WOLFGANG BARTENWERFER

Zur Existenz einer Steinschen Umgebung eines abgeschlossenen Steinschen Unterraums

Compositio Mathematica, tome 54, nº 1 (1985), p. 79-93

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__54_1_79_0>

Compositio Mathematica 54 (1985) 79–93.

ZUR EXISTENZ EINER STEINSCHEN UMGEBUNG EINES ABGESCHLOSSENEN STEINSCHEN UNTERRAUMS

Wolfgang Bartenwerfer

Einleitung und Ergebnis

In der Arbeit [12] bewies Siu die Existenz einer Steinschen Umgebung eines abgeschlossenen Unterraums N eines (komplex-)analytischen Raums U, wenn N (natürlich) selbst Steinsch ist. Für den dort zunächst behandelten "kompakten" Fall gab Schneider [11] einen sehr kurzen eleganten Beweis. Beide Beweise stützen sich entscheidend auf die Charakterisierung Steinscher Räume durch plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktionen und den Richbergschen Fortsetzungssatz [10].

Für den nichtarchimedischen Fall gab Hanning in [8] einen Beweis under der Voraussetzung, dass U glatt ist, Nach der dortigen Beweismethode ist diese Voraussetzung nur wesentlich für den kompakten Fall, d.h. N affinoid, U quasikompact. Die Globalisierung in [8], §3 würde ohne Verwendung einer Einbettung von N lediglich technisch etwas komplizierter werden.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der n.a. kompakte Fall ohne Einschränkungen bewiesen, d.h. der folgende

SATZ: *Sei U ein quasilompakter k-holomorpher Raum (d.h. U besitze einen endlichen affinoiden Atlas), $N \subset U$ ein abgeschlossener Unterraum, der affinoid sei. Dann gibt es einen (zulässigen) offenen Unterraum $W \subset U$, der affinoid ist, mit $W \supset N$.*

Entscheidendes Hilfsmittel ist die Divisionsformel von Galligo-Grauert; wir folgen hier der Version von Forster-Knorr in [4]. Da hierbei im wesentlichen nullteilerfreie Ringe als Koeffizientenbereiche auftreten, ist die Existenz von Divisionssytemen i.S. von [4] zu einem Ideal erst nach Nenneraufnahme gesichert. Einen für den Hauptbeweis hinreichend "universellen" Nenner erhält man durch Betrachtung der formellen Umgebung von N in U.

Wir heben hervor, dass - wie in [8] - auch dieser Beweis auf den komplexen Fall übertragbar ist. Es treten etwas unbequemere Abschätzungen bei der Divisionsformel und dem Iterationsverfahren in

Satz 2.1 auf, und man muss in geringem mass im kompakten Fall, vor allem aber bei der Globalisierung Schrumpfungen verwenden, die den Beweisen jene Zähigkeit geben, die dem komplexen Analytiker so wohlvertraut ist. Für $k = \mathbb{C}$ ist damit mindestens die Skizze eines Beweises gegeben, der nur die Ausschöpfbarkeit Steinscher Räume durch Oka-Weil-Bereiche verwendet.

Für nützliche Gespräche danke ich den Herren O. Forster, L. Gerritzen, J. Bingener und A. Skirde.

§1. Division mit Rest in $R[\![X]\!]$; formelle Liftungseigenschaft

1. Wir erinnern an einige Bergriffe aus [4], Kap. I.1 und übertragen insbesondere den Satz I.1.14.

Die Menge $\mathbb{N}^m$ wird versehen mit der Totalordnung

$$\nu < \mu :\Leftrightarrow \begin{array}{l} (|\nu| < |\mu|) \quad \text{oder} \quad (|\nu| = |\mu| \quad \text{und} \quad \exists k \quad \text{mit} \\ \nu_k < \mu_k, \nu_i = \mu_i \quad \text{für} \quad k < i \leqslant m) \end{array}$$

Eine Teilmenge $\Lambda \subset \mathbb{N}^m$ heisst reduzierendes System, wenn für λ, $\mu \in \Lambda$ mit $\lambda \neq \mu$ jeweils gilt $\mu \notin \lambda + \mathbb{N}^m$, Jedes reduzierende System hat nur endlich viele Elemente. Jedem reduzierenden System ordnet man eine Partition $((D_\lambda)_{(\lambda \in \Lambda)}, \Delta)$ von $\mathbb{N}^m$ zu, indem man setzt (induktiv!)

$$D_\lambda := (\lambda + \mathbb{N}^m) \setminus \left(\bigcup_{\substack{\mu \in \Lambda \\ \mu < \lambda}} D_\mu \right), \quad \Delta = \mathbb{N}^m \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda \right)$$

Sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$, $R[\![X]\!] = R[\![X_1, \ldots, X_m]\!]$, der Ring der formalen Potenzreihen, $\Lambda \subset \mathbb{N}^m$ ein reduzierendes System und $(\omega_\lambda)_{(\lambda \in \Lambda)}$ ein Divisionssystem zu Λ, d.h. es gelte

$$\omega_\lambda = X^\lambda + a_\lambda, \quad \operatorname{ord}(a_\lambda) > \lambda.$$

SATZ 1: *Jedes $f \in R[\![X]\!]$ besitzt genau eine Darstellung*

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} q_\lambda \cdot \omega_\lambda + r \tag{$*$}$$

mit

$$q_\lambda = \sum_{\nu \in D_\lambda - \lambda} r_{\lambda\nu} X^\nu, \quad r = \sum_{\nu \in \Delta} r_\nu X^\nu, \quad r_{\lambda\nu}, r_\nu \in R.$$

Es gilt

$$\operatorname{ord} q_\lambda + \lambda \geqslant \operatorname{ord} f, \quad \operatorname{ord} r \geqslant \operatorname{ord} f.$$

Ist R eine k-affinoide Algebra mit (irgendeiner fest gewählten) Norm $\| \quad \|$ und gilt für $\delta \in m$
$\sqrt{|k^*|}$

$$a_\lambda \in R\langle X_1, \ldots, X_m \rangle_\rho, \quad \|a_\lambda\|_\rho < \rho^\lambda,$$

so sind mit f auch q_λ, r aus $R\langle X \rangle_\rho$ und

$$\|q_\lambda\|_\rho \leqslant \rho^{-\lambda} \|f\|_\rho, \quad \|r\|_\rho \leqslant \|f\|_\rho.$$

Die Beweise sind klar; man beachte, dass man für die Konvergenzgeschwindigkeit des iterations verfahrens mit den Bezeichnungen aus [5], Seite 182, nur erhält

$$\operatorname{ord} h_{\iota+1} > \operatorname{ord} h_\iota.$$

Auch für Ringe R mit Nullteilern ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R[\![X]\!]$ das Bild $\operatorname{ord} \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}^m \cup \{\infty\}$ ein Halbgruppenideal. Wir notieren drei Folgerungen aus Satz 1.

FOLGERUNG 1: *Sei $\mathfrak{a} \subset R[\![X]\!]$ ein Ideal, $\Lambda \subset \mathbb{N}^m$ ein reduzierendes System und $(\omega_\lambda)_{(\lambda \in \Lambda)}$ ein Divisionssystem, so dass all $\omega_\lambda \in \mathfrak{a}$ sind. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *Für jedes $f \in \mathfrak{a}$ ist in $(*)$ der Rest $r = 0$*

(*ii*) *Λ ist die Extremalpunktmenge von $\mathfrak{a}$ (d.h. von* $\operatorname{ord} \mathfrak{a}$).

FOLGERUNG 2: *Sei mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Folgerung 1 Λ die Extremalpunktmenge zu $\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ abgeschlossen in der (X)-adischen Topologie. Ist $S \subset R$ ein multiplikatives System von Nichtnullteilern, so ist Λ auch Extremalpunktmenge zu $\mathfrak{a}R_S[\![X]\!]$. Ist R noethersch und nullteilerfrei, $\hat{R} = \hat{R}_{\mathfrak{m}}$ die Komplettierung nach einem maximalen Ideal, so ist Λ auch Extremalpunktmenge von $\mathfrak{a}\hat{R}[\![X]\!]$.*

BEWEIS: Die erste Behauptung folgt aus der "Stetigkeit" der Division $(*)$. Ist S wie in der Folgerung, so gilt für die Ideale

$$\bigcup_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_S \subset \mathfrak{a} R_S[\![X]\!]}^{(R[\![X]\!])_S}$$

die Gleichung

$$\operatorname{ord} \mathfrak{a} = \operatorname{ord} \mathfrak{a}_S = \operatorname{ord}(\mathfrak{a} R_S[\![X]\!]),$$

da $\mathfrak{a}_S$ in $\mathfrak{a} R_S[\![X]\!]$ dicht liegt. Zum Beweis der letzten Behauptung können wir $R = R_{\mathfrak{m}}$ annehmen. Dann liegt $\mathfrak{a}$ dicht in $\mathfrak{a}\hat{R}[\![X]\!]$ bezüglich der maximaladischen Topologie. Daher folgt auch ord $\mathfrak{a} = \text{ord}(\mathfrak{a}\hat{R}[\![X]\!])$.

FOLGERUNG 3: *Sei mit den Voraussetzungen von Folgerung* 2 $R = A_g$ *die Lokalisierte einer k-affinoiden Algebra A und R sei nullteilerfrei und normal.*

Ist dann $M = \text{Sp}\, A'$ ein k-affinoider Teilbereich von Sp A mit $M \cap N(g) = \emptyset$, so ist Λ die Extremalpunktmenge von $\mathfrak{a}A'[\![X]\!]$.

2. Sei φ ein Ring (!)-Endomorphismus von $R[\![X]\!]$, der "lokal" sei, d.h. für $\mathfrak{m} := (X)$ gelte $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ und die induzierten Homomorphismen

$$R/\mathfrak{m} \to R/\mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

seien die Identitäten, Dann ist die Graduierte $G_{\mathfrak{m}}(\varphi)$ die Identität und φ folglich ein Automorphismus ([2], théorème 2.1, cor. 3). Ferner gilt für $f \in R[\![X]\!]$ offenbar ord$(\varphi(f)) = $ ord f. Ist daher $\mathfrak{a} \subset R[\![X]\!]$ wie in Folgerung 2, so ist auch $(\varphi(\omega_\lambda))_{(\lambda \in \Lambda)}$ ein Divisionssystem zu Λ und Λ Extremalpunktmenge von $\varphi(\mathfrak{a})$.

3. Sei jetzt R nullteilerfrei und $\mathfrak{a} \subset R[\![X]\!]$ irgendein Ideal; Λ sei die Extremalpunktmenge von $\mathfrak{a}$. Ist $0 \neq s \in R$, so gilt für $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cdot R_s[\![X]\!]$ wieder ord $\mathfrak{a} = $ ord $\mathfrak{a}'$. Wählt man s (zu $\mathfrak{a}$) geeignet, so gibt es ein Divisionssystem $(\omega_\lambda)_{(\lambda \in \Lambda)}$ in $\mathfrak{a}'$. Das Ideal $\mathfrak{a}'$ erfüllt dann (i), (ii) aus Folgerung 1.

4. Für konvergente Potenzreihen gilt wie im Komplexen ([5], Seite 179)

BEMERKUNG 1: Sind R_σ affinoide Algebren (mit Norm $\| \ \| = \| \ \|^{(\sigma)}$) und $g_{\sigma,\tau} \in R_\sigma\{X\}$ mit

$$\text{ord}\, g_{\sigma,\tau} > \nu^{(\sigma,\tau)} \quad \sigma = 1,\ldots,s \quad \tau = 1,\ldots,t_\sigma,$$

so gibt es (beliebig kleine) $\rho \in m \cdot |k^*|$, so dass für $2 \geqslant \gamma \in |k^*|$ und alle σ, τ gilt

$$\|g_{\sigma,\tau}\|_{\gamma\rho} < (\gamma \cdot \rho)^{\nu^{(\sigma,\tau)}}.$$

5. Eine entscheidende Rolle bei unserem Beweis spielt die formelle Glattheit i.S. von [6] der Algebra A_g, wo A affinoid über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist und A_g regulär. Da wir gleichzeitig den "konvergenten Fall" benötigen, skizzieren wir den Beweis im formellen Fall im Andschluss an [7], Seite 257.

DEFINITION 1: Wir nennen eine k-Algebra prof-affinoid, wenn gilt

$$B = \varprojlim_n B_n, \quad \text{wo } B_n \twoheadleftarrow B_{n+1}$$

jeweils ein surjektiver Homomorphismus k-affinoider Algebren mit nilpotentem Kern ist.

Für unsere Zwecke sei die Darstellung als projektiver Limes immer fest gegeben; die Topologie auf B sei die durch die kanonische Filterung gegébene. Wir bezeichnen aber mit $\mathring{B}$ das Urbild in B des Ringes der potenzbeschränkten Elemente von B_0. Dann hat die k-Algebra $T = k\langle X_1, \dots, X_s\rangle$ die universelle Eigenschaft, dass für jede pro-affinoide Algebra B gilt

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg}}(T, B) \cong s \cdot \mathring{B}.$$

SATZ 2: *Sei k algebraisch abgeschlossen, A eine reduzierte k-affinoide Algebra, B eine pro-affinoide Algebra. Sei* $0 \neq g \in A$, *so dass A_g regulär sei und* $\mathfrak{b} \subset B$ *ein topologisch nilpotentes Ideal.* (*d.h.* $\mathfrak{b}^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$).

(*i*) *Jeder k-Algebrahomomorphismus* $\varphi: A \to B/\mathfrak{b}$ *lässt sich nach Aufnahme von g als Nenner "liften", d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm von k-Algebrahomomorphismen*

$$\begin{array}{ccc} A_g & \xrightarrow{\psi} & \hat{B}_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\varphi} B/\mathfrak{b} \to & (B/\mathfrak{b})_g \end{array}$$

Dabei sei A_g die gewöhnliche Lokalisierung, $(g_n)_{(n)} \approx B$ *ein Urbild von* $\varphi(g)$ *und*

$$\hat{B}_g := \varprojlim_n (B_n)_{g_n}, \ (B/\mathfrak{b})_g := \varprojlim_n \left((B_n)_{g_n}/\mathfrak{b}(B_n)_{g_n}\right)$$

(*ii*) *Ist* $M = \mathrm{Sp}\, A'$ *ein affinoider Teilbereich von* $\mathrm{Sp}\, A$ *mit* $M \cap N(g) = \emptyset$, *so besitzt A' die Liftungseigenschaft i.S. von* [8], *Definition* 2.1.

(*iii*) *Ist A' wie in* (*ii*), *Lässt sich jeder k-Algebrahomomorphismus* $A' \to B/\mathfrak{b}$ *zu einem k-Algebrahomomorphismus* $A' \to B$ *liften.*

BEWEIS: Wir zeigen nur (i), Teil (ii) geht analog, (iii) folgt daraus. Sei also

$$A = T/\mathfrak{a}, \quad T = k\langle X_1, \dots, X_2\rangle$$

und $g \in T$ ein Repräsentant von g. Da jeweils $\mathfrak{b} \cdot B_n \subset B_n$ nilpotent ist, gilt $\varphi(\mathring{A}) \subset$ Bild $(\mathring{B})$. Daher lässt sich das Liftungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[d] \\ T \arrow[r] & A \arrow[ur, dashed, "\Phi"] \arrow[r] & B/\mathfrak{b} \end{tikzcd}$$

lösen. Sodann nimmt man überall den Nenner g auf und beachtet, dass $\Phi_g(\mathfrak{a}_g)$ topologisch nilpotent ist. Also erhält man ein Φ_g: $\hat{T}_g \to \hat{B}_g$, wo $\hat{T}_g$ die Komplettierung bezüglich der $\mathfrak{a}_g$-adischen Filterung ist. Damit bracht man nur noch zu zeigen, dass die Identität von A_g über $\hat{T}_g \to A_g$ faktorisiert. Dazu kann man annehmen, dass A_g rein-d-dimensional ist, es sei $r = s - d$. Die kanonische Abbildung

$$s \cdot A_g \to (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)^*{}_g$$

besitzt ein Linksinverses ι. Sei $L = \operatorname{Sp} A_g[X_1, \ldots, X_s]$ der Totalraum des links stehenden freien Bündels, V der Totalraum des rechts stehenden Normalenbündels. Wir konstruieren einen Isomorphismus von der formellen Umgebung $\hat{V}$ des Nullschnitts auf die formelle Umgebung $\hat{E}^s_g$ von $N(\mathfrak{a}_g)$. Dazu können wir annehmen, dass das Normalenbündel trivial ist, also $V \approx \operatorname{Sp} A_g[Y_1, \ldots, Y_r]$. Dann ist ι gegeben durch

$$\iota^*(X_\sigma) = \sum_{\rho=1}^{r} a_{\sigma\rho} Y_\rho, \quad \sigma = 1, \ldots, s,$$

mit $(a_{\sigma\rho})_{(\sigma,\rho)} \in M_{sr}(A_g)$. Man rechnet direkt nach, dass dann durch

$$\varphi^*(X_\sigma) = X_\sigma \bmod \mathfrak{a} + \sum_1^r a_{\sigma\rho} Y_\rho, \quad \sigma = 1, \ldots, s$$

ein k-Algebrahomomorphismus $T \to A_g[\![Y]\!]$ definiert wird, der sich zu einem Homomorphismus $\hat{T}_g \to A_g[\![Y]\!]$ fortsetzt. Für jedes $x \in \operatorname{Sp} A_g$ ist dann $k[\![X - x]\!] \to \hat{A}_x[\![Y]\!]$ ein Isomorphismus. Hieraus folgt leicht die Behauptung.

§2. Durchführung des Beweises

1. In diesem Paragraphen sei $(U, \mathscr{B})$ ein holomorpher Raum über einem beliebigen Grundkörper k mit endlichem affinoiden Atlas $(U_i)_{(i=1,\ldots,s)}$, $N \subset U$ ein abgeschlossener Unterraum zur (kohärenten Idealgarbe $\mathscr{I} \subset \mathscr{B}$, der affinoid sei. Wir bemerken und verwenden, dass der zu beweisende Satz für nilpotentes $\mathscr{I}$ trivial ist. Im allgemeinen Fall betrachten wir im folgenden die affinoiden Algebren

$$B_n := (\mathscr{B}/\mathscr{I}_{n+1})(N), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es sei $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ ein fest gewähltes Erzuegendensystem des B_0-Moduls $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2(N)$. Zwecks grösserer übersichtlichkeit notieren wir eine Reihe einfacher Bemerkungen, vgl. [8], §1.

Bemerkung 1: Seien $f_\mu^{(\iota)} \in \mathscr{I}(U_\iota)$ jeweils Repräsentanten von $\bar{f}_\mu$. Sei $\rho \in m\sqrt{|k^*|}$ fest und für $\gamma \in |k^*|$

$$U_\iota(\gamma) := \left\{ \left| f_\mu^{(\iota)} \right| \leqslant \gamma \cdot \rho_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, m \right\}$$

Dann git es ein γ_0, so dass für jedes i

$$\mathscr{I}(U_i(\gamma_0)) = \sum_1^m ff_\mu^{(\iota)} \cdot \mathscr{B}(U_\iota(\gamma_0))$$

ist und so dass für alle $\gamma \leqslant \gamma_0$ und alle i, j gilt

$$U_{ij} \cap U_j(\gamma) = U_{ij} \cap U_i(\gamma) =: U_{ij}(\gamma).$$

Setzt man für $\gamma \leqslant \gamma_0$

$$U(\gamma) := \bigcup_i U_i(\gamma),$$

so hängt der von $(U(\gamma))_{(\gamma \leqslant \gamma_0)}$ erzeugte Filter nur vom Träger des abgeschlossenen Unterraums N ab.

Bemerkung 2: Sei $M \subset N$ ein affinoider Teilbereich. Dann gibt es einen (zuverlässigen) offenen Unterraum V von U mit $N \cap V = M$. (Für affinoides U und rationales M lässt sich V rational wählen.) Ist W ein weiterer offener Unterraum mit dieser Eigenschafter, so gilt für kleines γ

$$U(\gamma) \cap V = U(\gamma) \cap W.$$

Bemerkung 3. Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gibt eine affinoide Umgebung V von N in U 9d.h. V ist zulässiger offener Unterraum, affinoid und $V \supset N$).

(ii) Es gibt ein $\gamma_1 \leqslant \gamma_0$, so dass für jedes $\gamma \leqslant \gamma_1$ der Raum $U(\gamma)$ affinoid ist.

Wir begründen nur Bemerkung 3. Sei (i) erfüllt. Nach Bemerkung 2 gilt nach Verkleinerung von γ_0 notwendig $U(\gamma_0) \subset V$. Man kann also annehmen, dass U affinoid ist. Wegen $H^1(U, \mathscr{I}^2) = 0$ gibt es Elemente $h_\mu^{(i)} \in \mathscr{I}^2(U_i)$ mit

$$f_\mu^{(i)} - h_\mu^{(i)} = f_\mu^{(j)} - h_\mu^{(j)}$$

auf U_{ij}, Sei $f_\mu \in \mathscr{I}(U)$ die hierdurch definierte Funktion. Ist $\gamma_1 \leqslant \gamma_0$ klein, so gilt

$$U_i(\gamma) = U_i \cap \left\{ |f_\mu| \leqslant \gamma\rho_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, m \right\}$$

für alle i und alle $\gamma \leqslant \gamma_1$. Also ist $U(\gamma)$ ein affinoider Schlauch um N in U.

2. Wir betrachten zunächst eine Situation wie im Satz 2.3 aus [8]. Dazu

Definition 1: Sei D eine beliebige k-affinoide Algebra mit Norm $\| \;\; \|$ und $\mathfrak{d} = (d_1, \ldots, d_m) \subset D$ ein Ideal. Wir sagen, $(d_1, \ldots, d_m)$ sei ein Schwarzsches Erzeugendensystem von $\mathfrak{d}$, wenn gilt $\| d_\mu \| \leqslant 1$ und wenn es ein $L \in \mathbb{R}_+^*$ gibt, so dass zu jedem $t \in \mathbb{N}$ und jedem $d \in \mathfrak{d}^t$ eine Dearstellung

$$d = \sum_{|\nu| = t} d_{\nu_1 \ldots \nu_m} d_1^{\nu_1} \ldots d_m^{\nu_m}, \quad d_\nu \in D,$$

existier mit $\| d_\nu \| \leqslant L \| d \|$.

Satz 1: *Mit den Bezeichnungen von Abs.* 1 *gelte* $s = 2$, *und es gebe Repräsentanten*

$$f_\mu \in \mathscr{I}(U_{12}) \subset \mathscr{B}(U_{12}) =: D, \quad f_\mu^{(i)} \in \mathscr{I}(U_i), \quad \mu = 1, \ldots, m; \quad i = 1, 2$$

der jeweiligen Beschränkungen der $\bar{f}_\mu$ *und eine affinoide Norm* $\| \;\; \|$ *auf* D, *so dass die* $f_1, \ldots, f_m$ *ein Schwarzsches Erzeugendensystem von* $\mathfrak{d} := \mathscr{I}(U_{12})$ *bilden und* $\left\| f_\mu^{(i)} | U_{12} \right\| \leqslant 1$ *gelte für alle* μ, i. *Dann gibt es affinoide Teilbereiche* $U_i' \subset U_i$ *mit* $U_i' \cap N = U_i \cup N$, *so dass für alle* $t \in \mathbb{N}$

$$H^1\big((U_i)_{(i=1,2)}, \mathscr{I}^t\big) \to H^1\big((U_i')_{(i=1,2)}, \mathscr{I}^t\big)$$

gleich Null ist.

Beweis: Wir wählen irgendwelche affinoiden Normen auf den $\mathscr{B}(U_i)$ und eine Konstante $L \geqslant 1$ wie in der Definition des Schwarzschen Erzeugendensystems, so dass darüber hinaus auch die Beschränkungen $\mathscr{B}(U_i) \to D$ durch L beschränkt sind und zu jedem $g \in D/\mathfrak{d}$ Element $b^{(i)} \in \mathscr{B}(U_i)$ existieren mit

$$g \equiv b^{(2)} - b^{(1)} \bmod \mathfrak{d}, \quad \| b^{(i)} \| \leqslant L \| g \|.$$

Sei nun t fest,

$$d = {}^{(i)}d = \sum_{|\nu| = t} d_{\nu_1 \ldots \nu_m} f_1^{\nu_1} \ldots f_m^{\nu_m} = \sum d_\nu f^\nu, \quad \| d_\nu \| \leqslant L \| d \|.$$

Wählt man $d_\nu^{(\iota)} \in \mathscr{B}(U_\iota)$ mit

$$d_\nu \equiv d_\nu^{(2)} - d_\nu^{(1)} \bmod \mathfrak{d}, \quad \| d_\nu^{(\iota)} \| \leqslant L^2 \| d \|$$

und setzt

$$d^{(\iota)} := \sum_{|\nu| = t} d_\nu^{(\iota)} f_1^{(\iota)\nu_1} \dots f_m^{(\iota)\nu_m} \in \mathscr{B}(U_\iota), \quad i = 1, 2$$

so gilt für

$$^{(t+1)}d := {}^{(t)}d - (d^{(2)} - d^{(1)}) | U_{12}$$

also

$$^{(t+1)}d \in \mathfrak{d}^{t+1}, \quad \| ^{(t+1)}d \| \leqslant L^3 \| ^{(t)}d \|.$$

Sei $|k^*| \ni \gamma < L^{-3}$ und γ ausserdem klein i.S. von Bemerkung 1 (all $\rho_\mu = 1$). Durch dies Iterationsverfahren erhält man (vgl. [8] a.a.O.) Elemente $^{(t)}d^{(\iota)} \in I^t(U_i(\gamma))$ für $i = 1, 2$ mit

$$\left(^{(t)}d - \left(^{(t)}d^{(2)} - {}^{(t)}d^{(1)} \right) \right) | U_{12}(\gamma) \in \bigcap_{q \geqslant t} \mathscr{I}^q(U_{12}(\gamma)).$$

Nach dem Krullschen Durchschnittsatz gilt für $\gamma' \ll \gamma$, dass das Bild des rechts stehenden Durchschnitts in $\mathscr{B}(U_{12}(\gamma'))$ gleich Null ist. Wie in [8] hat man als

FOLGERUNG. Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 besitzt N eine affinoide Umgebung in U.

3. Die Existenz eines Scharzschen Erzeugendensystems für $\mathscr{I}(V)$ mit hinreichend grossem offenen affinoiden Unterraum $V \subset U$ wird erreicht, indem man zunächst eine Retraktion einer "lokalisierten" formellen Umgebung von N betrachtet (Satz 1.2) und weitere Nenner aufnimmt. Es wird dann weiter gezeigt, dass man diese Retraktion durch eine solche eines Schlauchs von 1. Ordnung approximieren kann und dabei die Existenz eines Divisionssystems in dem interessierenden Ideal erhalten bleibt. Nach Satz 1.1 existiert dann für das Bild von (X) im Restklassenring ein Schwarzsches Erzeugendensystem.

Sei zunächst allgemein $g = (g_n)_{(n \in \mathbb{N})} \in \varprojlim B_n$ und $\hat{B}_g$ der projektive Limes der $(B_n)_{g_n}$. Die Graduierte zur kanonischen Filterung $((B_g)_i)_{(i)}$

$$G(\hat{B}_g) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left((\mathscr{I}^n / \mathscr{I}^{n+1})(N) \right)_{gn} =: \bigoplus_n A_n$$

ist homogen und von endlichem Typ über A_0. Also ist $\overline{B}_g$ noethersch und $((\overline{B}_g)_1)^n = (\overline{B}_g)_n$. Zur Bequemlichkeit des Lesers notieren wir

SATZ 2: *Die maximalen Ideale* $\mathfrak{j}$ *von* $\hat{B}_g$ *entsprechen in folgender Weise bijektiv den Punkten* $z \in N \setminus N(g_0)$. *Ist* $\mathscr{J} \subset \mathscr{B}$ *die Radikalidealgarbe zu* $\{z\}$, *so sei*

$$\mathfrak{j} := \operatorname{Ker}\left(\hat{B}_g \to (\mathscr{B}/\mathscr{J})_z\right).$$

Es gilt $(\hat{B}_g)_{\mathfrak{j}} \cong \hat{\mathscr{B}}_z$

4. In diesem und dem folgenden Absatz führen wir den wesentlichen Teil des Beweisses durch. Wir setzen k als algebraisch abgeschlossen voraus und - mit den obigen Bezeichnungen - B_0 als reduziert. Sei $g_0 \in B_0$, so dass $A_0 = (B_0)_{g_0}$ regulär ist und

$$\dim(B_0/(g_0)) < \dim B_0$$

Wir wählen eine feste Rechtsinverse ι: $A_0 \to \hat{B}_g$ zu $\hat{B}_g \to A_0$ gemäss Satz 1.2 und Elemente

$$f^{(\mu)} = \left(f_n^{(\mu)}\right)_{(n \in \mathbb{N})} \in \left(\hat{B}_g\right)_1, \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

so dass $f_1^{(\mu)}$ das Bild von $\bar{f}_\mu$ in A_1 ist. Sei

$$\epsilon\colon A_0[\![X]\!] = A_0[\![X_1, \ldots, X_m]\!] \to \hat{B}_g$$

der (stetige) A_0-Algebrahomomorphismus mit $X_\mu \rightsquigarrow f^{(\mu)}$. Nach [2], a.a.O., ist er ein strikter Epimorphismus in der Kategorie der gefilterten Ringe. Wir notieren über das Verhalten von ϵ bei zwei verschiedenen "Lokalisierungen" die

FOLGERUNG AUS SATZ 2: (i) *Sei* $h \in A_0$ *und*

$$\hat{\epsilon}_h\colon (A_0)_h[\![X]\!] \to \left(\hat{B}_g\right)_{(h)} =: \left(B_{gh}\right)$$

der durch Nenneraufnahme und Komplettierung entstehende $(Epi$-$)$ *Morphismus. Dann gilt*

$$\operatorname{Ker} \epsilon_h = \left(A_0\right)_h[\![X]\!] \cdot \operatorname{Ker} \epsilon.$$

(ii) Sei $M = \operatorname{Sp} C$ *ein affinoider Teilbereich von* N *mit* $M \cap N(g_0) = \emptyset$. *Dann gilt für*

$$\epsilon_C\colon C[\![X]\!] \to \hat{B}_C := \varprojlim_n \left(C \otimes_{A_0} (B_n)_{g_n} \right)$$

$$\operatorname{Ker} \epsilon_C = C[\![X]\!] \cdot \operatorname{Ker} \epsilon \quad \text{und} \quad \hat{B}_C \cong \varprojlim_n B_{n,C}.$$

Dabei wählt man gemäss Bemerkung 2 *ein offenes* $V \subset U$ *mit* $V \subset U$ *mit* $V \cap N = M$ *und setzt*

$$B_{n,C} := \left(\mathscr{B}_V / \mathscr{I}_V^{n+1} \right)(C).$$

Wir beschreiben nur, wie man

$$C \otimes_{A_0} (B_n)_{g_n} \cong B_{n,C}$$

beweist. Sei zunächst $C = (B_0)_{|g_0| \geqslant \delta}$. Man erhält aus

$$A_0 \to (B_n)_{g_n} \to B_{n,C}$$

einen Homomorphismus $C \to B_{n,C}$, der einem ein Diagram

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_{A0} (B_n)_{g_n} & \twoheadrightarrow & B_{n,C} \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & C & \end{array}$$

definiert, in dem beide C-Algebren endlich sind. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in C mit zugehörigem Punkt z, so errechnet man leicht, dass die obere Waagerechte Anlass zu der Identität von $(\mathscr{B}/\mathscr{I}^n)_z$ gibt. Nach diesem bewiesenen Fall kann man für beliebiges C annehmen $g_0 = 1$. Dann sind aber $C \otimes_{B_0} B_n$ und $B_{n,C}$ Algebren zum selben Teilbereich des affinoiden Raums $N(\mathscr{I}^n)$.

5. Wir übernehmen die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Abs. 4. Der Ring A_0 ist Produkt seiner Primkomponenten P_j der Gestalt $(A_0)_{g_j}$, $j = 1, \ldots, t$. Wir wenden auf

$$\mathfrak{a}_j := \operatorname{Ker} \epsilon_{gj} \subset P_j[\![X]\!], \quad j = 1, \ldots, t$$

die Bemerkungen in §1.3 an. Indem wir den Nenner g_0 "erweitern", können und werden wir annehmen, dass in jedem $\mathfrak{a}_j$ ein Divisionsystem zur Extremalpunktmenge Λ_j von $\mathfrak{a}_j$ existiert. Sei zunächst j fest und $M = \operatorname{Sp} C \subset N$ ein affinoider Teilbereich mit $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}(\mathrm{g}_0 \cdot \mathrm{g}_\mathrm{j}) = \emptyset$. Ferner gebe es einen (zulässigen) affinoiden TEilbereich $V \subset U$ mit $N \cap V = M$.

Sei $D = \mathscr{B}(V)$ und $\mathfrak{d} = \mathscr{I}(V)$. Mit den Bezeichnungen der Folgerung aus Satz 2 ist dann $\hat{B}_C = \hat{D}$, der Komplettierung von D nach der $\mathfrak{d}$-adischen Filterung. Da C die Liftungseigenschaft i.S. von [8] hat, gibt es nach VErkleinerung von V (als Umgebung von M) ein $\rho \in m.\ |k^*|$ und einen k-Algebrahomomorphismus

$$\kappa\colon C\langle X\rangle_\rho \to D, \quad \kappa((X)) \subset \mathfrak{d},$$

so dass

$$C[\![X]\!] \xrightarrow{\epsilon_C} \hat{D} \to D/\mathfrak{d}^2 \quad \text{und} \quad C[\![X]\!] \xrightarrow{\kappa} \hat{D} \to D/\mathfrak{d}^2$$

übereinstimmen. Nach Verkleinerung [(1)] von ρ kann man annehmen, dass κ sujektiv ist und $\kappa((X)) = \mathfrak{d}$ gilt ([9], Folgerung 1.9 bzw. [8], Hilfssatz 1.7). Es gilt u.a.

$$\mathfrak{c} := \operatorname{Ker} \hat{\kappa} = C[\![X]\!] \cdot \operatorname{Ker} \kappa.$$

Setzt man $\mathfrak{c}' := \operatorname{Ker} \epsilon_C$, so gilt nach Konstruktion

$$\mathfrak{c}' + (X)^2 = \mathfrak{c} + (X)^2$$

und der induzierte Isomorphismus

$$C[\![X]\!]/\mathfrak{c}' \xrightarrow{\bar{\varphi}} C[\![X]\!]/\mathfrak{c}$$

wird modulo $\mathfrak{c} + (X)^2$ die Identität. Nach Satz 1.2 (iii) lässt sich zunächst das Liftungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & C[\![X]\!] \arrow[d] \\ C \arrow[r] & C[\![X]\!]/\mathfrak{c}' \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & C[\![X]\!]/\mathfrak{c} \end{tikzcd}$$

lösen. Durch geeignete Wahl der Bilder der X_μ lässt sich dann $\bar{\varphi}$ zu einem Ringendomorphismus φ von $C[\![X]\!]$ hochheben, der die Voraussetzungen in §1.2 erfüllt, also ein Isomorphismus ist mit $\varphi(\mathfrak{c}') = \mathfrak{c}$. Damit ist gezeigt, dass auch $\mathfrak{c}$ ein Divisionssystem zur Extremalpunktmenge Λ_J von $\mathfrak{c}$ enhält. (Für $\mathfrak{c}'$ galt dies nach Folgerung 3 aus Satz 1.1) Schliesslich sei $\mathfrak{k} := \operatorname{Ker} \kappa$. Wegen $\hat{\mathfrak{k}} = \mathfrak{c}$ enhält $\mathfrak{k}$ ein Divisionssystem $(\omega_\lambda)_{(\lambda)}$ zur Extremalpunktmenge Λ_J von $\operatorname{ord} \mathfrak{k} = \operatorname{ord} \mathfrak{c} \subset \mathbb{N}^m$.

(1) Dies soll im folgenden jeweils heissen, man betrachte statt κ für $\rho' \leqslant \rho$

$$\kappa(\rho')\colon C\langle X\rangle_{\rho'} \to C\langle X\rangle_{\rho'} \hat{\otimes}_{C\langle X\rangle_\rho} D := D(\rho')$$

Sind nun endlich viele irreduzible affinoide Teilbereiche $M_1 \subset N$ vorgegeben mit $M_1 \subset N \setminus N(g_0)$, die paarweise disjunkt sind (und in U affinoide Umgebungen V_1 wie oben besitzen), so findet man entsprechende Homomorphismen

$$\kappa_1 \colon C_1\langle X \rangle_\rho \twoheadrightarrow D_1 = D_1(\rho) = \mathscr{B}(V_1)$$

mit Kernen $\mathfrak{k}_1$ und Divisionssystemen $(\omega_\lambda^{(1)})_{(\lambda \in \Lambda_j)}$ in $\mathfrak{k}_1$, $j = j(1)$. Wählt man $\rho \in m.\ |k^*|$ geeignet und hinreichend klein, so gilt für $1 \geqslant \gamma \in |k^*|$

$$\left\|\omega_\lambda^{(1)} - X^\lambda\right\|_{\gamma\rho} < \|X^\lambda\|_{\gamma\rho}, \quad \lambda \in \Lambda_{j(1)}.$$

Nach Bemerkung 2 kann man dabei ρ so klein wählen, dass die $V_1(\rho)$ paarweise disjunkt sind. Sei

$$\kappa(\gamma\rho) \colon \left(\underset{1}{X} C_1\right)\langle X \rangle_{\gamma\rho} \twoheadrightarrow \underset{1}{X} D_1(\gamma\rho) =: D$$

der durch die $\kappa_1(\gamma\rho)$ definierte Epimorphismus und D mit der zugehörigen Restklassennorm versehen. Ist $c_\mu \in k^*$ mit $\left|c_\mu^{-1}\right| = \gamma\rho_\mu$, so bilden die $f_\mu := c_\mu \cdot \lambda(\gamma\rho)(X_\mu)$ ein Schwarzsches Erzeugendensystem von

$$\kappa(\gamma\rho)((X)) = \mathfrak{d} = \mathscr{I}\left(\bigcup_1 V_1(\gamma\rho)\right),$$

wie sofort aus Satz 1.1. folgt.

6. Wir beweisen nun den Satz in der Einleitung in drei Schritten.

Behauptung 1: Sei N reduziert, k algebraisch abgeschlossen, g_0 der "erweiterte" Nenner i.S. von Abs. 5, Anfang. Die Mächtigkeit s von $(U_\iota)_{(\iota)}$ sei 2 und

$$U_{12} \cap N \subset N \setminus N(g_0).$$

Dann besizt N in U eine affinoide Umgebung.

Begründung. Mit den Bezeichnungen von Abs. 5 sei $M := N \cap U_{12}$ mit den irreduziblen Komponenten $M_1 = \operatorname{Sp} C_1$. Es sei ρ so klein wie oben est gewählt, dezu γ zusätzlich klein i.S. von Bemerkung 1. Dan gilt

$$\mathscr{B}(U_{12}(\gamma)) := \mathscr{B}(U_{12}(\gamma\rho)) = \underset{1}{X} D_1(\gamma\rho) = D.$$

Da

$$f_\mu^{(\iota)} | U_{12}(\gamma) - \kappa(\gamma\rho)(X_\mu) \in \mathscr{I}^2(U_{12}(\gamma)) = \mathfrak{d}^2$$

gilt nach (letztmaliger) Verkleinerung von γ für die Restklassennormen

$$\left\|f_\mu^{(\iota)}|U_{12}\right\| = \left\|\kappa(\gamma\rho)(X_\mu)\right\|, \quad \mu = 1,\dots,m.$$

Setzt man nun wie oben $f_\mu := c_\mu \cdot \kappa(\gamma\rho)(X_\mu)$ und schreibt für $c_\mu \cdot f_\mu^{(\iota)}$ wider $f_\mu^{(\iota)}$, so hat man für $(U_\iota(\gamma))_{(\iota)}$ alle Voraussetzungen von Satz 1 hergestellt.

Aus Behauptung 1 folgt durch einen Schluss mit bekannten Techniken ([8], Beweis des Satzes 2.5)

BEHAUPTUNG 2: Sei N reduziert, k algebraisch abgeschlossen, der erweiterte Nenner g_0 sei aus B_0^*, jedoch s beliebig. Dann besitzt N eine affinoide Umgebung in U.

Damit kommen wir zum

ENDE DES BEWEISES: Nach Bemerkung 1 und 3 und Satz 3.A.5 aus [3] kann man ohne Einschränkung k als algebraisch abgeschlossen voraussetzen. Unter dieser Voraussetzung führen wir Induktion nach $d = \dim N$ mit dem trivialen Induktionsbeginn $d = 0$. Beim Schluss auf d sei $\mathscr{I} \subset \mathscr{B}$ die Radikalidealgarbe zu N, g_0 ein erweiterter Nenner wie in Abs. 5 mit $\dim N(g_0) < d$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $N(g_0) \subset U$ eine affinoide Umgebung W_1 und für kleines $\delta \in |k^*|$ gilt dann auch

$$N_1 := \left\{|g_0| \leqslant \delta\right\} \subset W_1.$$

Nach Bemerkung 2 folgt, dass man annehmen kann $W_1 \cap N = N_1$ und dass ein offener Unterraum $W_2 \subset U$ existiert mit

$$W_2 \cap N = N_2 := \left\{|g_0| \geqslant \delta\right\}.$$

Nun wendet man auf $N_2 \subset W_2$ Behauptung 2 an; man kann also annehmen, dass auch W_2 affinoid ist. Schliesslich wendet man auf $N \subset W_1 \cup W_2$ Behauptung 1 an.

Literatur

[1] J. BINGENER: Offenheit der Versalität in der analytischen Geometrie, *Math. Z.* 173 (1980) 241–281.

[2] N. BOURBAKI: *Algèbre commutative III*, Paris, Hermann.

[3] K.-H. FIESELER: Zariskis Main Theorem in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Schriftenreihe des Math. Institutes der Univ. Münster, 2. Serie 18 (1979).

[4] O. FORSTER and K. KNORR: Über die Deformationen von Vektorraumbündeln auf kompakten komplexen Räumen, *Math. An.* 209 (1974) 291–346.

[5] H. GRAUERT, Über die Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen, *Invent. Math.* 15 (1972) 171–198.

[6] A. GROTHENDIECK, Eléments de Géomètrie algébrique, Chap. IV, *Publ. Math. de l'IHES* 32 (1967).

[7] R. GUNNING und H. ROSSI: *Analytic Functions of Several Variables*, Englewood Cliffs, N.Y. 1965.
[8] A. HANNING: Zum Satz von Siu in der nichtarchimedischen Funktionentheory, *J. Reine u. angew. Math.* 334 (1982) 182–202.
[9] R. KIEHL: Die de-Rham-Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper, *Publ. math. de l'IHES* 33 (1967) 5–20.
[10] R. RICHBERG: Stetige streng pseudokonvexe Funktionen, *Math. Ann.* 175 (1968) 257–286.
[11] M. SCHNEIDER: Tubenumgebungen Steinscher Räume, *Manuscripta Math.* 18 (1976) 391–397.
[12] Y.-T. SIU: Every Stein subvariety admits a Stein Neighborhood, *Invent. Math.* 38 (1976) 89–100.

(Oblatum 21-III-1983)

Ruhr-Universität Bochum NA 4/71
Universitätsstr. 150
D-4630 Bochum 1
Federal Republic of Germany

Zusatz bei der Korrektur: Die Übertragbarkeit der Methode auf den komplexen Fall erscheint zumindest fraglich, anscheinend sind "zu viele" Schrumpfungen in transversaler Richtung erforderlich.