Compositio Mathematica

Jérome Brun
André Hirschowitz

Variété des droites sauteuses du fibré instanton général

Compositio Mathematica, tome 53, nº 3 (1984), p. 325-336
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1984__53_3_325_0>

[1] Compositio Mathematica 53 (1984) 325–336.

VARIÉTÉ DES DROITES SAUTEUSES DU FIBRÉ INSTANTON GÉNÉRAL

Jérome Brun et André Hirschowitz

Soit E un fibré vectoriel de rang deux sur $\mathbb{P}^3$, de première classe de Chern nulle. Pour toute droite L de $\mathbb{P}^3$, notons a_L l'entier positif tel que $E|_L$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_L(-a_L)\oplus\mathcal{O}_L(a_L)$. Vis à vis de E, une droite L sera dite sauteuse si $a_L \geq 1$, bisauteuse si $a_L \geq 2$, hypersauteuse si $a_L \geq 3$. On notera respectivement $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{H}(E)$ les sous-ensembles de la grassmannienne $G(1,3)$ formés des droites sauteuses, bisauteuses et hypersauteuses de E (on donne en 1.5 une définition avec multiplicité de ces ensembles, qui permet de calculer leur degré).

L'objet de ce travail est de prouver le résultat suivant, prédit par Barth ([2], §6):

THEOREME: *Soit E un fibré instanton général* (*cf* 6.1) *avec $c_1 = 0$ et $c_2 \geq 1$. Alors*:

(i) $\mathcal{H}$(E) est vide

(ii) $\mathcal{B}$(E) est une courbe lisse de degré $2\binom{c_2+1}{3}$

(iii) $\mathcal{S}$(E) est une hypersurface de degré c_2, lisse en dehors de $\mathcal{B}$(E), et dont $\mathcal{B}$(E) est un lieu de points doubles ordinaires.

Dans les cas $c_2 = 1$, 2, ce résultat est connu respectivement de Barth ([1] §7), et de Hartshorne ([10] Proposition 9.11).

Dans notre langage, le théorème concerne la *stratification cohomologique* (§1) associée à un fibré instanton, dont il énonce des propriétés locales *stables* (§2). Notre démonstration consiste à observer (§3) que les propriétés stables passent des déformations semi-universelles des restrictions d'un fibré spécial à la famille des restrictions du fibré général, moyennant une certaine hypothèse cohomologique (END).

Après quoi, il suffit de prouver que les déformations semi-universelles (sur $\mathbb{P}^1$) ont les propriétés stables requises (§4), et de trouver un fibré vérifiant (END) (§5).

En supposant à priori que les droites bisauteuses de E forment une courbe, Gruson-Peskine ([9], Remarque B5) mentionnent qu'on peut en calculer le degré par le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, et indiquent le résultat (lui aussi prédit par Barth): $2\binom{c_2+1}{3}$. Nous retrouvons ce résultat au §6, par une application de la formule de Porteous. Nous remercions Geir Ellingsrud qui a aimablement effectué ce calcul avec nous. Cette méthode de calcul se trouve déjà dans Bertin-Sols [13].

Dans un autre travail [7], nous appliquons notre méthode, qui nous a déjà servi dans le cas des fibrés de rang quelconque sur $\mathbb{P}^2$ (cf [6]), à l'étude des plans sauteurs du fibré instanton général. En revanche, en dépit de nos efforts, nous n'avons pas réussi à appliquer cette méthode à l'étude des droites sauteuses des fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}^3$ avec première classe de Chern impaire.

Jürgen Bingener a bien voulu écrire pour nous un appendice regroupant les résultats de la théorie des déformations que nous utilisons et pour lesquels nous ne connaissions pas de références.

Le corps de base est $\mathbb{C}$.

§1. Stratification cohomologique

Dans ce paragraphe et les deux suivants, nous nous plaçons dans un cadre plus général que celui des restrictions de fibrés aux droites projectives, en prévision de [7].

Soient $P \xrightarrow{p} X$ un fibré en $\mathbb{P}^n$, provenant d'un fibré vectoriel, et $\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(1)$ le fibré hyperplan relatif. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur P, plat sur X. On note $\mathscr{F}_x$ la restriction $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_{P_x}$, et $\mathscr{F}(k)$ le faisceau $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_P(k)$.

1.1. Definition: On appelle stratification cohomologique de $\mathscr{F}$ sur X (ou simplement: de $\mathscr{F}$) la famille des $S\mathscr{F}(i,j,k) = \{x \in X/h^i(P_x, \mathscr{F}_x(k)) \geq j\}$, où $0 \leq i \leq n, j \geq 1$ et $k \in Z$.

1.2. D'après les théorèmes généraux, les ensembles $S\mathscr{F}(i,j,k)$ définissent des sous-ensembles algébriques (réduits) de X, et leur formation commute aux changements de base (en tant qu'ensembles). Une définition naturelle de structure de schéma sur les $S\mathscr{F}(i,j,k)$ n'étant pas immédiate, nous ne l'introduirons ici que dans le cas où i est maximal.

1.3. Definition: On note encore $S\mathscr{F}(n,j,k)$ le schéma défini par le $(j-1)$-ième idéal de Fitting du faisceau $R^n p_* \mathscr{F}(k)$.

1.4. Le schéma $S\mathscr{F}(n,j,k)$ a bien pour support l'ensemble $S\mathscr{F}(n,j,k)$ défini précédemment; sa formation commute aux changements de base, en tant que schéma. Il diffère en général du schéma défini par l'annulateur de $R^n p_* \mathscr{F}(k)$, lequel présente l'inconvénient que sa formation ne commute pas aux changements de base. Dans la suite, on entendra par stratification cohomologique tantôt la famille des ensembles algébriques $S\mathscr{F}(i, j, k)$, tantôt la famille des sous-schémas $S\mathscr{F}(n, j, k)$.

1.5. Exemple et Definition: Soit E un fibré de rang deux sur $\mathbb{P}^3$ avec $c_1 = 0$. Notons $G(1, 3) \xleftarrow{q} \mathbb{D} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^3$ le diagramme d'incidence habituel, et $F \to \mathbb{D} \xrightarrow{q} G(1, 3)$ le fibré p^*E.

Suivant Gruson-Peskine, nous définirons les schémas des droites sauteuses, bisauteuses, hypersauteuses de E respectivement par:

$$\mathscr{S}(E) = SF(1, 1, -1), \quad \mathscr{B}(E) = SF(1, 1, 0),$$

$$\mathscr{H}(E) = SF(1, 1, 1)$$

§2. Propriétés stables

Pour nous, une stratification d'un schéma X est une famille $(X_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles algébriques, ou de sous-schémas de X. Parmi les propriétés locales susceptibles d'être vérifiées par une stratification, nous nous intéressons à celles qui sont préservées par certains changements de base.

2.1. Definition: La propriété locale A est stable si pour toute submersion φ: $X \to Y$ de variétés lisses, on a les propriétés suivantes:

a. si une stratification $(Y_i)_{i \in I}$ de Y a la propriété A, la stratification $(\varphi^*(Y_i))_{i \in I}$ l'a aussi.

b. si une stratification $(X_i)_{i \in I}$ de X a la propriété A, il existe un ouvert de Zariski dense Y' de Y tel que, pour tout y dans Y', la stratification induite sur la fibre X_y ait la propriété A.

Voici une série d'exemples de propriétés stables:

2.2. ⟨⟨ X_i est de codimension l ⟩⟩

2.3. ⟨⟨ X_i est lisse en dehors de X_j ⟩⟩

2.4. ⟨⟨ X_j est le lieu singulier de X_i, c'est un lieu de points doubles ordinaires⟩⟩. Ici on entend que toute section de X_i transverse à X_j est localement (dans la topologie étale) isomorphe à un cône quadratique à singularité isolée.

2.5. Remarque: Parmi les exemples précédents, seule la propriété 2.2. ne dépend pas de la structure schématique.

§3. Transfert de propriétés stables

3.1. Definition: Soit E_0 un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^k$, et $n \leq k$ un entier. On dit que E_0 satisfait la condition (ENDn) si:

$$H^2(\mathbb{P}^k, \operatorname{End} E_0(-1)) = H^3(\mathbb{P}^k, \operatorname{End} E_0(-2)) = \dots$$

$$\dots = H^{k-n+1}(\mathbb{P}^k, \operatorname{End} E_0(-k+n)) = 0$$

Notons que cette condition assure que, pour tout n-plan L, l'application de restriction $H^1(\mathbb{P}^k, \operatorname{End} E_0) \to H^1(L, \operatorname{End} E_0|_L)$ est surjective.

3.2. Notations: Soient S un schéma et E un fibré sur $\mathbb{P}^k_S$. On note $G_S^{n,k}$ la grassmannienne des n-plans de $\mathbb{P}^k_S$, et $G^n E$ la famille paramétrée par $G_S^{n,k}$ des restrictions de E aux n-plans.

3.3. Proposition: *Soit A une propriété stable. Soient E_0 un fibré sur $\mathbb{P}^k$, M son module local et $E \to \mathbb{P}^k_M$ une déformation semi-universelle de E_0. Soit $n \leq k$. On suppose que M est lisse et que E_0 vérifie la condition* (ENDn). *Si pour tout n-plan L, la stratification cohomologique de la déformation semi-universelle de $E_0|_L$ vérifie la propriété A, alors, pour m général dans M, la stratification cohomologique de $G^n\, E_m$ vérifie la propriété A.*

Demonstration: Soit L un n-plan. Notons $F_L \to N_L \times \mathbb{P}^n$ la déformation semi-universelle de $E_0|_L$. La famille $G^n E$ étant une déformation de $E_0|_L$, il existe un morphisme de déformation $\varphi_L : G_M^{n,k} \to N_L$; notons $\hat{\varphi}_L$ la restriction de φ_L à $M \times \{L\}$. On a la diagramme suivant, où τ désigne les applications de Kodaira-Spencer, qui commute (cf. Appendice, A3)

$$\begin{tikzcd}
T_0 M \arrow[r, "T_{\hat{\varphi}_L}(0)"] \arrow[d, "\tau_E"', "\wr"] \arrow[dr, "\tau_{G^n E}"] & T_0 N_L \arrow[d, "\tau_{F_L}", "\wr"'] \\
\operatorname{Ext}^1(E_0, E_0) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(E_0|_L, E_0|_L).
\end{tikzcd}$$

La flèche du bas est surjective d'après la condition (ENDn) pour E_0. On en déduit que $\hat{\varphi}_L$ est une submersion en 0, et donc aussi φ_L, cela pour tout L. Par stabilité (2.1.a), la stratification cohomologique de $G^n E$ a la propriété A dans un voisinage $M' \times G^{n,k}$ de $\{0\} \times G^{n,k}$, et, encore par stabilité (2.1.b), la stratification cohomologique de $G^n E_m$ a la propriété A pour m général dans M'.

§4. Déformations semi-universelles sur $\mathbb{P}^1$

4.1. Notations: Dans le cas d'une famille $F \to P \xrightarrow{p} X$ de fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}^1$, de première classe de Chern nulle, on pose, pour $i \geq 0$:

$S^iF = SF(1, 1, i-2)$. S^iF est ainsi défini schématiquement; son support est l'ensemble des s où F_s est isomorphe à $\mathcal{O}_{P_s}(-\ell)\oplus\mathcal{O}_{P_s}(\ell)$ avec $\ell \geq i$.

4.2. PROPOSITION *Soient* $a \geq 1$, F_0 *le fibré* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ *et* $F \to N \times \mathbb{P}^1$ *une déformation semi-universelle de* F_0.
Alors, pour tout $i \geq a$:
 (i) S^iF *est de codimension pure* $2i-1$.
 (ii) S^iF *est lisse en dehors de* $S^{i+1}F$.
 (iii) S^1F *admet une singularité quadratique le long de* $S^2F - S^3F$.

DEMONSTRATION: Les propriétés (i), (ii), et (iii) sont classiques (cf. Brieskorn [5]) si on remplace les S^iF par leurs supports réduits. Tout ce qui reste à montrer est donc que $S^iF - S^{i+1}F$ est réduit en tout point. D'après l'ouverture de la versalité et le point A_2 de l'appendice, il suffit de montrer que S^aF est réduit ie que son idéal est l'idéal maximal de l'origine dans N. Posons: $G_0 = F_0(a-2) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)+\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2a-2)$. Soit M_0 une matrice $(2a, 2a+1)$ de polynômes homogènes de degré un sur $\mathbb{P}^1$, de rang maximal en tout point. On peut présenter ainsi G_0:

$$0 \to G_0 \to (2a+2)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2a-2) \xrightarrow{(M_0,\,0)} 2a\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2a-1) \to 0.$$

Soit S le germe en $s_0 = (M_0, 0)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathbb{P}^1}((2a+2)\ \mathcal{O}(2a-2),\ 2a\ \mathcal{O}(2a-1))$.
Considérons la suite exacte universelle sur $S \times \mathbb{P}^1$:

$$(1)0 \to G \to (2a+2)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_S}(2a-2) \xrightarrow{\lambda} 2a\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_S}(2a-1) \to 0$$

où, par définition, la restriction de λ à $\mathbb{P}^1_s$ est l'homomorphisme s. La famille $G \to \mathbb{P}^1_S \xrightarrow{\pi} S$, est une déformation complète de G_0 (cf. Appendice, A4). Si on note φ: $S \to N$ le morphisme de déformation de $G(2-a)$ vers F, on en déduit (A2) que φ est une submersion; comme l'image réciproque par φ de S^aF est $S^aG(2-a)$, on se ramène à montrer que ce dernier schéma est réduit. Or $S^aG(2-a)$ n'est autre que $SG(1, 1, 0)$, qui est défini par le 0-ième idéal de Fitting de $R^1\ \pi_*G$. On obtient une résolution de ce faisceau à partir de la suite (1):

$$(4a^2+2a-2)\mathcal{O}_S \xrightarrow{\Lambda} 4a^2\mathcal{O}_S \to R^1\pi_*G \to 0$$

où l'on a fait l'identification naturelle: $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_S}(k) = (k+1)\ \mathcal{O}_S$. Puisque $h^1(\mathbb{P}^1, G^0) = 1$, le corang de Λ est 1 en s_0.

Moyennant des permutations de lignes et de colonnes, on peut donc écrire, pour tout $s \in S$:

$$\Lambda(s) = \left| \begin{array}{c|c} A(s) & \begin{matrix} * \dots * \\ \vdots \quad \vdots \\ * \dots * \end{matrix} \\ \hline * \dots * & \alpha_1 \dots \alpha_{2a-1} \end{array} \right|$$

où $A(s_0)$ est une matrice $(4a^2 - 1, 4a^2 - 1)$ inversible.

L'idéal de $SG(1, 1, 0)$ est engendré par les $2a - 1$ fonctions: $f_j = \alpha_j \det A + \beta_j$, $1 \leq j \leq 2a - 1$. Comme les coefficients de Λ sont des coordonnées sur S, ces fonctions définissent un schéma lisse.

§5. Le fibré instanton général

5.1. DEFINITIONS: Un fibré instanton est un fibré stable E de rang deux sur $\mathbb{P}^3$, avec $c_1 = 0$ et $H^1(\mathbb{P}^3, E(-2)) = 0$.

On note Inst(n) le module des fibrés instantons de deuxième classe de Chern n. Par ailleurs, on appelle fibré de 't Hooft tout fibré E de rang deux sur $\mathbb{P}^3$ avec $c_1 = 0$ tel que $E(1)$ admette une section dont le schéma des zéros est une réunion disjointe de droites. Il est bien connu (cf. Hartshorne [10], Example 4.3.1) que les fibrés de 't Hooft de deuxième classe de Chern n correspondent à des points lisses de Inst (n) et forment une famille irréductible. Nous noterons Inst$^0(n)$ la composante irréductible de Inst(n) qui contient les fibrés de 't Hooft. Remarquons que pour $n = 1, 2, 3, 4$, Inst(n) est irréductible (cf respectivement Barth [1], Hartshorne [10], Ellingsrud-Stromme [8], Barth [3]) et on a donc alors Inst$(n) = $ Inst$^0(n)$. Nous disons qu'une propriété est vérifiée par le fibré instanton général (de deuxième classe de Chern n) s'il existe un ouvert de Zariski dense de Inst$^0(n)$ où les fibrés ont cette propriété.

5.2. PROPOSITION: *Tout fibré de 't Hooft vérifie la condition* (END1).

DEMONSTRATION: Soit E un fibré de 't Hooft, de deuxième classe de Chern n. Il s'agit de montrer:

$$H^2(\mathbb{P}^3, \operatorname{End} E(-1)) = H^3(\mathbb{P}^3, \operatorname{End} E(-2)) = 0.$$

On a $H^3(\mathbb{P}^3, \operatorname{End} E(-2)) \simeq H^0(\mathbb{P}^3, \operatorname{End} E(-2)) = 0$ car E est stable. D'autre part, la suite de définition de E s'écrit:

$$0 \to \mathcal{O} \to E(1) \to I_Y(2) \to 0 \tag{1}$$

où $Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} D_i$ est la réunion de $n + 1$ droites disjointes.

En tensorisant par $E(-2)$ et en prenant la cohomologie, on obtient la suite exacte:

$$H^2(\mathbb{P}^3, E(-2)) \to H^2(\mathbb{P}^3, \mathrm{End}\, E(-1)) \to H^2(\mathbb{P}^3, E \otimes I_Y) \tag{2}$$

Or $H^2(\mathbb{P}^3, E(-2)) \simeq H^1(\mathbb{P}^3, E(-2)) = 0$, car E est un instanton. Par ailleurs, en tensorisant par E la suite $0 \to I_Y \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_Y \to 0$ et en prenant la cohomologie, on obtient la suite exacte:

$$H^1(\mathbb{P}^3, E \otimes \mathcal{O}_Y) \to H^2(\mathbb{P}^3, E \otimes I_Y) \to H^2(\mathbb{P}^3, E). \tag{3}$$

On déduit facilement de (1) que ce dernier espace est nul. D'autre part, on déduit aussi de (1) que: $E(1) \otimes \mathcal{O}_Y \simeq I_Y \otimes \mathcal{O}_Y$; or ce dernier faisceau est isomorphe au fibré conormal de Y dans $\mathbb{P}^3$, à savoir $2 \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_{D_i}(1)$. D'où $E \otimes \mathcal{O}_Y \simeq 2 \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_{D_i}$ et $H^1(\mathbb{P}^3, E \otimes \mathcal{O}_Y) = 0$. Ainsi, d'après (3): $H^2(\mathbb{P}^3, E \otimes I_Y) = 0$, et donc d'après (2): $H^2(\mathbb{P}^3, \mathrm{End}\, E(-1)) = 0$.

5.3 Demonstration du Theoreme: Soit E_0 un fibré de 't Hooft, et $E \to M \times \mathbb{P}^3$ une déformation semi-universelle de E_0. Le schéma M est lisse et E_0 vérifie (END1): on peut appliquer la proposition 3.3 à E.

On considère les propriétés stables suivantes d'une stratification (S^i): S^i est de codimension $2i-1$, S^i est lisse en dehors de S^{i+1} et S^1 présente une singularité quadratique le long de $S^2 - S^3$. La stratification cohomologique de la déformation semi-universelle de $E_0|_L$ vérifie ces propriétés pour toute droite L d'après 4.2. On en déduit par 3.3 que ces propriétés sont vérifiées par la stratification $(S^i\ G^1\ E_m)$ pour m général dans M.

Or les strates pour $i = 1, 2, 3$ de cette stratification sont par définition (1.5) les schémas des droites respectivement sauteuses, bisauteuses, hypersauteuses de E_m. On en déduit le théorème puisque $\dim G(1, 3) = 4$. Le calcul des degrés fait l'objet du paragraphe suivant.

5.4. Remarque: On peut vérifier que $\mathcal{S}(E)$ est toujours un diviseur. Pour le fibré instanton général, c'est donc une hypersurface réduite.

§6. Le calcul du degré

6.1. Le fait que le degré de $\mathcal{S}(E)$ vaut $c_2(E)$ est général pour un fibré E semistable de rang deux sur $\mathbb{P}^k$ avec $c_1(E) = 0$ (Barth [1], Theorem 2).

Quant au degré de $\mathcal{B}(E)$, nous allons prouver le résultat plus général suivant:

6.2. Proposition: (*Gruson-Peskine*). *Soit E un fibré instanton de deuxième*

classe de Chern $n \geq 1$, tel que le schéma $\mathscr{B}(E)$ de ses droites bisauteuses soit de codimension trois.
Alors le degré de $\mathscr{B}(E)$ est $2\binom{n+1}{3}$.

6.3. LA COHOMOLOGIE ENTIERE DE G (1, 3): Considérons les cycles de Schubert α et β de $G(1, 3) = G$: α est le cycle des droites qui rencontrent une droite fixée, et β est le cycle des droites contenues dans un plan fixé. Alors α et β engendrent le cohomologie entière de G(cf. par exemple Hodge-Pedoe [11], Chapter XIV); plus précisément:

$$H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}G; \quad H^2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\alpha; \quad H^4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\alpha^2 \oplus \mathbb{Z}\beta;$$

$$H^6(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\alpha\beta; \quad H^8(G, Z) = \mathbb{Z}*;$$

et on a les relations suivantes:

$$\alpha^2\beta = \beta^2 = *, \quad \alpha^4 = 2*, \quad \text{et}$$

$$\alpha^3 = 2\alpha\beta \tag{1}$$

Naturellement, quand on parle du degré d'une courbe de G, on entend le coefficient suivant le générateur $\alpha\beta$ de la classe de cette courbe dans $H^6(G, \mathbb{Z})$.

6.4. LE FIBRE UNIVERSEL QUOTIENT Q SUR $G(1, 3)$: C'est le fibré de rang deux quotient du fibré tautologique τ sur G. Si on note V l'espace vectoriel tel que $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^3$, on a la suite exacte sur G: $0 \to \tau \to V \times G \to Q \to 0$. Comme $c_1(\tau) = -\alpha$ et $c_2(\tau) = \beta$ (cf. Borel-Hirzebruch, [4], Theorem 2.9.4), on déduit de cette suite exacte:

$$c_1(Q) = \alpha, \quad c_2(Q) = \alpha^2 - \beta. \tag{2}$$

D'autre part, soit D la variété d'incidence:

$$\begin{tikzcd} & G \times \mathbb{P}^3 = X \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ G & \mathbb{D} \arrow[l, "q"] \arrow[r, "p"'] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

D'après le diagramme commutatif suivant sur X:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & V \times X \arrow[d, equal] & & \\ 0 \arrow[r] & q_1^*\tau \arrow[r] & V \times X \arrow[r] & q_1^*Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

on voit qu'il existe une section canonique $\delta \in H^0(X, Q \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, dont le schéma des zéros est la variété $\mathbb{D}$. Le complexe de Koszul de δ fournit une suite exacte sur X:

$$0 \to \Lambda^2 Q^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-2) \to Q^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\mathbb{D}} \to 0 \tag{3}$$

6.5. La Cohomologie d'un Instanton: Soit E un fibré instanton, avec $c_2 = n \geq 1$. Soit L une droite de $\mathbb{P}^3$. De la suite exacte sur $\mathbb{P}^3$: $0 \to \mathcal{O}(-2) \to 2\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_L \to 0$, et de la nullité de $H^2(\mathbb{P}^3, E(-2))$, on déduit: $H^2(\mathbb{P}^3, E(i)) = 0$ pour $i \geq -1$. Le théorème de Riemann-Roch pour E permet alors de compléter le tableau suivant:

i	-2	-1	0
$h^1(E(i))$	0	n	$2n-2$
$h^2(E(i))$	0	0	0

6.6. Preuve de 6.2: En tensorisant la suite (3) par $p_1^* E$, on obtient la suite exacte:

$$0 \to \Lambda^2 Q^* \boxtimes E(-2) \to Q^* \boxtimes E(-1) \to p_1^* E \to p^* E \to 0$$

En appliquant q_{1*} à cette suite, et compte tenu de 6.5, on obtient la suite exacte:

$$nQ^* \xrightarrow{\lambda} (2n-2)\mathcal{O}_G \to R^1 q_* p^* E \to 0$$

Par définition, le schéma $\mathcal{B}(E)$ est le schéma d'annulation de $\Lambda^{2n-2}\lambda$. Comme par hypothèse, $\mathcal{B}(E)$ est de codimension trois, on peut appliquer la formule de Porteous (Kempf-Laksov [12], Corollary 11) et on obtient que la classe de $\mathcal{B}(E)$ est $c_3(n\,Q)$.
Un calcul standard donne:

$$c_3(n\,Q) = \binom{n}{3}(c_1(Q))^3 + n(n-1)c_1(Q)c_2(Q)$$

On en déduit d'après les formules (1) et (2):

$$c_3(n\,Q) = \binom{n}{3} 2\alpha\beta + n(n-1)\alpha\beta = 2\binom{n+1}{3}\alpha\beta,$$

soit: degré $\mathcal{B}(E) = 2\binom{n+1}{3}$.

Appendice par Jürgen Bingener (Regensburg)

Soit F_0 un faisceau cohérent sur un schéma projectif lisse X_0.

Soit (S, s_0) un germe de schéma. Une déformation de F_0 de base

(S, s_0) est un faisceau cohérent $F \to S \times X_0$, qui est S-plat et qui est muni d'un isomorphisme de F_{s_0} vers F_0.

Un morphisme de la déformation F', de base (S', s_0'), vers la déformation F'', de base (S'', s_0''), est un morphisme de germes, φ: $S' \to S''$, muni d'un isomorphisme de φ^*F'' vers F', compatible avec les isomorphismes de $F'_{s_0'}$ et $F''_{s_0''}$ vers F_0 (φ^*F'' est une notation abusive pour $(\varphi \times 1_{X_0})^*F''$).

Une déformation F de F_0, de base (S, s_0), est dite verselle si elle vérifie la propriété suivante:

Soient $F' \to S' \times X_0$ et $F'' \to S'' \times X_0$ deux déformations de F_0, θ: $S' \to S''$ un morphisme de F' vers F'' qui soit un plongement, φ: $S' \to S$ un morphisme de F' vers F. Alors il existe un morphisme ψ: $S'' \to S$ de F'' vers F tel que les deux morphismes de déformations φ et $\psi \circ \theta$ soient égaux.

Une déformation F de F_0 est dite complète si, pour toute déformation G de F_0, il existe un morphisme de G vers F. Notons qu'une déformation verselle est nécessairement complète (prendre $F' = F_0$ et $F'' = G$).

A toute déformation F de F_0 de base (S, s_0) est associée une application linéaire, dite de Kodaira-Spencer, notée τ_F, de l'espace tangent de Zariski $T_{s_0}S$ vers $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_0}}(F_0, F_0)$. La formation de τ est naturelle en ce sens qu'elle commute à la différentielle des morphismes de déformation.

Une déformation est dite semi universelle si elle est verselle et si son application de Kodaira-Spencer est bijective.

On a les résultats suivants:

Tout faisceau F_0 admet une déformation semi-universelle, unique à isomorphisme près. Si $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X_0}}(F_0, F_0) = 0$, cette déformation est à base lisse. Si $F \to S \times X_0$ est un faisceau cohérent S-plat, l'ensemble des points fermés s de S où F est une déformation verselle de F_s définit un ouvert de Zariski de S ("Offenheit der Versalität").

Pour prouver l'existence d'une déformation semi-universelle, on applique au foncteur des classes d'isomorphisme de déformations de F_0 un résultat d'Artin (Artin 1, Theorem 1.6): on obtient une déformation de F_0, qui est formellement semi-universelle d'après Rim (Rim, 1.13), et donc semi-universelle d'après Artin (Artin 2, Theorem 3.3.). Le critère de lissité est classique et facile à obtenir. La version formelle de l'ouverture de la versalité est encore un résultat d'Artin (Artin 2, Theorem 4.4); or, en présence d'une déformation semi-universelle, versalité formelle et versalité sont équivalentes.

Enfin nous affirmerons les faits suivants, dont la démonstration ne présente pas de difficultés:

A1. Si une déformation à base lisse a son application de Kodaira-Spencer surjective, elle est verselle.

A2. Si F_0 admet une déformation complète F à base lisse, alors la déformation semi-universelle U de F_0 est à base lisse, et les morphismes de déformations de F vers U sont des submersions.

A3. Si $F \to S \times X_0$ est une déformation de F_0, f un morphisme d'un schéma lisse Y_0 vers X_0 tel que $\mathrm{Tor}_1^{f^{-1}(\mathcal{O}_{X_0})}(f^{-1}(F_0), \mathcal{O}_{Y_0})$ soit nul, alors $G = (1_X \times f)^*F$ est une déformation de f^*F_0, et le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} T_{s_0}S \arrow[r, "\tau_F"] \arrow[dr, "\tau_G"'] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X0}}(F_0, F_0) \arrow[d, "f^*"] \\ & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{Y0}}(f^*F_0, f^*F_0) \end{tikzcd}$$

A4. Si $0 \to \mathcal{U} \to \pi^*F_0 \to Q \to 0$ est la suite exacte universelle sur un schéma Quot $\times X_0$, alors $\tau_{\mathcal{U}}$ (resp. τ_Q) est l'application naturelle de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}$ $(\mathcal{U}_0, Q_0)$ vers $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_0}}$ $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0)$ (resp. vers $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_0}}$ (Q_0, Q_0)).

Donc, si Quot est lisse en 0, $\mathcal{U}$(resp. Q) est verselle dès que Ext^1 $(\mathcal{U}_0, F_0)$ (resp $\mathrm{Ext}^1(F_0, Q_0)$) est nul.

Bibliographie de l'Appendice

Artin 1: Algebraization of formal moduli I. *Global Analysis 21–71,* Tokyo 1969.
Artin 2: Versal deformations and algebraic stacks, *Inventiones Math. 27,* 165–189 (1974).
Rim: Formal deformation theory, SGA 7, I. Exposé VI, *Lecture Notes n⁰ 288.*

Bibliographie

[1] W. Barth: Some Properties of stable rank-two vector bundles on $\mathbb{P}_n$. *Math Ann. 226* (1977) 125-150.
[2] W. Barth: Counting singularities of quadratic forms on vector bundles. In: *Vector Bundles and Differential Equations.* Proceedings (Nice 1979) pp. 1–19. *Progress in Mathematics 7.* Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1980.
[3] W. Barth: Irreducibility of the space mathematical instanton bundles with Rank 2, $c_2 = 4$. *Math. Ann. 258* (1981) 81–106.
[4] A. Borel et F. Hirzebruch: On characteristic classes of homogeneous spaces II, *Am. J. Math. 81* (1959) 351–382.
[5] E. Brieskorn: Über holomorphe $\mathbb{P}_n$-Bündel über $\mathbb{P}_1$. *Math. Ann. 157,* (1967) 343–357.
[6] J. Brun et A. Hirschowitz: Droites de saut des fibrés stables de rang élevé sur $\mathbb{P}_2$. *Math. Z. 181* (1982) 171–178.
[7] J. Brun et A. Hirschowitz: Variété des plans sauteurs du fibré instanton général, en préparation.
[8] G. Ellingsrud et S.A. Strømme: Stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$. *Math. Ann. 255* (1981) 123–135.
[9] L. Gruson et C. Peskine: Courbes de l'espace projectif: variétés de sécantes. In: *Enumerative and Algebraic Geometry.* Nice (1981). *Progress in Mathematics,* Birkhäuser.
[10] R. Hartshorne: Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$. *Math. Ann. 238* (1978) 229–280.

[11] W. Hodge et D. Pedoe: *Methods of Algebraic Geometry*. Volume II. Cambridge University Press 1952.
[12] G. Kempf et D. Laksov: The determinantal formula of Schubert calculus. *Acta Math. 132* (1973) 153–162.
[13] J. Bertin et I. Sols: Quelques formules énumératives concernant les fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^r$. *C.R. Acad. Sci. Paris 294* (1982) 197–200.

(Oblatum 6-I-1983)

Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06034-Nice Cedex
France