

COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-YVES CHARBONNEL

Sur les orbites de la représentation coadjointe

Compositio Mathematica, tome 46, n° 3 (1982), p. 273-305

http://www.numdam.org/item?id=CM_1982__46_3_273_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES ORBITES DE LA REPRESENTATION COADJOINTE

Jean-Yves Charbonnel

Introduction

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, \mathfrak{a} une algèbre de Lie de dimension finie sur k , Γ le groupe adjoint algébrique de \mathfrak{a} , qui opère dans le dual \mathfrak{a}^* par la représentation coadjointe. On s'intéresse à la propriété suivante:

(P) *Il existe une partie Γ -stable U de \mathfrak{a}^* , ouverte et dense dans \mathfrak{a}^* pour la topologie de Zariski, telle que toute Γ -orbite contenue dans U soit fermée dans \mathfrak{a}^* .*

La propriété (P) n'est pas toujours vraie. Dans (6) on l'a établie lorsque le radical de \mathfrak{a} est nilpotent et la conjecture a été émise que (P) est vraie lorsque \mathfrak{a} est unimodulaire. On a établi dans (4) la propriété (P) lorsque \mathfrak{a} est résoluble et vérifie la propriété:

(P') *Il existe dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a})$ un élément semi-invariant, non nul, de poids $x \rightarrow -\text{tr ad}_\mathfrak{a} x$ pour l'action adjointe de \mathfrak{a} dans $S(\mathfrak{a})$.*

La propriété (P') est moins stricte que l'unimodularité. On démontre ici que l'algèbre de Lie \mathfrak{a} vérifie la propriété (P) si elle vérifie la propriété (P'). D'après le lemme 1.2 de (4), il suffit de démontrer que lorsque \mathfrak{a} vérifie la propriété (P'), alors \mathfrak{a}^* contient une partie Γ -stable U de \mathfrak{a}^* , dense dans \mathfrak{a}^* pour la topologie de Zariski, telle que toute Γ -orbite contenue dans U soit fermée dans \mathfrak{a}^* . D'autre part, la démonstration de (4, théorème 3.2) prouve que l'on peut se ramener au cas $k = \mathbb{C}$.

On suppose dans ce qui suit $k = \mathbb{C}$. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à \mathfrak{a} et G le groupe de Lie connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Le groupe G opère dans \mathfrak{a}^* via la représentation coadjointe. On peut supposer que pour presque tout f dans \mathfrak{a}^* , $G.f = \Gamma.f$. D'après (15, théorème 2.2) et (6, théorème 2.2), il existe un élément homogène, non nul, q de $S(\mathfrak{a})$, semi-invariant pour l'action de \mathfrak{a} dans $S(\mathfrak{a})$ et tel que le complémentaire U de l'ensemble des zéros de q dans \mathfrak{a}^* vérifie les conditions suivantes:

(1) pour tout f dans U , $G.f = \Gamma.f$ et l'orbite $\Gamma.f$ est de dimension maximale.

(2) pour tout f dans U , \mathfrak{a} contient une polarisation résoluble en f , satisfaisant la condition de Pukansky.

Si μ est une mesure de Lebesgue sur \mathfrak{a}^* alors il résulte de la propriété (P') que \mathfrak{a}^* contient une partie V , Γ -stable, de complémentaire μ -négligeable telle que toute Γ -orbite contenue dans V porte une mesure positive Γ -invariante qui définit une distribution tempérée sur \mathfrak{a}^* . Après avoir défini l'admissibilité (cf. 1.19) pour une forme linéaire f sur \mathfrak{a} , on démontre que l'ensemble des formes linéaires admissibles dont l'orbite sous Γ est tempérée (cf. 2.3) est Zariski dense dans \mathfrak{a}^* . Soit f une forme linéaire admissible sur \mathfrak{a} , appartenant à l'ouvert U ci-dessus. A toute polarisation résoluble \mathfrak{b} en f , satisfaisant la condition de Pukansky, on sait associer une représentation unitaire qui est somme finie de représentations unitaires irréductibles. En outre, si l'orbite $\Gamma.f$ est tempérée, ces représentations sont complètement continues. Utilisant un théorème de J.M.G. Fell sur la continuité de l'induction, on démontre alors que l'orbite $\Gamma.f$ est fermée dans \mathfrak{a}^* .

Ce travail comprend trois parties. Dans la première, on définit les formes linéaires admissibles fortement régulières sur \mathfrak{a} . Dans la deuxième, après avoir défini les orbites tempérées, on montre que la réunion des orbites tempérées admissibles est Zariski dense dans le dual de \mathfrak{a} , lorsque \mathfrak{a} vérifie la propriété (P'). Enfin, dans la troisième partie, on démontre l'implication (P') \Rightarrow (P).

§0. Notations et résultats préliminaires

0.1. Si V est un espace vectoriel, on note V^* son dual et $S(V)$ son algèbre symétrique. Si V est réel ou complexe de dimension finie, et si μ est une mesure positive sur une partie borélienne de V , on dit que μ est tempérée s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\int (1 + \|x\|^2)^k d\mu(x) < +\infty$ (où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur V); en parti-

culier, μ peut être alors considérée comme une mesure de Radon sur V .

0.2. Si G est un groupe de Lie réel, on note $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des fonctions complexes indéfiniment différentiables à support compact sur G , $\mathcal{K}(G)$ l'ensemble des fonctions complexes continues à support compact sur G , $C^*(G)$ la C^* -algèbre de G , $\text{Prim } C^*(G)$ l'espace des idéaux primitifs de $C^*(G)$, G_0 la composante neutre de G . Si \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie de G et si f est une forme linéaire sur un idéal de \mathfrak{g} , on note $G(f)$ et $\mathfrak{g}(f)$ les stabilisateurs de f dans G et dans \mathfrak{g} .

0.3. Si \mathfrak{a} est une algèbre de Lie, on note $U(\mathfrak{a})$ son algèbre enveloppante.

0.4. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle, on note \mathfrak{g}_c sa complexifiée. On appelle involution canonique de $U(\mathfrak{g}_c)$ l'unique antiautomorphisme antilinéaire de $U(\mathfrak{g}_c)$ qui transforme x en $-x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

0.5. Dans tout l'article, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

0.6. Soient \mathfrak{a}' une algèbre de Lie algébrique sur le corps k , \mathfrak{a} un idéal de \mathfrak{a}' dont l'enveloppe algébrique est égale à \mathfrak{a}' (d'où $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}']$). On dit que le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) s'il existe un ouvert de Zariski, non vide, U de \mathfrak{a}^* tel que pour tout f dans U et pour tout f' dans \mathfrak{a}'^* , prolongeant f , on ait $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$.

0.7. LEMME: Soient \mathfrak{a}' et \mathfrak{a} comme en 0.6. Notons Γ le groupe adjoint de \mathfrak{a}' . Il existe un idéal \mathfrak{a}'' de \mathfrak{a}' , contenant \mathfrak{a} , qui vérifie les conditions suivantes:

(1) le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')$ vérifie l'hypothèse (*).

(2) Notons π l'application canonique de $(\mathfrak{a}'')^*$ sur \mathfrak{a}^* . Il existe un ouvert de Zariski de \mathfrak{a}^* non vide U , Γ -invariant, tel que pour tout f'' dans $\pi^{-1}(U)$ on ait: $\pi^{-1}(\Gamma \cdot \pi(f'')) = \Gamma \cdot f''$.

On peut trouver un ouvert de Zariski, non vide, U' de $(\mathfrak{a}')^*$ et un sous-espace vectoriel V de \mathfrak{a}' tel que, pour tout f' dans U' , V soit un supplémentaire de $\mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$ dans \mathfrak{a}' . Notons \mathfrak{a}'' l'idéal $V + \mathfrak{a}$ de \mathfrak{a}' et π l'application canonique de $(\mathfrak{a}')^*$ sur \mathfrak{a}^* . Soit U l'image de $\Gamma \cdot U'$ par l'application canonique de $(\mathfrak{a}')^*$ sur \mathfrak{a}^* . La partie U de \mathfrak{a}^* est un ouvert de Zariski, non vide, Γ -invariant de \mathfrak{a}^* . Si f'' est dans $\pi^{-1}(U)$ et si f' est un élément de $(\mathfrak{a}')^*$ qui prolonge f'' , alors il existe γ dans Γ tel que

$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}'(\gamma \cdot f')$. Comme \mathfrak{a}'' est invariant par Γ , $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}'(f')$. Le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')$ vérifie donc l'hypothèse (*). De l'égalité $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}'(f')$, on tire l'inclusion $\mathfrak{a}''(f'') \subset \mathfrak{a}'(f')$. Par ailleurs, $\mathfrak{a}''(f'') \subset V + \mathfrak{a}$. Comme la somme de V et de $\mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$ est directe, on voit que $\mathfrak{a}''(f'')$ est contenu dans \mathfrak{a} ; d'où $\dim \mathfrak{a}(\pi(f'')) - \dim \mathfrak{a}''(f'') = \dim \mathfrak{a}'' - \dim \mathfrak{a}$ (5,1. 12.2). Par suite, $\pi^{-1}(\Gamma \cdot \pi(f'')) = \Gamma \cdot f''$.

0.8. Considérons un couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ comme en 0.6 et \mathfrak{a}'' comme en 0.7. La condition (2) de 0.7 prouve que \mathfrak{a} vérifie la propriété (P) si \mathfrak{a}'' vérifie la propriété (P). D'autre part, si \mathfrak{a} vérifie la propriété (P') alors \mathfrak{a}'' vérifie la propriété (P'). On peut donc se ramener au cas où le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) pour prouver (P') \Rightarrow (P).

1. Formes linéaires fortement régulières et formes linéaires admissibles

1.1. On fixe une algèbre de Lie complexe \mathfrak{a} . Si f est dans \mathfrak{a}^* , on désigne par $\mathfrak{g}(f)$ l'ensemble des X de $\mathfrak{a}(f)$ pour lesquels $\text{ad } X$ est semi-simple. Lorsque f est régulière, d'après (2, 1.7 p. 17) l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(f)$ est commutative; $\mathfrak{g}(f)$ est donc une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{a} .

1.2. DEFINITION: *On dit que la forme linéaire régulière f sur \mathfrak{a} est fortement régulière si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(f)$ est de dimension maximale.*

Cette définition est due (dans le cas algébrique) à M. Duflo [11]. Les résultats de ce chapitre sont énoncés sans démonstration dans [11] et prouvés ici pour la commodité du lecteur.

1.3. On note $\text{Aut}_e(\mathfrak{a})$ le groupe des automorphismes de \mathfrak{a} engendré par les $\exp(\text{ad } X)$, où $X \in \mathfrak{a}$ et où $\text{ad } X$ est nilpotent. Le groupe $\text{Aut}_e(\mathfrak{a})$ opère dans \mathfrak{a}^* via la représentation coadjointe.

1.4. PROPOSITION: *(Les notations sont celles de 1.1 et 1.3). L'ensemble des formes linéaires fortement régulières sur \mathfrak{a} est un ouvert de Zariski de \mathfrak{a}^* . Si f et f' sont deux formes linéaires fortement régulières, alors il existe α dans $\text{Aut}_e(\mathfrak{a})$ tel que l'on ait: $\mathfrak{g}(f') = \alpha(\mathfrak{g}(f))$.*

La proposition résultera du lemme 1.7.

1.5. Soit \mathfrak{g} une sous-algèbre de Lie commutative de \mathfrak{a} telle que pour au moins une forme linéaire régulière f sur \mathfrak{a} , on ait $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}(f)$. En particulier, pour tout X dans \mathfrak{g} , $\text{ad } X$ est semi-simple. Désignons par \mathfrak{a}_0 le centralisateur de \mathfrak{g} dans \mathfrak{a} . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines non

nulles de \mathfrak{a} relativement à \mathfrak{g} , deux à deux distinctes. Désignons par \mathfrak{a}^{λ_i} ($i = 1, \dots, n$) l'espace des vecteurs de poids λ_i . On a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}^{\lambda_n}$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}^{\lambda_n}$. On regarde \mathfrak{a}_0^* comme l'espace des formes linéaires sur \mathfrak{a} , nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$. Si f est dans \mathfrak{a}_0^* , on note $\omega(f)$ la forme bilinéaire sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \times [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] : (X, Y) \mapsto \omega(f)(X, Y) = \langle f, [X, Y] \rangle$ et si b est une base de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$, $D_b(f)$ désigne le pfaffien de $\omega(f)$, calculé dans le base b .

1.6. LEMME: (Les notations sont celles de 1.1 et 1.5). Soient b une base de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ et f dans \mathfrak{a}_0^* .

(i) Le stabilisateur de f dans \mathfrak{a}_0 coïncide avec le stabilisateur dans \mathfrak{a}_0 de la restriction de f à \mathfrak{a}_0 .

(ii) La fonction D_b est non nulle en f si et seulement si $\mathfrak{a}_0(f) = \mathfrak{a}(f)$.

(iii) La forme linéaire f est régulière dans \mathfrak{a}_0^* si et seulement si elle est régulière dans \mathfrak{a}_0^* et $D_b(f)$ est non nul.

L'assertion (i) résulte de l'inclusion $[\mathfrak{a}_0, [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$. Il résulte aussi de cette inclusion que le noyau de $\omega(f)$ est contenu dans $\mathfrak{a}(f)$. Comme \mathfrak{g} est contenu dans $\mathfrak{a}(f)$, on a la décomposition: $\mathfrak{a}(f) = \mathfrak{a}_0(f) \oplus \mathfrak{a}(f) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$, d'où (ii).

(iii) Notons S l'indice de \mathfrak{a} et S_0 celui de \mathfrak{a}_0 . D'après la définition de \mathfrak{g} , il existe une forme linéaire régulière f' sur \mathfrak{a} qui appartient à \mathfrak{a}_0^* . D'après (2, 1.7 p. 17) $\mathfrak{a}(f')$ est contenu dans \mathfrak{a}_0 . Il résulte alors de (i) que S_0 est inférieur ou égal à S et de (ii), que $D_b(f')$ est non nul. L'ensemble des formes linéaires régulières de \mathfrak{a}_0^* qui n'annulent pas D_b est donc un ouvert de Zariski non vide de \mathfrak{a}_0^* . D'après (ii), pour tout ℓ dans cet ouvert, $\mathfrak{a}_0(\ell) = \mathfrak{a}(\ell)$ et $\dim \mathfrak{a}_0(\ell) \geq S$; donc $S = S_0$. Si f est régulière dans \mathfrak{a}_0 et si $D_b(f)$ est non nul, d'après (ii), $\mathfrak{a}_0(f) = \mathfrak{a}(f)$ et d'après ce qui précède, f est régulière dans \mathfrak{a}_0^* . Réciproquement, si f est régulière dans \mathfrak{a}_0^* , $\dim \mathfrak{a}_0(f) \leq S$ car $\mathfrak{a}_0(f)$ est contenu dans $\mathfrak{a}(f)$. D'après ce qui précède, $\dim \mathfrak{a}_0(f) = S_0$; donc f est régulière dans \mathfrak{a}_0 , $\mathfrak{a}_0(f) = \mathfrak{a}(f)$ et $D_b(f)$ est non nul, d'après (ii).

1.7. LEMME: (Les notations sont celles de 1.1 et 1.5). Soient b une base de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ et \mathcal{O}_0 l'ensemble des formes linéaires régulières sur \mathfrak{a}_0 qui n'annulent pas D_b .

(i) L'ensemble $\bigcup_{\alpha \in \text{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O}_0$ est un ouvert de Zariski non vide de \mathfrak{a}_0^* .

(ii) Si f est une forme linéaire fortement régulière sur \mathfrak{a} , alors il existe α dans $\text{Aut}_e(\mathfrak{a})$ tel que $\alpha \cdot f$ soit dans \mathfrak{a}_0^* .

Il résulte de la démonstration de l'assertion (iii) de 1.6 que \mathcal{O}_0 est un ouvert de Zariski non vide de \mathfrak{a}_0^* . Pour démontrer le lemme, nous utilisons les idées développées par J. Dixmier dans la démonstration de (5, théorème 1.9.11). Si $X \in \mathfrak{a}^{\lambda_i}$ ($i = 1, \dots, n$), $\text{ad}_a X$ est nilpotent car $(\text{ad}_a X)(\mathfrak{a}^{\lambda_j}) \subset \mathfrak{a}^{\lambda_j + \lambda_i}$ ($j = 1, \dots, n$); donc $\exp(\text{ad}_a X)$ est un élément bien défini de $\text{Aut}_e(\mathfrak{a})$ (cf. 1.3). Soit τ l'application de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_0^* \times \mathfrak{a}^{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{a}^{\lambda_n}$ dans l'espace vectoriel \mathfrak{a}^* définie par:

$$\tau(f, X_1, \dots, X_n) = \exp(\text{ad } X_1) \dots \exp(\text{ad } X_n) \cdot f.$$

Cette application est polynômiale. Soient f dans \mathcal{O}_0 et T l'application linéaire tangente à τ en $(f, 0, \dots, 0)$. On a:

$$T(f', X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) \cdot f + f'$$

($f' \in \mathfrak{a}_0^*$, $X_1 \in \mathfrak{a}^{\lambda_1}, \dots, X_n \in \mathfrak{a}^{\lambda_n}$). Si $T(f', X_1, \dots, X_n)$ est nul, f' et $(\sum_{j=1}^n X_j) \cdot f$ sont toutes deux nulles. D'après 1.6, (ii), X_1, \dots, X_n sont nuls; donc T est injective et par suite bijective. Désignons par \mathcal{O}' l'ensemble des points $\mathfrak{a}_0^* \times \mathfrak{a}^{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{a}^{\lambda_n}$ en lesquels l'application linéaire tangente à τ est bijective. Notons P_1, \dots, P_m des générateurs de l'idéal de définition de $\mathfrak{a}_0^* \setminus \mathcal{O}_0$. Les fonctions P_1, \dots, P_m se prolongent trivialement en des fonctions polynômiales sur $\mathfrak{a}_0^* \times \mathfrak{a}^{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{a}^{\lambda_n}$. D'après ce qui précède, l'ouvert de Zariski

$$\mathcal{O}'' = \left(\bigcup_{i=1}^m \{P_i \neq 0\} \right) \cap \mathcal{O}'$$

rencontre $\mathfrak{a}_0^* \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ suivant \mathcal{O}_0 . L'image \mathcal{O} de \mathcal{O}'' par τ est un ouvert de Zariski de \mathfrak{a}_0^* . L'assertion (i) du lemme résulte alors de l'égalité

$$\bigcup_{\alpha \in \text{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in \text{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O}_0.$$

(ii) Soit f une forme linéaire fortement régulière sur \mathfrak{a} . Considérons le centralisateur $\overline{\mathfrak{a}_0(f)}$ de $\mathfrak{g}(f)$ et $\mathcal{O}_0(f)$ l'ouvert de Zariski de $\overline{\mathfrak{a}_0(f)}^*$ défini comme \mathcal{O}_0 (on remarquera à cet effet que, d'après 1.6 (iii), \mathcal{O}_0 ne dépend pas de la base b de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$). Il résulte de (i) que $\bigcup_{\alpha \in \text{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O}_0(f)$ est un ouvert de Zariski de \mathfrak{a}^* . Deux ouverts de Zariski non vides de \mathfrak{a}^* ayant une intersection non vide, on peut trouver α dans $\text{Aut}_e(\mathfrak{a})$ tel que $\alpha \cdot f$ soit dans \mathcal{O}_0 .

1.8. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à \mathfrak{a} et G le groupe de Lie réel simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

1.9. DEFINITION: (Les notations sont celles de 1.1 et 1.8).

(i) La forme linéaire f sur \mathfrak{g} est dite admissible s'il existe un caractère unitaire de $G(f)_0$ de différentielle $i f|_{\mathfrak{g}(f)}$.

(ii) La forme linéaire a sur \mathfrak{a} est dite admissible si la forme linéaire $\operatorname{Re}(a)$ sur \mathfrak{g} est admissible.

Cette notion d'admissibilité est équivalente à celle de (11, II.2) car \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie complexe.

1.10. Reprenons les notations de 1.5. D'après 1.7 (ii), il existe une forme linéaire fortement régulière x sur \mathfrak{a} telle que $\mathfrak{s}(x)$ contienne \mathfrak{s} . On suppose que \mathfrak{s} est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}(x)$ dont l'image, par une représentation de dimension finie de \mathfrak{g} , est semi-simple. Soit S l'adhérence dans G du sous-groupe analytique de G dont l'algèbre de Lie est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à \mathfrak{s} . Le groupe S est commutatif et connexe. Soient T le plus grand sous-groupe compact de S , \mathfrak{t} son algèbre de Lie et (X_1, \dots, X_n) une base du réseau des éléments de \mathfrak{t} dont l'image par l'application exponentielle de G est égale à 1.

1.11. LEMME: (Les notations ont celles de 1.1, 1.6 et 1.10).

(i) L'algèbre de Lie \mathfrak{t} est contenue dans \mathfrak{s} .

(ii) La forme régulière f sur \mathfrak{a} , nulle sur $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ est admissible si et seulement si $\operatorname{Re}\langle f, X_1 \rangle, \dots, \operatorname{Re}\langle f, X_n \rangle$ sont des multiples entiers de $2\pi\mathbb{Z}$.

Soit f une forme linéaire régulière sur \mathfrak{a} , nulle sur $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$. D'après (2, 1.7 p. 17), l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(f)$ est commutative. Soit \mathfrak{t}' l'algèbre de Lie du plus grand sous-groupe compact de $G(f)_0$. Elle contient \mathfrak{t} et elle est contenue dans $\mathfrak{a}(f)$. D'après 1.7 (ii), il existe une forme linéaire fortement régulière y sur \mathfrak{a} telle que $\mathfrak{s}(y)$ contienne $\mathfrak{s}(f)$ et g dans G tel que $g \cdot \mathfrak{s}(x)$ soit égale à $\mathfrak{s}(y)$. L'algèbre de Lie $g \cdot \mathfrak{s}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}(g \cdot x)$ dont l'image par la représentation de \mathfrak{g} , considérée en 1.10, est semi-simple; donc $g \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{s}$ puisque \mathfrak{s} est contenue dans $\mathfrak{g}(g \cdot x)$. L'algèbre de Lie \mathfrak{t}' est contenue dans \mathfrak{s} puisque \mathfrak{t}' est contenue dans $\mathfrak{g}(g \cdot x)$ et tous les éléments de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact de $GL(V)$ (V espace vectoriel réel de dimension finie) sont semi-simples. Par suite, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ et T est le plus grand sous-groupe compact de $G(f)_0$. La restriction de l'application exponentielle de G à $\mathfrak{g}(f)$ est un homomorphisme du groupe abélien

$\mathfrak{g}(f)$ sur $G(f)_0$ et f est admissible si et seulement si le caractère unitaire $X \rightarrow \exp(i\langle \text{Re } f, X \rangle)$ de $\mathfrak{g}(f)$ est trivial sur le noyau de cet homomorphisme, d'où (ii).

II. Orbites temperees

2.1. On fixe une algèbre de Lie complexe algébrique \mathfrak{a}' , un idéal \mathfrak{a} de \mathfrak{a}' dont l'enveloppe algébrique est égale à \mathfrak{a}' (d'où $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$). On note Γ le groupe adjoint de \mathfrak{a}' .

2.2. LEMME: (Les notations sont celles de 2.1). Si f est dans \mathfrak{a}^* , alors il existe sur $\Gamma \cdot f$ une mesure positive, Γ -invariante, unique au scalaire multiplicatif près.

Soit γ dans $\Gamma(f)$. La forme bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \langle f, [X, Y] \rangle$ sur \mathfrak{a} définit par passage au quotient une forme symplectique sur $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}(f)$, invariante par γ ; donc $\det \text{Ad}_\alpha \gamma = \det \text{Ad}_{\alpha(f)} \gamma$. Par suite, la restriction à $\Gamma(f)$ de la fonction module de Γ est égale à la fonction module de $\Gamma(f)$; donc il existe sur $\Gamma \cdot f$ une mesure positive, Γ -invariante, unique au scalaire multiplicatif près.

2.3. DEFINITION: L'orbite $\Gamma \cdot f$ est dite tempérée si toute mesure positive Γ -invariante sur $\Gamma \cdot f$ est tempérée (cf. 0.1).

2.4. Soit f une forme linéaire régulière sur \mathfrak{a} . On suppose que pour tout X dans $\mathfrak{a}(f)$, $\text{tr ad}_\alpha X$ est nul. D'après (2, 1.7 p. 17), l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(f)$ est commutative; donc il existe un sous-groupe résoluble connexe maximal B de Γ , contenant $\Gamma(f)_0$. Comme $\Gamma(f)_0$ est d'indice fini dans $B(f)$, pour tout b dans $B(f)$, on a $|\det \text{Ad}_\alpha b| = 1$; d'où l'existence d'une fonction positive λ sur $B \cdot f$ qui vérifie la condition $\lambda(b \cdot y) = |\det \text{Ad}_\alpha b|^{-2} \lambda(y)$, pour tout y dans $B \cdot f$ et pour tout b dans B .

2.5. LEMME: (Les notations sont celles de 2.1 et 2.4). Soit \mathfrak{b} l'algèbre de Lie de B .

(i) Il existe une mesure positive, relativement invariante, ν sur $B \cdot f$, de multiplicateur $b \rightarrow |\det \text{Ad}_\mathfrak{b} b|^{-2}$.

(ii) Il existe un sous-groupe compact maximal K de Γ tel que l'application $(k, b) \rightarrow kb$ de $K \times B$ dans Γ soit surjective.

(iii) Désignons par dk la mesure de Haar de masse totale 1 du

groupe compact K . Alors la mesure, notée μ ,

$$\phi \rightarrow \int_K \int_{B \cdot f} \phi(ky) \lambda(y) d\nu(y) dk$$

sur $\Gamma \cdot f$ est positive et Γ -invariante.

(iv) L'orbite $\Gamma \cdot f$ est tempérée si et seulement si la mesure $\lambda \cdot \nu$ est tempérée.

(v) L'orbite $\Gamma \cdot f$ est fermée si et seulement si l'orbite $B \cdot f$ est fermée dans \mathfrak{a}^* , pour la topologie usuelle.

(i) Comme $B(f)_0$ est commutatif et d'indice fini dans $B(f)$, $B(f)$ est unimodulaire. L'assertion (i) résulte alors de ce que la fonction module du groupe B est $b \rightarrow |\det \text{Ad}_b|^{-2}$.

(ii) Désignons par R le radical de Γ et par π l'homomorphisme canonique de Γ sur Γ/R . Le groupe $\pi(B)$ est un sous-groupe de Borel du groupe semi-simple Γ/R ; donc il existe un sous-groupe compact maximal K' de Γ/R tel que l'application $(k, b) \rightarrow kb$ de $K' \times \pi(B)$ dans Γ/R soit surjective. Soient R' le radical de $\pi^{-1}(K')$, T un sous-groupe compact maximal de R' et K un sous-groupe compact maximal de $\pi^{-1}(K')$ contenant T . Comme R'/R est compact, $R' = TR$. Le groupe $\pi^{-1}(K')$ étant à radical cocompact, $\pi^{-1}(K') = KR'$ et $\pi^{-1}(K') = KR$ car K contient T . Le groupe K est un sous-groupe compact maximal de Γ car K' est un sous-groupe compact maximal de Γ/R . Le group B étant résoluble connexe maximal, il contient R ; donc l'application $(k, b) \rightarrow kb$ de $K \times B$ dans Γ est surjective. Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à \mathfrak{a} et \mathfrak{f} l'algèbre de Lie de K (\mathfrak{f} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g}). On montre de façon analogue que $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{b}$ (somme d'espaces vectoriels réels).

(iii) Soit db une mesure de Haar à gauche sur B . Prouvons que la mesure

$$\phi \rightarrow \int_K \int_B \phi(kb) \frac{|\det \text{Ad}_b|^2}{|\det \text{Ad}_a b|^2} db dk$$

est une mesure de Haar à gauche sur Γ . D'après (ii), les espaces homogènes $K \backslash \Gamma$ et $K \cap B \backslash B$ sont homéomorphes. Le groupe $K \cap B$ est donc connexe et contenu dans un tore maximal S de B . Soit U le groupe des éléments unipotents de B . Le groupe B est le produit semi-direct de S par U et l'espace topologique $K \cap B \backslash B$ est le produit de $K \cap B \backslash S$ par U . Le groupe $K \cap B$ est un sous-groupe compact maximal de B car $K \cap B \backslash S$ est simplement connexe. Il

existe un tore S' connexe simplement connexe tel que l'on ait $S = (K \cap B)S'$ (S' est un groupe réel). Posons $B' = S'U$ et notons \mathfrak{b}' l'algèbre de Lie de B' (\mathfrak{b}' est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g}). Il résulte de (ii) que \mathfrak{g} est la somme directe de \mathfrak{k} et de \mathfrak{b}' et que l'application $(k, b) \rightarrow kb$ de $K \times B'$ dans Γ est surjective. Comme $K \cap B' = \{e\}$ et $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}' = \mathfrak{g}$, cette application est un difféomorphisme de $K \times B'$ sur Γ . Notons dt la mesure de Haar de masse totale 1 sur le groupe compact $K \cap B$ et δb la mesure de Haar à gauche sur B' telle que l'on ait:

$$\int_B \phi(b) db = \int_{K \cap B} \int_{B'} \phi(tb) \delta b dt,$$

pour toute ϕ dans $L^1(B)$. D'après (14, Lemme 1.10) la mesure

$$\phi \rightarrow \int_K \int_{B'} \phi(kb) \frac{|\det \text{Ad}_b|}{|\det \text{Ad}_a b|^2} \delta b dk$$

est une mesure de Haar à gauche sur Γ . Soit ϕ une fonction continue à support compact sur Γ . On a:

$$\begin{aligned} & \int_K \int_B \phi(kb) \frac{|\det \text{Ad}_b|}{|\det \text{Ad}_a b|^2} db dk \\ &= \int_K \int_{K \cap B} \int_{B'} \phi(ktb) \frac{|\det \text{Ad}_b|}{|\det \text{Ad}_a b|^2} \delta b dt dk. \end{aligned}$$

La mesure dk étant invariante à droite, le membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal à

$$\int_K \int_{B'} \phi(kb) \frac{|\det \text{Ad}_b|}{|\det \text{Ad}_a b|^2} \delta b dk.$$

Comme pour tout b dans B , on a $|\det \text{Ad}_b| = |\det \text{Ad}_b|$, il vient:

$$\int_K \int_B \phi(kb) \frac{|\det \text{Ad}_b|}{|\det \text{Ad}_a b|^2} db dk = \int_K \int_{B'} \phi(kb) \frac{|\det \text{Ad}_b|}{|\det \text{Ad}_a b|^2} \delta b dk.$$

La mesure

$$\phi \rightarrow \int_K \int_B \phi(kb) \frac{|\det \text{Ad}_b|}{|\det \text{Ad}_a b|^2} db dk$$

est donc une mesure de Haar à gauche sur Γ .

On rappelle que le groupe $\Gamma(f)_0 = B(f)_0$ est unimodulaire. On note dh une mesure de Haar sur $B(f)_0$. Désignons par db la mesure positive, relativement invariante, de multiplicateur $b \rightarrow |\det \text{Ad}_b|^{-2}$, sur $B/B(f)_0$ telle que pour toute fonction ϕ continue à support compact sur B , on ait:

$$\int_B \phi(b) |\det \text{Ad}_b|^{-2} db = \int_{B/B(f)_0} \left(\int_{B(f)_0} \phi(bh) dh \right) db.$$

L'espace $B/B(f)_0$ est un revêtement fini de $B \cdot f$ car $B(f)_0$ est d'indice fini dans $B(f)$. Notons ν' la mesure sur $B \cdot f$ telle que pour ϕ continue à support compact sur $B \cdot f$, on ait:

$$\int_{B \cdot f} \phi(y) d\nu'(y) = \int_{B/B(f)_0} \phi(b \cdot f) d\dot{B}.$$

La mesure ν' est positive, relativement invariante, de multiplicateur $b \rightarrow |\det \text{Ad}_b|^{-2}$. Elle est donc proportionnelle à ν . Soient (h_1, \dots, h_m) un système de représentants de $\Gamma(f)/\Gamma(f)_0$ et ϕ une fonction continue à support compact sur Γ . La fonction

$$\gamma \rightarrow \sum_{i=1}^m \int_{B(f)_0} \phi(\gamma h h_i) dh$$

définit par passage au quotient une fonction continue à support compact ψ sur $\Gamma \cdot f$. On a:

$$\begin{aligned} & \int_K \int_{B \cdot f} \psi(ky) \lambda(y) d\nu'(y) dk \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda(f) \int_K \int_B \phi(kbh_i) \frac{|\det \text{Ad}_b|^{-2}}{|\det \text{Ad}_a|^{-2}} db dk. \end{aligned}$$

Il résulte alors de ce qui précède que la mesure

$$\phi \rightarrow \int_K \int_{B \cdot f} \phi(ky) \lambda(y) d\nu'(y) dk$$

sur $\Gamma \cdot f$ est invariante, d'où (iii).

(iv) Le groupe K étant compact, il existe une norme sur \mathfrak{a}^* , invariante par K ; donc (iii) \Rightarrow (iv).

(v) Il est clair que si $B \cdot f$ est fermé, $\Gamma \cdot f$ est fermé dans \mathfrak{a}^* pour la topologie usuelle de \mathfrak{a}^* ; donc $\Gamma \cdot f$ est fermé dans \mathfrak{a}^* pour la

topologie de Zariski car il est localement fermé pour cette topologie. Réciproquement, si $\Gamma \cdot f$ est fermé dans \mathfrak{a}^* , $\Gamma \cdot f$ contient l'adhérence de $B \cdot f$ et pour tout x dans $\Gamma \cdot f$, $\dim B(x) \leq \dim B(f)$ car $B(x)$ est contenu dans $\Gamma(x)$ et $\dim B(f) = \dim \Gamma(f)$; donc $B \cdot f$ est fermé.

2.6. LEMME: (Les notations sont celles de 2.1). On suppose que le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) de 0.6. Il existe un ouvert de Zariski \mathcal{O} de \mathfrak{a}^* non vide, invariant par Γ , contenu dans l'ensemble des formes linéaires fortement régulières de \mathfrak{a}^* et tel que pour tout f dans \mathcal{O} et pour tout f' dans \mathfrak{a}'^* prolongeant f , les conditions suivantes soient satisfaites:

(1) f' est régulière et $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$.

(2) pour tout X dans $\mathfrak{a}'(f)$, $\text{tr ad}_\mathfrak{a} X$ est nul.

(3) il existe une polarisation résoluble \mathfrak{h}' en f' qui vérifie la condition de Pukanszky.

Dans ces conditions, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{a}$ est une polarisation résoluble en f satisfaisant la condition de Pukanszky.

D'après (15, théorème 2.2), il existe un ouvert de Zariski \mathcal{O}'' de \mathfrak{a}'^* non vide, Γ -invariant, contenu dans l'ensemble des éléments réguliers de \mathfrak{a}'^* et tel qu'en tout point de \mathcal{O}'' , il existe une polarisation résoluble, contenue dans \mathfrak{a}' , vérifiant la condition de Pukanszky. D'après (6, théorème 4.6), il existe un ouvert de Zariski V de \mathfrak{a}^* , non vide, Γ -invariant, contenu dans l'ensemble des formes linéaires fortement régulières de \mathfrak{a}^* et tel que pour tout f dans V et pour tout X dans $\mathfrak{a}'(f)$, $\text{tr ad}_\mathfrak{a} X$ soit nul. Comme le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) de 0.6, il existe un ouvert de Zariski \mathcal{O}' de \mathfrak{a}'^* , non vide, Γ -invariant, tel que pour tout f' dans \mathcal{O}' , on ait: $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$. Désignons par \mathcal{O} l'intersection de V et de l'image de $\mathcal{O}' \cap \mathcal{O}''$ par l'application canonique de \mathfrak{a}'^* sur \mathfrak{a}^* . Il est clair que \mathcal{O} est un ouvert de Zariski, Γ -invariant de \mathfrak{a}^* . Soient f dans \mathcal{O} et f' une forme linéaire sur \mathfrak{a}' qui prolonge f . Comme f' est dans $\mathcal{O}' + \mathfrak{a}^\perp$ (\mathfrak{a}^\perp est l'espace des formes linéaires sur \mathfrak{a}' , nulles sur \mathfrak{a}), $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$ et il existe en f' une polarisation résoluble \mathfrak{h}' , contenue dans \mathfrak{a}' , qui satisfait la condition de Pukanszky. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{a}$ est résoluble, subordonnée à f et $\mathfrak{h}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{h}$ car \mathfrak{h}' contient $\mathfrak{a}'(f')$ et $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$; donc \mathfrak{h} est une polarisation en f . Si v est une forme linéaire sur \mathfrak{a} , nulle sur \mathfrak{h} , elle se prolonge en une forme linéaire w sur \mathfrak{a}' , nulle sur \mathfrak{h}' et il existe γ dans Γ tel que $\gamma \cdot f' = f' + w$ car \mathfrak{h}' vérifie la condition de Pukanszky; donc $\gamma \cdot f = f + v$ et \mathfrak{h} vérifie la condition de Pukanszky.

2.7. Fixons f dans l'ouvert \mathcal{O} de 2.6, f' un prolongement de f à \mathfrak{a}' , \mathfrak{h}'

une polarisation résoluble en f' satisfaisant la condition de Pukanszky et \mathfrak{b} une sous-algèbre de Lie résoluble maximale de \mathfrak{a}' , contenant \mathfrak{h}' . Notons B et H' les sous-groupes analytiques de Γ d'algèbre de Lie \mathfrak{b} et \mathfrak{h}' . Ces sous-groupes sont fermés dans Γ car les algèbres de Lie \mathfrak{b} et \mathfrak{h}' sont algébriques. Choisissons des mesures de Haar à gauche db sur B et dh sur H' . Sur l'espace des fonctions ϕ sur B vérifiant $\phi(bh) = \phi(b)\chi(h)$ $b \in B$, $h \in H'$, où $\chi(h) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{b}} h|^2$, il y a une "mesure" B -invariante

$$\phi \rightarrow \int_{B/H'} \phi(b)\delta b$$

telle que l'on ait:

$$\int_B \alpha(b) db = \int_{B/H'} \int_{H'} \alpha(bh)\chi(h)^{-1} dh \delta b,$$

pour toute fonction intégrable α sur B . Choisissons une mesure ν sur $B \cdot f$ positive, relativement invariante, de multiplicateur $b \rightarrow |\det \text{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2$. Notons \mathfrak{s} l'ensemble des éléments semi-simples de $\mathfrak{a}(f)$. Comme f est régulière, $\mathfrak{a}(f)$ est commutative et \mathfrak{s} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{a} . Soient \mathfrak{a}_0 et \mathfrak{a}'_0 les centralisateurs de \mathfrak{s} dans \mathfrak{a} et \mathfrak{a}' .

2.8. LEMME: (Les hypothèses et notations sont celles de 2.1, 2.6 et 2.7).

(i) Pour toute mesure de Lebesgue $d\ell$ sur \mathfrak{h}^\perp et pour toute fonction borélienne positive ϕ sur $B \cdot f$, on a:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{h}^\perp} |\det \text{Ad}_{\mathfrak{b}} bh|^2 \phi(bh \cdot (f + \ell)) d\ell \\ &= \chi(h) \int_{\mathfrak{h}^\perp} |\det \text{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2 \phi(b \cdot (f + \ell)) d\ell, \end{aligned}$$

pour b dans B et h dans H' . Il existe une mesure de Lebesgue et une seule $d\ell$ sur \mathfrak{h}^\perp telle que l'on ait:

$$\int_{B \cdot f} \phi(x) d\nu(x) = \int_{B/H'} \delta b \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(b \cdot (f + \ell)) |\det \text{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2 d\ell$$

pour toute fonction ν -intégrable ϕ sur $B \cdot f$.

(ii) L'intersection $\mathfrak{s} \cap ([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_0] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}])$ est nulle.

(iii) Si ν est une forme linéaire sur \mathfrak{a} , nulle sur $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_0] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ alors $B \cdot (f + \nu)$ est contenu dans $B \cdot f + \nu$.

(iv) *Il existe une forme linéaire v sur \mathfrak{a} , nulle sur $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_0] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ pour laquelle $f + v$ est admissible (1.9) et régulière (1.2). Dans ces conditions, l'orbite $B \cdot (f + v)$ est ouverte dans $B \cdot f + v$.*

(v) *Soit v comme en (iv). Si l'orbite $\Gamma \cdot f$ est tempérée, alors l'orbite $\Gamma \cdot (f + v)$ est tempérée.*

(i) Si t est un tore maximal de \mathfrak{h}' , il laisse invariant l'espace affine $f + \mathfrak{h}^\perp$; donc t a un point fixe dans $f + \mathfrak{h}^\perp$ et t est conjugué à un tore maximal de $\mathfrak{a}'(f)$ car \mathfrak{h} vérifie la condition de Pukanszky. Comme \mathfrak{h}' est résoluble algébrique, elle est le produit semi-direct de t par son radical unipotent; donc $\text{Tr ad}_{\mathfrak{a}} X = 0$, pour tout X dans \mathfrak{h}' , puisque f est dans \mathcal{O} . L'espace \mathfrak{h}^\perp est isomorphe au dual de $\mathfrak{a}/\mathfrak{h}$ et pour tout h dans H' le déterminant de l'automorphisme $\ell \rightarrow h \cdot \ell$ de \mathfrak{h}^\perp est égal à $|\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}} h|^{-2}$ puisque $|\det \text{Ad}_{\mathfrak{a}} h| = 1$ et $[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}']$ est contenu dans \mathfrak{h} , d'où la première partie de l'assertion. Si $d\ell$ est une mesure de Lebesgue sur \mathfrak{h}^\perp , la mesure

$$\phi \rightarrow \int_{B/H'} \delta b \int_{\mathfrak{h}^\perp} |\det \text{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^{-2} \phi(b \cdot (f + \ell)) d\ell$$

sur $B \cdot f$ est alors une mesure positive, relativement invariante de multiplicateur $b \rightarrow |\det \text{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^{-2}$, d'où (i).

(ii) Soit X dans $\mathfrak{s} \cap ([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_0] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}])$. Comme $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ et \mathfrak{a}'_0 sont invariants par \mathfrak{s} et que $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'_0 \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$, on a $X = X_1 + X_2$ avec X_1 dans $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \cap \mathfrak{a}'_0$ et X_2 dans $[\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_0]$. Désignons par \mathfrak{r}_u le radical unipotent de \mathfrak{a}'_0 et ω l'homomorphisme canonique de \mathfrak{a}'_0 sur $\mathfrak{a}'_0/\mathfrak{r}_u$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}'_0/\mathfrak{r}_u$ est réductive, $\omega(X)$ est dans le centre de $\mathfrak{a}'_0/\mathfrak{r}_u$, $\omega(X_1)$ est nilpotent et $\omega(X_2)$ est dans la partie semi-simple de $\mathfrak{a}'_0/\mathfrak{r}_u$; donc $\omega(X) = 0$ et X est nul puisqu'il est semi-simple.

(iii) Soit b dans B . Pour tout X dans \mathfrak{h} , $X - b \cdot X$ est dans $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$; donc la forme linéaire $v - b^{-1} \cdot v$ est nulle sur \mathfrak{h} . La polarisation \mathfrak{h} en f vérifiant la condition de Pukanszky, $f + v - b^{-1} \cdot v$ est dans $B \cdot f$ et $b \cdot (f + v) = b \cdot (f + v - b^{-1} \cdot v) + v$ est dans $B \cdot f + v$.

(iv) Fixons une base b de $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ et considérons la fonction polynômiale D_b sur \mathfrak{a}^* définie en 1.5. D'après (ii), il existe un supplémentaire V de \mathfrak{s} dans \mathfrak{a} contenant $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ et $[\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_0]$. Notons V^\perp l'espace des formes linéaires sur \mathfrak{a} , nulles sur V . Reprenons les notations de 1.10. D'après 1.6 (ii), $D_b(f)$ est non nul; donc d'après 1.11 (ii), il existe v dans V^\perp tel que $D_b(f + v)$ soit non nul et tel que $f + v$ soit admissible puisque l'ensemble des formes linéaires v de V^\perp telles que $\text{Re}(f + v, X_1), \dots, \text{Re}(f + v, X_n)$ soient dans $2\pi\mathbb{Z}$, est Zariski dense dans V^\perp . Comme v est nulle sur $[\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_0]$, $\mathfrak{a}_0(f) = \mathfrak{a}_0(f + v)$; donc, d'après

1.6 (iii), $f + v$ est régulière dans \mathfrak{a}^* et $\mathfrak{a}(f + v) = \mathfrak{a}(f) = \mathfrak{a}_0(f)$. D'après (iii), $B \cdot (f + v)$ est ouvert dans $B \cdot f + v$ car les orbites $B \cdot f$ et $B \cdot (f + v)$ ont même dimension.

(v) Soit λ une fonction positive sur $B \cdot f$ qui vérifie la condition $\lambda(by) = |\det \text{Ad}_a b|^{-2} \lambda(y)$ pour y dans $B \cdot f$ et b dans B . Notons ν' la mesure sur $B \cdot (f + v)$ qui est la restriction à $B \cdot (f + v)$ de l'image de la mesure ν par l'application $y \rightarrow y + v$ de $B \cdot f$ dans $B \cdot f + v$. Si ϕ est une fonction continue à support compact sur $B \cdot (f + v)$ et si b_0 est dans B , alors, d'après (i) on a:

$$\int_{B \cdot (f+v)} \phi(b_0 \cdot y) d\nu'(y) = \int_{B/H'} \delta b \int_{\mathfrak{h}^\perp} |\det \text{Ad}_b b|^2 \\ \times \phi(b_0 \cdot (b \cdot (f + \ell) + v)) d\ell.$$

Pour tout b dans B , la forme linéaire $\ell(b) = b^{-1} \cdot (v - b_0^{-1} \cdot v)$ est nulle sur \mathfrak{h} et on a:

$$\int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi[b_0 \cdot (b \cdot (f + \ell) + v)] d\ell = \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(b_0 b \cdot (f + \ell(b) + \ell) + v) d\ell;$$

d'où

$$\int_{B \cdot (f+v)} \phi(b_0 \cdot y) d\nu'(y) = |\det \text{Ad}_b b_0|^{-2} \int_{B \cdot (f+v)} \phi(y) d\nu'(y).$$

La mesure ν' sur $B \cdot (f + v)$ est donc relativement invariante de multiplicateur $b \rightarrow |\det \text{Ad}_b b|^{-2}$. Notons λ_v la fonction $y \rightarrow \lambda(y - v)$ sur $B \cdot (f + v)$. La mesure $\lambda_v \cdot \nu'$ sur $B \cdot (f + v)$ est la restriction à $B \cdot (f + v)$ de l'image de la mesure $\lambda \cdot \nu$ par l'application $y \rightarrow y + v$ de $B \cdot f$ dans $B \cdot f + v$. Soit b dans B . La forme linéaire $v - b^{-1} \cdot v$ est nulle sur \mathfrak{h} . Il existe un élément unipotent n de H' tel que $n \cdot f = v - b^{-1} \cdot v + f$ car \mathfrak{h} vérifie la condition de Pukanszky et $\mathfrak{a}'(f)$ contient un tore maximal de \mathfrak{h}' ; donc $\lambda_v(b \cdot (f + v)) = \lambda(bnf) = |\det \text{Ad}_a b|^{-2} \lambda_v(f + v)$.

Supposons l'orbite $\Gamma \cdot f$ tempérée. D'après 2.5 (iv), la mesure $\lambda \cdot \nu$ est tempérée; donc la mesure $\lambda_v \cdot \nu'$ est tempérée. Alors d'après ce qui précède et d'après 2.5 (iv), l'orbite $\Gamma \cdot (f + v)$ est tempérée.

2.9. LEMME: (Les notations sont celles de 2.1). On suppose que le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) de 0.6 et que l'algèbre de Lie \mathfrak{a} vérifie la propriété (P'). Alors l'ensemble des formes linéaires admissibles dont l'orbite sous Γ est tempérée, est Zariski dense dans \mathfrak{a}^* .

Supposons l'assertion fautive. D'après (6, théorème 2.2), il existe un semi-invariant non nul p dans l'idéal de définition de l'adhérence des formes linéaires admissibles dont l'orbite sous Γ est tempérée. La démonstration de (4, lemme 3.1) prouve que l'ensemble des formes linéaires sur \mathfrak{a} dont l'orbite sous Γ est tempérée, est Zariski dense dans \mathfrak{a}^* . Soit f dans \mathcal{O} telle que $\Gamma \cdot f$ soit tempérée. Reprenons les notations de 2.7 et de la démonstration de 2.8 (iv). D'après 2.7 (v), si v est dans V^\perp et si $f + v$ est régulière et admissible, alors $p(f + v) = 0$. Comme l'ensemble des v de V^\perp pour lesquels $f + v$ est régulière et admissible est Zariski dense dans V^\perp , $p(f)$ est nul; donc p est nul sur l'orbite $\Gamma \cdot f$ puisque p est semi-invariant. Le polynôme p s'annule donc sur la réunion des orbites tempérées contenues dans \mathcal{O} . Cette réunion étant Zariski dense dans \mathfrak{a}^* , $p = 0$, ce qui est absurde.

III. La démonstration du théorème principal

3.1. On fixe une algèbre de Lie complexe algébrique \mathfrak{a}' et un idéal \mathfrak{a} de \mathfrak{a}' comme en 2.1. On suppose que le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) et que l'algèbre de Lie \mathfrak{a} vérifie la propriété (P'). On note \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' les algèbres de Lie réelles sous-jacentes à \mathfrak{a} et \mathfrak{a}' , G' le groupe de Lie réel simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g}' et G le sous-groupe connexe de G' d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soient \mathfrak{n} le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{g} , \mathfrak{l} l'idéal $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] + \mathfrak{n}$ et L le sous-groupe connexe de G' d'algèbre de Lie \mathfrak{l} . On note Z le centre de G' .

3.2. LEMME: (Les notations sont celles de 3.1).

(i) Le centre de L est une extension finie de sa composante neutre. Soit f dans \mathfrak{g}^* .

(ii) Le sous-groupe $ZG'(f)_0$ de G' est un sous-groupe d'indice fini de $G'(f)$.

(iii) Le groupe $ZG'(f)_0 \cap L$ est une extension finie de $L(f)_0$.

(i) Soient \mathfrak{s} une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{l} , S le sous-groupe analytique de L d'algèbre de Lie \mathfrak{s} et N le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie \mathfrak{n} . Le groupe N est fermé dans G . Le groupe L étant simplement connexe, S est fermé dans L et L est le produit semi-direct de S par N . Notons $Z(L)_0$ la composante neutre du centre de L et $Z(S)$ le centre de S . Il est clair que $Z(L)_0$ est contenu dans N . L'algèbre de Lie \mathfrak{s} est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie semi-simple complexe car \mathfrak{l} est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie complexe; donc le centre de S est

fini. Si $g = sn$ ($s \in S$ et $n \in N$) est dans le centre de L , s est dans $Z(S)$. Si p est l'ordre de s , $g^p = n^p$; donc n est dans $Z(L)_0$ puisque l'application exponentielle de N est bijective. Le centre de L est donc contenu dans $Z(S)Z(L)_0$, d'où (i).

(ii) résulte de ce que l'algèbre de Lie \mathfrak{g}' est algébrique.

(iii) résulte de (i) et de ce que l'algèbre de Lie \mathfrak{l} est algébrique.

3.3. Soit \mathcal{O} un ouvert de Zariski de \mathfrak{a}^* , non vide, invariant par le groupe adjoint de \mathfrak{a}' et qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) de 2.6. L'ouvert $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda \mathcal{O}$ satisfait les mêmes conditions. D'après (6, théorème 2.2), l'idéal de définition du complémentaire dans \mathfrak{a}^* de cet ouvert contient des semi-invariants non nuls; donc il contient des semi-invariants homogènes et non nuls car il est homogène. Soit p un tel semi-invariant. Notons U le complémentaire des zéros de p . L'ensemble U est un ouvert de Zariski, non vide, invariant par le groupe adjoint de \mathfrak{a}' et contenu dans $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda \mathcal{O}$.

Soient a dans U , a' une forme linéaire sur \mathfrak{a}' qui prolonge a , $f = \text{Re}(a)$, $f' = \text{Re}(a')$, \mathfrak{h}' une polarisation résoluble réelle en f' qui satisfait la condition de Pukanszky et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}$. On suppose f admissible (1.9).

3.4. LEMME: (Les notations et hypothèses sont celles de 3.1 et 3.3).

(i) Il existe sur $ZG'(f)_0 \cap G$ un caractère unitaire dont la différentielle est $i f | \mathfrak{g}(f)$. On notera X l'ensemble des caractères unitaires de $ZG'(f)_0 \cap G$ vérifiant cette dernière condition.

(ii) Notons H et H' les sous-groupes analytiques de G' d'algèbres de Lie \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' . Les groupes H et $\bar{H} = ZH' \cap G$ sont fermés dans G .

(iii) Si χ est dans X , il existe un unique caractère unitaire de \bar{H} , prolongeant χ et dont la différentielle est $i f | \mathfrak{h}$. Notons le $\bar{\chi}$.

(i) D'après (2, 1.7 p. 17) et d'après la condition 1 de 2.6., $G'(f)_0$ est commutatif et on a: $G'(f)_0 = G'(f)_0$. Le groupe $G'(f)_0$ est alors le produit direct d'un tore compact par un groupe vectoriel. Le tore compact est contenu dans $G(f)_0$ car G'/G est un groupe vectoriel; donc il existe un caractère unitaire de $G'(f)_0$ dont la différentielle est $i f' | \mathfrak{g}'(f')$ puisque f est admissible. Ce caractère s'étend à $ZG'(f)_0$, d'où (i).

(ii) Comme G'/G est un groupe vectoriel, $H = H' \cap G$. L'algèbre de Lie \mathfrak{h}' est algébrique; donc le sous-groupe analytique de $\text{GL}(\mathfrak{g}')$ d'algèbre de Lie $\text{ad}(\mathfrak{h}')$ est fermé dans $\text{GL}(\mathfrak{g}')$. Par suite, les groupes H' et ZH' sont fermés dans G' , d'où (ii).

(iii) Soit T un sous-groupe compact maximal du groupe résoluble H . Le tore T laisse invariant $f + \mathfrak{h}^\perp$ et a donc un point fixe dans cet espace affine. Il est donc conjugué sous H à un sous-groupe de $G(f)_0$ puisque \mathfrak{h} vérifie la condition de Pukanszky d'après 2.6. On peut supposer que T est contenu dans $G(f)_0$. La forme linéaire f étant nulle sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, il existe un caractère unitaire du revêtement universel de H dont la différentielle est $i f | \mathfrak{h}$. Comme f est admissible, il existe un caractère unitaire de T dont la différentielle est la restriction de $i f$ à l'algèbre de Lie \mathfrak{t} de T ; donc il existe un caractère unitaire de H de différentielle $i f | \mathfrak{h}$ puisque dans le revêtement universel de H le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie \mathfrak{t} contient le noyau de l'homomorphisme canonique du revêtement universel de H dans H . L'algèbre de lie \mathfrak{h} vérifiant la condition de Pukanszky, l'application $g \rightarrow g \cdot f$ de H dans $f + \mathfrak{h}^\perp$ définit par passage au quotient un homéomorphisme de $H/G(f) \cap H$ sur $f + \mathfrak{h}^\perp$; donc $G(f) \cap H$ est connexe et $ZG'(f)_0 \cap H$ est contenu dans H . Le groupe \bar{H} est égal à $(ZG'(f)_0 \cap G)H$ et le sous-groupe $(ZG'(f)_0 \cap G)$ de \bar{H} laisse invariant H et le caractère unitaire de H de différentielle $i f | \mathfrak{h}$; donc il existe un caractère unitaire de \bar{H} prolongeant χ et de différentielle $i f | \mathfrak{h}$. L'unicité d'un tel caractère est claire.

3.5. On note $T(\chi; \mathfrak{h}')$ la représentation $\text{ind}(\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ et $J(\chi; \mathfrak{h}')$ le noyau de $T(\chi; \mathfrak{h}')$ dans $C^*(G)$. Soit Γ le groupe des caractères unitaires de G triviaux sur $G(f)_0 L$. Si $\eta \in \Gamma$, l'application $\phi \rightarrow \eta\phi$ de $\mathcal{K}(G)$ dans lui-même se prolonge en un automorphisme de $C^*(G)$, noté encore $\phi \rightarrow \eta\phi$. De cette façon, Γ opère continûment dans l'espace des idéaux bilatères fermés des $C^*(G)$ (11, théorème 2); on note $(\eta, J) \mapsto \eta \cdot J$ cette opération. Si τ est une représentation unitaire de G de noyau J , $\eta \cdot J$ est le noyau de $\tau \otimes \eta$.

3.6. LEMME: (Les notations sont celles de 3.1, 3.3, 3.4 et 3.5).

(i) Le groupe $(ZG'(f)_0 \cap G)H'$ est fermé dans G' .

(ii) Soit χ dans X . Il existe un caractère unitaire et un seul de $(ZG'(f)_0 \cap G)H'$ qui prolonge $\bar{\chi}$ et dont la différentielle est $i f' | \mathfrak{h}'$. On le notera χ' .

(iii) Pour tout χ dans X , $T(\chi; \mathfrak{h}')$ est unitairement équivalente à la restriction à G de $\text{ind}(\chi'; (ZG'(f)_0 \cap G)H' \uparrow G')$.

(iv) La classe d'équivalence de $T(\chi; \mathfrak{h}')$ ($\chi \in X$) ne dépend pas du choix de \mathfrak{h}' . On notera $J(\chi)$ au lieu de $J(\chi; \mathfrak{h}')$.

(v) Pour tout η dans Γ et pour tout χ dans X , on a: $\eta \cdot J(\chi) = J((\eta | ZG'(f)_0 \cap G)\chi)$.

(vi) L'ensemble des $J(\chi)$ ($\chi \in X$) est la réunion d'un nombre fini d'orbites de Γ .

(i) D'après la démonstration de 3.4 (ii), ZH' est fermé dans G' ; donc $(ZG'(f)_0 \cap G)H'$ est fermé dans G' puisqu'il est ouvert dans ZH' .

(ii) Le groupe G' étant simplement connexe, $G'(f')_0 \cap G$ est connexe. D'après la démonstration de 3.4(i), $G'(f')_0 = G'(f)_0$ et il existe un caractère unitaire de $(ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0$ qui prolonge χ et dont la différentielle est $if' | g'(f')$. Notons le χ'' . Les restrictions de χ'' et de $\bar{\chi}$ à $G(f)_0 = G'(f)_0 \cap \bar{H}$ coïncident et $G'(f)_0$ laisse invariant \bar{H} et $\bar{\chi}$; donc il existe un caractère unitaire de $(ZG'(f)_0 \cap G)H'$ qui prolonge $\bar{\chi}$ et χ'' . Sa différentielle est $if' | g'$. L'unicité d'un tel caractère est claire.

(iii) Pour simplifier les notations, posons $(ZG'(f)_0 \cap G)H' = \bar{H}'$. Remarquons que $\bar{H}' \cap G = \bar{H}$. Sur l'espace des fonctions ϕ sur G' vérifiant les relations (1): $\phi(gh) = |\det \text{Ad}_{g'/h} h| \phi(g)$ ($g \in G', h \in \bar{H}'$), il y a une "mesure" G' -invariante, notée

$$\phi \rightarrow \int_{G'/\bar{H}'} \phi(g) \delta g.$$

Comme $[g', g']$ est contenu dans \mathfrak{g} , pour tout h dans \bar{H}' , $\det \text{Ad}_{g'/h} h = \det \text{Ad}_{g'/h} h$. Si ϕ est une fonction sur G vérifiant les relations (2):

$$\phi(gh) = \|\det \text{Ad}_{g/h} h\| \phi(g) \quad (g \in G, h \in \bar{H}),$$

il existe une fonction $\tilde{\phi}$ et une seule sur G' qui prolonge ϕ et qui vérifie les relations (1) car $G' = G'(f)_0 G$ et $\bar{H}' = G'(f)_0 \bar{H}$. La forme linéaire $\phi \rightarrow \int_{G'/\bar{H}'} \phi(g) \delta g$ définit une "mesure" G -invariante sur l'espace des fonctions ϕ sur G vérifiant les relations (2). On notera cette mesure $\phi \rightarrow \int_{G/\bar{H}} \phi(g) \delta g$.

Soit χ dans X . L'espace de la représentation $T(\chi; \mathfrak{b}')$ est le complété de l'espace des fonctions C^∞ sur G vérifiant les relations:

- (a) $\phi(gh) = \bar{\chi}(h)^{-1} |\det \text{Ad}_{g/h}|^{1/2} \phi(g)$ pour g dans G et h dans \bar{H} .
- (b) $\int_{G/\bar{H}} |\phi(g)|^2 \delta g < +\infty$.

L'espace de la représentation $\text{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$ est le complété de l'espace des fonctions C^∞ sur G' vérifiant les relations:

- (a') $\phi(gh) = \bar{\chi}(h)^{-1} |\det \text{Ad}_{g/h}|^{1/2} \phi(g)$ pour g dans G et h dans \bar{H} .
- (b') $\int_{G'/\bar{H}'} |\phi(g)|^2 \delta g < +\infty$.

Si ϕ est une fonction C^∞ sur G vérifiant les relations (a) et (b), il existe une fonction C^∞ sur G' , et une seule, prolongeant ϕ et vérifiant les conditions (a') et (b'). Notons la $E(\phi)$. L'opérateur $\phi \rightarrow E(\phi)$ se prolonge en un opérateur unitaire de l'espace de $T(\chi; \mathfrak{b}')$ sur l'espace de la représentation $\text{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$. Cet opérateur entrelace $T(\chi; \mathfrak{b}')$ et la restriction de $\text{ind}(\chi'; \bar{H}'; G')$ à G .

(iv) résulte de (iii) et de (1, théorème A).

(v) Soient χ dans X , η dans Γ et v dans \mathfrak{g}^* tel que $i v$ soit la différentielle de η . Reprenons les notations de la démonstration de (iii). L'espace de la représentation $\text{ind}((\eta | \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ est le complété de l'espace des fonctions C^∞ sur G qui vérifient les conditions:

(1) $\phi(gh) = \eta(h)^{-1} \bar{\chi}(h)^{-1} |\det \text{Ad}_{\eta h}|^{1/2} \phi(g)$ pour g dans G et h dans \bar{H} .

(2) $\int_{G/\bar{H}} |\phi(g)|^2 \delta g < +\infty$.

On voit alors que l'opérateur unitaire E' de l'espace de $\text{ind}((\eta | \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ dans l'espace de $T(\chi; \mathfrak{b}')$, tel que $E'\phi = \eta\phi$ pour toute ϕ dans l'espace de $\text{ind}((\eta | \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$, réalise une équivalence entre les représentations $\text{ind}((\eta | \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ et $T(\chi; \mathfrak{b}') \otimes \eta$. Notons h la restriction de f à \mathfrak{l} . D'après (17, lemme 13), il existe g_v dans $G(h)_0$ tel que $g_v \cdot f = f + v$ puisque v est nul sur $\mathfrak{a}(f) + \mathfrak{l}$ et \mathfrak{l} contient $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Comme $G'(f)$ ne dépend que de $f | \mathfrak{l}$, le groupe $ZG'(f)_0$ est invariant par les automorphismes intérieurs de G' associés aux éléments de $G(h)_0$. Pour b fixé dans $ZG'(f)_0 \cap G$, la différentielle en g de la fonction $g \rightarrow \chi(gbg^{-1})$ sur $G(h)_0$ est la forme linéaire $g \cdot X \mapsto i \langle g^{-1} \cdot f, X - b \cdot X \rangle (X \in \mathfrak{a}(h))$. Cette différentielle est nulle car $G(g^{-1} \cdot f) = G(f)$; donc $\chi(g_v b g_v^{-1}) = \chi(b)$ pour tout b dans $ZG'(f)_0 \cap G$. L'algèbre de Lie $g_v^{-1} \cdot \mathfrak{h}$ est une polarisation en $g_v^{-1} \cdot f = f - v$; donc elle est une polarisation en f car v est nul sur $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Le caractère unitaire $g_v^{-1} h g_v \rightarrow \bar{\chi}(h) \eta(h)$ de $g_v^{-1} \bar{H} g_v$ est l'unique caractère unitaire de $g_v^{-1} \bar{H} g_v$ qui prolonge $(\eta | ZG'(f)_0 \cap G)\chi$ et dont la différentielle est $i f | g_v^{-1} \cdot \mathfrak{h}$. Il est alors facile de voir que les représentations $\text{ind}((\eta | \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ et $T((\eta | ZG'(f)_0 \cap G)\chi; g_v^{-1} \cdot \mathfrak{b}')$ sont équivalentes. D'après (iv) et d'après ce qui précède, les représentations $T(\chi; \mathfrak{b}') \otimes \eta$ et $T((\eta | ZG'(f)_0 \cap G)\chi; g_v \cdot \mathfrak{b}')$ sont équivalentes et $\eta \cdot J(\chi) = J((\eta | ZG'(f)_0 \cap G)\chi)$.

(vi) Comme $ZG'(f)_0 \cap L$ est une extension finie de $L(f)_0$ (3.2 (iii)), il n'existe qu'un nombre fini de caractères unitaires de $(ZG'(f)_0 \cap L)G(f)_0$ dont la différentielle est $i f | \mathfrak{a}(f)$. Notons $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ une famille d'extensions à $ZG'(f)_0 \cap G$ de tous ces caractères unitaires de $(ZG'(f)_0 \cap L)G(f)_0$. Soit χ dans X . Il existe un caractère χ_k ($1 \leq k \leq n$) tel que $\chi \chi_k^{-1}$ soit trivial sur $ZG'(f)_0 \cap L$ et η dans Γ qui prolonge $\chi \chi_k^{-1}$. D'après (v), $J(\chi) = \eta \cdot J(\chi_k)$, d'où (vi).

3.7: L'application $a \rightarrow \text{Re}(a)$ de \mathfrak{a}^* dans \mathfrak{a}^* est un isomorphisme de l'espace vectoriel réel sous-jacent à \mathfrak{a}' sur \mathfrak{a}^* qui commute à l'action de G' ; donc, d'après 2.2, pour tout f dans \mathfrak{a}^* , il existe une mesure positive G' -invariante sur $G' \cdot f$. Comme en 2.3, on dira que l'orbite

$G' \cdot f$ est tempérée s'il existe sur $G' \cdot f$ une mesure positive, G' -invariante, tempérée.

3.8. LEMME: (Les notations sont celles de 3.1, 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6). On suppose que l'orbite $G' \cdot f$ est tempérée.

(i) Pour tout χ dans X , la représentation $T(\chi; \mathfrak{h}')$ est somme directe orthogonale d'un nombre fini de représentations unitaires irréductibles complètement continues.

(ii) Soit P l'intersection de tous les idéaux $J(\chi)$ ($\chi \in X$). Si J est un idéal primitif de $C^*(G)$ contenant P , alors il existe χ dans X tel que J soit le noyau d'une représentation unitaire irréductible de G , contenue dans $T(\chi; \mathfrak{h}')$.

(i) Notons V' l'ensemble des X de \mathfrak{g}' tels que toutes les valeurs propres de $\text{ad } X$ aient une partie imaginaire pure strictement inférieure à π , en module. La restriction à V' de l'application exponentielle de G' est un difféomorphisme de V' sur un voisinage ouvert W' de e dans G' . Pour X dans \mathfrak{g} , posons:

$$j(X) = \left(\det \frac{\text{sh } 1/2 \text{ ad } X}{1/2 \text{ ad } X} \right)^{1/2}.$$

La restriction de j à $V = V' \cap \mathfrak{g}$ est analytique. Si α est dans $\mathcal{D}(G)$ et si son support est contenu dans $W = W' \cap G$, on note $\tilde{\alpha}$ la fonction C^∞ sur \mathfrak{g} , à support compact contenu dans V , telle que: $\tilde{\alpha}(X) = \alpha(\exp X)$. Soient dg une mesure de Haar à gauche sur G , dX la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{g} telle que

$$d(\exp X) = \left| \det \left(\frac{1 - e^{-\text{ad } X}}{\text{ad } X} \right) \right| dX$$

et dh une mesure de Haar à gauche sur \bar{H} . Sur l'espace des fonctions ϕ sur G' vérifiant la condition $\phi(gh) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{q}'/\mathfrak{h}'} h| \phi(g)$ pour g dans G' et h dans \bar{H}' , il existe une "mesure" G' -invariante, notée $\phi \rightarrow \int_{G'/\bar{H}'} \phi(g) \delta g$. On a vu dans la démonstration de 3.6 (iii), que la "mesure" δg définit une "mesure" sur l'espace des fonctions ϕ sur G vérifiant la condition $\phi(gh) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{q}/\mathfrak{h}} h| \phi(g)$ pour g dans G et h dans \bar{H} . On note $\phi \rightarrow \int_{G/\bar{H}} \phi(g) \delta g$ cette "mesure" et on suppose qu'elle est normalisée de telle façon que l'on ait:

$$\int_G \psi(g) dg = \int_{G/\bar{H}} \int_{\bar{H}} \psi(gh) |\det \text{Ad}_{\mathfrak{q}/\mathfrak{h}} h|^{-1} dh \delta g,$$

pour tout ψ dans $L^1(G)$.

Soit α dans $\mathcal{D}(G)$ tel que α soit un élément positif de $C^*(G)$ et tel que le support de α soit contenu dans W . D'après (2, chap. V), l'opérateur $T(\chi; \mathfrak{h}')(\alpha)$ est défini par le noyau

$$K_\alpha(g, g') = \int_{\bar{H}} |\det \text{Ad}_q g'| |\chi(h) \alpha(ghg'^{-1})| \times |\det \text{Ad}_{q/h} h|^{-1/2} dh \quad (g \in G, g' \in G)$$

Pour tout g dans G , $K_\alpha(g, g)$ est positif ou nul car l'opérateur $T(\chi; \mathfrak{h}')(\alpha)$ est positif; donc d'après la théorème de Mercer, l'opérateur $T(\chi; \mathfrak{h}')(\alpha)$ est à trace si et seulement si l'intégrale $\int_{G/\bar{H}} K_\alpha(g, g) \delta g$ est finie. Choisissons sur \mathfrak{h}^\perp une mesure de Lebesgue $d\ell$. D'après 2.8 (i) et 2.5 (iii), la mesure

$$\phi \rightarrow \int_{G'/\bar{H}'} \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(g \cdot (f + \ell)) d\ell \delta g$$

sur $G' \cdot f$ est positive et G' -invariante. En outre, on a:

$$\int_{G'/\bar{H}'} \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(g \cdot (f + \ell)) d\ell \delta g = \int_{G/\bar{H}} \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(g \cdot (f + \ell)) d\ell \delta g.$$

Notons $(j\tilde{\alpha})^\wedge$ la transformée de Fourier

$$x \rightarrow \int_{\mathfrak{q}} (j\tilde{\alpha})(X) e^{i(x, X)} dX$$

de la fonction $j\tilde{\alpha}$. Comme l'orbite $G' \cdot f$ est tempérée, l'intégrale

$$\int_{G/\bar{H}} \int_{\mathfrak{h}^\perp} (j\tilde{\alpha})^\wedge(g \cdot (f + \ell)) d\ell \delta g$$

est finie. Notons dH la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{h} telle que

$$d(\exp H) = \det\left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_\mathfrak{h} H}}{\text{ad}_\mathfrak{h} H}\right) dH.$$

Aux mesures dX et dH correspond une mesure sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et supposons que $d\ell$ est la mesure duale de cette mesure. D'après la formule d'inversion de Fourier, on a:

$$\int_{\mathfrak{h}^\perp} (j\tilde{\alpha})^\wedge(g \cdot (f + \ell)) d\ell = |\det \text{Ad}_q g| \int_{\mathfrak{h}} j(H) \tilde{\alpha}(\text{Ad } g \cdot H) e^{i(f, H)} dH.$$

La démonstration de (10, lemme 1) prouve que

$$j(H) = \det\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{h}} H\right)\right) \det\left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} H}}{\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} H}\right).$$

D'après (15, lemme 4.9), $W' \cap \bar{H}' = W' \cap H'$; donc $W \cap \bar{H} = W \cap H$ et

$$\int_{\mathfrak{h}^\perp} (j\bar{\alpha})^\wedge(g \cdot (f + \ell)) \, d\ell = K_\alpha(g, g).$$

Par suite, l'opérateur $T(\chi; \mathfrak{h})(\alpha)$ est à trace. D'après (7, théorème 3.1), tout élément ϕ de $\mathcal{D}(G)$ est combinaison linéaire finie de produits de convolution $\alpha * \beta$ où α et β sont dans $\mathcal{D}(G)$ et où le support de α est contenu dans W . Si le support de ϕ est contenu dans W , ϕ est combinaison linéaire finie de produits de convolution $\alpha * \alpha^*$ où α est dans $\mathcal{D}(G)$ et où le support de α est contenu dans W ; donc $T(\chi; \mathfrak{h})(\phi)$ est un opérateur à trace, pour tout ϕ dans $\mathcal{D}(G)$. Par suite, d'après (16, §1), la représentation $T(\chi; \mathfrak{h})$ est somme directe orthogonale d'une famille, au plus dénombrable, de représentations unitaires irréductibles complètement continues, celles-ci ayant une multiplicité finie. Si \mathcal{H} est l'espace de $T(\chi; \mathfrak{h})$, il existe une famille $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n, \dots$, au plus dénombrable, de sous-espaces invariants, deux à deux orthogonaux, telle que la restriction de $T(\chi; \mathfrak{h})$ à chaque \mathcal{H}_n soit multiple d'une représentation unitaire irréductible complètement continue et telle que les restrictions de $T(\chi; \mathfrak{h})$ à deux \mathcal{H}_n distincts soient disjointes. Pour chaque n , notons π_n la classe des représentations unitaires irréductibles contenues dans la restriction de $T(\chi; \mathfrak{h})$ à \mathcal{H}_n . Le groupe G' opère naturellement dans le dual unitaire \hat{G} de G . D'après 3.6 (iii), il existe une représentation unitaire T' de G' dans \mathcal{H} qui prolonge $T(\chi; \mathfrak{h})$ et qui est équivalente à $\operatorname{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$; donc G' permute les π_n . Chaque π_n étant complètement continu, le stabilisateur G'_n de π_n dans G' est fermé dans G' et le quotient G'/G'_n est dénombrable; donc $G' = G'_n$ pour tout n . Par suite, chaque espace \mathcal{H}_n est invariant par T' . Notons P_n le projecteur orthogonal de \mathcal{H} sur \mathcal{H}_n . D'après ce qui précède, P_n commute à T' . D'après (1, théorème C), le commutant de $\operatorname{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$ est isomorphe à celui de $\operatorname{ind}(\chi' \mid (ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0; (ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0 \uparrow G'(f))$. De l'égalité $G' = G'(f)_0 G$, on tire $G'(f) = G'(f)_0 G(f)$. L'algèbre de Lie \mathfrak{g}' étant algébrique, le groupe $ZG'(f)_0$ est d'indice fini dans $G'(f)$; donc le groupe $ZG'(f)_0 \cap G$ est d'indice fini dans $G(f)$ et le groupe $(ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0$ est d'indice fini dans $G'(f)$. Par suite, le commutant de T' est de dimension finie; donc la famille $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n, \dots$, est finie.

(ii) Considérons une famille χ_1, \dots, χ_n d'éléments de X , comme dans la démonstration de 3.6 (vi). Désignons par $J_{1,k}, \dots, J_{m_k,k}$ ($k = 1, \dots, n$), les noyaux des représentations unitaires irréductibles contenues dans $T(\chi_k; \mathfrak{h}')$. Notons Γ' le sous-groupe des éléments de Γ triviaux sur $(ZG'(f)_0 \cap G)L$. D'après 3.6 (v), si η est dans Γ' , alors $\eta \cdot J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq n$) est l'un des idéaux $J_{1,k}, \dots, J_{m_k,k}$; donc le stabilisateur de $J_{i,k}$ dans Γ' est un sous-groupe d'indice fini de Γ' . D'après (i), $J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq n$) est un idéal maximal; donc le stabilisateur de $J_{i,k}$ est fermé dans Γ . Puisque Γ' est un sous-groupe cocompact de Γ , le stabilisateur de $J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq n$) dans Γ est un sous-groupe cocompact de Γ . D'après (i) et (4, 2.6), l'orbite $\Gamma \cdot J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq n$) est fermée dans $\text{Prim } C^*(G)$. La réunion des orbites $\Gamma \cdot J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq n$) est alors fermée dans $\text{Prim } G^*(G)$, d'où (ii) puisque P est l'intersection des éléments de cette réunion.

3.9. LEMME: Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, \mathfrak{b} une sous-algèbre de Lie résoluble algébrique de $\mathfrak{gl}(V)$ et B le sous-groupe analytique de $GL(V)$, d'algèbre de Lie \mathfrak{b} .

(i) Soient (g_m) une suite dans $GL(V)$ et (X_m) une suite dans $\mathfrak{gl}(V)$ telles que la suite $(g_m X_m g_m^{-1})$ converge vers X . Pour chaque m , on note $X_{m,s} + X_{m,n}$ la décomposition de Jordan de X_m ($X_{m,s}$ est la partie semi-simple et $X_{m,n}$ est la partie nilpotente). On suppose que les $X_{m,s}$ commutent deux à deux. Alors la suite $(X_{m,s})$ possède une sous-suite convergente. Notons X' la limite de cette sous-suite et (g'_m) la sous-suite des (g_m) indexée par les entiers de la sous-suite ci-dessus. Alors la suite $(g'_m X' g'^{-1}_m)$ converge vers la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de X .

(ii) Soit H un sous-groupe algébrique connexe de B . Il existe un voisinage ouvert ω de 0 dans \mathfrak{b} , invariant par le groupe adjoint de \mathfrak{b} et par les translations du radical unipotent de \mathfrak{b} , qui vérifie la condition suivante: si X est dans ω et si $\exp X$ est dans H , alors X est dans l'algèbre de Lie de H .

(iii) Soient B' un revêtement de B et π l'homomorphisme de revêtement. Soient (g_m) une suite dans B' et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Lie algébrique de \mathfrak{b} telles que la suite $(g_m \mathfrak{h} g_m^{-1})$ converge vers \mathfrak{h}' dans la grassmannienne $\text{Gr}(\mathfrak{b}, \dim \mathfrak{h})$. On note H le sous-groupe analytique de B' d'algèbre de Lie \mathfrak{h} et H' le groupe des éléments h de B' qui sont limite d'une suite (h_m) où h_m est dans $g_m H g_m^{-1}$, pour tout m . Alors \mathfrak{h}' est l'algèbre de Lie de H' , $\text{Ker } \pi \cap H = \text{Ker } \pi \cap H'$ et H' est une extension finie de $(\text{Ker } \pi \cap H)H'$.

(i) Notons V_C le complexifié de V , I l'opérateur identité de V_C et X_s la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de X . Pour tout λ complexe, $\det(X_m - \lambda I)$ converge vers $\det(X - \lambda I)$; donc les valeurs propres de X_m convergent vers celles de X . Comme les $X_{m,s}$ commutent deux à deux, ils se diagonalisent dans une même base de V_C ; donc la suite $(X_{m,s})$ est bornée dans $\mathfrak{gl}(V)$. Supposons que les X_m ont r valeurs propres distinctes et que la suite $(X_{m,s})$ est convergente. Notons X' sa limite, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de X et $(\lambda(1, m), \dots, \lambda(r, m))$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de X_m . On ordonne la famille $\lambda(1, m), \dots, \lambda(r, m)$ de façon que pour une suite d'entiers $0 = q_0 < q_1 < \dots < q_p = r$, les suites $(\lambda(k, m))$ ($q_{i-1} < k \leq q_i$, $1 \leq i \leq p$) convergent vers λ_i . Pour chaque m , notons $V(\lambda(1, m)), \dots, V(\lambda(r, m))$ les espaces propres de $X_{m,s}$ pour les valeurs propres $\lambda(1, m), \dots, \lambda(r, m)$ et $n(1, m), \dots, n(r, m)$ leurs dimensions respectives. Les valeurs propres de X' sont celles de X avec les mêmes multiplicités. Notons $V'(i)$ et $V(i)$ ($i = 1, \dots, p$) les espaces propres de X' et X_s pour la valeur propre λ_i . Pour m assez grand, $V'(i) = V(\lambda(q_{i-1} + 1, m)) \oplus \dots \oplus V(\lambda(q_i, m))$ ($i = 1, \dots, p$) puisque X' commute aux $X_{m,s}$. Si V'_i ($i = 1, \dots, p$) est un point d'accumulation de la suite $(g_m \cdot V'(i))$ dans la grassmannienne $\text{Gr}(V_C, \dim V(i))$, alors $(X - \lambda_i I)^{\dim V(i)}$ est nul sur V'_i puisque $(X_m - \lambda(q_{i-1} + 1, m)I)^{n(q_{i-1} + 1, m)} \dots (X_m - \lambda(q_i, m)I)^{n(q_i, m)}$ est nul sur $V'(i)$; donc $V'_i = V(i)$. Il résulte de ceci que la suite $(g_m X' g_m^{-1})$ converge vers X_s .

(ii) Regardons H et B comme les composantes neutres (pour la topologie usuelle) des groupes des points réels $H(\mathbb{R})$ et $B(\mathbb{R})$ des groupes algébriques H et B , définis sur \mathbb{R} . On notera ici, $H(\mathbb{R})_0$ et $B(\mathbb{R})_0$ les sous-groupes H et B de $\text{GL}(V)$. Soient T un tore maximal de H , défini sur \mathbb{R} , et T' un tore maximal de B , défini sur \mathbb{R} , contenant T . Notons B_u le groupe des éléments unipotents de $B(\mathbb{R})_0$, $T(\mathbb{R})$ et $T'(\mathbb{R})$ les groupes des points réels de T et T' . On a: $B(\mathbb{R})_0 = T'(\mathbb{R})_0 B_u$ et $H(\mathbb{R})_0 = T(\mathbb{R})_0 B_u$. Il existe une base (χ_1, \dots, χ_p) du groupe des caractères rationnels de T' telle que (χ_1, \dots, χ_q) ($1 \leq q \leq p$) soit une base du groupe des caractères rationnels de T' , triviaux sur T . Les caractères χ_1, \dots, χ_p définissent, de manière unique, des homomorphismes de $B(\mathbb{R})_0$ dans \mathbb{C}^* qui sont triviaux sur B_u et qui prolongent les homomorphismes de $T'(\mathbb{R})_0$ dans \mathbb{C}^* qu'ils définissent. Notons χ_1, \dots, χ_p ces homomorphismes. Il est clair que $H(\mathbb{R})_0 B_u$ est l'intersection des noyaux des homomorphismes χ_1, \dots, χ_q . Notons μ_1, \dots, μ_q les différentielles de χ_1, \dots, χ_q , en l'élément neutre. Soit ω l'ensemble des X de \mathfrak{b} dont les valeurs propres ont une partie imaginaire strictement inférieure à $\pi/2$, en module, et tels que

$|\operatorname{Im}\langle\mu_1, X\rangle| < \pi, \dots, |\operatorname{Im}\langle\mu_q, X\rangle| < \pi$. L'ouvert ω est invariant par le groupe adjoint et par les translations de l'algèbre de Lie de B_u . Soit X dans ω tel que $\exp(X)$ soit dans $H(\mathbb{R})_0$. Les nombres $\langle\mu_1, X\rangle, \dots, \langle\mu_q, X\rangle$ sont nuls puisque $\exp(X)$ est dans $H(\mathbb{R})_0 B_u$; donc X est dans l'algèbre de Lie de $H(\mathbb{R})_0 B_u$. Dans le revêtement universel de $H(\mathbb{R})_0 B_u$, l'image réciproque de $H(\mathbb{R})_0$, par l'homomorphisme de revêtement, est connexe car $H(\mathbb{R})_0$ contient un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})_0 B_u$. Les parties imaginaires des valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ sont strictement inférieures à π , en module; donc d'après (4, 2.8, b), X est dans l'algèbre de Lie de $H(\mathbb{R})_0$.

(iii) (a) Supposons $B' = B$. Il est clair que l'algèbre de Lie de H' contient \mathfrak{h}' . Considérons l'ouvert ω de (ii). Si X est dans ω et si $\exp(X)$ est dans H' , alors, d'après (ii), il existe une suite (X_m) dans ω , indexée par des entiers assez grands, telle que X_m soit dans $g_m \mathfrak{h} g_m^{-1}$ pour chaque m et telle que la suite $(\exp(X_m))$ converge vers $\exp X$. La suite (X_m) converge vers X car la restriction à ω de l'application exponentielle de B est un difféomorphisme de ω sur $\exp(\omega)$; donc X est dans \mathfrak{h}' . Par suite, \mathfrak{h}' est l'algèbre de Lie de H' et $H' \cap \exp(\omega)$ est contenu dans H'_0 . Soient X dans \mathfrak{h}' , X_s et X_n les parties semi-simples et nilpotentes de la décomposition de Jordan de X , T un tore maximal de H et \mathfrak{t} son algèbre de Lie. D'après (i), il existe une suite (g'_m) dans B et X' dans \mathfrak{t} tels que la suite $(g'_m X' g'^{-1}_m)$ converge vers X_s et tels que, pour chaque m , il existe un entier n pour lequel g'_m est dans $g_n H$. Notons V_1, \dots, V_q les espaces propres, deux à deux distincts, de X' . La suite $(g'_m \cdot V_i)$ ($i = 1, \dots, q$) est convergente dans $\operatorname{Gr}(V_c, \dim V_i)$ puisque X' et X_s ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Soit V'_i ($i = 1, \dots, q$) la limite de cette suite. Notons $T(V_1, \dots, V_q)$ le sous-groupe des éléments h de T tels que les restrictions de h à V_1, \dots, V_q soient des homothéties. L'algèbre de Lie \mathfrak{h}' contient une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{t}(V'_1, \dots, V'_q)$ conjuguée à l'algèbre de Lie de $T(V_1, \dots, V_q)$, par un élément de $\operatorname{GL}(V)$, et qui contient X . Par suite, il existe un tore contenu dans H'_0 et qui contient $\exp(X_s)$. Notons χ_1, \dots, χ_r les poids, deux à deux distincts, de B dans V_c et ψ l'homomorphisme $h \rightarrow (\chi_1(h)|\chi_1(h)|^{-1}, \dots, \chi_r(h)|\chi_r(h)|^{-1})$ de B dans (\mathbb{C}^*) . Soit K un sous-groupe compact maximal de H'_0 . D'après ce qui précède, $\exp(X)$ est dans $K(\operatorname{Ker} \psi \cap H'_0)$ puisque $K(\operatorname{Ker} \psi \cap H'_0)$ est invariant dans H'_0 . Par suite, $H'_0 = K(\operatorname{Ker} \psi \cap H'_0)$ et $H'_0(\operatorname{Ker} \psi) = K(\operatorname{Ker} \psi)$ est un sous-groupe fermé de B . D'après (4, 2.8, b), $\exp(\omega)$ est invariant par les translations à droite de B_u . Le groupe $\operatorname{Ker} \psi$ est un groupe résoluble exponentiel et ω est invariant par les translations de l'algèbre de Lie de $\operatorname{Ker} \psi$; donc $\exp(\omega)$ est invariant par les translations à droite de $\operatorname{Ker} \psi$. Par suite, $\exp(\omega) \cap H'(\operatorname{Ker} \psi)$ est

contenu dans $H'_0(\text{Ker } \psi)$ puisque $\exp(\omega) \cap H'$ est contenu dans H'_0 ; donc $H'(\text{Ker } \psi)$ est fermé dans B . Comme $B/\text{Ker } \psi$ est compact, H' n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

(b) On conserve la notation ω de (a). Notons Ω l'image de ω par l'application exponentielle de B' . La restriction de π à Ω est un homéomorphisme de Ω sur $\pi(\Omega)$ puisque les restrictions des applications exponentielles de B' et B à ω sont des difféomorphismes de ω sur Ω et $\pi(\Omega)$. Le groupe $\pi(H')$ est contenu dans l'ensemble des éléments h de B qui sont limite d'une suite (h_m) où h_m est dans $\pi(g_m H g_m^{-1})$, pour tout m ; donc d'après (a), \mathfrak{h}' est l'algèbre de Lie de H' et H' est une extension finie de $(\text{Ker } \pi \cap H')H'_0$. Il est clair que $\text{Ker } \pi \cap H$ est contenu dans $\text{Ker } \pi \cap H'$. Soient z dans $\text{Ker } \pi \cap H'$, B_u le groupe des éléments unipotents de B , T un tore maximal de $\pi(H)$ et B'_u la composante neutre de $\pi^{-1}(B_u)$. La restriction de π à B'_u sur B_u est un isomorphisme puisque B_u est simplement connexe. Il existe une suite (h_m) dans H telle que la suite $(g_m h_m g_m^{-1})$ converge vers z . Pour chaque m , il existe g'_m dans H tel que la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $\pi(g_m^{-1} h_m g'_m)$ soit dans T . Pour chaque m , notons h'_m l'élément de $H \cap B'_u$ tel que $\pi(h'_m)$ soit la partie unipotente de la décomposition de Jordan, dans $\text{GL}(V)$, de $\pi(g_m^{-1} h_m g'_m)$ et posons $t_m = g_m^{-1} h_m g'_m h_m^{-1}$. Pour m assez grand, $g_m g'_m t_m h'_m (g_m g'_m)^{-1}$ est dans $z\Omega$ puisque la suite $(g_m g'_m t_m h'_m (g_m g'_m)^{-1})$ converge vers z . D'après (4, 2.8, b), Ω est invariant par les translations à droite de B'_u et par les automorphismes intérieurs de B' ; t_m est dans $z\Omega$ pour m assez grand. D'après (i), la suite $(\pi(t_m))$ possède une sous-suite convergeant vers l'opérateur identité de V ; donc la suite (t_m) possède une sous-suite convergeant vers z puisque la restriction de π à $z\Omega$ est un homéomorphisme de $z\Omega$ sur $\pi(\Omega)$ et $\text{Ker } \pi \cap z\Omega = \{z\}$. Par suite, z est dans H .

3.10. LEMME: (Les notations sont celles de 3.1, 3.3 et 3.7). Soit a dans U telle que $f = \text{Re}(a)$ soit admissible et telle que l'orbite $G' \cdot f$ soit tempérée. Alors l'orbite $G' \cdot f$ est fermée dans \mathfrak{g}^* , pour la topologie de Zariski.

(a) Choisissons f' dans \mathfrak{g}'^* qui prolonge f . Comme a est dans U , il existe une polarisation \mathfrak{h}'_0 en f' , résoluble, satisfaisant la condition de Pukanszky et qui est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{a}' . L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}'_0 \cap \mathfrak{g}$ est une polarisation résoluble en f , qui satisfait la condition de Pukanszky puisque $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'(f') + \mathfrak{g}$. Soit \mathfrak{b} une sous-algèbre de Lie résoluble maximale de \mathfrak{g}' , contenant \mathfrak{h}'_0 . Cette algèbre de Lie est algébrique. Notons B le

sous-groupe analytique de G' d'algèbre de Lie \mathfrak{b} . D'après (2.5 (v)), l'orbite $G' \cdot f$ est fermée dans \mathfrak{g}^* , pour la topologie de Zariski, si et seulement si l'orbite $B \cdot f$ est fermée pour la topologie usuelle. Dans les parties (b), (c), (d) nous supposons que l'orbite $B \cdot f$ n'est pas fermée dans \mathfrak{g}^* , pour la topologie usuelle et il s'agit d'aboutir à une contradiction.

(b) Il existe une suite (g_0, g_1, \dots) dans B avec $g_0 = 1$ telle que $x_n = g_n \cdot f$ tende vers un point x de $\mathfrak{g}^* \setminus B \cdot f$. Soient $\mathfrak{h}'_n = g_n \cdot \mathfrak{h}'_0$ et $\mathfrak{h}_n = g_n \cdot \mathfrak{h}_0$. Notons H'_n et H_n les sous-groupes analytiques de G' d'algèbre de Lie \mathfrak{h}'_n et \mathfrak{h}_n . Dans (12), on munit l'ensemble des sous-groupes fermés de G' d'une topologie d'espace compact métrisable. On peut supposer que les suites (H_n) et (H'_n) ont une limite dans cet espace, que la suite (\mathfrak{h}'_n) a une limite \mathfrak{h}' dans la grassmannienne $\text{Gr}(\mathfrak{g}', \dim \mathfrak{h}'_0)$ et que la suite (\mathfrak{h}_n) a une limite dans la grassmannienne $\text{Gr}(\mathfrak{g}, \dim \mathfrak{h}_0)$. Notons H' et H les limites respectives des suites (H'_n) et (H_n) . Pour éviter toute confusion, on note ici, $(H')_0$ et $(H)_0$ les composantes neutres de H' et H . Dans cette partie, on montre que \mathfrak{h} est l'algèbre de Lie de H et que $H/(H)_0$ est un groupe commutatif de type fini. Le groupe H (resp. H') est l'ensemble des éléments h de B qui sont limite d'une suite (h_n) où h_n est dans H_n (resp. H'_n), pour tout n . Il est clair que \mathfrak{h} est contenu dans l'algèbre de Lie de H . D'après (3.9 (iii)), \mathfrak{h}' est l'algèbre de Lie de H' . Le groupe G' est le revêtement universel d'un groupe algébrique. Notons π l'homomorphisme de ce revêtement. Soit ω un voisinage ouvert de 0 dans \mathfrak{b} qui vérifie les conditions de (3.9 (ii)) relativement à $\pi(H'_0)$. Soit X dans \mathfrak{b}' tel que $\exp X$ soit dans H . Il existe une suite (h_n) dans B qui converge vers $\exp X$ et telle que h_n soit dans H_n , pour tout n . De même, il existe une suite X_n dans \mathfrak{b} qui converge vers X et telle que X_n soit dans \mathfrak{h}'_n , pour tout n . Pour n assez grand, il existe Y_n dans ω tel que $h_n = \exp X_n \exp Y_n$ puisque $\exp(\omega)$ est un voisinage de 1 dans B ; en outre, la suite (Y_n) converge vers 0. Le groupe G'/G étant vectoriel, pour n assez grand, $X_n + Y_n$ est dans \mathfrak{g} puisque $\exp X_n \exp Y_n$ est dans G . L'ouvert ω de \mathfrak{b} étant invariant par le groupe adjoint de \mathfrak{b} , Y_n est dans \mathfrak{h}'_n puisque $\pi(\exp Y_n)$ est dans $\pi(H'_n)$; donc $X_n + Y_n$ est dans \mathfrak{h}_n . Par suite, X est dans \mathfrak{h} puisque $X_n + Y_n$ tend vers X . Il résulte de ceci que \mathfrak{h} est l'algèbre de Lie de H . Soient h_1, h_2 dans H' , $(h_1(n))$ et $(h_2(n))$ des suites dans B qui convergent respectivement vers h_1 et h_2 et telles que $h_1(n)$ et $h_2(n)$ soient dans H'_n , pour tout n . Notons \mathfrak{b}' l'ensemble des éléments nilpotents de \mathfrak{b} . Il existe X dans \mathfrak{b}' tel que $\exp X = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ et, pour chaque n , X_n dans \mathfrak{b}' tel que $\exp X_n = h_1(n) h_2(n) h_1^{-1}(n) h_2^{-1}(n)$. Pour chaque n , X_n est dans \mathfrak{h}'_n puisque l'algèbre de Lie \mathfrak{h}'_n est algébrique. Le groupe G'/G étant vectoriel, X_n est

dans $\mathfrak{h}'_n \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_n$ puisque G contient le groupe dérivé de G' . Le groupe B étant le revêtement d'un groupe algébrique, le sous-groupe analytique de B , d'algèbre de Lie \mathfrak{b}' est simplement connexe; donc son application exponentielle est un difféomorphisme. Par suite X_n tend vers X , d'où $X \in \mathfrak{h}$. Il résulte de toute ceci que $H'/(H)_0$ est commutatif. Par suite, si h est dans $(H')_0 \cap H$, alors il existe Y dans \mathfrak{b}' tel que $\exp(-Y)h$ soit dans $(H)_0$; donc, d'après ce qui précède, Y est dans \mathfrak{b} et h est dans $(H)_0$. Le groupe $(H)_0$ est donc égal à $(H')_0 \cap H$ et $H/(H)_0$ est isomorphe à un sous-groupe de $H'/(H')_0$. Posons $\Gamma = \text{Ker } \pi \cap B$ et notons B' le sous-groupe analytique de B d'algèbre de Lie \mathfrak{b}' . Le sous-groupe $\Gamma B'$ de B est l'ensemble des éléments h de B tels que $\pi(h)$ soit unipotent; donc $\Gamma B'$ est fermé dans B . Le groupe $\Gamma \cap B'$ est trivial puisque B' est simplement connexe; donc Γ est isomorphe à $\Gamma B'/B'$. Le groupe Γ est de type fini puisqu'il est isomorphe à un sous-groupe discret du groupe commutatif B/B' . D'après (3.9 (iii)), H' est une extension finie de $(\Gamma \cap H_0)(H')_0$; donc, d'après ce qui précède, $H'/(H')_0$ est un groupe abélien de type fini. Par suite, $H/(H)_0$ est un groupe abélien de type fini.

(c) On conserve les notations $(H)_0$, π et Γ de (b). Soient K un sous-groupe compact maximal de $(H)_0$, \mathfrak{t} l'algèbre de Lie de K et (Y_1, \dots, Y_p) une base du réseau des éléments Y de \mathfrak{t} tels que $\exp Y = 1$. Il existe une suite (X_n) dans \mathfrak{h}_0 telle que $g_n \cdot X_n$ tende vers Y_1 . D'après (10, p. 270), il existe un tore maximal de \mathfrak{h}'_0 contenu dans $\mathfrak{g}'(\mathfrak{f}')$. Notons-le \mathfrak{t} . Pour chaque n , il existe g'_n dans H'_0 tel que la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $g_n^{-1} \cdot X_n$ dans \mathfrak{h}'_0 soit dans \mathfrak{t} . Remarquons que Y_1 est semi-simple puisqu'il est dans \mathfrak{t} . D'après (3.9 (i)), il existe Y'_1 dans \mathfrak{t} et une suite (g''_n) dans B tels que $g''_n \cdot Y'_1$ tende vers Y_1 et tels que g''_n soit un élément de la suite $(g_0 g'_0, g_1 g'_1, \dots)$, pour chaque n . L'image de $g''_n \cdot Y'_1$ par l'application canonique de \mathfrak{g}' sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{g}$ est égale à celle de Y'_1 ; donc Y'_1 est dans \mathfrak{g} puisque Y_1 y est. Notons π la représentation fidèle de \mathfrak{g}' associée à π . Les éléments $\pi(Y_1)$ et $\pi(Y'_1)$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités; donc $\pi(\exp Y'_1) = \pi(\exp Y_1) = 1$. L'élément $\exp Y'_1$ de B est alors dans Γ ; donc $\exp Y'_1 = 1$ puisque $g''_n \cdot Y'_1$ tend vers Y_1 . Soit n entier positif. Il existe un entier m tel que $g''_n = g_m g'_m$. On a $\langle g_m \cdot f, g''_n \cdot Y'_1 \rangle = \langle f, g'_m \cdot Y'_1 \rangle$ et la forme linéaire $f - g_m^{-1} \cdot f$ est nulle sur \mathfrak{h}_0 puisque \mathfrak{h}'_0 est une polarisation en f' et g'_m est dans H'_0 ; donc $\langle g_m \cdot f, g''_n \cdot Y'_1 \rangle = \langle f, g'_m \cdot Y'_1 \rangle$. La forme linéaire f étant admissible et $\exp Y'_1$ étant égal à 1, $\langle f, Y'_1 \rangle$ est dans $2\pi\mathbb{Z}$. Quand n tend vers $+\infty$, $g_n \cdot f$ tend vers x ; donc $\langle x, Y_1 \rangle$ est dans $2\pi\mathbb{Z}$. On montre de même que $\langle x, Y_2 \rangle, \dots, \langle x, Y_p \rangle$ sont dans $2\pi\mathbb{Z}$. La forme linéaire x est nulle sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. D'après ce qui précède, le caractère unitaire du

revêtement universel de $(H)_0$ de différentielle $i x \mid \mathfrak{h}$ est trivial sur le noyau de l'homomorphisme de revêtement; donc il existe un caractère unitaire de $(H)_0$ de différentielle $i x \mid \mathfrak{h}$. Notons le ξ' . D'après (3.4 (iii)), il existe un caractère unitaire de H_n de différentielle $i x_n \mid \mathfrak{h}_n$. Notons le ξ_n .

Soient $(p(n))$ une suite d'entiers, (h_n) et (h'_n) deux suites dans B qui ont la même limite et telles que h_n et h'_n soient dans $H_{p(n)}$, pour tout n . Reprenons la notation ω de (b). Pour n assez grand, il existe X_n dans ω tel que $\exp X_n = h_n^{-1}h'_n$. On peut choisir les X_n de façon que la suite (X_n) converge vers 0. Le groupe G'/G étant vectoriel, X_n est dans \mathfrak{g} ; donc X_n est dans $\mathfrak{h}_{p(n)}$. Par suite, $\xi_{p(n)}(h_n^{-1}h'_n) = \exp\langle i x_{p(n)}, X_n \rangle$; donc $\xi_{p(n)}(h_n^{-1}h'_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il résulte de ceci que si h est dans $(H)_0$ et si (h_n) est une suite dans B qui converge vers h et telle que h_n soit dans H_n , pour tout n , alors $\xi_n(h_n)$ tend vers $\xi'(h)$ puisque le groupe $(H)_0$ est engendré par l'image de \mathfrak{h} par l'application exponentielle. Soient (h_1, \dots, h_p) un système de représentants d'une famille génératrice de $H/(H)_0$ et $(h_1(n)), \dots, (h_p(n))$ des suites dans B qui convergent respectivement vers h_1, \dots, h_p et telles que $h_1(n), \dots, h_p(n)$ soient dans H_n pour tout n . En extrayant au besoin des sous-suites, on peut supposer les suites $(\xi_n(h_1(n))), \dots, (\xi_n(h_p(n)))$ convergentes. D'après ce qui précède, si $(p(n))$ est une suite d'entiers, si h est dans H et si (h_n) est une suite dans B qui converge vers h et telle que h_n soit dans $H_{p(n)}$, pour tout n , alors la suite $(\xi_{p(n)}(h_n))$ a une limite et cette limite ne dépend que de h . Notons la $\xi(h)$. La fonction $h \rightarrow \xi(h)$ est un caractère unitaire de H qui prolonge ξ' . D'après (12, théorème 4.2), la représentation $\text{ind}(\xi; H \uparrow G)$ est faiblement contenue dans la suite des $\text{ind}(\xi_n; H_n \uparrow G)$. Comme les $\text{ind}(\xi_n; H_n \uparrow G)$ sont deux à deux équivalentes, $\text{ind}(\xi; H \uparrow G)$ est faiblement contenue dans $\text{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow G)$. D'après (3.4 (ii)), le sous-groupe $\bar{H}_0 = ZH'_0 \cap G$ de G est fermé dans G . On a alors $\text{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow G) = \text{ind}(\text{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow \bar{H}_0); \bar{H}_0 \uparrow G)$. Reprenons la notation X de 3.4. On rappelle que si χ est dans X , $\bar{\chi}$ est le caractère unitaire de \bar{H} qui prolonge χ et ξ_0 . Alors

$$\text{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow \bar{H}_0) = \int_X^{\oplus} \bar{\chi} \, d\chi$$

d'où

$$\text{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow G) = \int_X^{\oplus} \text{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G) \, d\chi.$$

D'après 3.6, le noyau de $\text{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G)$ dans $C^*(G)$ est $J(\chi)$. Ainsi, le noyau de $\text{ind}(\xi; H \uparrow G)$ dans $C^*(G)$ contient $\bigcap_{\chi \in X} J(\chi)$. Combinant avec 3.8, on voit que tout idéal primitif de $C^*(G)$ contenant le noyau de $\text{ind}(\xi; H \uparrow G)$ est le noyau d'une représentation unitaire irréductible contenue dans $T(\chi; \mathfrak{h}_0)$ pour un $\chi \in X$.

(d) On rappelle que l'ouvert U est le complémentaire de l'ensemble des zéros dans \mathfrak{a}^* d'une fonction polynômiale p homogène et semi-invariante. Notons q la fonction polynômiale sur \mathfrak{g}^* telle que pour tout a dans \mathfrak{a}^* on ait $q(\text{Re } a) = |p(a)|^2$. Elle est homogène et semi-invariante pour l'action de G' dans \mathfrak{g}^* . Elle est nulle sur le complémentaire de $G' \cdot f$ dans son adhérence dans \mathfrak{g}^* puisque les orbites de G' dans l'ouvert $\text{Re}(U)$ de \mathfrak{g}^* ont toutes la même dimension. La démonstration de (2.5 (v)) prouve que x n'est pas dans $G' \cdot f$; donc $q(x) = 0$. Soient ν le poids de q dans \mathfrak{g}' et $\mathfrak{g}'' = \text{Ker } \nu \cap \mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'(f')$ est contenue dans $\text{Ker } \nu$ puisque q n'est pas nul en f ; donc $\text{Ker } \nu$ contient \mathfrak{h}'_0 puisque $\mathfrak{g}'(f')$ contient un tore maximal de \mathfrak{h}'_0 (10, p. 270). Par suite, \mathfrak{g}'' contient tous les \mathfrak{h}_n et \mathfrak{h} . D'après (3, 6.1), q est dans $S(\mathfrak{g}'')$. Si ℓ est une forme linéaire régulière sur \mathfrak{g}'' et si \mathfrak{f} est une polarisation résoluble en ℓ , on note $I(\ell)$ le noyau de la représentation $\text{ind}^-(\ell | \mathfrak{f}; \mathfrak{f} \uparrow \mathfrak{g}'')$. D'après (9), $I(\ell)$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}'')$ et il existe u dans le centre de $U(\mathfrak{g}'')$ tel que pour tout ℓ régulière dans $(\mathfrak{g}'')^*$, $u - q(\ell)$ soit dans $I(\ell)$. Puisque q est homogène, q n'est pas nul en if , mais il est nul en ix ; donc u n'est pas dans $\text{Ker } \text{ind}^-(if | \mathfrak{h}_0; \mathfrak{h}_0 | \mathfrak{g}'')$ mais, d'après (5, 6.4.1), u est dans $\text{Ker } \text{ind}^-(ix | \mathfrak{h}; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g}'')$. D'après (5, 5.1.7) u est dans $\text{Ker } \text{ind}^-(ix | \mathfrak{h}; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g})$. La démonstration de l'assertion (i) de (8, lemme 2.1) prouve que le noyau de la représentation infinitésimale associée à la représentation $\text{ind}(\xi; H \uparrow G)$ contient $\text{Ker } \text{ind}^-(ix | \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g})$. Il résulte alors de (c) qu'il existe χ dans X et une représentation unitaire irréductible T contenue dans $T(\chi; \mathfrak{h}_0)$ pour laquelle le noyau de la représentation infinitésimale associée contient u . Soit G'' le sous-groupe analytique de G' d'algèbre de Lie \mathfrak{g}'' . Le groupe G'' est le noyau du poids de u dans G ; donc G'' contient $\bar{H}_0 = ZH'_0 \cap G$. Alors $T(\chi; \mathfrak{h}_0) = \text{ind}(\text{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G''); G'' \uparrow G)$. Notons \mathcal{H} l'espace de la représentation $\pi'' = \text{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G'')$. Soit Y dans $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}''$ et posons $g(t) = \exp(tY)$ ($t \in \mathbb{R}$). La représentation $T(\chi; \mathfrak{h}_0)$ est équivalente à la représentation π de G dans $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$ définie par

$$(\pi(g(t)g)\lambda)(s) = \pi''(g(t-s)g(s-t))\lambda(s-t)$$

pour t dans \mathbb{R} , g dans G'' et λ dans $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$. Notons π_1 une sous-représentation irréductible de π équivalente à T et π_∞ la

représentation infinitésimale associée à π . Soient λ non nul dans l'espace de π_1 , α dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ϕ dans $\mathcal{D}(G'')$ et ψ la fonction $g(t)g \mapsto \alpha(t)\phi(g)$ ($t \in \mathbb{R}$, $g \in G''$) sur G . On fixe une mesure de Haar à gauche sur G . L'élément $\lambda' = \pi(\psi)\lambda$ de l'espace de π est une fonction C^∞ sur \mathbb{R} et se trouve dans le domaine de définition de $\pi_\infty(u)$. La démonstration de l'assertion (i) de (8, lemme 2.1) prouve que le noyau de la représentation infinitésimale associée à π'' contient $\text{Ker ind}^-(if \mid \mathfrak{h}_0; \mathfrak{h}_0 \uparrow \mathfrak{g}'')$; donc pour tout t dans \mathbb{R} , on a: $(\pi_\infty(u)\lambda')(t) = q(ig(t) \cdot f)\lambda'(t)$. L'image de λ' par l'opérateur $\pi_\infty(u)$ est nulle puisque u est dans le noyau de la représentation infinitésimale associée à π_1 ; donc λ' est nul puisque q ne s'annule pas sur $G_0 \cdot (if)$. Etant donné l'arbitraire de α et de ϕ , on voit que λ est nul, ce qui est absurde.

3.11. Soit Γ le groupe adjoint de \mathfrak{a}' . D'après 3.10, si a est dans U , admissible et si l'orbite $\Gamma \cdot a$ est tempérée alors l'orbite $\Gamma \cdot a$ est fermée dans \mathfrak{a}^* pour la topologie de Zariski. D'après 2.9 et (4, 1.2) il existe une partie Γ -stable U' de \mathfrak{a}^* ouverte et dense dans \mathfrak{a}^* , pour la topologie de Zariski, telle que toute Γ -orbite contenue dans U' soit fermée dans \mathfrak{a}^* pour la topologie de Zariski.

3.12. THEOREME: Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur k (resp. \mathbb{R}), ψ la forme linéaire $x \mapsto \text{tr ad}_{\mathfrak{g}} x$ sur \mathfrak{g} . On suppose qu'il existe un élément de $S(\mathfrak{g}) - \{0\}$ qui est semi-invariant de poids $-\psi$ pour l'action adjointe de \mathfrak{g} (c'est le cas, par exemple, si \mathfrak{g} est unimodulaire). Soit G le groupe adjoint algébrique de \mathfrak{g} . Il existe une partie G -stable U de \mathfrak{g}^* , ouverte et dense dans \mathfrak{g}^* pour la topologie de Zariski, telle que toute G -orbite contenue dans U soit fermée dans \mathfrak{g}^* pour la topologie de Zariski.

Si $k = \mathbb{C}$, cela résulte de 3.11 et 0.8. Les parties (b) et (c) de la démonstration de (4, 3.2) prouvent alors le théorème dans le cas général.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ANDLER: Sur des représentations construites par la méthode des orbites. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 209, 1980.
- [2] P. BERNAT et coll.: *Représentations des groupes de Lie résolubles*. Paris, Dunod, 1972.
- [3] W. BOHRO, P. GABRIEL und R. RENTSCHLER: Primideale in Einhüllenden auflösbaren Lie algebren. *Lecture Notes in Math.* 357, Springer-Verlag, 1973.
- [4] J-Y CHARBONNEL et J. DIXMIER: *Sur les orbites de la représentation coadjointe* (à paraître).
- [5] J. DIXMIER: *Algèbres enveloppantes*. Paris, Gauthier-Villars, 1974.

- [6] J. DIXMIER, M. DUFLO et M. VERGNE: Sur la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie. *Compositio Math.* 29 (1974) 309–323.
- [7] J. DIXMIER et P. MALLIAVIN: Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables. *Bull. des Sc. Math.*, 102 (1978) 305–330.
- [8] M. DUFLO: Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents. *Annales Sci. Ec. Normale Sup.*, 5 (1972) 71–120.
- [9] M. DUFLO: *Construction of primitive ideals in an enveloping algebra*, in *Lie groups and their representations*. London, Adam Hilger Ltd., 1975.
- [10] M. DUFLO: Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, *Annales Sci. Ec. Normale. Sup.* 10 (1977) 265–288.
- [11] M. DUFLO: *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Cartona, Cours d'été du C.I.M.E., 1980.
- [12] J.M.G. FELL: Weak containment and Kronecker product of group representations. *Pacific J. Math.* 13 (1963) 503–510.
- [13] J.M.G. FELL: Weak containment and induced representations of groups. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 110 (1964) 424–447.
- [14] S. HELGASON: *Differential geometry and symmetric spaces*. New York, Academic Press, 1962.
- [15] V. GINSBURG: *Orbit method for complex Lie groups* (preprint).
- [16] R. GODEMENT: La formule des traces de Selberg considérée comme source de problème mathématiques. *Sém. Bourbaki* 244, 1962.
- [17] L. PUKANSZKY: Unitary representations of Lie groups with cocompact radical and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* 236 (1978) 1–49.

(Oblatum 11-V-1981 & 7-X-1981)

Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45–55, 5^{me} étage
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France