COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN COQUET
PIERRE LIARDET

Répartitions uniformes des suites et indépendance statistique

Compositio Mathematica, tome 51, nº 2 (1984), p. 215-236
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1984__51_2_215_0>

Compositio Mathematica 51 (1984) 215–236

RÉPARTITIONS UNIFORMES DES SUITES ET INDÉPENDANCE STATISTIQUE

Jean Coquet et Pierre Liardet

Résumé

Nous étudions la compatibilité de divers types de μ-répartition d'une suite dans un espace métrique compact X: ceux qui sont liés à la notion d'indépendance statistique de suites extraites et ceux qui sont liés à l'uniformité de la μ-répartition de suites extraites.

Summary

We investigate the relations between different types of μ-distribution for a sequence which takes values in a compact metric space X: those which involve the notion of statistical independence of subsequences and those which are related to the equi-μ-distribution of subsequences.

Introduction

X désigne un espace métrique compact, μ une mesure de probabilité sur X, μ^∞ la mesure-produit induite par μ sur $X^{\mathbb{N}}$, et u une suite à termes dans X. De nombreux résultats sont connus sur la famille des suites: $\mathrm{n} \to u\,(n+k)$, où $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$. Citons en particulier le résultat [1] de Baayen et Hedrlin attestant l'existence d'une suite u pour laquelle cette famille est uniformément μ-répartie [2]. D'autres études sont relatives à l'indépendance statistique [9] des suites $n \to u\,(n+k)$. Motivé par un théorème de Halasz et Vaughan, l'un des auteurs [2] a étudié les propriétés de suites extraites du type $n \to u\,(kn)$ $k \in \mathbb{N}^*$.

Nous obtenons ici quelques résultats relatifs à ces familles de suites extraites ou à d'autres familles.

I.1. Définitions

Une famille dénombrable S de suites d'entiers naturels est dite *éparse* [3] si, pour tout couple (σ, τ) d'éléments de S, distincts:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Card}\{ n \in \mathbb{N};\, n < N, \quad \sigma(n) = \tau(n)\} = 0.$$

S désigne une famille éparse de suites tendant vers $\to \infty$, on suppose les éléments de S numérotés: $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k, \ldots$

Une suite u: $\mathbb{N} \to X$ est dite *μ-répartie indépendamment selon S* si les suites $u\circ\sigma_k$, $k \in \mathbb{N}$, sont μ-réparties et statistiquement indépendantes [9].

Il revient au même de dire [9] que la suite: $\otimes_k u\circ\sigma_k = (u(\sigma_k(n)))_{n\geqslant 0}$ dans $X^{\mathbb{N}}$ est μ^∞-répartie ou encore que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ et tout h-uple $(f_0,\ldots,f_{h-1})$ de fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$,

$$\operatorname*{Lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \Big(\prod_{k<h} f_k(u(\sigma_k(n))) \Big) = \prod_{k<h} \int_X f_k \, d\mu .$$

D'autre part, u est *μ-répartie uniformément selon S* si la famille de suites $(u\circ\sigma_k;\ k \in \mathbb{N})$ est uniformément μ-répartie (equi-μ-distributed, [7], p. 193), autrement dit si, pour toute fonction f continue de X danc $\mathbb{C}$,

$$\int_X f d\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(u(\sigma_k(n))) \text{ uniformément par rapport à } k \in \mathbb{N},$$

ou encore si pour tout ensemble de μ-continuité $A \subset X$(ie, $\mu\ (\partial A) = 0$, [7], p. 174),

$$\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \chi_A(u(\sigma_k(n)))$$

uniformément par rapport à $k \in \mathbb{N}$, χ_A désignant la fonction caractéristique de A.

I.2. Exemples, notations

Dans le cas où $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ avec $\tau_k(n) = n + k$, la μ-répartition indépendante selon S est la complète μ-répartition [9] et la μ-répartition uniforme selon S est la μ-répartition uniforme habituelle (μ-well-distributed sequence).

Dans le cas où $S = \{\pi_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$ avec $\pi_k(n) = kn$, on retrouve respectivement la complète μ-répartition multiplicative et l'uniform μ-répartition multiplicative définies dans [2].

D'autres exemples sont donnés dans [2] et [3].

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\omega_k(n) = n^k$.

1.3. Résultats

Dans le cas où μ n'est pas concentrée en un point, les notions de μ-répartition indépendante et uniform selon $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ sont incompatibles ([7], p. 204).

Par des arguments semblables, on vérifie aisément qu'il en est de même lorsque $S = \{\pi_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Cette observation conduit à la question suivante: si S et T sont deux familles éparses de suites tendant vers $+\infty$, existe-t-il des suites μ-réparties à la fois indépendamment selon S et uniformément selon T?.

En nous plaçant pour simplifier dans la situation où X est le tore $\Pi = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Haar (on parle alors d'équirépartition), nous étudions quelques cas particuliers.

THÉORÈME 1: *Soit* $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{K}\}$ *où* $\mathbb{K}$ *est un sous-ensemble relativement dense de* $\mathbb{N}$ (*i.e., la distance de* 2 *éléments consécutifs de* $\mathbb{K}$ *est majorée*); *il n'existe aucune suite* u: $\mathbb{N} \to \Pi$, *qui soit équirépartie à la fois indépendamment et uniformément selon* S.

THÉORÈME 2: *Il existe une suite* u: $\mathbb{N} \to \Pi$, *équirépartie indépendamment selon* S *et uniformément selon* T *dans les cas suivants*:

1*er Cas*: $S = \{\pi_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$ *et* $T = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$;
2*ème Cas*: $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ *et* $T = \{\pi_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$;
3*ème Cas*: $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ *ou* $\{\pi_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$ *et* $T = \{\omega_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$;
4*ème Cas*: $S = \{\pi_k;\ k \in A\}$ *et* $T = \{\pi_k;\ k \in B\}$ *où* A *et* B *sont des parties infinies de* $\mathbb{N}^*$ *telles que*:

$$\forall (n_1, n_2) \in A \times B, \qquad (n_1, n_2) = 1.$$

Nous commencerons par établir le résultat suivant utilisé dans la preuve du Théorème 1;

THÉORÈME 3: *Soit* $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{K}\}$ *avec* $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$. *L'équirépartition uniforme selon* S *est équivalente à l'équirépartition uniforme ordinaire* (*i.e., selon* $\{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ *si et seulement si* $\mathbb{K}$ *est relativement dense dans* $\mathbb{N}$.

En fait, ce résultat est valable dans un espace métrique compact X quelconque muni d'une mesure μ non-concentrée en un point.

Au paragraphe VIII, nous montrons qu'avec une hypothèse supplémentaire sur S, l'ensemble des suites μ-réparties uniformément selon S est μ^∞-négligeable (théorème 4).

D'autre part, lorsque S est stable pour la composition, toute suite adhérente dans $X^{\mathbb{N}}$ à $\{u o \sigma\colon \sigma \in S\}$ où u est une suite μ-répartie uniformément selon S est encore μ-répartie uniformément selon S (théorème 5).

Enfin, nous étudions la possibilité de μ-répartition uniforme selon certaines familles de progressions arithmétiques, répondant par l'affirmative dans le cas où $S = \{\tau_k\} \cup \{\pi_k\}$, par exemple et par la négative lorsque S est formée de toutes les suites $n \to an + b$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$.

II. Preuve du théorème 3

II.1. Cas où $\mathbb{K}$ *est relativement dense*

Soit u: $\mathbb{N} \to \Pi$, équirépartie uniformément selon $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{K}\}$, soit f: $\Pi \to \mathbb{C}$ continue, soit $M = \operatorname{Sup}\{|f(x)|;\ x \in \Pi\}$ et soit enfin $a = \operatorname{Max}$

$\{k_{\imath+1} - k_\imath;\ \imath \in \mathbb{N}\}$ où $k_0 < k_1 < \ldots < k_\imath < k_{\imath+1} < \ldots$ désignent les éléments de $\mathbb{K}$. On a:

$$\int_\Pi f = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(u(n + k_\imath))$$

uniformément par rapport à $\imath \in \mathbb{N}$. (1)

Etant donné $j \in \mathbb{N}$, soit $\imath$ l'entier déterminé par $k_\imath \leqslant j < k_{\imath+1}$.

$$\left| \sum_{n<N} f(u(n + k_\imath)) - \sum_{n<N} f(u(n+j)) \right| \leqslant 2aM. \tag{2}$$

De (1) et (2), on déduit aisément que:

$$\int_\Pi f = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(u(n+j))$$

uniformément par rapport à $j \in \mathbb{N}$. □

II.2. Cas contraire

Soit u: $\mathbb{N} \to \Pi$ équirépartie uniformément selon $\mathcal{S} = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, a fortiori selon $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{K}\}$. On va modifier u and une suite v qui soit encore uniformément équirépartie selon S mais pas selon $\mathcal{S}$.

De la suite $(k_{\imath+1} - k_\imath)_{\imath \in \mathbb{N}}$, on extrait une suite:

$$(y_m)_{m \in \mathbb{N}} = \left(k_{t(m)+1} - k_{t(m)}\right) \text{ croissante et tendant vers } +\infty.$$

Soit alors (d_m) une suite d'entiers vérifiant $d_m < y_m$,

$$\left(d_m \cdot y_m^{-1}\right) \text{ decroissante, } d_m \underset{m \to \infty}{\to} \infty,\ d_m \cdot y_m^{-1} \underset{m \to \infty}{\to} 0.$$

On note $z_m = k_{t(m)+1} - d_m$ et $J_m = [z_m, k_{1+t(m)}[$. On pose:

$$v(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} J_m. \\ u(n) \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$$\text{Si } d_m > N, \qquad \frac{1}{N} \sum_{z_m \leqslant n < z_m + N} f(v(n)) = f(0),$$

de sorte que l'on n'a pas, pour $f(x)=e^{2i\pi x}$ par exemple:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{z_m \leqslant n < z_m+N} f(v(n)) = \int_{\Pi} f,$$

uniformément par rapport à $m \in N$.

Donc, v n'est pas équirépartie uniformément selon $\mathscr{S}$.

Vérifions maintenant que le passage de u à v n'as pas altéré l'équirépartition uniforme selon $S=\{\tau_k;\ k\in \mathbb{K}\}$.

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\Delta_j=[k_j, k_{j+1}[$. Soit $J=[k_\imath, k_\imath+N[$, soit p l'entier vérifiant $k_\imath+N\in\Delta_p$, de sorte que:

$$J=\bigcup_{\imath\leqslant j<p} \Delta_j \cup [k_p, k_\imath+N[.$$

Notons $\mathscr{E}=[\imath, p[\cap t(\mathbb{N})=\{t(a),\dots,t(b)\}$.

Si $j\in[\imath, p[\setminus\mathscr{E}$, $v(n)=u(n)$ quel que soit $n\in\Delta_j$.

D'autre part, $\operatorname{Card}\{n\in\Delta_{t(c)};\ v(n)\neq u(n)\}\leqslant d_c$. Ainsi,

$$\left|\sum_{k_\imath\leqslant n<k_p} (f(v(n))-f(u(n)))\right| \leqslant 2M(d_a+\cdots+d_b). \tag{3}$$

Si $p\notin t(\mathbb{N})$, $\quad \left|\sum_{k_p\leqslant n<k_\imath+N} (f(v(n))-f(u(n)))\right|=0.$

Si $p\in t(\mathbb{N})$, $\quad p=t(b+1)$ et alors:

$$\left|\sum_{k_p\leqslant n<k_\imath+N} f(v(n))-f(u(n))\right| \leqslant 2\,M.\operatorname{Max}(0, k_\imath+N-z_{b+1}).$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$\left|\sum_{k_p\leqslant n<k_\imath+N} (f(v(n))-f(u(n)))\right| \leqslant 2M\frac{(k_\imath+N-k_p)d_{b+1}}{y_{b+1}} \tag{4}$$

Soit A l'entier naturel défini par $N^{1/2}\in[k_{t(A)}, k_{t(A+1)}[$, de sorte que A tend vers l'infini avec N.

Dans le cas où $a\geqslant A$, on a d'après (3), (4) et la décroissance de (d_m, y_m^{-1}),

$$\left|\sum_{k_\imath\leqslant n<k_\imath+N} f(v(n))\right| \leqslant 2M.\frac{d_A}{y_A}(y_1+\dots+y_b+k_\imath+N-k_p).$$

$$\leqslant 2M.\frac{d_A}{y_A}N. \tag{5}$$

Supposons maintenant $a \leqslant A$. L'inégalité $N^{1/2} \leqslant k_\imath + N$ entraîne $t(A) \leqslant p$ donc $A \leqslant b+1$. On obtient cette fois:

$$\left|\sum_{k_\imath \leqslant n < k_\imath + N} (f(v(n)) - f(u(n)))\right|$$

$$\leqslant 2M\left(y_a + \dots + y_{A-1} + \sum_{A \leqslant c \leqslant b} d_c + \frac{d_{b+1}}{y_{b+1}}(k_\imath + N - k_p)\right)$$

$$\leqslant 2M\left(k_{1+t(A-1)} + \frac{d_A}{y_A}\left(\sum_{A \leqslant c \leqslant b} y_c + (k_\imath + N - k_p)\right)\right)$$

$$\leqslant 2M\left(N^{1/2} + \frac{d_A}{y_A} N\right). \tag{6}$$

De (5) et (6), on déduit que:

$$\operatorname*{Lim}_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k_\imath \leqslant n < k_\imath + N} (f(v(n)) - f(u(n))) = 0$$

uniformément par rapport à $\imath \in N$

ce qui achève la démonstration.

III. Preuve du théorème 1

Le tore est à tort assimilé à [0,1[; u désigne une suite à termes dans [0,1[, équirépartie indépendamment selon $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{K}\}$ et uniformément selon S donc au sens ordinaire d'après le Théorème 3.

On note encore $a = \max\{k_{\imath+1} - k_\imath;\ \imath \in \mathbb{N}\}$ et on désigne par δ la densité inférieure de S ($\delta \geqslant 1/a$). Dans la suite, on choisit $\imath$ assez grand pour que $k_\imath \leqslant 2\imath\delta^{-1}$.

D'après l'équirépartition uniforme de u, pour $\imath$ assez grand, $\operatorname{Card}\{m \in [n, n + 2\imath\delta^{-1}[;\ u(m) \in [1 - \delta/6, 1[\} \leqslant \delta/4.\ 2\imath\delta^{-1} = \imath/2$, quel que soit n. A fortiori, pour r assez grand et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{Card}\left\{m \in \{n + k_j;\ 1 \leqslant j \leqslant \imath\};\ u(m) \in \left[1 - \frac{\delta}{6}, 1\right[\right\} \leqslant \frac{\imath}{2}. \tag{7}$$

Fixons $\imath$. L'équirépartition indépendante selon S donne d'autre part:

$$\operatorname{Card}\left\{n < N;\ \forall_j \leqslant \imath,\ u(n + k_j) \in \left[1 - \frac{\delta}{6}, 1\right[\right\} \underset{N \to \infty}{\sim} \left(\frac{\delta}{6}\right)^\imath N \text{ donc}$$

$$\left\{n \in \mathbb{N};\, \forall m \in \{n + k_j;\, 1 \leqslant j \leqslant \imath\},\, u(m) \in \left[1 - \frac{\delta}{6}, 1\right[\right\} \text{ est infini.}$$

(8)

Il y a contradiction entre (7) et (8).

IV. Théorème 2: premier cas

IV.1. Un énoncé plus précis

On démontre le résultat plus précis suivant:

PROPOSITION: *Il existe une suite* $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que, pour tout* x *irrationnel, la suite* xv *soit à la fois équirépartie modulo* 1 *indépendamment selon* $S = \{\pi_k;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ *et uniformément selon* $T = \{\tau_k;\, k \in \mathbb{N}\}$.

En fait, v est équirépartie dans $\mathbb{Z}$ au sens de Hartman ([6], p. 296). La construction de v s'inspire de celle réalisée pour démontrer le théorème 2 de [2].

IV.2. Construction de v

On pose pour tout x réel, $\{x\} = x - [x]$, $\|x\| = \mathrm{Min}\{|x - z| z \in \mathbb{Z}\}$ et $e(x) = e^{2i\pi x}$,

$(q_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite d'entiers naturels deux à deux premiers entre eux telle que, pour tout y irrationnel,

$$\sum_{2^K < k \leqslant 2^{K+1}} \|yq_k\|^2 \underset{K \to \infty}{\to} +\infty,$$

Par exemple, (q_k) peut être la suite des nombres premiers puisque l'équirépartition modulo 1 de la suite (yq_k) entraîne que:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k < N} \|yq_k\|^2 = \int_0^1 \|t\|^2 \mathrm{d}t = \tfrac{1}{12}$$

Pour simplifier certaines écritures, on pose $Q_K = \prod_{k \leqslant 2^K} q_k$.

D'autre part, $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite d'entiers naturels satisfaisant aux conditions de croissance suivantes:

$$(C1) \quad \lim_{K \to \infty} \theta_{K+1} \cdot \theta_K^{-1} = +\infty,$$

$$(C2) \quad \lim \theta_K \cdot \left(2^K Q_K\right)^{-1} = +\infty.$$

Pour simplifier quelques calculs, on suppose on outre que:

$(C3)\quad 2^K Q_K$ divise θ_K pour tout $K \in \mathbb{N}^*$.

J_K désigne l'intervalle $[\theta_K, \theta_{K+1}[$ et $\rho_k(m)$ le reste de la division euclidienne de m par q_k. On pose $v(n) = v_1(n) + v_2(n)$ avec:

$$v_1(n) = v_2(n) = 0 \quad \text{si} \quad n < \theta_1 \quad \text{et}$$

$$v_1(n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^K} \rho_k\left(\left[\frac{n}{2^K}\right]\right) \quad \text{et} \quad v_2(n) = 2^K\left\{\frac{n}{2^K}\right\} \quad \text{si} \quad n \in J_K.$$

On note que, dans J_K, v_2 a pour période 2^K et v_1 a pour période $2^K Q_K$ en restant constante sur des intervalles de longueur 2^K. C'est la composante xv_2 qui donne l'équirépartition uniforme de xv pour x irrationnel et c'est xv_1 qui donne l'équirépartition indépendante selon S.

IV.3. Equirépartition uniforme de xv

Soit x irrationnel, on pose $g(n) = e(xv(n))$. D'après le critère de WEYL, il s'agit de montrer que:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{j \leqslant n < N+j} g(n) = 0,$$

uniformément par rapport à $j \in \mathbb{N}$.

IV.3.1. Un lemme

LEMME: *Soit* $A = 2.\,|1 - e(x)|^{-1}$. *On a les majorations suivantes*:

$$(1)\quad \left|\sum_{n \in J_\imath} g(n)\right| \leqslant A.2^{-\imath}(\theta_{\imath+1} - \theta_\imath).$$

$$(2)\quad \left|\sum_{m_1 \leqslant n < m_2} g(n)\right| \leqslant A(2 + 2^{-\imath}(m_2 - m_1))$$

si $\theta_\imath \leqslant m_1 < m_2 \leqslant \theta_{\imath+1}$.

PREUVE: (1) On définit les entiers t et u par $\theta_\imath = 2^\imath u$ et $\theta_{\imath+1} = 2^\imath t$.

$$\left|\sum_{n \in J_\imath} g(n)\right| \leqslant \sum_{u \leqslant l < t} \left|\sum_{n < 2^\imath} g(n + 2^\imath l)\right|$$

$$= \sum_{u \leqslant l < t} \left|e\left(x \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^\imath} \rho_k(l)\right) . \sum_{h < 2^\imath} e(xh)\right| \leqslant (t-u)A.$$

(2) Le démonstration est semblable en définissant les entiers t et u par:

$$(u-1)2^{s} \leqslant m_1 < u2^{s} \text{ et } t2^{s} \leqslant m_2 < (t+1)2^{s}.$$

IV.3.2. Fin de la démonstration

On suppose $N \geqslant \theta_{c+1}$ et on définit a et b par $j \in J_a$ et $N+j \in J_b$ de sorte que $b \geqslant c+1$. On distingue trois cas:

1er cas: $a \leqslant c-1$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j \leqslant n < N+j} g(n)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{j \leqslant n < \theta_c} g(n)\right| + \sum_{c \leqslant s < b}\left|\sum_{n \in J_s} g(n)\right| + \left|\sum_{\theta_b \leqslant n < N+j} g(n)\right| \\
&\leqslant \theta_c + A \sum_{c \leqslant s < b} 2^{-s}(\theta_{s+1}-\theta_s) + A\left(2+2^{-b}(N+j-\theta_b)\right) \\
&\leqslant \theta_c + A(2+2^{-c}(N+j-\theta_c)) \leqslant \theta_c + A(2+2^{-c}N).
\end{aligned}$$

2ème cas: $c \leqslant a < b$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j \leqslant n < N+j} g(n)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{j \leqslant n < \theta_{a+1}} g(n)\right| + \sum_{a < s < b}\left|\sum_{n \in J_s} g(n)\right| + \left|\sum_{\theta_b \leqslant n < N+j} g(n)\right| \\
&\leqslant A\Bigg(2+2^{-a}(\theta_{a+1}-j) + \sum_{a \leqslant s < b} 2^{-s}(\theta_{s+1}-\theta_s) \\
&\qquad +2+2^{-b}(N+j-\theta_b)\Bigg) \\
&\leqslant A(4+2^{-c}N).
\end{aligned}$$

3ème cas: $c \leqslant a = b$

Puisque $\theta_a \leqslant j < N+j < \theta_{a+1}$, $\left|\sum_{j \leqslant n < N+j} g(n)\right| \leqslant A(2+2^{-a}N)$.

Dans tous les cas, on obtient une majoration indépendante de j:

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{j \leqslant n < N+j} g(n)\right| \leqslant \theta_c \cdot \theta_{c+1}^{-1} + A(2^{-c}+4.N^{-1}). \quad \blacksquare$$

IV.4. Equirépartition de xv indépendante selon $\{\pi_k\}$

Soit x irrationnel et soit $(d_1,\ldots,d_s)$ un s-uple d'entiers relatifs non tous nuls. On peut bien sûr supposer $d_s \neq 0$ et $s \geqslant 2$.

Cette fois, on note $g(n) = e(x \sum_{j=1}^{s} d_j v(jn))$. Il s'agit de montrer que g a une valeur moyenne nulle.

IV.4.1. Réduction du problème

Grâce à l'hypothèses (C1), lorsque K est assez grand pour que $\theta_{K+2} > s\theta_{K+1}$, on peut partager J_K en sous-intervalles:

$$I_K^s = \{n \in J_K;\, sn \in J_K\} \text{ et}$$

$$I_K^b = \{n \in J_K;\, bn \in J_K \text{ et } (b+1)\, n \in J_{K+1}\},$$

pour $1 \leqslant b < s$.

Dans I_K^s, g a pour période $2^K Q_K$; soit μ_K^s sa valeur moyenne sur une période. Dans I_K^b, $b < s$, g a pour période $2^{K+1}\, Q_{K+1}$; soit μ_K^b sa valeur moyenne sur une période.

Comme dans [2], on est ramené à prouver que:

$$\lim_{K\to\infty} \mu_K^b = 0 \text{ pour tout } b \in \{1,\ldots,s\}.$$

IV.4.2. Majoration de $|\mu_K^s|$.

$$2^K Q_K \mu_K^s = \sum_{m<2^K Q_K} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j \sum_{k=1}^{2^K} \rho_k\left(\left[\frac{jm}{2^K}\right]\right)\right) \cdot e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j 2^K \left\{\frac{jm}{2^K}\right\}\right).$$

Ecrivons $m = 2^K m_1 + m_2$ avec $0 \leqslant m_2 < 2^K$; il vient:

$$2^K Q_K \mu_K^s = \sum_{m_2<2^K} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j 2^K \left\{\frac{jm_2}{2^K}\right\}\right) \cdot S(m_2) \tag{9}$$

avec

$$S(m_2) = \sum_{m_1<Q_K} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j \sum_{k=1}^{2^K} \rho_k\left(jm_1 + \left[\frac{jm_2}{2^K}\right]\right)\right)$$

$$= \prod_{1\leqslant k\leqslant 2^K} \left(\sum_{0\leqslant h<q_k} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j \rho_k\left(jh + \left[\frac{jm_2}{2^K}\right]\right)\right)\right), \tag{10}$$

puisque les q_k sont deux à deux premiers entre eux.
On distingue deux cas:

1*er cas*: $\sum_{j=1}^{s} jd_j \neq 0$.

Puisque: $\left[\frac{jm_2}{2^K}\right] < j, \quad jh + \left[\frac{jm_2}{2^K}\right] < q_k \quad$ si $\quad h \leqslant \frac{q_k}{s} - 1$.

Donc,

$$\left|\sum_{h<q_k} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j \rho_k\left(jh + \left[\frac{jm_2}{2^K}\right]\right)\right)\right|$$

$$\leqslant q_k - \left[\frac{q_k}{s}\right] + \left|\sum_{h<[\frac{q_k}{s}]} e\left(xh \sum_{j=1}^{s} jd_j\right)\right|$$

$$\leqslant q_k\left(1 - \frac{1}{2s}\right) \qquad \text{pour} \quad k \text{ assez grand.} \tag{11}$$

2*ème cas*: $\sum_{j=1}^{s} jd_j = 0$.

$$\rho_k\left(sh + \left[\frac{sm_2}{2^K}\right]\right) = \begin{cases} sh + \left[\frac{sm_2}{2^K}\right] & \text{si} \quad h \leqslant \frac{q_k}{s} - 1, \\ sh + \left[\frac{sm_2}{2^K}\right] - q_k & \text{si} \quad \frac{q_k}{s} \leqslant h < \frac{2q_k}{s} - 1. \end{cases}$$

et pour $j < s$,

$$\rho_k\left(jh + \left[\frac{jm_2}{2^K}\right]\right) = jh + \left[\frac{jm_2}{2^K}\right] \qquad \text{si} \quad h \leqslant \frac{q_k}{s-1} - 1.$$

Ainsi puisque $\sum_{j=1}^{s} jd_j = 0$, on a pour k assez grand:

$$\left|\sum_{k<q_k} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j \rho_k\left(jh + \left[\frac{jm_2}{2^K}\right]\right)\right)\right|$$

$$\leqslant q_k - \left[\frac{q_k}{s-1}\right] + 1 + \left|\sum_{k<[\frac{q_k}{s}]} e\left(x \sum_{j=1}^{s} d_j \left[\frac{jm_2}{2^K}\right]\right)\right)$$

$$+e(-xd_sq_k)\sum_{[\frac{q_k}{s}]<h<[\frac{q_k}{s-1}]} e\left(x\sum_{j=1}^{s} d_j\left[\frac{jm_2}{2^K}\right]\right)\Bigg|$$

$$\leqslant q_k - 2\frac{q_k}{s^2} + \frac{q_k}{s^2}|1+e(-xd_sq_k)| \leqslant q_k\left(1-\frac{1}{s^2}\|xd_sq_k\|^2\right). \quad (12)$$

(9), (10), (11), et (12) et la divergence de $\sum_{k=1}^{\infty}\|xd_sq_k\|^2$ donnent $\lim_{K\to\infty}\mu_K^s = 0$.

IV.4.3. Majoration de $|\mu_K^b|$ pour $b<s$

Dans I_K^b, $b<s$, on a:

$$g(n) = e\left(x\sum_{j=1}^{b} d_j\sum_{k=1}^{2^K}\rho_k\left(\left[\frac{jn}{2^K}\right]\right)\right)\cdot e\left(x\sum_{b<j\leqslant s} d_j\sum_{k=1}^{2^{K+1}}\rho_k\left(\left[\frac{jn}{2^{K+1}}\right]\right)\right)$$

$$\cdot e\left(x\sum_{j=1}^{b} d_j 2^K\left\{\frac{jn}{2^K}\right\}\right)\cdot e\left(x\sum_{b<j\leqslant s} d_j 2^{K+1}\left\{\frac{jn}{2^{K+1}}\right\}\right).$$

En posant cette fois $n = 2^{K+1}n_1 + n_2$, $n_2 < 2^{K+1}$, on obtient:

$$2^{K+1}Q_{K+1}\mu_K^b = \sum_{n_2<2^{K+1}} T(n_2)$$

$$\cdot e\left(x\sum_{j=1}^{b} d_j 2^K\left\{\frac{jn_2}{2^K}\right\} + x\sum_{b<j\leqslant s} d_j 2^{K+1}\left\{\frac{jn_2}{2^{K+1}}\right\}\right) \quad (13)$$

avec

$$T(n_2) = \sum_{n_1<Q_{K+1}} e\left(x\sum_{j=1}^{b} d_j\sum_{k=1}^{2^K}\rho_k\left(2jn_1 + \left[\frac{jn_2}{2^K}\right]\right)\right)$$

$$\cdot e\left(x\sum_{b<j\leqslant s} d_j\sum_{k=1}^{2^{K+1}}\rho_k\left(jn_1 + \left[\frac{jn_2}{2^{K+1}}\right]\right)\right).$$

Puisque les nombres q_k sont deux à deux premiers entre eux,

$$|T(n_2)| \leqslant Q_K \prod_{2^K<k\leqslant 2^{K+1}}\left|\sum_{h<q_k} e\left(x\sum_{b<j\leqslant s} d_j\rho_k\left(jh + \left[\frac{jn_2}{2^{K+1}}\right]\right)\right)\right|. \quad (14)$$

En distinguant les cas $\sum_{b<j\leqslant s} jd_j \neq 0$ et $\sum_{b<j\leqslant s} jd_j = 0$, on obtient des majorations analogues à (11) et (12).

L'hypothèse $\sum_{2^K<k\leqslant 2^{K+1}} \|xd_s q_k\|^2 \underset{K\to\infty}{\to} +\infty$ permet conclure que:

$$\lim_{K\to\infty} \mu_K^b = 0.$$

V. Théorème 2: deuxieme cas

Soit u: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ complètement additive (i.e. $u(mn) = u(m) + u(n)$), équirépartie modulo 1. La suite u est uniformément équirépartie modulo 1, selon $\{\pi_k\}$. En effet, étant donné $h \in \mathbb{N}^*$, ill suffit de vérifier que:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e(hu(\pi_k(n))) = 0$$

uniformément par rapport à $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui

est évident puisque $e(hu(\pi_k(n))) = e(hu(k))e(hu(n))$.

Pour assurer l'équirépartition de u indépendante selon $\{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, il suffit de choisir u de manière que:

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in\mathscr{P}}} u(p) = 0 \text{ et } \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{u^2(p)}{p} = +\infty, \quad \mathscr{P} \text{ désignant l'ensemble}$$

des nombres premiers; par exemple $u(p) = [1/\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, p)]$ convient.

Ceci résulte d'un théorème de Kubilius ([6], Théorème 5.3, p. 104) énoncé pour les suites fortement additives, et valable en fait pour toutes les suites additives comme nous l'a fait remarquer H. Delange.

VI. Théorème 2: Troisième cas

Soit $S = \{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ ou $\{\pi_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$. On note $\mathscr{N}_2 = \{n \in \mathbb{N};\ n \geqslant 2\}$, et $\mathscr{U} = \{n \in \mathscr{N}_2; \exists m \in \mathscr{N}_2,\ \exists \delta \in \mathscr{N}_2,\ n = m^\delta\}$.

Si $n \in \mathscr{U}$ on pose $\rho(n) = \mathrm{Min}\{m \in \mathscr{N}_2;\ \exists \delta \in \mathscr{N}_2,\ n = m^\delta\}$.

Soit v: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite équirépartie indépendamment selon S.

On définit une suite u par $u(0) = u(1) = 0$ et

$$\begin{cases} u(n) = v(n) & \text{si } n \in \mathscr{N}_2 \setminus \mathscr{U}, \\ u(n) = v(\rho(n)) & \text{si } n \in \mathscr{U}. \end{cases}$$

La densité de $\mathscr{U}$ étant nulle, u est, comme v, équirépartie indépendamment selon S. De plus,

$$\text{si } n \in \mathcal{N}_2 \setminus \mathcal{U}, \qquad u(n^h) = u(n) \quad \text{pour} \quad h \geqslant 2 \quad \text{car} \quad n = \rho(n^h)$$

et,

$$\text{si } n \in \mathcal{U}, \qquad u(n^h) = u(n) \quad \text{car} \quad \rho(n^h) = \rho(n).$$

L'équirépartion de u est donc uniforme selon $\{\omega_k\}$.

VII. Théorème 2: quatrième cas

VII.1. Remarque préliminaire

$\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. On note

$$\mathcal{P}_A = \{p \in \mathcal{P}; \qquad \exists a \in A, \qquad p \mid a\},$$

$$\mathcal{P}_B = \{p \in \mathcal{P}; \qquad \exists b \in B, \qquad p \mid b\}.$$

Il est clair que $\mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B = \varnothing$. On peut supposer $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$ non vides ($\mathcal{P}_A = \varnothing \Rightarrow A = \{1\}$), le cas contraire étant contenu dans les deux premiers cas du théorème.

De plus, quitte à grossir A et B, on peut supposer que: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B$ et que A et B sont fermés pour la multiplication.

Dans toute la suite, tout entier $n > 0$ s'écrit de manière unique

$$n = \alpha(n)\beta(n) \qquad \text{avec} \quad \alpha(n) \in A \quad \text{et} \quad \beta(n) \in B.$$

Autrement dit, A et B sont facteurs directs [4] de $\mathbb{N}^*$. Alors,

$$\text{si } \sum_{p \in \mathcal{P}_A} \frac{1}{p} = +\infty, \qquad B \text{ est de densité nulle et}$$

$$\text{si } \sum_{p \in \mathcal{P}_A} \frac{1}{p} < +\infty, \qquad B \text{ est de densité } \prod_{p \in \mathcal{P}_A} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > 0.$$

On étudie séparément les deux cas.

VII.2. Cas où B est de densité nulle

$a_0 < a_1 < \ldots < a_K < a_{K+1} < \ldots$ désignent les élément de A, rangés dans l'ordre croissant. On note $a_j a_s = a_{\sigma_j(s)}$. La famille $S = \{\sigma_j; j \in \mathbb{N}\}$ est une famille *éparse* de suites injectives en ce sens que:

$$j \neq k \Rightarrow \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Card}\{s < N; \sigma_j(s) = \sigma_k(s)\} = 0.$$

Le Théorème 1 de [3] affirme alors que presque toute suite à valeurs dans le tore Π (au sens de la mesure de Lebesgue sur $\Pi^{\mathbb{N}}$) est équirépartie indépendamment selon S. Dans la suite, w désigne une suite réelle équirépartie modulo 1 indépendamment selon S (il en existe !). On pose $v(a_m) = w(m)$. Ainsi la propriété de w se traduit par:

pour tout s-uple $(d_0,\ldots,d_{s-1})$ d'entiers relatifs non tous nuls,

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m<M} e\left(\sum_{0\leqslant j<s} d_j v(a_j a_m)\right)=0. \tag{15}$$

La suite u est définie par: $u(n)=v(\alpha(n))$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
On pose: $g(n)=e(\sum_{0\leqslant j<s} d_j u(a_j n))$, $\quad A(x)=\sum_{\substack{a\leqslant x\\ a\in A}} 1$,

$$B(x)=\sum_{\substack{b\leqslant x\\ b\in B}} 1 \quad \text{et} \quad G(x)=\sum_{\substack{a\leqslant x\\ a\in A}} g(a).$$

Par sommation d'Abel, en posant $\omega=A(N)$, on obtient:

$$\sum_{n\leqslant N} g(n)=\sum_{m<\omega} G(a_m)\left(B\left(\frac{N}{a_m}\right)-B\left(\frac{N}{a_{m+1}}\right)\right)+G(a_\omega)B\left(\frac{N}{a_\omega}\right).$$

D'après (15), étant donné $\epsilon>0$, il existe $M\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $m\geqslant M$, $|G(a_m)|\leqslant\epsilon A(a_m)=\epsilon(m+1)$. Donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\leqslant N} g(n)\right| &\leqslant \epsilon\left(\sum_{M\leqslant m<\omega} A(a_m)\left(B\left(\frac{N}{a_m}\right)-B\left(\frac{N}{a_{m+1}}\right)+A(a_\omega)B\left(\frac{N}{a_\omega}\right)\right)\right),\\ &\quad+\sum_{0\leqslant m<M} A(a_m)\left(B\left(\frac{N}{a_m}\right)-B\left(\frac{N}{a_{m+1}}\right)\right),\end{aligned}$$

$<\epsilon N+(M+1)B(N)\leqslant 2\epsilon N$, pour N assez grand, car $B(N)=o(N)$.
L'équirépartition de u est donc indépendante selon $\{\pi_k;\ k\in A\}$.
Puisque u ne dépend que de $\alpha(n)$, l'équirépartition est uniforme selon $\{\pi_k;\ k\in B\}$.

VII.3. Cas où B est de densité non nulle

On considère une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de réels telle que la famille $\{1, x_0,\ldots,x_m,\ldots\}$ soit libre sur $\mathbb{Q}$.

On pose $v(a_m)=x_m$ et on définit u par $u(n)=v(\alpha(n))\,\Omega_B(n)$

$$\text{avec } \Omega_B(n)=\Omega(\beta(n))=\sum_{\substack{p\in\mathscr{P}_B\\ p^r\| n}} r.$$

Dans la suite, $d_0,\ldots,d_{s-1}$ sont des entiers relatifs non tous nuls.

$$\text{On pose } \lambda(n)=\sum_{0\leqslant j<s} d_j u(a_j n) \quad \text{et} \quad g(n)=e(\lambda(n)).$$

On montre d'abord que g a une moyenne nulle sur chacun des ensembles

$$E_a = \{ n \in \mathbb{N}^*;\ \alpha(n) = a \} = aB.$$

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in E_a}} g(n) = \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in E_a}} e(y\Omega_B(n)) \qquad \text{avec} \qquad y = \sum_{0 \leqslant j < s} d_j v(a_j a).$$

Le nombre y étant irrationnel, la suite de terme général $e(y\Omega_B(n))$ est à spectre vide [5]. Comme E_a est un ensemble à caractère presque-périodique [8], la valeur moyenne de g sur E_a est nulle.

Enfin, puisque pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réunion finie d'ensembles E_a de densité $\geqslant 1 - \epsilon$, on a:

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n \leqslant N} g(n) \right| \leqslant \epsilon,$$

ce qui montre que u est équirépartie indépendamment selon $\{ \pi_k;\ k \in A \}$.

Il reste à vérifier que u est uniformément équirépartie modulo 1, selon $\{ \pi_k;\ k \in B \}$. Soit $h \in \mathbb{Z}^*$, soit $f(n) = e(hu(n))$ et soit $b \in B$.

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in E_a}} f(bn) = \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in E_a}} e\big(hv(a)(\Omega_B(b) + \Omega_B(n))\big).$$

$$= e\big(hv(a)\Omega_B(b)\big) \cdot \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in E_a}} e\big(hv(a)\Omega_B(n)\big),$$

$$= o\Bigg(\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in E_a}} 1 \Bigg) \quad \text{uniformément par rapport à} \quad b \in B.$$

On conclut que $\sum_{n \leqslant N} f(bn) = o(N)$ uniformément par rapport à $b \in B$, ce qui termine la démonstration.

VIII. Remarques métrique et topologique

VIII.1. Point de vue métrique

Définition: une famille S de suites à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite *étagée*, s'il existe $N(S) \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall M \in \mathbb{N}, \qquad \exists \sigma \in S; \qquad \sigma([N(S), +\infty[) \subset [M, +\infty[,$$

les intervalles étant pris dans $\mathbb{N}$. Toutes les familles considérées au théorème 2 ont cette propriété. On a le résultat suivant connu dans le cas où $S = \{\tau_k\}$([7], p. 201):

THÉORÈME 4: *Soit S une famille étagée de suites injectives. Si μ n'est pas concentrée en un point, l'ensemble $\mathscr{U}(X, \mu, S)$ des suites $u \in X^{\mathbb{N}}$, μ-réparties uniformément selon S, est μ^∞-négligeable.*

PREUVE: Soit A une partie de X, de μ-continuité et de mesure $\mu(A) = \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. Si $T \subset S$, on pose pour $N > N(S)$,

$$E_N^T = \left\{ u \in X^{\mathbb{N}};\ \forall \sigma \in T, \exists j \in \left[N(S), N\right[;\ u(\sigma(j)) \in A \right\}.$$

Il est clair que $E_N^T \supset E_N^S$ pour tout $T \subset S$ et que

$$\mathscr{U}(X, \mu, S) \subset \bigcup_{N > N(S)} E_N^S.$$

Choisissons $T = \{t_l, \dots, t_k\}$ tel que les ensembles images $t_i(\{N(S), \dots, N-1\})$ soient disjoints deux à deux, ce qui est loisible par hypothèse sur S. Alors,

$$\mu_\infty\left(E_N^T\right) = \prod_{l \leqslant i \leqslant k} \mu^\infty\left(E_N^{\{t_i\}}\right) = \left(1 - (1-\alpha)^{N - N(S)}\right)^k.$$

k pouvant être choisi arbitrairement, $\mu^\infty(E_N^S) = 0$ donc $\mu^\infty(\mathscr{U}(X, \mu, S))$ $= 0$.

VIII.2. Un résultat topologique

THÉORÈME 5: *Soit S une famille de suites à valeurs dans $\mathbb{N}$, stable pour la loi de composition des applications. Pour toute suite $u \in \mathscr{U}(X, \mu, S)$, l'adhérence de $\{u o \sigma;\ \sigma \in S\}$ dans $X^{\mathbb{N}}$ est contenue dans $\mathscr{U}(X, \mu, S)$.*

PREUVE: Soient d une distance sur X, v une suite adhérente à $\{u o \sigma;$ $\sigma \in S\}$, τ un élément arbitraire de S, f: $X \to \mathbb{C}$ continue, de module de continuité $\omega(\mathrm{f}, \cdot)$. D'autre part, soient $\epsilon > 0$, $\rho > 0$ tel que $\omega(f, \rho) \leqslant \epsilon/2$ et N entier tel que:

$$\sup_{\sigma \in S} \left| \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(u(\sigma(n))) - \int_X f d\mu \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

On choisit m entier tel que $\tau(\{0, \dots, N-1\}) \subset \{0, \dots, m\}$.
Il existe $\sigma \in S$ dépendant de ρ et de m telle que:

$$d(v(j), \qquad u(\sigma(j))) \leqslant \rho \qquad \text{pour tout} \quad j \leqslant m.$$

En particulier, pour $0 \leqslant k < N$, on a $d(v(\tau(k)), u(\sigma(\tau(k)))) \leqslant \rho$.

Par suite,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n<N} f(v(\tau(n))) - \int_X f d\mu\right|$$

$$\leqslant \omega(f,\rho) + \left|\frac{1}{N}\sum_{n<N} f(u(\sigma(\tau(n)))) - \int_X f d\mu\right|$$

$$\leqslant \epsilon.$$

La majoration est uniforme en τ.
Ce théorème est à comparer avec le théorème 3.4, page 197 de [7].

IX. Repartition uniforme selon les progressions

Pour simplifier, on se place dans le cas où (X, μ) est le tore, muni de la mesure de Haar et que l'on identifie sans vergogne à $[0,1[$.

IX.1. Un résultat négatif

THÉORÈME 6: *Il n'existe aucune suite équirépartie uniformément selon la famille des progressions arithmétiques non constantes.*

PREUVE: Soit u: $\mathbb{N} \to [0,1[$ une suite équirépartie uniformément selon les progressions. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'un au moins des termes de la suite finie $u_\ell, u_{a+\ell}, \ldots, u_{aN+b}$ appartient à $[0,\frac{1}{2}[$.

D'autre part, $E = \{n \in \mathbb{N};\ u_n \notin [0,\frac{1}{2}[\}$ est de densité $\frac{1}{2}$, donc, d'après le théorème de Szemeredi [10], contient un nombre arbitrairement grand d'entiers naturels, termes successifs d'une progression arithmétique. On obtient une contradiction.

Le théorème 6 se généralise à la μ-répartition dans un compact pourvu que μ ne soit pas concentrée en un point.

IX.2. Une suite de Van der Corput modifée

Soit $\theta: \mathbb{N} \to [0,1[$ la suite de Van der Corput définie par:

$$\theta(l) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k 2^{-(k+1)} \qquad \text{si } l \text{ s'écrit en base 2 sous la forme:}$$

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k 2^k \qquad \text{où } \epsilon_k \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

ν désigne la valuation dyadique définie par $\nu(0) = +\infty$ et $\nu(d) = \max\{$j

$\in \mathbb{N}$; 2^J divise $d\}$ si $d \in \mathbb{N}^*$. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on définit l'entier $g(m)$ par: $m = 2^{\nu(m)}(1+2g(m))$. On note A_2 l'ensemble des suites $n \to a n + \ell$ pour lesquelles: $a \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$ vérifient $\nu(a) \leqslant \nu(\ell)+1$. La suite que nous étudions est:

$$\omega = \theta \circ g$$

THEORÈME 7: *La suite ω est équirépartie uniformément selon la famille A_2 (a fortiori selon $\{\tau_k;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{\pi_k;\ k \in \mathbb{N}^*\}$).*

IX.3. Majoration de la discrépance de ω

La discrépance $D_n(\omega)$ d'une suite ω: $\mathbb{N}^* \to [0,1[$ est définie par:

$$D_N(\omega) = \sup_{0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \chi_{[\alpha,\beta[}(\omega(n)) - (\beta - \alpha) \right|,$$

en désignant par χ_I la fonction caractéristique de I. On a le critère d'équirépartition uniforme suivant:

PROPOSITION 2: *Soit $(\omega^\sigma)_{\sigma \in S}$ une famille de suites du tore. Pour que cette famille soit équirépartie uniformément en σ, il faut et il suffit que:*

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sup_{\sigma \in S} D_N(\omega^\sigma) \right) = 0.$$

PREUVE: La condition est évidemment suffisante (voir théorème 3, 3 de [7]). Pour établir la nécessité, on remarque que l'équirépartition uniforme en σ entraîne pour tout entier m,

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{\sigma \in S} \sup_{K \in F_m} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \chi_K(\omega^\sigma(n)) - l(K) \right| = 0,$$

F_m étant la famille des intervalles d'extrémités dans: $\{0, 1/m, \dots, (m-1/m, 1\}$.
Soit I un intervalle inclus dans $[0,1[$, et soient J et J' appartenant à F_m tels que $J \subset I \subset J'$.

Une succession de majorations simples donne:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \chi_I(\omega^\sigma(n)) - l(I) \right|$$

$$\leqslant (l(J') - l(J)) + \sup_{K \in F_m} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \chi_K(\omega^\sigma(n)) - l(K) \right|$$

et par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\limsup_{N\to\infty}\Big(\operatorname*{Sup}_{\sigma\in S} D_N(\omega^\sigma)\Big) \leqslant \frac{2}{m}.$$

Le théorème 7 résulte alors de la forme plus précise suivante:

PROPOSITION 3: *Pour la suite ω définie au paragraphe IX.2., on a, pour toute $\sigma \in A_2$, $ND_N(\omega \circ \sigma) \leqslant 2((\mathrm{Log}\, N/\mathrm{Log}\, 2 + 1)^2 + 2$.*

IX.4. Démonstration de la proposition 3

(1) On remarque d'abord que, si $\imath \in \{0, 1,\dots, 2^c - 1\}$ et si $\theta(\imath) = \rho/2^c$ alors

$$\theta(l) \in \left[\frac{\rho}{2^c}, \frac{\rho+1}{2^c}\right[\;\Leftrightarrow l \equiv \imath \bmod 2^c.$$

Donc si, $I = \left[\dfrac{\rho}{2^c}, \dfrac{\rho+1}{2^c}\right[$,

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \chi_I(w(an+\ell)) = \mathrm{Card}\{n;\ 1\leqslant n\leqslant N,\ g(an+\ell) \equiv \imath \bmod 2^c\}.$$

(2) *Cas où $\ell \neq 0$ et $\nu(a) = \nu(\ell) + 1$,*

En divisant $an + \ell$ par $2^{\nu(\ell)}$, on se ramène au cas où: $a = (2a' + 1)2$ et $\ell = 2\ell' + 1$. Ainsi, $g(an + \ell) = \ell' + (2a' + 1)n$.

Puisque $2a' + 1$ est impair, il existe s entier tel que: $\ell' + (2a' + 1)s \equiv \imath \bmod 2^c$. Alors $g(an + \ell) \equiv \imath \bmod 2^c$ équivaut à $n \equiv s \bmod 2^c$ et il est clair que:

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \chi_I(\omega(an+\ell)) - Nl(I)\Big| \leqslant 1.$$

(3) *Cas où $\nu(a) \leqslant \nu(\ell)$.*

En divisant $an + \ell$ par $2^{\nu(a)}$, on se ramène au cas où a est impair. Soit $E(t, \imath) = \{n \in \mathbb{N};\ \nu(an + \ell) = t \text{ et } g(an + \ell) \equiv \imath \bmod 2^c\}$.

Comme a est impair, $E(t, \imath) = \{n \in \mathbb{N};\ an + \ell \equiv 2^t(1 + 2\imath) \bmod 2^{t+c+1}\}$ est une progression arithmétique de raison 2^{t+c+1}. Ainsi,

$$0 \leqslant \mathrm{Card}\{E(t,\imath)\cap[1,N]\} - \left[\frac{N}{2^{t+c+1}}\right] \leqslant 1 \text{ et}$$

$$0 \leqslant \mathrm{Card}\{n\leqslant N;\ g(an+\ell) \equiv \imath \, mod\, 2^c\}$$

$$- \sum_{t\leqslant \frac{\mathrm{Log}\, N}{\mathrm{Log}\, 2}} \mathrm{Card}\{E(t,\imath)\cap[1,N]\}$$

$$\leqslant \operatorname{Card}\left\{n \leqslant N;\ \nu(an+\ell) > \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\right\}$$

$\leqslant 1$ car a est impair.

$$\text{Donc } 0 \leqslant \operatorname{Card}\{n \leqslant N;\ g(an+\ell) \equiv \imath \bmod \cdot 2^c\} - \sum_{t \leqslant \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}} \left[\frac{N}{2^{t+c+1}}\right]$$

$$\leqslant 2 + \left[\frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\right].$$

On en déduit que:

$$\left|\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \chi_1(\omega(an+\ell)) - Nl(I)\right| \leqslant 2 + \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}.$$

(4) *Passage aux intervalles quelconques.*

Soit c l'entier défini par $2^c < N \leqslant 2^{c+1}$. Si J est un intervalle $[0,\alpha[$ avec $\alpha \in G_c$ et $G_c = \{0, 1/2^c, \ldots, (2^c-1)/2^c, 1\}$, on a d'après les majorations précédentes en utilisant le développement dyadique de α,

$$\left|\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \chi_J(\omega(an+\ell)) - Nl(J)\right|$$

$$\leqslant c\left(2 + \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\right) < \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\left(2 + \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\right).$$

Donc, si J est un intervalle dont les deux extrémités sont dans G_c,

$$\left|\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \chi_J(\omega(an+\ell)) - Nl(J)\right| < 2\frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\left(2 + \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\right).$$

En raisonnant comme dans la proposition 2, on obtient pour tout intervalle

$I \subset [0,1[$,

$$\left|\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \chi_I(\omega(an+\ell)) - Nl(I)\right| < 2\frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\left(2 + \frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\right) + N \cdot 2^{1-c}$$

$$\leqslant 4 + 4\frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2} + 2\left(\frac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} 2}\right)^2$$

IX.5. Remarques

(1) On peut remplacer θ par une suite (de Halton) analogue en base p et obtenir une suite équirépartie uniformément selon la famille A_p des suites $n \to an + \ell$ pour lesquelles les valuations p-adiques de a et ℓ vérifient $\nu_p(a) \leqslant \nu_p(\ell) + 1$.

(2) En composant θ par g (ou par $m \to g(m) - 1$) plusieurs fois, on peut établir un résultat analogue au théorème 7 pour la famille des suites $n \to an + \ell$ pour lesquelles $\nu(a) \leqslant \nu(\ell) + d$ où d est un entier naturel arbitrairement choisi.

X. Remarque et problème

X.1. Dans le premier cas du théorème 2, on peut remplacer: $S = \{\pi_k\}$ *par une famille* $S = \{\sigma_k;\ k \in -^*\}$ *de suites croissantes telle que:*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{k+1}(n) - \sigma_k(n) = +\infty \qquad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

X.2. Peut-on construire une suite équirépartie uniformément selon la famille des polynômes stables sur $\mathbb{N}$ de degré $\geqslant 2$?

Bibliographie

[1] P.C. Baayen and Z. Hedrlin: The existence of well-distributed sequences in compact spaces. *Indag. Math. 27* (1965) 221–228.

[2] J. Coquet: Types de répartition complète des suites. *Annales Faculté Sciences Toulouse 2* (1980) 137–155.

[3] J. Coquet and P. Liardet: A metric study involving independent sequences. En préparation.

[4] H. Daboussi: On the density of direct factors. *Journal of London Math. Soc. 19* (1979) 21–24.

[5] H. Daboussi and H. Delange: Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1. *C.R.A.S. Paris 278* (1974) 657–660.

[6] J. Kubilius: Probabilistic methods in the theory of numbers. *Translations of Math. Monographs*, A.M.S., vol. 11.

[7] L. Kuipers and H. Niederreiter: *Uniform distribution of sequences.* Wiley, Interscience (1974).

[8] M. Mendes-France: Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1. *Journal of Number Theory 5* (1973) 1–15.

[9] G. Rauzy: Propriétés statistiques de suites arithmétiques. *P.U.F., Collection Sup. le Mathématicien 15* (1976).

[10] E. Szemeredi: On sets of integers containing no k elements in arithmetic progressions. *Acta Arithmetica 27* (1975) 199–247.

(Oblatum 29-I-1982 & 28-V-1982)

Jean Coquet
Département de Mathématique
Université de Valenciennes
Le Mont-Houy
59326 Valenciennes Cedex
France

Pierre Liardet
Laboratoire Associé au CNRS no. 225
U.E.R. de Mathématique
Université de Provence
3 Place Victor Hugo
13331 Marseille Cedex 3
France