,

$$\sigma \circ \psi(x) = \psi(u_\sigma x).$$

Il résulte de [W3] lemme I.2.4, ou de [H], qu'on peut choisir pour E^0 le L-espace des $e \in E$ tels que pour tous $\sigma \in \mathcal{J}(L)$, $x \in F^\times$,

$$\sigma \circ \psi(x) = \psi(u_\sigma x). \tag{H}$$

On fixe E^0 ainsi. Choisissons comme ci-dessus un espace E', une forme b', un sous-L-espace E'^0, relatifs à la représentation π'. Rémarquons que $\mathbb{Q}(\pi') = \mathbb{Q}(\pi)$. Pour $e' \in E'$, notons bien sûr $\chi e'$ la fonction sur $F^\times$

définie par $(\chi e')(x)=\chi(x)e'(x)$. On sait que $E=\{\chi e';\ e'\in E'\}$. Posons $E_0=\{\chi e';\ e'\in E'^0\}$. On montre facilement que E_0 vérifie les mêmes conditions que E^0. Ces espaces sont donc homothétiques, i.e. il existe $c\in\mathbb{C}^\times$, bien défini à équivalence $\sim_1$ près, tel que pour tout $e'\in E'^0$, $c\chi e'\in E^0$. soit e' la fonction caractérisique de $\mathcal{o}^\times$. Elle vérifie (H), donc $e'\in E'^0$. Alors $c\chi e'$ vérifie aussi (H), d'où

$$\sigma(c)=\chi(u_\sigma)c. \tag{I}$$

pour tout $\sigma\in\mathcal{J}(L)$, ce qui détermine c. Posons $\mathcal{j}(\chi)=1$ si χ n'est pas ramifié. Si χ est ramifié, soient $d(\chi)$ son indice de ramification et

$$\mathcal{j}(\chi)=\int_{\mathcal{o}^\times}\chi(x)\psi(\mathcal{o}^{-d(\chi)}x)\mathrm{d}x.$$

On montre que $\mathcal{j}(\chi)$ vérifie la relation (I). Donc $c\sim_1\mathcal{j}(\chi)$.

(b) Soient alors $\tilde{e}'$ un nouveau vecteur de π'. On suppose $\tilde{e}'\in E'^0$. Par définition e'' est proportionnel à $\chi\tilde{e}'$. Comme $e''\in E^0$, on a d'après (a), $e''=\mathcal{j}(\chi)\chi\tilde{e}'$, à homothétie près par un élément de $L^\times$. D'où

$$\begin{aligned} b(e'',e'')&=\mathcal{j}(\chi)\overline{\mathcal{j}(\chi)}b(\chi\tilde{e}',\chi\tilde{e}'),\\ &=\mathcal{j}(\chi)\overline{\mathcal{j}(\chi)}b'(\tilde{e}',\tilde{e}'),\end{aligned}$$

par définition de b et b'. D'après [T] p. 322,

$$\mathcal{j}(\chi)\overline{\mathcal{j}(\chi)}\sim_2 D_\chi.$$

En explicitant les définitions de (IV.1,4), on obtient

$$\begin{aligned}\beta(\pi,\chi)\sim_2 D_\chi L(\pi\otimes\chi,1/2)^2L(\pi,1/2)^{-2}L_2(\pi\otimes\chi,1)^{-1}\\ \times L_2(\pi,1)\beta(\tilde{e},T)\beta'(\tilde{e}',T)^{-1},\end{aligned}$$

où T est un sous-tore maximal déployé de $\mathrm{GL}_2(F)$ tel que les termes ci-dessus soient non nuls, et β et β' sont les termes définis au (IV.1), relatifs à π et π'. Or pour tous $s\in\mathbb{C}$,

$$L_2(\pi\otimes\chi,s)=L_2(\pi,s).$$

De plus $L(\pi,1/2)\in\mathbb{Q}(\pi)^\times$, $L(\pi\otimes\chi,1/2)\in\mathbb{Q}(\pi)^\times$. Les fonctions L dis paraissent. D'après le lemme 13, (iii), on peut supposer que T est le tore diagonal et remplacer $\tilde{e}$ et $\tilde{e}'$ par la fonction caractèristique de $\mathcal{o}^\times$, qui appartient à E^0 et à E'^0. On voit alors que

$$\beta(\tilde{e},T)\sim_2\beta'(\tilde{e}',T)\sim_2 1.$$

La relation (J) devient elle de l'énoncé. □

10. Comparaison de valeurs de fonctions L. Suite

On revient aux hypothèses de (IV.7).

THÉORÈME 6: *Soient $\pi \in A_0(\mathrm{GL}_2)$, χ un caractère quadratique de $\mathbb{A}^\times/F^\times$. On suppose π de caractère central trivial, et $\pi_v \sim \pi[h_v]$ pour toute place $v \in S$. Supposons les conditions suivantes vérifiées*

(a) $\chi_v = 1$ *pour toute place* $v \in S$,

(b) $L(\pi, 1/2) \neq 0$.

Alors il existe $q \in \mathbb{Q}(\pi)$ tel qu'on ait l'égalité

$$L(\pi \otimes \chi, 1/2) L(\pi, 1/2)^{-1} = q D_\chi^{1/2}.$$

DÉMONSTRATION: On peut supposer $L(\pi \otimes \chi, 1/2) \neq 0$. Posons $\pi' = \pi \otimes \chi$, soient E, $E' \subset \mathscr{A}_0(\mathrm{GL}_2)$ les sous-espaces dans lesquels agissent π et π'. Posons $\epsilon = (\epsilon_v)_{v \in \Sigma(\pi)}$, avec $\epsilon_v = 1$ pour toute $v \in \Sigma(\pi)$. On a $\epsilon \in \mathscr{E}$. On introduit, pour le couple (π, ϵ), des termes comme au (IV.7). On supprime ϵ des notations. On définit donc i: $\otimes_v E_v \to E$, $\tilde{e}_v$ pour $v \in S$, e_v, E_v^0 pour $v \notin S$, $\tilde{E}$, $\tilde{E}^0$, $e = i((\otimes_{v \notin S} e_v) \otimes (\otimes_{v \in S} \tilde{e}_v))$. Introduisons des termes analogues pour le couple (π', ϵ), en particulier $\tilde{E}'^0$, e'. On sait que E est l'ensemble des fonctions produits $\varphi'(\chi \circ \det)$ quand φ' décrit E'. L'hypothèse (a) et les définitions montrent que $\tilde{E}^0$ est l'ensemble des fonctions $\varphi'(\chi \circ \det)$ quand φ' décrit $\tilde{E}'^0$. Posons $e'' = e'(\chi \circ \det)$. Alors $e'' \in \tilde{E}^0$. Fixons pour toute place finie v de F un élément $e_v'' \in E_v^0$ tel que

$$e'' = i\left(\left(\bigotimes_{v \notin S} e_v''\right) \otimes \left(\bigotimes_{v \in S} \tilde{e}_v\right)\right).$$

Fixons enfin pour toute place v de F un produit scalaire invariant b sur E_v de telle sorte que pour tout $\otimes_v \varphi_v \in \otimes_v E_v$, si $\varphi = i(\otimes_v \varphi_v)$,

$$(\varphi, \varphi) = \prod_v b(\varphi_v, \varphi_v).$$

Appliquons le théorème 3 aux deux couples $(\pi, 1)$, $(\pi', 1)$. Alors

$$L(\pi, 1/2)^2 \sim {}_2 2\zeta(2)^{-1} D^{1/2} L_2(\pi, 1)(e, e)^{-1} \prod_v \alpha(\pi_v, 1),$$

$$L(\pi', 1/2)^2 \sim {}_2 2\zeta(2)^{-1} D^{1/2} L_2(\pi', 1)(e', e')^{-1} \prod_v \alpha(\pi_v', 1).$$

On a $L_2(\pi', s) = L_2(\pi, s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$. D'autre part

$$(e', e') = (e'', e'').$$

En utilisant les définitions ci-dessus, on obtient

$$L(\pi', 1/2)^2 L(\pi, 1/2)^{-2} \sim {}_2 \prod_{v \notin S} \frac{b(e_v, e_v)}{b(e''_v, e''_v)} \frac{\alpha(\pi'_v, 1)}{\alpha(\pi_v, 1)}.$$

D'après le lemme 17, chaque terme local en v est équivalent à $D_{\chi_v}^{-1}$ d'où

$$L(\pi', 1/2)^2 L(\pi, 1/2)^{-2} \sim {}_2 D_\chi.$$

Cela équivaut à l'assertion de l'énoncé. □

REMARQUE: Ce théorème n'est guère nouveau, cf. [Shimura], [H].

Bibliographie

[D] P. DELIGNE: Formes modulaires et représentations de GL(2). In: Modular Functions of One Variable II, *Springer Lecture Notes* 349, Berlin, Heidelberg, New York (1973) pp. 55–106.

[GJ] S. GELBART et H. JACQUET: A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3), *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 11 (1978) 471–542.

[G] R. GODEMENT: *Notes on Jacquet-Langlands' Theory*, preprint IAS, (1970).

[H] G. HARDER: General aspects in the theory of modular symbols, preprint.

[J] H. JACQUET: Automorphic Forms on GL(2), part II, *Springer Lecture Notes* 278, Berlin, Heidelberg, New York (1972).

[JL] H. JACQUET et R.P. LANGLANDS: Automorphic Forms on GL(2), *Springer Lecture Notes* 114, Berlin, Heidelberg, New York, (1970).

[Shimizu] H. SHIMIZU: Theta series and automorphic forms on GL(2), *J. Math. Soc. of Japan* 24 (1972) 638–683.

[Shimura] G. SHIMURA: On special values of zeta functions associated with cusp forms, *Comm. Pure and Applied Math.* 29 (1976) 783–804.

[T] J. TATE: Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions. In: Cassels and Fröhlich (eds.) *Algebraic Number Theory*, Academic Press (1967) pp. 305–347.

[Tu] J.B. TUNNELL: article à paraître.

[V] M-F. VIGNERAS: Valeur au centre de symétrie des fonctions L associées aux formes modulaires, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1979-80, *Progress in Math.* 12, Birkhäuser (1981) pp. 331–356.

[W1] J-L. WALDSPURGER: Correspondance de Shimura, *J. Math. Pures et Appl.* 59 (1980) 1–133.

[W2] J-L. WALDSPURGER: Correspondances de Shimura et quaternions, preprint.

[W3] J-L. WALDSPURGER: Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur GL(2), *Comp. Math.* 54 (1985) 121–171.

[We] A. WEIL: Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, *Acta Math.* 113 (1965) 1–87, ou Oeuvres Sc., vol. III, pp. 71–157.

(Oblatum 22-VII-1983)

ENSJF 1 rue Maurice Arnoux
92120 Montrouge
France