COMPOSITIO MATHEMATICA

ALINE BONAMI
NOËL LOHOUÉ

Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimations L^p

Compositio Mathematica, tome 46, n° 2 (1982), p. 159-226
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1982__46_2_159_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 46, Fasc. 2, 1982, pag. 159–226
© 1982 Martinus Nijhoff Publishers – The Hague
Printed in the Netherlands

PROJECTEURS DE BERGMAN ET SZEGÖ POUR UNE CLASSE DE DOMAINES FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES ET ESTIMATIONS L^p

Aline Bonami et Noël Lohoué

Introduction

Soit D un domaine borné de $\mathbf{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$, défini par: $D = \{z; \lambda(z) < 0\}$, où λ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $|\nabla\lambda(z| \neq 0$ sur $\partial D = \{z; \lambda(z) = 0\}$. Si σ désigne la mesure euclidienne sur ∂D, le projecteur de Szegö est défini comme le projecteur orthogonal de $L^2(\partial D, d\sigma)$ sur $\mathscr{H}^2(\partial D, d\sigma)$, c'est-à-dire sur le sous-espace de $L^2(\partial D)$ formé des valeurs au bord des fonctions holomorphes. Il est donné par:

$$\mathbf{S}f(z) = \int_{\partial D} S(z, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad z \in D,$$

si $S(z, \zeta)$ désigne le noyau de Szegö du domaine.

Lorsque D est un domaine strictement pseudo-convexe, le noyau $S(z, \zeta)$ et le projecteur $\mathbf{S}$ sont maintenant bien connus ([12], [8], [15]): $\mathbf{S}$ est en gros un opérateur intégrale singulière sur ∂D muni d'une métrique adaptée. Par contre, lorsque D est seulement pseudo-convexe, on ne sait rien en général sur $S(z, \zeta)$ et sur $\mathbf{S}$.

Le but de cet article est d'étudier les noyaux de Szegö de certains domaines pseudo-convexes particuliers, en partant de l'exemple le plus simple, le domaine $\{|z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$. Plus généralement, soit

$$D_\alpha = \{z; \lambda_\alpha(z) = |z_1|^{2/\alpha_1} + |z_2|^{2/\alpha_2} + \cdots + |z_n|^{2/\alpha_n} < 1\},$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ compris entre 0 et 1. Le domaine D_α est pseudo-convexe, strictement pseudo-convexe en tout point z tel que $z_j \neq 0$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$. Pour ces domaines D_α, nous calculons explicitement les noyaux de Szegö, du moins après avoir remplacé la mesure euclidienne sur ∂D_α par la mesure $d\mu_\alpha = \dfrac{2d\sigma_\alpha}{|\nabla\lambda_\alpha|}$: la mesure μ_α

0010–437X/82050159–68$00.20/0

possède des propriétés remarquables d'homogénéité dans $\mathbf{R}^{2n}$ qui rendent le calcul possible. Le noyau de Szegö correspondant, $S_\mu(z, \zeta)$ est donné sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction de Mittag–Leffler, puis développé en faisant apparaître ses singularités (propositions (2.2), (2.3), (3.1)). Donnons une idée des formules obtenues pour le domaine $D = \{z \in \mathbf{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$: alors, à un noyau uniformément intégrable près, $S_\mu(z, \zeta)$ vaut:

$$\frac{2}{\pi^2} \frac{z_2\bar{\zeta}_2}{(1 - z_1\bar{\zeta}_1 - z_2^2\bar{\zeta}_2^2)^2} \chi_{|\mathrm{Arg}(z_2\bar{\zeta}_2)| < (3\pi/8)}(z, \zeta) + \frac{1}{2\pi^2(1 - z_1\bar{\zeta}_1)^{3/2}}.$$

On reconnait dans le premier terme le noyau de Szegö de la boule pris en (z_1, z_2^2), (ζ_1, ζ_2^2) et pondéré comme il se doit par le jacobien de la transformation $(z_1, z_2) \to (z_1, z_2^2)$. Le second terme a pour support singulier l'ensemble des $(z, z) \in \partial D \times \partial D$ tels que z soit non strictement pseudo-convexe.

La technique de calcul utilisée pour $S_\mu(z, \zeta)$ est intéressante en elle-même, et nous montrons brièvement comme elle pourrait être utilisée pour d'autres noyaux liés à des fonctions hypergéométriques. Nous calculons également le noyau de Bergman de D_α, et étudions l'analyticité de $S_\mu(z, \zeta)$ au passage (§3).

Les inégalités L^p pour le projecteur $\mathbf{S}_\mu$ s'obtiennent, grâce aux formules obtenues, comme conséquences d'inégalités à poids sur la boule pour les projecteurs de Szegö et Bergman. Nous montrons ensuite que le projecteur $\mathbf{S}_\mu$ s'exprime comme dans le cas de la boule par

$$z \in \partial D \quad \mathbf{S}_\mu f(z) = \tfrac{1}{2} f(z) + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\substack{z \in \partial D_\alpha \\ d_\alpha(z, \zeta) > \epsilon}} S_\mu(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta),$$

d_α désignant une distance convenable, lorsque f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. L'étude de d_α (§6) est particulièrement intéressante puisque elle jette une lumière sur la géométrie du noyau de Szegö, et donne peut-être un moyen pour aborder d'autres domaines non strictement pseudo-convexes. En fait, nous montrons qu'on peut prendre, comme dans le cas strictement pseudo-convexe, $d_\alpha(z, \zeta) = |S_\mu(z, \zeta)|^{-1}$. Les points de non stricte pseudo-convexité de D_α sont des points de continuité de $\mathbf{S}_\mu f$ comme les autres.

$\mathbf{S}_\mu$ étant ainsi défini, nous montrons qu'il envoie continûment L^1 dans L^1_{faible}: là-encore, c'est une conséquence d'inégalités à poids sur la boule, inégalités qui sont non standards à notre connaissance (cf. l'appendice).

Il nous reste à revenir au projecteur de Szegö $\mathbf{S}$: l'astuce de N. Kerzman et E. Stein ([15]) permettant d'écrire le projecteur orthogonal $\mathbf{S}$ à partir d'un projecteur oblique (ici $\mathbf{S}_\mu$) presque orthogonal ($\mathbf{S}_\mu - \mathbf{S}_\mu^*$ est régularisant) permet de déduire les inégalités L^p pour $\mathbf{S}$ des inégalités L^p pour $\mathbf{S}_\mu$ (§7). Le fait que le projecteur de Bergman soit un opérateur borné dans L^p découle également immédiatement des inégalités L^p pour $\mathbf{S}_\mu$.

Dans un dernier paragraphe, nous construisons des formules de représentation de Cauchy–Fantappié sur les domaines D_α qui ont à la fois l'avantage d'être d'expression très simple et d'avoir leur analogue dans tout domaine pseudo-convexe qui s'envoie holomorphiquement dans un domaine strictement pseudo-convexe. L'intérêt de telles formules est évident pour de nombreux problèmes: solutions de $\bar\partial$, étude des espaces $\mathcal{H}^p$, zéros de la classe de Nevanlinna.... Nous montrons que le projecteur associé est, dans certains cas, borné dans L^p, $p>1$. Toutefois il n'est pas, même dans les cas les plus simples, presque orthogonal: il est donc loin du projecteur de Szegö.

Une partie des résultats de cet article a été annoncée dans [6] et [7].

1. Etude des domaines D_α: Choix d'une mesure sur ∂D_α

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n nombres réels de l'intervalle $]0,1]$. On appelle D_α le domaine de $\mathbf{C}^n$:

$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbf{C}^n ; \lambda_\alpha(z) = \sum_{j=1}^n |z_j|^{2/\alpha_j} < 1 \right\}.$$

Le bord ∂D_α de D_α est de classe $\mathscr{C}^2$ (de classe $\mathscr{C}^\infty$ si les α_j sont des inverses d'entiers), et la forme de Levi de D_α est strictement définie positive en tout point $\zeta \in \partial D_\alpha$ tel que $\zeta_j \neq 0$ pour tous les indices j pour lesquels $\alpha_j \neq 1$, semi-définie positive ailleurs.

Appelons σ_α la mesure euclidienne de ∂D_α. Comme σ_α est invariante par les rotations $z_1 \to e^{i\theta_1} z_1, z_2 \to e^{i\theta_2} z_2, \ldots, z_n \to e^{i\theta_n} z_n$, les fonctions:

$$z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \ldots, z_n^{m_n}, \text{ avec } m_1 \geq 0, \ldots, m_n \geq 0$$

forment une base orthogonale de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\partial D_\alpha)$. Le noyau de Szegö de D_α est donc connu sous forme de série:

$$S(z, \zeta) = \sum_m a_m z^m \bar{\zeta}^m,$$

si m désigne le multi-indice $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $z^m = z_1^{m_1}, \ldots, z_n^{m_n}$, $\bar{\zeta}^m = \bar{\zeta}_1^{m_1}, \ldots, \bar{\zeta}_n^{m_n}$, la somme est prise sur tous les multi-indices m tels que $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \ldots, m_n \geq 0$, et

$$a_m^{-1} = \int_{\partial D_\alpha} |z^m|^2 \, d\sigma_\alpha.$$

Malheureusement, cette intégrale n'est nullement une fonction simple de m, aussi nous allons choisir sur ∂D_α une mesure ayant des propriétés d'homogénéité remarquables, et qui apparaît comme provenant de la désintégration de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}^n$ par rapport aux lignes de niveau de la fonction λ_α. Cette mesure, μ_α, est donnée par le lemme suivant; $dV(z)$ (ou $dV_n(z)$ s'il peut y avoir confusion) y désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}^n$.

LEMME 1.1: *Il existe une mesure μ_α, et une seule, sur ∂D_α telle que, quelle que soit la fonction f continue à support compact dans* $\mathbf{C}^n$:

$$\int_{\mathbf{C}^n} f(z) dV(z) = \int_0^\infty \left\{ \int_{\partial D_\alpha} f(r^{\alpha_1} z_1, r^{\alpha_2} z_2, \ldots, r^{\alpha_n} z_n) \, d\mu_\alpha(z) \right\} r^{2|\alpha|-1} \, dr. \tag{1.2}$$

$|\alpha|$ désigne évidemment $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Lorsque D_α est la boule unité B (c'est-à-dire lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$) il est clair que μ_α est la mesure euclidienne sur la sphère unité, que nous noterons simplement σ. Nous allons utiliser ce cas particulier pour calculer μ_α dans un paramétrage convenable de ∂D_α: posons $z = \Phi(z')$ si

$$z' = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, \ldots, r_n e^{i\theta_n}), \text{ et } z = (r_1^{\alpha_1} e^{i\theta_1}, r_2^{\alpha_2} e^{i\theta_2}, \ldots, r_n^{\alpha_n} e^{i\theta_n}).$$

Alors

$$\int_{\mathbf{C}^n} f(z) dV(z) = \alpha_1, \ldots, \alpha_n \int_{\mathbf{C}^n} f \circ \Phi(z') |z_1'|^{2\alpha_1 - 2} \ldots |z_n'|^{2\alpha_n - 2} \, dV(z')$$
$$= \alpha_1, \ldots, \alpha_n \int_0^\infty \left\{ \int_{\partial B} f \circ \Phi(rz') |z_1'|^{2\alpha_1 - 2}, \ldots, |z_n'|^{2\alpha_n - 2} \, d\sigma(z') \right\} r^{2|\alpha|-1} \, dr.$$

la première égalité étant due au théorème de changement de variables dans $\mathbf{C}^n$, la seconde étant l'égalité (1.2) dans le cas de la boule unité. Comme l'image par Φ de ∂B est ∂D_α, et l'image par Φ de rz' est $(r^{\alpha_1} z_1, r^{\alpha_2} z_2, \ldots, r^{\alpha_n} z_n)$ si $z = \Phi(z')$, il en résulte que l'accolade s'exprime justement comme l'intégrale sur ∂D_α de la fonction $f(r^{\alpha_1} z_1, \ldots, r^{\alpha_n} z_n)$, prise par rapport à la mesure:

$$d\mu_\alpha(z) = \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_n|z_1'|^{2\alpha_1-2} \ldots |z_n'|^{2\alpha_n-2}\, d\sigma(z'). \tag{1.3}$$

Nous allons voir que la mesure μ_α est, dans tous les cas, équivalente à la mesure euclidienne σ_α. Plus précisément:

LEMME 1.4: *La mesure euclidienne σ_α et la mesure μ_α sont liées par la relation*: $d\sigma_\alpha(z) = \frac{1}{2}|\nabla\lambda_\alpha(z)|\, d\mu_\alpha(z)$.

Désignons par $\bar{\delta}$ la distance à ∂D_α, par ν_ζ la normale extérieure à ∂D_α en ζ, et D_α^ϵ le sous-ensemble de D_α formé des points à distance inférieure à ϵ de ∂D_α. Si ϵ est assez petit, tout $z \in D_\alpha^\epsilon$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\zeta - \eta\nu_\zeta$, avec $\zeta \in \partial D_\alpha$ et $\eta \in]0, \epsilon[$, et

$$\epsilon \int_{\partial D_\alpha} f(\zeta)\, d\sigma_\alpha(\zeta) = \int_{D_\alpha} F(z)\, dV(z) + \sigma(\epsilon)$$

si F désigne la fonction à support dans D_α^ϵ, et telle que $F(\zeta - \eta\nu_\zeta) = f(\zeta)$ (cf [11]). Mais, en vertu de (1.2),

$$\epsilon \int_{\partial D_\alpha} f(\zeta) d\sigma_\alpha(\zeta) = \int_{\partial D_\alpha} \left\{ \int_0^\infty F(r^{\alpha_1}\zeta_1, \ldots, r^{\alpha_n}\zeta_n) r^{2|\alpha|-1}\, dr \right\} d\mu_\alpha(\zeta) + \sigma(\epsilon).$$

Pour conclure, il suffit de montrer que:

$$\int_0^\infty F(r^{\alpha_1}\zeta_1, \ldots, r^{\alpha_n}\zeta_n) r^{2|\alpha|-1}\, dr = \frac{\epsilon}{2} f(\zeta)|\nabla\lambda_\alpha(\zeta)| + \sigma(\epsilon),$$

ou encore, f étant supposée de classe $\mathscr{C}^1$, que

$$\begin{aligned} &(r^{\alpha_1}\zeta_1, r^{\alpha_2}\zeta_2, \ldots, r^{\alpha_n}\zeta_n) \text{ appartient à } D_\alpha^\epsilon \text{ si et seulement si } r \text{ est} \\ &\text{compris entre } 1 - |\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|\frac{\epsilon}{2} + \sigma(\epsilon) \text{ et } 1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Montrons donc (1.4). Soit tout d'abord $z \in D_\alpha^\epsilon : z = \zeta' - \eta\nu_{\zeta'}$, avec $\eta < \epsilon$. Montrons que z ne peut s'écrire sous la forme $(r^{\alpha_1}\zeta_1, r^{\alpha_2}\zeta_2, \ldots, r^{\alpha_n}\zeta_n)$, avec $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \partial D_\alpha$, que si $r \geq 1 - |\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|\frac{\epsilon}{2} + \sigma(\eta)$, ou encore, comme $r^2 = \lambda_\alpha(z)$, si $\lambda_\alpha(z) \geq 1 - |\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|\epsilon + \sigma(\eta)$. Mais il suffit de développer λ_α au voisinage de ζ':

$$\lambda_\alpha(z) = 1 - \eta\nu_{\zeta'} \cdot \nabla\lambda_\alpha(\zeta') + \sigma(\eta) = 1 - |\nabla\lambda_\alpha(\zeta')|\eta + \sigma(\eta).$$

En particulier la distance de z à ζ, qui est de l'ordre de $1-r$, et donc la distance de ζ à ζ' en vertu de l'inégalité triangulaire, sont $\mathcal{O}(\eta)$. Comme λ_α est de classe $\mathscr{C}^2$:

$$|\nabla\lambda_\alpha(\zeta)| = |\nabla\lambda_\alpha(\zeta')| + \mathcal{O}(\eta)$$

et finalement

$$\lambda_\alpha(z) = 1 - |\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|\eta + o(\eta) \geq 1 - |\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|\epsilon + o(\epsilon).$$

Soit réciproquement $z = (r^{\alpha_1}\zeta_1, r^{\alpha_2}\zeta_2, \ldots, r^{\alpha_n}\zeta_n)$, avec $\zeta \in \partial D_\alpha$ et $1-\eta < r < 1$. Montrons que la distance de z à ∂D_α, $\delta(z)$, est inférieure à $\dfrac{2\eta}{|\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|} + o(\eta)$: puisque $\nabla\delta(\zeta) = -\nu_\zeta$,

$$\delta(z) = \delta(z) - \delta(\zeta) = (z-\zeta)\cdot\nu_\zeta + o(|z-\zeta|)$$

tandis que:

$$r^2 = \lambda_\alpha(z) = \lambda_\alpha(z) - \lambda_\alpha(\zeta) + 1 = 1 + (z-\zeta)\cdot\nabla\lambda_\alpha(\zeta) + o(|z-\zeta|).$$

Comme $|z-\zeta| = \mathcal{O}(\eta)$ et $\nabla\lambda_\alpha(\zeta) = |\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|\nu_\zeta$,

$$\delta(z) = \frac{(1-r^2)}{|\nabla\lambda_\alpha(\zeta)|} + o(\eta) < \frac{2\eta}{|\nabla\lambda_\alpha(\zeta)} + o(\eta).$$

REMARQUE: La démonstration ci-dessus est une démonstration "naïve": on pourrait évidemment définir μ_α en termes de formes différentielles.

Nous aurons également besoin de l'expression de μ_α lorsque ∂D_α est identifiée à $D_{\alpha'} \times \partial D_{\alpha''}$, avec $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha'' = (\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$ au moyen de la bijection ψ suivante: étant donnés $z' \in D_\alpha$ et $z'' \in \partial D_{\alpha''}$, $z' = (z'_1, \ldots, z'_m)$ et $z'' = (z''_{m+1}, \ldots, x''_n)$, notons $\psi(z', z'')$ le point:

$$\psi(z', z'') = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_m, r^{\alpha_{m+1}}z''_{m+1}, \ldots, r^{\alpha_n}z''_n)$$

avec $r^2 = 1 - |z'_1|^{2/\alpha_1} - \cdots - |z'_m|^{2/\alpha_m}$.

LEMME 1.5:

$$\int_{\partial D_\alpha} f(z)\, d\mu_\alpha(z) = \int\int_{D_{\alpha'}\times\partial D_{\alpha''}} f[\psi(z', z'')] \times \left(1 - \sum_{j=1}^{m} |z_j'|^{2/\alpha_j}\right)^{|\alpha''|-1} dV_m(z')\, d\mu_{\alpha''}(z'').$$

Il suffit d'utiliser (1.2) pour $D_{\alpha'}$ et $D_{\alpha''}$ pour écrire:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}^n} f(z)\, dV(z) &= \int\int_{\mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^{n-m}} f(z', z'')\, dV_m(z')\, dV_{n-m}(z'') \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\int\int_{\partial D_{\alpha'}\times\partial D_{\alpha''}} f(r^{\alpha_1}z_1, \ldots, r^{\alpha_m}z_m,\right. \\ &\quad \left. s^{\alpha_{m+1}}z_{m+1}, \ldots, s^{\alpha_n}z_n)\, d\mu_{\alpha'}(z')\, d\mu_{\alpha''}(z'')\right\} \\ &\quad \times r^{2|\alpha'|-1}s^{2|\alpha''|-1}\, dr\, ds\end{aligned}$$

puis, utilisant le fait que:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty a(r, s)\, dr\, ds = \int_0^\infty \left\{\int_0^1 a(r\rho, \rho\sqrt{1-r^2})\frac{\rho}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\right\} d\rho,$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} f(z)\, dV(z) = \int_0^\infty \int_{\partial D_{\alpha''}} \left\{\int_0^1 \int_{\partial D_{\alpha'}} F(r, \rho, z', z'')r^{2|\alpha'|-1}\, d\mu_{\alpha'}(z')\right\} \rho^{2|\alpha|-1}\, d\mu_{\alpha''}(z'')\, d\rho,$$

avec $F(r, \rho, z', z'') = f(\rho^{\alpha_1}r^{\alpha_1}z_1', \ldots, \rho^{\alpha_{m+1}}(1-r^2)^{\alpha_{m+1}/2}z''_{m+1} \cdots)(1-r^2)^{|\alpha''|-1}$.

Utilisant encore (1.2) dans $\mathbf{C}^m$, on reconnait dans l'accolade l'intégrale dans $D_{\alpha'}$ de:

$$f(\rho^{\alpha_1}z_1', \ldots, \rho^{\alpha_{m+1}}, (1-\Sigma|z_j'|^{2/\alpha_j})^{\alpha_{m+1}/2}z''_{m+1} \cdots) \times (1-\Sigma|z_j'|^{2/\alpha_j})^{|\alpha''|-1}.$$

Finalement, $\int_{\mathbf{C}^n} f(z)\, dV(z)$ s'écrit, si $z = (z_1, \ldots, z_n) = \psi(z', z'')$,

$$\int_0^\infty \left\{\int\int_{\partial D_{\alpha''}\times D_{\alpha'}} f(\rho^{\alpha_1}z_1, \ldots, \rho^{\alpha_n}z_n) \times (1-\Sigma|z_j'|^{2/\alpha_j})^{|\alpha''|-1}\, dV(z')\, d\mu_{\alpha''}(z'')\right\} \rho^{2|\alpha|-1}\, d\rho.$$

C'est dire, étant donnée la définition de μ_α, que

$$d\mu_\alpha(z) = (1 - \Sigma|z'_j|^{2/\alpha_j})^{|\alpha''|-1}\, dV(z')\, d\mu_{\alpha''}(z'').$$

Le lemme est démontré.

Nous calculons dans le paragraphe suivant (cf. (2.1)) la mesure de ∂D_α. Il résulte de ce calcul et du lemme (1.5) que:

LEMME 1.6: *Soit $m < n$, f une fonction définie dans $D_{\alpha'}$, avec $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Alors*

$$\int_{\partial D_\alpha} f(z_1, \ldots, z_m)\, d\mu_\alpha(z) = c \int_{D_{\alpha'}} f(z_1, \ldots, z_m)\left(1 - \sum_1^m |z_j|^{2/\alpha_j}\right)^{|\alpha''|-1} dV_m(z)$$

avec

$$c = 2\Pi^{n-m}\alpha_{m+1} \ldots \alpha_n \frac{\Gamma(\alpha_{m+1}) \cdots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n)}.$$

2. Calcul du noyau de Szegö relatif a la mesure μ_α

Les fonctions $z^m = z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \ldots, z_n^{m_n}$ formant encore une base orthogonale de l'espace $\mathscr{H}^2(\partial D_\alpha)$ pour le produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_{\partial D_\alpha} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu_\alpha(z),$$

le noyau de Szegö $S_\mu(z, \zeta)$ donnant la projection orthogonale pour ce produit scalaire est donné par la série:

$$S_\mu(z, \zeta) = \sum_m b_m z^m \bar{\zeta}^m,$$

avec

$$b_m^{-1} = \int_{\partial D_\alpha} |z^m|^2\, d\mu_\alpha.$$

Utilisons (1.2) pour calculer b_m^{-1}:

$$\int_{\mathbf{C}^n} e^{-\Sigma|z_j|^{2/\alpha_j}}|z_1|^{2m_1}\cdots|z_n|^{2m_n}\,dV(z)=$$
$$=b_m^{-1}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2\alpha_1m_1+\cdots+2\alpha_nm_n+2|\alpha|-1}\,dr$$
$$=\frac{1}{b_m}\Gamma(\alpha_1m_1+\alpha_2m_2+\cdots+\alpha_nm_n+\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$$

d'une part; d'autre part:

$$\int_{\mathbf{C}} e^{-|z_j|^{2/\alpha_j}}|z_j|^{2m_j}\,dV_1(z_j)=\Pi\,\alpha_j\Gamma(\alpha_jm_j+\alpha_j).$$

Donc $$b_m=\frac{1}{2\Pi^n\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1m_1+\cdots+\alpha_nm_n+\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1m_1+\alpha_1),\ldots,\Gamma(\alpha_nm_n+\alpha_n)}$$

En particulier la mesure de ∂D_α, égale à $b_{(0,\ldots,0)}^{-1}$, est encore égale à $2\Pi^n\alpha_1,\ldots,\alpha_n\dfrac{\Gamma(\alpha_1),\ldots,\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}$, et:

$$(2.1)\quad S_\mu(z,\zeta)=c_\alpha\sum_{\substack{m_1\ge0\\ \vdots\\ m_n\ge0}}\frac{\Gamma(\alpha_1m_1+\cdots+\alpha_nm_n+\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1m_1+\alpha_1),\ldots,\Gamma(\alpha_nm_n+\alpha_n)}z^m\bar\zeta^m$$

avec $c_\alpha^{-1}=2\Pi^n\alpha_1\ldots\alpha_n$.

On peut obtenir une expression explicite de $S_\mu(z,\zeta)$ lorsque tous les α_j sont égaux à 1 sauf l'un, par exemple α_n:

LEMME 2.2: *Si $\alpha=(1,1,\ldots,1,\alpha_n)$, il existe des constantes C_k telles que*

$$S_\mu(z,\zeta)=c_\alpha\sum_{k=1}^{n-1}C_k\Big(1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\bar\zeta_j\Big)^{\alpha_nk-n+1}\times\Big[\Big(1-\sum_{j=1}^{n-1}z_j\bar\zeta_j\Big)^{\alpha_n}-z_n\bar\zeta_n\Big]^{-k-1}.$$

Il suffit, en effet, d'utiliser le fait que:

$$\sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}}\frac{\Gamma(m_1+\cdots+m_{n-1}+\beta)}{\Gamma(m_1+1),\ldots,\Gamma(m_{n-1}+1)}x_1^{m_1}\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}}=\Gamma(\beta)(1-\Sigma x_i)^{-\beta}$$

avec $\beta=\alpha_nm_n+\alpha_n+n-1$ pour faire d'abord la sommation en

$m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ et obtenir que:

$$S_\mu(z,\zeta) = c_\alpha\left(1-\sum_{j=1}^{n-1} z_j\bar{\zeta}_j\right)^{-\alpha_n-n+1} \times \sum_{m\geq 0} \frac{\Gamma(\alpha_n m+\alpha_n+n-1)}{\Gamma(\alpha_n m+\alpha_n)}\left[z_n\bar{\zeta}\left(1-\sum_{j=1}^{n-1} z_j\bar{\zeta}_j\right)^{-\alpha_n}\right]^m.$$

On conclut en remarquant que $\dfrac{\Gamma(\alpha_n m+\alpha_n+n-1)}{\Gamma(\alpha_n m+\alpha_n)}$ est un polynôme en m qui s'exprime, si $n>1$, comme:

$$C_1(m+1)+C_2(m+1)(m+2)+\cdots + C_{n-1}(m+1)(m+2),\ldots,(m+n-1);$$

or:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)(m+2),\ldots,(m+k-1)t^k = (1-t)^{-k-1},$$

d'où le lemme.

En particulier, si $n=2$ et $\alpha=(1,\beta)$,

$$S_\mu(z,\zeta) = \frac{1}{2\Pi^2}(1-z_1\bar{\zeta}_1)^{\beta-1}[(1-z_1\bar{\zeta}_1)^\beta - z_2\bar{\zeta}_2]^{-2}. \tag{2.3}$$

Revenons au cas général, pour lequel il n'y a pas de formule explicite. Nous allons donner une expression intégrale pour $S_\mu(z,\zeta)$. Les problèmes de convergence de série, d'interversion d'intégrales, ..., ne présentent, on le verra, aucune difficulté.

Comme:

$$\Gamma(\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\cdots+\alpha_n m_n+\alpha_1+\cdots+\alpha_n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha_1 m_1}\ldots t^{\alpha_n m_n} t^{|\alpha|-1}\,dt,$$

$$S_\mu(z,\zeta) = c_\alpha\int_0^\infty e^{-t}\sum_{m_1,\ldots,m_n}\frac{(t^{\alpha_1}z_1\bar{\zeta}_1)^{m_1}}{\Gamma(\alpha_1 m_1+\alpha_1)}\cdots\frac{(t^{\alpha_n}z_n\bar{\zeta}_n)^{m_n}}{\Gamma(\alpha_n m_n+\alpha_n)}t^{|\alpha|-1}\,dt.$$

$$S_\mu(z,\zeta) = c_\alpha\int_0^\infty e^{-t}F_{\alpha_1}(t^{\alpha_1}z_1\bar{\zeta}_1)\ldots F_{\alpha_n}(t^{\alpha_n}z_n\bar{\zeta}_n)t^{|\alpha|-1}\,dt, \tag{2.4}$$

si F_β désigne, lorsque $\beta>0$, la fonction entière d'une variable complexe

$$F_\beta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{\Gamma(\beta_m + \beta)}.$$

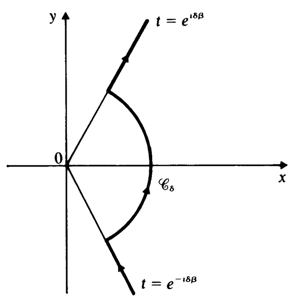
F_1 est évidemment la fonction exponentielle, tandis que F_β en général est liée à la fonction de Mittag–Leffler

$$E_\beta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{\Gamma(\beta m + 1)};$$

exactement, $F_\beta = \beta E'_\beta$. La fonction E_β a été étudiée dans [17] par Mittag–Leffler, qui en donne une représentation intégrale dont découle le comportement asymptotique de E_β. Reprenant sa démonstration, on obtient immédiatement pour F_β la représentation intégrale suivante lorsque $\beta < 1$:

$$F_\beta(u) = \frac{1}{\beta} u^{1/\beta - 1} e^{u^{1/\beta}} + \frac{1}{2i\Pi\beta} \int_{\mathscr{C}_\delta} e^{v^{1/\beta}} \frac{dv}{(u-v)^2}$$

lorsque u est à droite du contour $\mathscr{C}_\delta$ formé des deux demi-droites $= te^{i\delta\beta}$, $t > 1$ et $u = te^{-i\delta\beta}$, $t > 1$, et d'un arc du cercle unité:



avec $\frac{\Pi}{2} < \delta < \Pi$;

$$F_\beta(u) = \frac{1}{2i\Pi\beta} \int_{\mathscr{C}_\delta} e^{v^{1/\beta}} \frac{dv}{(u-v)^2}$$

si u est à gauche de $\mathscr{C}_\delta$. Ici $u^{1/\beta}$ désigne évidemment la détermination principale.

De cette représentation intégrale, on déduit immédiatement que:

LEMME 2.5: *Si $\beta < 1$, quel que soit $\delta \in \left]\frac{\Pi}{2}, \Pi\right[$, il existe une constante C_δ telle que F_β s'écrive*:

$$F_\beta(u) = \frac{1}{\beta} \chi_{\{|\mathrm{Arg}\, u| < \delta\beta\}}(u) u^{1/\beta - 1} e^{u^{1/\beta}} + \varphi_{\beta,\delta}(u), \tag{2.6}$$

avec $|\varphi_{\beta,\delta}| \leq C_\delta$.

Il suffit de montrer que:

$$|F_\beta(u)| \leq C_\delta \text{ si } |\mathrm{Arg}\, u| \geq \delta_\beta;$$

$$\left| F_\beta(u) - \frac{1}{\beta} u^{1/\beta - 1} e^{u^{1/\beta}} \right| \leq C_\delta \text{ si } |\mathrm{Arg}\, u| \leq \delta_\beta.$$

Mais, si $\delta' > \delta$ et u à droite de $\mathscr{C}_\delta$, $|u| > 2$,

$$\left| \int_{\mathscr{C}_{\delta'}} e^{v^{1/\beta}} \frac{dv}{(v-u)^2} \right| \leq \frac{C_{\delta,\delta'}}{|u|^2},$$

$$\text{puisque } |v - u| \simeq |v| + |u|, \text{ et } \int_{\mathscr{C}_{\delta'}} |e^{v^{1/\beta}}|\, dv < \infty.$$

D'où la seconde majoration lorsque $|u| > 2$. La première majoration s'obtient de la même manière, lorsque $|u| > 2$, en écrivant $F_\beta(u)$ comme l'intégrale sur le contour $\mathscr{C}_{\delta''}$, avec $\delta'' < \delta$. Lorsque $|u| \leq 2$, les deux majorations découlent immédiatement de la continuité de F_β et du fait que $u^{1/\beta - 1} e^{u^{1/\beta}}$ tend vers 0 quand u tend vers 0.

Revenons à la representation intégrale (2.4) de $S_\mu(z, \zeta)$. Soit $\eta > 0$. Il résulte du lemme (2.5) que, quel que soit $u \in \mathbf{C}$:

$$|F_\beta(u)| \leq C_\eta e^{(1+\eta)|u|^{1/\beta}},$$

et donc (*):

$$\begin{aligned} S_\mu(z, z) &\leq C_\eta \int_0^\infty e^{-t(1-(1+\eta)(|z_1|^{2/\alpha_1} + \cdots + |z_n|^{2/\alpha_n})} t^{|\alpha|-1}\, dt \\ &= C_\eta \Gamma(|\alpha|)(1 - (1+\eta)(|z_1|^{2/\alpha_1} + \cdots + |z_n|^{2/\alpha_n}))^{-|\alpha|} \end{aligned}$$

lorsque $|z_1|^{2/\alpha_1} + \cdots + |z_n|^{2/\alpha_n} < \frac{1}{1+\eta}$. Faisant varier η, on voit que

(*)Les constantes, lorsqu'elles ne sont pas explicates, sont susceptibles de varier d'une ligne à l'autre.

$S_\mu(z, z) < \infty$ lorsque z appartient à D_α. Soit maintenant $z \in D_\alpha$, $\zeta \in \bar{D}_\alpha$:

$$\Sigma b_m |z^m \bar{\zeta}^m| = \Sigma\, b_m |y|^{2m} = S_\mu(u, u)$$

avec $u = (|z_1\bar{\zeta}_1|^{1/2}, |z_2\bar{\zeta}_2|^{1/2}, \ldots, |z_n\bar{\xi}_n|^{1/2})$. Comme $u \in D_\alpha$, puisque:

$$|z_1\bar{\zeta}_1|^{1/\alpha_1} + \cdots + |z_n\bar{\zeta}_n|^{1/\alpha_n} \leq \frac{|z_1|^{2/\alpha_1} + |\zeta_1|^{2/\alpha_1}}{2} + \cdots + \frac{|z_n|^{2/\alpha_n} + |\zeta_n|^{2/\alpha_n}}{2} < 1,$$

la série définissant $S_\mu(z, \zeta)$ est absolument convergente, et les interversions faites de sommations et intégrations légitimes.

Si par contre $z \notin D_\alpha$, la minoration de $F_\beta(u)$, pour u réel positif, par $Ce^{u^{1/\beta}}$ permet de montrer que

$$\int_0^\infty e^{-t} F_{\alpha_1}(t^{\alpha_1}|z_1|^2) \ldots F_{\alpha_n}(t^{\alpha_n}|z_n|^2) t^{|\alpha|-1}\, dt$$

vaut $+\infty$: la série définissant $S_\mu(z, z)$ diverge.

Nous allons montrer qu'en fait l'intégrale (2.4) a un sens lorsque z et ζ appartiennent à ∂D_α, $z \neq \zeta$, ce qui nous permettra de conclure que:

Proposition 2.1: *Le noyau de Szegö $S_\mu(z, \zeta)$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $\bar{D}_\alpha \times \bar{D}_\alpha$ privé de la diagonale de ∂D_α.*

Il suffit de montrer que la fonction:

$$A_\alpha(u) = \int_0^\infty e^{-t} F_{\alpha_1}(t^{\alpha_1} u_1) \ldots F_{\alpha_n}(t^{\alpha_n} u_n) t^{|\alpha|-1}\, dt,$$

qui est analytique dans:

$$\Delta_\alpha = \{u \in \mathbf{C}^n; |u_1|^{1/\alpha_1} + |u_2|^{1/\alpha_2} + \cdots + |u_n|^{1/\alpha_n} < 1\},$$

possède un prolongement analytique au voisinage des points $u \in \partial\Delta_\alpha$ tels que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soient non tous réels positifs ou nuls: en effet $S_\mu(z, \zeta) = c_\alpha A_\alpha(z\bar{\zeta})$ si $z\bar{\zeta}$ désigne le point $(z_1\bar{\zeta}_1, z_2\bar{\zeta}_2, \ldots, z_n\bar{\zeta}_n)$. Or $z\bar{\zeta}$ appartient, nous l'avons vu, à $\bar{\Delta}_\alpha$ lorsque $z \in \bar{D}_\alpha$, $\zeta \in \bar{D}_\alpha$, et $z_1\bar{\zeta}_1, z_2\bar{\zeta}_2, \ldots, z_n\bar{\zeta}_n$ sont tous réels positifs et tels que $|z_1\bar{\zeta}_1|^{1/\alpha_1} + \cdots + |z_n\bar{\zeta}_n|^{1/\alpha_n} = 1$ si et seulement si $z_1 = \zeta_1$, $z_2 = \zeta_2, \ldots, z_n = \zeta_n$.

Soit donc par exemple $u^0 \in \partial\Delta_\alpha$ tel que u_1^0 soit non réel positif ou nul: $|\mathrm{Arg}\, u_1^0| > \delta\alpha_1$, avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

$$V_\eta = \{u \in \mathbf{C}^n; |\mathrm{Arg}\, u| > \delta\alpha_1 \text{ et } (\cos\delta)\, |u_1|^{1/\alpha_1} + |u_2|^{1/\alpha} + \cdots +$$

forme un voisinage de u^0. Mais, comme en vertu du lemme (2.5), si $|\mathrm{Arg}\, u_1| > \delta\alpha_1$,

$$|F_{\alpha_1}(u_1)| \leq C_\eta\, e^{(1+\eta)(\cos\delta)|u_1|^{1/\alpha_1}},$$

$$\begin{aligned} \int e^{-t} |F_{\alpha_1}(t^{\alpha_1}u_1)|, \ldots, |F_{\alpha_n}(t^{\alpha_n}u_n)| t^{|\alpha|-1}\, dt \\ \leq \int_0^\infty e^{-t(1-(1+\eta)[(\cos\delta)|u_1|^{1/\alpha_1}+|u_2|^{1/\alpha_2}+\cdots+|u_n|^{1/\alpha_n}])}\, t^{|\alpha|-1}\, dt \\ < \infty \end{aligned}$$

sur V_η. La fonction A_α est donc bien définie sur V_η. Il est aisé de montrer qu'elle y est analytique.

Nous allons maintenant déduire du lemme (2.5) des estimations précise de $S_\mu(z, \zeta)$. Fixons tout d'abord quelques notations, que nous utiliserons dans l'énoncé des propositions suivantes:

NOTATIONS: Nous appellerons J_0 l'ensemble des indices j pour lesquels $\alpha_j \neq 1$. Soit $0 < \delta < \pi$. Nous noterons, pour toute partie finie J de J_0, $\chi_{J,\delta}$ la fonction caractéristique dans $\mathbf{C}^n$ de

$$\{u = (u_1, \ldots, u_n); \forall j \in J,\ |\mathrm{Arg}\, u_j| < \delta\alpha_j\}.$$

En particulier $\chi_{J,\delta}(z\bar{\zeta})$ vaut 1 si et seulement si $|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)| < \delta\alpha_j$ quel que soit $j \in J$. Remarquons qu'alors $(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}$ est bien défini (comme la détermination principale).

Rappelons que la forme de Lévi de D_α en $\zeta \in \partial D_\alpha$ est la forme hermitienne

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \lambda_\alpha}{\partial\zeta_i \partial\bar{\zeta}_j}(\zeta) t_i \bar{t}_j \\ &= \sum_j \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^2 |\zeta_j|^{2/\alpha_j - 2} |t_j|^2 \end{aligned}$$

restreinte au plan complexe:

$$\left\{t \in \mathbf{C}^n; \sum_j \left(\frac{1}{\alpha_j}\right) \zeta_j |\zeta_j|^{2/\alpha_j - 2} t_j = 0\right\}.$$

Elle est de rang $n-1$ en ζ si $\zeta_j \neq 0$ quel que soit $j \in J_0$: ζ est alors un point de stricte pseudoconvexité. Plus généralement, si $\zeta_j = 0$ lorsque $j \in J \subset J_0$ et $\zeta_j \neq 0$ lorsque $j \in J_0 \backslash J$, elle est de rang $n - 1 - |J|$.

PROPOSITION 2.2: *Si ζ est un point de stricte pseudo-convexité de ∂D_α, quel que soit $\delta \in]\pi/2, \pi[$, sur $\bar{D}_\alpha$:*

$$(2.7) \qquad S_\mu(z, \zeta) = c_{J_0} \chi_{J_0, \delta}(z\bar{\zeta}) \frac{(z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1 - 1} \ldots (z_n\bar{\zeta}_n)^{1/\alpha_n - 1}}{\left[1 - \sum_j (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^n} + \mathcal{O}(1)$$

avec $c_{J_0} = \dfrac{(n-1)!}{2\Pi^n \alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2}$.

Si ζ est un point de non stricte pseudo-convexité de $\partial D_\alpha : \zeta_j = 0$ lorsque $j \in J \subset J_0$, $\zeta_j \neq 0$ lorsque $j \in J_0 \backslash J$, alors, quel que soit $\delta \in]\pi/2, \pi[$, sur $\bar{D}_\alpha$:

$$(2.8) \qquad S_\mu(z, \zeta) = c_J \chi_{J_0 \backslash J, \delta}(z\bar{\zeta}) \frac{\prod_{j \notin J} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j - 1}}{\left[1 - \sum_{j \in J} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^{n - |J| + \Sigma_{j \in J} \alpha_j}} + \mathcal{O}(1),$$

avec $c_J = (2\Pi^n)^{-1} \Gamma\left(n - |J| + \sum_{j \in J} \alpha_j\right) \prod_{j \in J} (\alpha_j \Gamma(\alpha_j))^{-1} \prod_{j \notin J} \alpha_j^{-2}$.

Remplaçons F_{α_j} par son expression (2.6) lorsque $\alpha_j < 1$, par sa valeur comme exponentielle lorsque $\alpha_j = 1$ dans l'expression intégrale (2.4) de $S_\mu(z, \zeta)$: après avoir développé on trouve

$$S_\mu(z, \zeta) = c_\alpha \sum_{\substack{K \text{ parties} \\ \text{de } J_0}} \prod_{\substack{j \notin K \\ 1, \ldots, n}} \{\alpha_j^{-1} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j - 1}\} \chi_{J_0 \backslash K, \delta}(z\bar{\zeta}) I_K,$$

$$I_K = \int_0^\infty e^{-t(1 - \Sigma_{j \notin K} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j})} \left\{\prod_{j \in K} \varphi_{\alpha_j, \delta}(t^{\alpha_j} z_j\bar{\zeta}_j)\right\} t^{\Sigma_{j \in K} \alpha_j + n - |K| - 1}\, dt.$$

En particulier, si $K = \emptyset$,

$$I_\emptyset = \frac{(n-1)!}{\left[1 - \sum_{j=1}^n (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^n}.$$

Soit ζ un point de stricte pseudo-convexité: $\zeta_j \neq 0$ lorsque $j \in J_0$. Il s'agit de montrer que si $K \neq \emptyset$, I_K est borné. Mais alors

$$\mathrm{Re}\Big(1-\sum_{j\notin K}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\Big)>1-\sum_{j\notin K}|z_j\bar{\zeta}_j|^{1/\alpha_j}>0 \text{ puisque}$$

$$\sum_{j\notin K}|z_j\bar{\zeta}_j|^{1/\alpha_j}\le 1-\sum_{j\in K}\frac{|z_j|^{2/\alpha_j}+|\zeta_j|^{2/\alpha_j}}{2}.$$

La majoration de I_K s'en déduit immédiatement.

Soit maintenant $\zeta\in D_\alpha$, $\zeta_j=0$ lorsque $j\in J\subset J_0$, $\zeta_j\neq 0$ lorsque $j\in J_0\backslash J$. Comme alors, si $j\in J$, $F_{\alpha_j}(t^{\alpha_j}z_j\bar{\zeta}_j)=F_{\alpha_j}(0)$,

$$S_\mu(z,\zeta)=\gamma_J\int_0^\infty e^{-t}\prod_{j\notin J}F_{\alpha_j}(t^{\alpha_j}z_j\bar{\zeta}_j)t^{|\alpha|-1}\,dt,$$

avec $\gamma_J=c_\alpha\Big(\prod_{j\in J}\Gamma(\alpha_j)\Big)^{-1}$. Si l'on écrit comme précédemment $S_\mu(z,\zeta)$ en remplaçant chaque F_{α_j}, pour $j\in J_0\backslash J$, par son expression (2.6), on voit que le terme principal de $S_\mu(z,\zeta)$ est

$$\gamma_J\prod_{j\notin J}\{\alpha_j^{-1}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j-1}\}\chi_{J_0\backslash J,\delta}(z\bar{\zeta})\,I_{J,\emptyset}$$

avec

$$I_{J,\emptyset}=\int_0^\infty e^{-t(1-\Sigma_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j})}t^{\Sigma_{j\in J}\alpha_j+n-|K|-1}\,dt$$

tandis que le reste est majoré comme précédemment.

Dans l'expression (2.7), le reste $\mathcal{O}(1)$ augmente évidemment lorsque ζ s'approche des points de non stricte pseudo-convexité. La proposition suivante donne un contrôle de ce reste, et c'est elle qui nous permettra de démontrer des inégalités L^p:

PROPOSITION 2.3: *Quel que soit* $\delta\in\,]\pi/2,\pi[$,

$$S_\mu(z,\zeta)=C_{J_0}\chi_{J_0,\delta}(z\bar{\zeta})\frac{(z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1-1}\ldots(z_n\bar{\zeta}_n)^{1/\alpha_n-1}}{\Big[1-\sum_{j=1}^n(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\Big]^n}+L(z,\zeta),$$

avec $c_{J_0}=\dfrac{(n-1)!}{2\pi^n\alpha_1^2,\ldots,\alpha_n^2}$ *et* $|L(z,\zeta)|\le C\Big(1+\sum_J L_J(z,\zeta)\Big)$, *la sommation étant prise sur toutes les parties non vides* J *de* J_0, *et*

$$L_J(z,\zeta) = \chi_{J_0\setminus J,\delta}(z\bar{\zeta}) \frac{\prod_{j\in J} |z_j\bar{\zeta}_j|^{1/\alpha_j - 1}}{\left|1 - \sum_{j\in J} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{\Sigma_{j\in J}\alpha_j + n - |J|}}.$$

En particulier, si $n = 2$ et $\alpha(1,\beta)$, cas où l'on connait explicitement $S_\mu(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi^2}(1 - z_1\bar{\zeta}_1)^{\beta-1}[(1 - z_1\bar{\zeta}_1)^\beta - z_2\bar{\zeta}_j]^{-2}$, on trouve la décomposition:

$$S_\mu(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi^2\beta^2}\chi_{\{\mathrm{Arg}(z_2\bar{\zeta}_2)<\delta\beta\}}(z_2\bar{\zeta}_2)\frac{(z_2\bar{\zeta}_2)^{\beta-1}}{[1 - z_1\bar{\zeta}_1 - (z_2\bar{\zeta}_2)^{1/\beta}]^2} + \mathcal{O}(|1 - z_1\bar{\zeta}_1|^{-1-\beta}).$$

Cette proposition est une conséquence du lemme (2.5) et du lemme suivant.

LEMME 2.9: *Soit φ une fonction holomorphe dans le domaine $\{z \in \mathbf{C}; |\mathrm{Arg}\, z| < \epsilon\}$ du plan complexe et bornée par A. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de A, $\epsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta > 0$, telle que, quel que soit u de partie réelle positive,*

$$\left|\int_0^\infty e^{-tu}\varphi(t)t^{\beta-1}\,dt\right| \le C|u|^{-\beta}.$$

Démontrons tout d'abord le lemme. Si I désigne l'intégrale ci-dessus, $|I| \le \frac{A\Gamma(\beta)}{|\mathrm{Re}\, u|^\beta}$ lorsque $|\mathrm{Arg}\, u| \le \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$ et donc $\mathrm{Re}\, u \ge \sin\frac{\epsilon}{2}|u|$. Si maintenant $|\mathrm{Arg}\, u| > \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$, si par exemple $\mathrm{Arg}\, u$ est compris entre $\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on utilise le fait que:

$$\int_0^\infty e^{-tu}\varphi(t)t^{\beta-1}\,dt = \int_{D_\epsilon} e^{-zu}\varphi(z)z^{\beta-1}\,dz,$$

où D_ϵ est la demi-droite $\{z = re^{-i\epsilon/2}, r > 0\}$: on est alors ramené au cas précédent puisque $|\mathrm{Arg}\, ue^{-i\epsilon/2}| \le \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$.

Revenons à la démonstration de la proposition (2.3), et considérons tout d'abord le cas de z, ζ dans $\bar{D}_\alpha$ tels que:

$$\text{quel que soit } j \in J_0,\ |\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)| < \delta\alpha_j.$$

Fixons $\delta' > \delta$, $\delta' < \pi$, et écrivons $S_\mu(z, \zeta)$ en recourant au lemme (2.5) comme au début de la démonstration de la proposition (2.2), le rôle de δ étant cette fois joué par δ'. Nous allons montrer que:

$$I_K = \int_0^\infty e^{-t(1-\Sigma_{j\notin K}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j})}\left\{\prod_{j\in K} \varphi_{\alpha_j,\delta'}(t^{\alpha_j} z_j\bar{\zeta}_j)\right\} \times t^{\Sigma_{j\in K}\alpha_j+n-|K|-1}\, dt$$

est majoré par:

$$|I_K| \leq C\left|1-\sum_{j\notin K}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{-n+|K|-\Sigma_{j\in K}\alpha_j}.$$

Mais c'est une conséquence immédiate du lemme (2.9) puisque $\mathrm{Re}(1-\Sigma_{j\notin K}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j})$ est positive, nulle seulement si $1-\Sigma_{j\notin K}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}=0$, et $\varphi_{\alpha_j,\delta'}(t^\alpha z_j\bar{\zeta}_j$ est, comme fonction de t, holomorphe bornée dans le domaine $\{t;|\mathrm{Arg}\, t|<\delta'-\delta\}$, la fonction $\varphi_{\alpha_j,\delta'}$, étant holomorphe bornée dans le domaine $\{u;|\mathrm{Arg}\, u|<\delta'\alpha_j\}$.

Considérons maintenant le cas où: quel que soit $j\in J\subset J_0$, $|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)|\geq\delta\alpha_j$; quel que soit $j\in J_0\backslash J$, $|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)|<\delta\alpha_j$.

Fixons encore $\delta'>\delta$, $\delta'<\pi$, et fixons de plus $\delta''<\delta$, $\delta''>\dfrac{\pi}{2}$. Remplaçons encore F_{α_j} par son expression (2.6) pour $j\in J_0\backslash J$ dans l'expression intégrale (2.4) de $S_\mu(z, \zeta)$: après avoir développé, on trouve

$$S_\mu(z,\zeta) = c_\alpha \sum_{\substack{K \text{ parties}\\ \text{de } J_0\backslash J}} \prod_{j\notin K\cup J} \{\alpha_j^{-1}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j-1}\} I_{K,J},$$

$$I_{J,K} = \int_0^\infty e^{-t(1-\Sigma_{j\notin K\cup J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j})} \prod_{j\in J} F_{\alpha_j}(t^{\alpha_j}z_j\bar{\zeta}_j)$$
$$\times \prod_{j\in K} \varphi_{\alpha_j,\delta'}(t^{\alpha_j}z_j\bar{\zeta}_j)\, t^{\Sigma_{j\in J\cup K}\alpha_j+n-|J|-|K|-1}\, dt.$$

On utilise encore le lemme (2.9) pour majorer $I_{J,K}$ par:

$$|I_{J,K}| \leq C\left|1-\sum_{j\notin K\cup J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{-n+|J|+|K|-\Sigma_{j\in J\cup K}\alpha_j}.$$

Il suffit de vérifier que la fonction

$$\prod_{j\in J} F_{\alpha_j}(t^{\alpha_j}z_j\bar{\zeta}_j) \times \prod_{j\in K} \varphi_{\alpha_j,\delta'}(t^{\alpha_j}z_j\bar{\zeta}_j)$$

est une fonction holomorphe bornée de t dans le domaine

$$\{|\operatorname{Arg} t| < \inf(\delta' - \delta, \delta - \delta'')\}.$$

3. Remarques et complements à propos du noyau de Szegö $S_\mu(z, \zeta)$

REMARQUE 1: *Développement asymptotique de* $S_\mu(z, \zeta)$.

La proposition (2.3) peut être considérée, nous l'avons dit, comme un développement à l'ordre 1 de $S_\mu(z, \zeta)$, avec majoration du reste $L(z, \zeta)$. Les singularités de $L(z, \zeta)$ se trouvent (proposition (2.2)) sur la partie de la diagonale de $\partial D_\alpha \times \partial D_\alpha$ qui se projette sur l'ensemble des points de non stricte pseudo-convexité de ∂D_α. Remarquons que $L(z, \zeta)$ n'est pas, comme fonction de z, uniformément intégrable en ζ: nous allons considérer le cas où $n = 2$, $\alpha = (1, \beta)$: alors

$$2\pi^2 L(z, \zeta) = (1 - z_1\bar{\zeta}_1)^{\beta-1}[(1 - z_1\bar{\zeta}_1)^\beta - z_2\bar{\zeta}_2]^{-2}$$

si $|\operatorname{Arg}(z_2\bar{\zeta}_2)| > \frac{\pi}{2}$, donc $|L(z, \zeta)| \simeq |1 - z_1\bar{\zeta}_1|^{-1-\beta}$.

Mais, en vertu du lemme (1.6), il en résulte que:

$$\int_{\partial D_{(1,\beta)}} |L(z, \zeta)|\, d\mu_\alpha(z) \geq c \int_{|z_1|<1} |1 - z_1\bar{\zeta}_1|^{-1-\beta}(1 - |z_1|^2)^{\beta-1}\, dV_1(z_1),$$

intégrale tendant vers $+\infty$ lorsque $|\zeta_1|$ tend vers 1(*).

Il est tentant, dans ce cas particulier, de faire un développement asymptotique de $L(z, \zeta)$:

(*) Il nous faut montrer que:

$$\sup_{|v|<1} \int_{|u|<1} \frac{(1 - |u|^2)^\epsilon (1 - |v|^2)^\eta}{|1 - u\bar{v}|^{\epsilon+\eta+2}}\, dV_1(u)$$

est fini ou infini selon que $\eta > 0$ ou $\eta \leq 0$. Après intégration par rapport à l'argument de $u\bar{v}$, il s'agit encore de

$$\sup_{\rho<1} \int_0^1 \frac{(1 - r^2)^\epsilon (1 - \rho^2)^\eta}{(1 - r\rho)^{\epsilon+\eta+1}}\, r\, dr,$$

ou, après changement de variables de

$$\int_0^\infty \frac{x^\epsilon}{(x+1)^{\epsilon+\eta+1}}\, dx.$$

$$2\pi^2 L(z,\zeta) = (1-z_1\bar{\zeta}_1)^{-\beta-1} + C_1 \frac{z_2\bar{\zeta}_2}{(1-z_1\bar{\zeta}_1)^{2\beta+1}} + \cdots + C_k \frac{(z_2\bar{\zeta}_2)^k}{(1-z_1\bar{\zeta}_1)^{(k+1)\beta+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{|z_2\zeta_2|^k}{|1-z_1\bar{\zeta}_1|^{(k+2)\beta+1}}\right).$$

Le reste d'ordre k, $\dfrac{|z_2\zeta_2|^k}{|1-z_1\bar{\zeta}_1|^{(k+1)\beta+1}}$ est plus régulier, en ce sens qu'il est le noyau d'un opérateur continu dans $L^1(|z_2|^\gamma d\gamma_{(1,\beta)})$ quel que soit $\gamma < k$: en effet il suffit de montrer que:

$$\int_{\partial D_{(1,\beta)}} \frac{|z_2\zeta_k|^k |z_2|^\gamma |\zeta_2|^{-\gamma}}{|1-z_1\bar{\zeta}_1|^{(k+1)\beta+1}} \, d\mu_{(1,\beta)}(z)$$

est borné indépendamment de ζ, ce qui est immédiat après s'être ramené à une intégrale dans le disque unité (*). En particulier, le premier reste, $\dfrac{|z_2\zeta_2|}{|1-z_1\bar{\zeta}_1|^{2\beta+1}}$, est, comme fonction de z, uniformément intégrable par rapport à ζ, contrairement à $L(z,\zeta)$.

Nous avons ici parlé d'un cas particulier seulement, et même uniquement de $L(z,\zeta)\chi_{\{|\mathrm{Arg}(z_2\bar{\zeta}_2)|>\pi/2\}}(z_2\bar{\zeta}_2)$. En fait, on peut, dans le cas général, obtenir un tel développement de $L(z,\zeta)$, de sorte que le reste soit le noyau d'un opérateur continu dans $L^1(|z_1|^{\gamma_1}|z_2|^{\gamma_2},\ldots,|z_n|^{\gamma_n}\, d\mu_\alpha(z))$. Il suffit, plutôt que d'utiliser le lemme (2.5), d'utiliser un développement asymptotique de F_β. Etant données les difficultés d'écriture, nous nous contenterons de donner le premier développement de $S_\mu(z,\zeta)$ à reste intégrable, conséquence du développement de F_β:

$$F_\beta(u) = \frac{1}{\beta}\chi_{\{|\mathrm{Arg}\, u|<\delta\beta\}}(u)u^{1/\beta-1}e^{u^{1/\beta}} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \mathcal{O}(|u|^\epsilon),$$

avec $\epsilon = \inf(1, 1/\beta - 1)$.

PROPOSITION 3.1:

$$S_\mu(z,\zeta) = \sum_{\substack{J \text{ parties} \\ \text{de } J_0}} c_J \chi_{J_0\setminus J,\delta}(z\bar{\zeta}) \frac{\prod_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j-1}}{\left[1-\sum_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^{n-|J|+\Sigma_{j\in J}\alpha_j}} + \Lambda(z,\zeta),$$

$$\textit{où } c_J = (2\Pi^n)^{-1}\Gamma\Big(n-|J|+\sum_{j\in J}\alpha_j\Big)\prod_{j\in J}\{\alpha_j\Gamma(\alpha_j)\}^{-1}\prod_{j\notin J}\alpha_j^{-2},$$

et $\sup_{\zeta\in\partial D_\alpha}\displaystyle\int_{\partial D_\alpha}|\Lambda(z,\zeta)|\, d\mu_\alpha(\zeta) < \infty.$

(*) Voir la note de la page précédente.

REMARQUE 2: *Prolongement analytique de $S_\mu(z, \zeta)$.*

Si l'on reprend la démonstration de la proposition (2.2), il est clair que lorsque ζ est un point de stricte pseudo-convexité de ∂D_α, chacune des intégrales I_K est une fonction analytique de z tant que $\mathrm{Re}\left(1 - \sum_{j \notin K} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right) > 0$, $|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)| < \delta\alpha_j$ si $j \in J_0 \backslash K$. Comme ces conditions ont lieu dans un voisinage de ζ, c'est dire que $S_\mu(z, \zeta)$ possède, dans un voisinage de ζ, un prolongement analytique là où le terme principal est analytique, c'est-à-dire $1 - (z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1} - \cdots - (z_n\bar{\zeta}_n)^{1/\alpha_n} \neq 0$.

Utilisant l'écriture de $S_\mu(z, \zeta)$ relative à un point ζ de non stricte pseudo-convexité, on obtiendrait la même conclusion. Finalement $((z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}$ étant 0 si $\zeta_j = 0)$:

PROPOSITION 3.2: ***Quel que soit $\zeta \in \partial D_\alpha$, il existe un voisinage V_ζ de ζ tel que $S_\mu(z, \zeta)$ se prolonge, comme fonction de z, à V_ζ en dehors de l'ensemble des $z \in V_\zeta$ pour lesquels*:**

$$1 - (z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1} - (z_2\bar{\zeta}_2)^{1/\alpha_2} - \cdots - (z_n\bar{\zeta}_n)^{1/\alpha_n} = 0.$$

Nous venons de démontrer la première partie de la proposition. La seconde a pratiquement été démontrée en même temps que la proposition (2.1).

REMARQUE 3: *Noyaux de Bergman des domaines D_α.*

Les fonctions z^m formant encore une base orthogonale de $L^2(D_\alpha)$, le noyau de Bergman de D_α est donné par:

$$B(z, \zeta) = \sum_{\substack{m_1 \geq 0 \\ \vdots \\ m_n \geq 0}} c_m z^m \bar{\zeta}^m,$$

avec

$$c_m^{-1} = \int_{D_\alpha} |z_m|^2 \, dV(z) = \int_0^1 r^{2\alpha_1 m_1 + \cdots + 2\alpha_n m_n + 2\alpha_n m_n + 2|\alpha| - 1} \, dr \times \int_{\partial D_\alpha} |z^m|^2 \, d\mu_\alpha$$
$$= 2\pi^2 \alpha_1, \ldots, \alpha_n \frac{\Gamma(\alpha_1 m_1 + \alpha_1), \ldots, \Gamma(\alpha_n m_n + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n + |\alpha| + 1)};$$

donc $B(z, \zeta) = c_\alpha \sum \frac{\Gamma(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n + |\alpha| + 1)}{\Gamma(\alpha_1 m_1 + \alpha_1), \ldots, (\alpha_n m_n + \alpha_n)} z^m \bar{\zeta}^m.$

Si $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$, et $D_{\tilde{\alpha}}$ est le domaine de $\mathbf{C}^{n+1}$:

$$D_{\tilde{\alpha}} = \left\{ \tilde{z} \in \mathbf{C}^{n+1}; \sum_1^n |\tilde{z}_j|^{2/\alpha_j} + |\tilde{z}_{n+1}|^2 < 1 \right\},$$

on reconnait en $B(z, \zeta)$ le noyau de Szegö $S_\mu(\tilde{z}, \tilde{\zeta})$ du domaine $D_{\tilde{\alpha}}$ pris en $\tilde{z} = (z, 0)$ et $\tilde{\zeta} = (\zeta, 0)$. Il n'y a évidemment à cela rien d'étonnant puisque l'intégrale sur $\partial D_{\tilde{\alpha}}$ par rapport à $\mu_{\tilde{\alpha}}$ des fonctions ne dépendant pas de la dernière coordonnée se ramène à une intégrale dans D_α.

Les propositions (2.2) et (2.3) s'étendent donc immédiatement au noyau de Bergman. Récrivons en particulier la proposition (2.3).

PROPOSITION 3.3: *Le noyau de Bergman de D_α est égal à*:

$$B(z, \zeta) = \frac{n!}{2\pi^{n+1}\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \chi_{J_0, \delta}(z\bar{\zeta}) \frac{(z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1 - 1} \ldots (z_n\bar{\zeta}_n)^{1/\alpha_n - 1}}{\left[1 - \sum (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^{n+1}} + M(z, \zeta)$$

avec $|M(z, \zeta)| \leq C\left(1 + \sum_J M_J(z, \zeta)\right)$, *la sommation étant prise sur toutes les parties J non vides de J_0, et*:

$$M_J(z, \zeta) = \chi_{J_0 \setminus J, \delta}(z\bar{\zeta}) \frac{\prod_{j \notin J} |z_j\bar{\zeta}_j|^{1/\alpha_j - 1}}{\left|1 - \sum_{j \notin J} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{\sum_{j \in J}\alpha_j + n + 1 - |J|}}$$

L'étude du noyau de Bergman de D_α a fait l'objet de [2]. J. D'Angelo y donne en particulier la formule explicite pour $B(z, \zeta)$ lorsque $\alpha = (1, 1, 1, \ldots, \alpha_n)$, formule qui se déduit immédiatement de la formule explicite du noyau de Szegö (lemme 2.2). Pour ces domaines particuliers, il en déduit que l'équation $M^*u = f$ n'a pas de solution au voisinage de $z_0 \in \partial D_\alpha$ lorsque f est une fonction holomorphe dans D_α qui ne se prolonge pas au voisinage de z_0; M désigne un champ holomorphe sur ∂D_α, M^* l'adjoint de M: il utilise le prolongement holomorphe de $B(z, \zeta_0)$ au voisinage de z_0, pour $z_0 \neq \zeta_0$, qui est donné dans le cas général par la proposition (3.2). Il donne enfin des encadrements pour $B(z, z)$. Il résulte en fait de la proposition (2.2) que lorsque $z_j = 0$ si $j \in J \subset J_0$ et $z_j \neq 0$ si $j \in J_0 \setminus J$,

$$B(z,z) = c_J \frac{\prod_{j \notin J} |z_j|^{2/\alpha_j - 1}}{\left(1 - \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2/\alpha_j}\right)^{\beta_J}} + \mathcal{O}(1)$$

avec $\beta_J = n + 1 - |J| + \sum_{j \in J} \alpha_j$.

REMARQUE 4: *Fonctions hypergéométriques et noyaux de Szegö à poids dans la boule unité.*

La technique utilisée précédemment permet de calculer les noyaux de Szegö de la boule unité B de $\mathbf{C}^n$ relativement aux mesures

$$d\nu_\beta(z) = |z_1|^{\beta_1 - 1} \ldots |z_n|^{\beta_n - 1}\, d\sigma(z),$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont n nombres réels positifs: le noyau de Szegö S_β est donné par:

$$S_\beta(z,\zeta) = c_\beta \sum_{\substack{m_1 \geq 0 \\ \vdots \\ m_n \geq 0}} \frac{\Gamma(m_1 + \cdots + m_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n)}{\Gamma(m_1 + \beta_1), \ldots, \Gamma(m_n + \beta_n)} z^m \bar{\zeta}^m.$$

L'étude de ce noyau est motivée par deux raisons: tout d'abord parce qu'on reconnaît dans $S_\beta(z,\zeta)$ une fonction hypergéométrique de P. Appel et J. Kampé de Ferié: plus généralement, dans [3], ils définissent:

$$F_A(\delta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, x_1, \ldots, x_n)$$

$$= C(\delta, \beta, \gamma) = \sum_{\substack{m_1 \geq 0 \\ \vdots \\ m_n \geq 0}} \frac{\Gamma(\delta + m_1 + \cdots + m_n)\Gamma(\gamma_1 + m_1) \ldots \Gamma(\gamma_n + m_n)}{\Gamma(\beta_1 + m_1), \ldots, \Gamma(\beta_n + m_n) m_1!, \ldots, m_n!} x^m.$$

On voit donc que, si $\delta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$,

$$S_\beta(z,\zeta) = F_A(\delta, 1, \ldots, 1, \ldots, \beta_1, \ldots, \beta_n, z_1\bar{\zeta}_1, \ldots, z_n\bar{\zeta}_n).$$

La seconde raison pour nous intéresser aux noyaux S_β est qu'ils interviennent naturellement dans l'écriture de S_μ lorsque les indices α_j sont tous des inverses d'entiers: considérons tout d'abord le cas où $n = 2$, $\alpha = (1, 1/2)$. Alors:

$$\begin{aligned}
S_\mu(z,\zeta) &= \sum_{\substack{m_1\geq 0\\ m_2\geq 0}} \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{m_2}{2}+\frac{3}{2}\right)}{m_1!\Gamma(m_2+\frac{1}{2})}(z_1\bar{\zeta}_1)^{m_1}(z_2\bar{\zeta}_2)^{m_2}\\
&= \sum_{\substack{m_1\geq 0\\ m_2\geq 0}} \frac{\Gamma(m_1+m_2+1)}{m_1!\,m_2!}(z_1\bar{\zeta}_1)^{m_1}(z_2\bar{\zeta}_2)^{2m_2+1}\\
&\quad+\sum_{\substack{m_1\geq 0\\ m_2\geq 0}} \frac{\Gamma(m_1+m_2+\frac{3}{2})}{m_1!\Gamma(m_2+\frac{1}{2})}(z_1\bar{\zeta}_1)^{m_1}(z_2\bar{\zeta}_2)^{2m_2}\\
&= S_{(1,1/2)}(z_1,z_2^2,\zeta_1,\zeta_2^2)+z_2\bar{\zeta}_2S_{(1,1)}(z_1,z_2^2,\zeta_1,\zeta_2^2).
\end{aligned}$$

Plus généralement, si $1/\alpha_1=k_1$, $1/\alpha_2=k_2,\ldots,1/\alpha_n=k_n$, et si $k_1,\ldots,k_n$ sont entiers et si Φ désigne l'application de $\bar{D}_\alpha$ dans $\bar{B}$

$$\Phi(z_1,\ldots,z_n)=(z_1^{k_1},z_2^{k_2},\ldots,z_n^{k_n}),$$

$$S_\mu(z,\zeta)=\sum(z_1\bar{\zeta}_1)^{r_1}\ldots(z_n\bar{\zeta}_n)^{r_n}S_{(\alpha_1(r_1+1),\ldots,\alpha_n(r_n+1))}[\Phi(z),\Phi(\zeta)]$$

la sommation étant prise sur les multiindices $(r_1,\ldots,r_n)$ tels que $0\leq r_i<k_i$.

Etant donnés $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, et $\delta>0$, considérons donc la fonction de n variables complexes:

$$F(z)=\sum\frac{\Gamma(m_1+m_2+\cdots+m_n+\delta)}{\Gamma(m_1+\beta_1)\cdots\Gamma(m_n+\beta_n)}z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n},$$

fonction hypergéométrique qui est liée au noyau de Szegö à poids de la boule lorsque $\delta=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$. $F(z)$ possède la représentation intégrale:

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\delta-1}G_{\beta_1}(tz_1)\ldots G_{\beta_n}(tz_n)\,dt,$$

si G_γ désigne la fonction entière:

$$G_\gamma(t)=\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{\Gamma(m+\gamma)}.$$

Mais il n'est pas difficile de voir, en utilisant la formule de Haenkel pour $\dfrac{1}{\Gamma(m+\gamma)}$ (cf. [20]), que, du moins si $\gamma<1$,

$$|G_\gamma(t) - t^{1-\gamma}e^t| \leq C$$

lorsque Arg $t \neq \Pi$, $t^{1-\gamma}$ désignant la détermination principale de cette fonction. Procédant comme au §2, on trouve que

$$F(z) = c\,\frac{z_1^{1-\beta_1} z_2^{1-\beta_2} \dots z_n^{1-\beta_n}}{(1 - \Sigma\, z_j)^{\delta+n-\Sigma\beta_j}} + K(z),$$

avec $|K(z)| \leq C(1 + \Sigma\, K_J(z))$, la somme étant prise sur les parties non vides de l'ensemble J_0 d'indices j tels que $\beta_j < 1$, et

$$K_J(z) = \frac{\prod_{j \notin J} |z_j|^{1-\beta_j}}{\left|1 - \sum_{j \notin J} z_j\right|^{\delta+n-|J|-\Sigma_{j\notin J}\beta_j}}.$$

On peut, là-encore, en déduire des prolongements analytiques de F.

4. Inégalités L^p pour le projecteur de Szegö de D_α relatif à la mesure μ_α

Considérons:

$$\mathbf{S}_\mu f(z) = \int_{\partial D_\alpha} S_\mu(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta),$$

qui est bien défini lorsque f appartient à $L^1(\partial D_\alpha)$, $z \in D_\alpha$, puisque $S_\mu(z, \zeta)$ est borné comme fonction de ζ. Rappelons que $\mathbf{S}_\mu$ est, dans $L^2(\partial D_\alpha)$, une projection sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\partial D_\alpha)$. Nous allons montrer que:

THEOREME 4.1: *L'opérateur* $\mathbf{S}_\mu$ *définit une projection bornée de* $L^p(\partial D_\alpha)$ *sur* $\mathcal{H}^p(\partial D_\alpha)$ *quel que soit* $p > 1$.

Il s'agit de montrer que [19]:

$$(4.1)\quad \sup_{\rho<1} \int_{\partial D_\alpha} |\mathbf{S}_\mu f(\rho^{\alpha_1} z_1, \dots, \rho^{\alpha_n} z_n)|^p\, d\mu_\alpha(z) \leq C \int_{\partial D_\alpha} |f(z)|^p\, d\mu_\alpha(z)$$

puisque, si σ_α^ϵ désigne la mesure euclidienne sur $\partial D_\alpha^\epsilon$, où

$$D_\alpha^\epsilon = \left\{z\,;\, \sum_i |z_i|^{2/\alpha_i} < 1-\epsilon\right\},$$

$$\int_{\partial D_\alpha^\epsilon} g(z)\, d\sigma_\alpha^\epsilon(z) \simeq \int_{\partial D_\alpha} g(\rho^{\alpha_1} z_1, \rho^{\alpha_2} z_2, \ldots, \rho^{\alpha_n} z_n)\, d\mu_\alpha(z)$$

avec $\rho^2 = 1-\epsilon$.

Montrons donc (4.1). On peut toujours supposer que f est à support dans l'ensemble

$$\bigcap_{j\in J_0} \left\{|\mathrm{Arg}\, \zeta_j| < \frac{\pi}{8}\,\alpha_j\right\}$$

(quitte à écrire f comme somme de $16|J_0|$ fonctions à supports dans

$$\bigcap_{j\in J_0} \left\{|\mathrm{Arg}\, \zeta_j| \in \left]\frac{k_j \pi}{8}\alpha_j, \frac{(k_j+2)\pi}{8}\alpha_j\right[\right\},$$

et à utiliser l'invariance par les rotations $\zeta_1 \to \zeta_1 e^{i\theta_1} \ldots, \zeta_n \to e^{i\theta_n}\zeta_n$ du noyau de Szegö $S_\mu(z,\zeta)$) et de la mesure μ_α).

Dans ces conditions, si $\left|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)\right| < \frac{5\pi}{8}\,\alpha_j$ et ζ appartient au support de f, $|\mathrm{Arg}\, z_j| < \frac{3\pi}{4}\,\alpha_j$; tandis que si $|\mathrm{Arg}\, z_j| < \frac{3\pi}{4}\,\alpha_j$, $|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)| < \frac{7\pi}{8}\,\alpha_j$. Posons:

$$F(z) = \chi_{J_0,(3\pi/4)}(z) \int_{\partial D_\alpha} \frac{(z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1 - 1}, \ldots, (z_n\bar{\zeta}_n)^{1/\alpha_n - 1}}{\left[1 - \sum_{j=1}^{n} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^n} f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta),$$

et, quelle que soit la partie non vide J de J_0,

$$F_J(z) = \chi_{J_0\setminus J,(3\pi/4)}(z) \int_{\partial D_\alpha} \frac{\prod_{j\notin J} |z_j\bar{\zeta}_j|^{1/\alpha_j - 1} |f(\zeta)|\, d\mu_\alpha(\zeta)}{\left|1 - \sum_{j\notin J}^{n} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{n-|J|+\Sigma_{j\in J}\alpha_j}}.$$

Il résulte de la proposition (2.3) avec $\delta = \frac{7\pi}{8}$ que, si z est tel que $|\mathrm{Arg}\, z_j| < \frac{3\pi}{4}\,\alpha_j$ quel que soit $j \in J_0$, $\mathbf{S}_\mu f(z) = c_{J_0} F(z) + \mathcal{O}\Big(1 + \sum_{J \text{ non vide}} F_J\Big)$.

Si z est tel que $|\mathrm{Arg}\, z_j| \geq \frac{3\pi}{4}\,\alpha_j$ quel que soit $j \in J \subset J_0$, et $|\mathrm{Arg}\, z_j| <$

$\frac{3\pi}{4}\alpha_j$ quel que soit $j \in J_0 \backslash J$, on utilise encore la proposition (2.3) avec $\delta = \frac{5\pi}{8}$ pour voir que:

$$\mathbf{S}_\mu f(z) = \mathcal{O}\Big(1 + \sum_{K \subset J} F_K\Big).$$

Finalement,

$$\mathbf{S}_\mu f(z) = c_{J_0} F(z) + \mathcal{O}\Big(1 + \sum_{K \subset J_0} F_K\Big).$$

Pour démontrer le théorème (4.1), il suffit donc de montrer l'inégalité (4.1) lorsque $\mathbf{S}_\mu f$ est successivement remplacé par F et F_J.

Montrons tout d'abord l'inégalité (4.1) pour F. Si l'on pose $z_1 = z_1'^{\alpha_1}$, $z_2 = z_2'^{\alpha_2}, \ldots, z_n = z_n'^{\alpha_n}$ (et de même $\zeta_j = \zeta_j'^{\alpha_j}$, la détermination choisie étant la détermination principale) on définit ainsi un paramétrage de $\bar{D}_\alpha \cap \bigcap_{j \in J_0} \left\{|\mathrm{Arg}\, z_j| < \frac{3\pi}{4}\alpha_j\right\}$ par son image dans $\bar{B}$, et, en vertu de (1.3)

$$d\mu_\alpha(\zeta) = \alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2 |\zeta_1'|^{2\alpha_1 - 2} \ldots |\zeta_n'|^{2\alpha_n - 2}\, d\sigma(\zeta').$$

Comme

$$\frac{(z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1 - 1} \ldots (z_n\bar{\zeta}_n)^{1/\alpha_n - 1}}{\left[1 - \sum_{j=1}^{n} (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^n}\, d\mu_\alpha(\zeta) = c\, \frac{(z_1'/\zeta_1')^{1-\alpha_1} \ldots (z_n'/\zeta_n')^{1-\alpha_n}}{[1 - z' \cdot \bar{\zeta}']^n}\, d\sigma(\zeta'),$$

il s'agit de montrer que, si g désigne la fonction sur ∂B:

$$g(\zeta') = \chi_{\cap\{|\mathrm{Arg}\, \zeta_j'| < \pi/8\}}(\zeta') f(\zeta) \zeta_1'^{\alpha_1 - 1} \ldots \zeta_n'^{\alpha_n - 1}$$

et si Tg désigne sa projection de Szegö:

$$Tg(z') = c_n \int_{\partial B} \frac{g(\zeta')}{(1 - z' \cdot \bar{\zeta}')^n}\, d\sigma(\zeta'),$$

alors:

$$\text{(4.2)} \qquad \sup_{\rho < 1} \int_{\partial B} |Tg(\rho z')|^p |z_1'|^{(\alpha_1 - 1)(2-p)} \ldots |z_n'|^{(\alpha_n - 1)(2-p)}\, d\sigma(z')$$

$$\leq C \int_{\partial B} |g|^p |\zeta_1'|^{(\alpha_1 - 1)(2-p)} \ldots |\zeta_n'|^{(\alpha_n - 1)2-p}\, d\sigma(\zeta').$$

L'inégalité cherchée est donc une inégalité à poids pour le projecteur de Szegö de la boule. Il est aisé d'étendre à ce dernier la théorie à poids des intégrales singulières dans $\mathbb{R}^n$ ([9], [4]). Pour montrer (4.2), il suffit de vérifier que le poids $|z_1'|^{(\alpha_1-1)(2-p)}, \ldots, |z_n'|^{(\alpha_n-1)(2-p)}$ satisfait à la condition (A_p) de Muchenhoupt sur ∂B muni de la métrique de Koranyi, c'est-à-dire que:

LEMME 4.3: *Soient $p \geq 1$, et soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ n nombres réels strictement compris entre -1 et p/p': alors la fonction*

$$\omega(z) = |z_1|^{2\gamma_1}|z_2|^{2\gamma_2} \ldots |z_n|^{2\gamma_n}$$

satisfait à la condition (A_p) sur le bord ∂B de la boule unité, où

$$(A_p) \sup_{\substack{\delta>0 \\ z\in\partial B}} \left\{\frac{1}{\delta n}\int_{|1-z\cdot\bar{\zeta}|<\delta} \omega(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\right\}\left\{\frac{1}{\delta n}\int_{|1-z\cdot\bar{\zeta}|<\delta} \omega(\zeta)^{-1/(p-1)}\,d\sigma(\zeta)\right\}^{p-1} < \infty$$

si $p > 1$;

$$(A_1) \qquad \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta n}\int_{|1-z\cdot\bar{\zeta}|\leq\delta} \omega(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \leq C\omega(z)$$

presque partout si $p = 1$.

Il suffit de montrer en fait que, si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sont strictement compris entre -1 et 0, $\omega(z)$ satisfait à la condition (A_1): rappelons en effet que (A_1) entraîne (A_p) quel que soit $p > 1$ [9] et que si $\omega^{-1/(p-1)}$ satisfait à la condition $(A_{p'})$ $\left(\text{avec } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1\right)$, ω satisfait à la condition (A_p).

Montrons donc que, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont strictement compris entre -1 et 0,

$$(4.4) \qquad \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta^n}\int_{|1-z\cdot\bar{\zeta}|\leq\delta} \omega(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \leq C\omega(z).$$

Comme, si $\delta > \delta_0$,

$$\frac{1}{\delta_n}\int_{|1-z\cdot\bar{\zeta}|\leq\delta} \omega(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \leq \frac{1}{\delta_0^n}\|\omega\|_1 \leq C \inf_{\zeta} \omega(\zeta),$$

il suffit de montrer l'inégalité (4.4) lorsque $\delta \leq \delta_0$, δ_0 étant fixé, $\delta_0 > 0$.

Mais $\Sigma|z_j|^2 = 1$, donc l'un des $|z_j|$, par exemple $|z_1|$, est supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, et, si δ_0 est choisi assez petit, lorsque $|1 - z \cdot \bar{\zeta}| \leq \delta_0$ alors $|\zeta_1| \geq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Nous nous placerons sous ces hypothèses, et il s'agit donc de montrer que:

$$\sup_{\delta \leq \delta_0} \frac{1}{\delta^n} \int_{|1-z\cdot\bar{\zeta}|\leq\delta} |\zeta_2|^{2\gamma_2} \ldots |\zeta_n|^{2\gamma_n}\, d\sigma(\zeta) \leq C|z_2|^{2\gamma_2} \ldots |z_n|^{2\gamma_n}.$$

Si $z' = (z_2, \ldots, z_n)$, $\zeta' = (\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, et si θ est défini par:

$$\zeta_1 = \frac{|\zeta_1|}{|z_1|} \frac{1 - z' \cdot \bar{\zeta}'}{|1 - z' \cdot \bar{\zeta}'|} z_1 e^{i\theta},$$

un calcul explicite (*) montre que $|1 - z \cdot \bar{\zeta}| \simeq \sup(|z' - \zeta'|^2, |\theta|)$. Comme $d\sigma(\zeta) \simeq dV_{n-1}(\zeta')\, d\theta$, il suffit donc de montrer que

$$\sup_{\delta} \frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{|z'-\zeta'|^2\leq\delta} |\zeta_2|^{2\gamma_2} \ldots |\zeta_n|^{2\gamma_2} \ldots |\zeta_n|^{2\gamma_n}\, dV(\zeta') \leq C|z_2|^{2\gamma_2} \ldots |z_n|^{2\gamma_n},$$

ou encore que, par exemple,

$$\sup_{\delta} \frac{1}{\delta} \int_{|z_2-\zeta_2|^2\leq\delta} |\zeta_2|^{2\gamma_2}\, dV_1(\zeta_2) \leq C|z_2|^{2\gamma_2},$$

l'inégalité précédente s'en déduisant par produit. Mais il est bien

(*) Tout d'abord, si δ_0 est assez petit,

$$|1 - z' \cdot \zeta'| \geq |z_1\zeta_1| - |1 - z \cdot \bar{\zeta}_1| \geq \frac{1}{4n^2},$$

donc $|1 - z \cdot \bar{\zeta}| \simeq |1 - \rho e^{i\theta}|$ si $\rho = \dfrac{|z_1||\zeta_1|}{|1 - z' \cdot \bar{\zeta}'|}$.

Mais $|1 - \rho e^{i\theta}| \simeq 1 - \rho + |\theta|$ car $\rho \geq \rho_0 > 0$ sous les mêmes hypothèses, et

$$1 - \rho \simeq 1 - \rho^2 \simeq |1 - z' \cdot \bar{\zeta}'|^2 - (1 - |z'|^2)(1 - |\zeta'|^2) \simeq |z' - \zeta'|^2.$$

En fait, le point crucial au delà des calculs est que le vecteur $i\nu_z$ est peu différent de $(i, 0, \ldots, 0)$.

connu dans $\mathbf{R}^2$ et élémentaire que:

$$\sup_\delta \frac{1}{\delta^2} \int_{|x-y|\leq\delta} |y|^{2\gamma} \leq C|x|^{2\gamma} \text{ si } -1 < \gamma \leq 0.$$

Ceci termine la démonstration de l'inégalité (4.2).

Occupons-nous maintenant de l'inégalité (4.1) pour la fonction F_J. Nous supposerons pour simplifier que $J = \{m+1, \ldots, n\}$. Nous noterons $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha'' = (\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$. Comme le noyau intervenant dans la définition de $F_J(z)$ ne dépend pas de $\zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n$, $F_J(z)$ s'écrit comme une fonction de $z' = (z_1, \ldots, z_m)$:

$$F_J(z) = G(z');$$

de plus, on peut commencer par intéger suivant $\zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n$: en vertu du lemme (1.5)

$$F_J(z) = G(z') = \chi_{J_0\setminus J,(3\pi/4)}(z') \int_{D_{\alpha'}} \frac{\prod_{j=1}^m (z_j'\bar{\zeta}_j')^{1/\alpha_j - 1}\left(1 - \sum_{j=1}^m \left|\zeta_j'\right|^{2/\alpha_j}\right)^{|\alpha''|-1}}{\left|1 - \sum_{j=1}^m (z_j'\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{n+|\alpha''|}} \times g(\zeta')\, dV(\zeta')$$

si $g(z') = \int_{\partial D_{\alpha''}} f \circ \psi(z', z'')\, d\mu_{\alpha''}(z'')$ avec

$$\psi(z', z'') = (z_1', \ldots, z_m', r^{\alpha_{m+1}} z_{m+1}'', \ldots, r^{\alpha_n} z_n'') \text{ et } r^2 = \sum |z_j'|^{2/\alpha_j}.$$

Il résulte du lemme (1.5) et de l'inégalité de Minkowski que

$$\int_{D_{\alpha'}} |g(\zeta')|^p \left(1 - \sum |\zeta_j'|^{2/\alpha_j}\right)^{|\alpha'|-1} dV(\zeta') \leq C\|f\|_p^p,$$

tandis que

$$\|F_J\|_p^p \simeq \int_{D_{\alpha'}} |G(z')|^p (1 - |z_j'|^{2/\alpha_j})^{|\alpha''|-1}\, dV(z').$$

Après avoir paramétré, comme tout à l'heure, $D_{\alpha'} \cap \bigcap_{j\in J_0\setminus J} \left\{\operatorname{Arg}|z_j'| < \frac{3\pi}{4}\alpha_j\right\}$ par l'intermédiaire de la boule unité B_m dans $\mathbb{C}^n$, on est amené à montrer (quitte à changer m en n et à poser $\beta = |\alpha''|$) que:

LEMME 4.5: *Soit $\beta > 0$, et Θ l'opérateur défini sur $L^1(B, (1-|z|^2)^{\beta-1}\, dV(z))$ par*:

$$\Theta h(z) = \int_B \frac{h(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}}{|1-z\cdot\bar{\zeta}|^{n+\beta}}\, dV(\zeta).$$

Alors, quel que soit $p > 1$, et quels que soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ compris entre -1 et p/p', il existe une constante C telle que, quelle que soit la fonction g positive:

$$\int_B |\Theta g|^p |z_1|^{2\gamma_1} \ldots |z_n|^{2\gamma_n}(1-|z|^2)^{\beta-1}\, dV(z)$$

$$\leq C \int_B |g|^p |z_1|^{2\gamma_1} \ldots |z_n|^{2\gamma_n}(1-|z|^2)^{\beta-1}\, dV(z).$$

Là encore, il s'agit d'un problème à poids, non plus pour le noyau de Szegö, mais pour le noyau de Bergman de la boule relatif à la mesure $(1-|z|^2)^{\beta-1}\, dV(z)$. La classe de poids qui convient à l'opérateur Θ été caractérisée dans [5]: c'est la classe des fonctions ω qui satisfont à la condition (B_p):

$$\sup_{\substack{z\in\partial(B_p)\\ \delta>0}} \left\{\frac{1}{\delta^{n+\beta}} \int_{\substack{|1-z\cdot\bar{\zeta}|<\delta\\ \zeta\in B}} \omega(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, dV(\zeta)\right\}$$

$$\times \left\{\frac{1}{\delta^{n+\beta}} \int_{|1-z\cdot\bar{\zeta}|<\delta} \omega(\zeta)^{-1/(p-1)}(1-|\zeta|^{2\beta-1})\, dV(\zeta)\right\}^{p-1} < \infty.$$

Posons donc $\omega(\zeta) = |\zeta_1|^{2\gamma_1} \ldots |\zeta_n|^{2\gamma_n}$, et montrons que ω satisfait à la condition (B_p). Mais là-encore, on peut supposer $\delta < \delta_0$, l'inégalité étant évidente sinon. Alors, si $\zeta' = \frac{\zeta}{|\zeta|}$, $|1-z\cdot\bar{\zeta}| \simeq \sup[1-|\zeta|, |1-z\cdot\bar{\zeta}'|]$. Intégrant en polaires, et utilisant le fait que $\omega(\zeta')$ satisfait à la condition (A_p), on est ramené à montrer que

$$\left\{\frac{1}{\delta^\beta}\int_{1-\delta}^1 r^{2[\gamma_1+\cdots+\gamma_n]}(1-r^2)^{\beta-1}\, r^{n-1}\, dr\right\}$$

$$\times \left\{\frac{1}{\delta_\beta}\int_{1-\delta}^1 r^{-2[\gamma_1\cdots+\gamma_n]/p-1}(1-r^2)^{\beta-1}\, r^{n-1}\, dr\right\}^{p-1} \leq C,$$

ce qui est évident, et termine la démonstration du théorème (4.1).

5. Définition du projecteur de Szegö comme valeur principale

Etant donnée $f \in L^p(\partial D_\alpha)$, nous avons, dans le paragraphe 4, défini $\mathbf{S}_\mu f(z)$ quel que soit $z \in D_\alpha$, et montré que cette fonction appartenait à $\mathcal{H}^p(\partial D_\alpha)$: il en résulte que $\mathbf{S}_\mu f$ a, presque partout, des limites non tangentielles; par abus de langage, on notera encore $\mathbf{S}_\mu f$ la fonction ainsi définie sur ∂D_α:

$$\mathbf{S}_\mu f(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D_\alpha} S_\mu(z - \epsilon \nu_z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta).$$

Le but de ce paragraphe est de montrer que, comme dans le cas de la boule, $\mathbf{S}_\mu f$ pour être directement défini sur le bord au moyen d'une valeur principale.

Avant d'énoncer le théorème, convenons d'utiliser la notation suivante: si $z \in \partial D$ et $z_j = 0$ lorsque $j \in J \subset J_0$ et $z_j \neq 0$ lorsque $j \in J_0 \backslash J$, $V_\epsilon(z)$ désigne le voisinage de z suivant

$$V_\epsilon(z) = \Big\{ \zeta \in \partial D_\alpha \,;\, \forall j \in J_0 \backslash J,\, |\mathrm{Arg}(z_j \bar{\zeta}_j)| < \delta \alpha_j \,; \quad \Big| 1 - \sum_{j \notin J} (z_j \bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j} \Big| < \epsilon \Big\}. \tag{5.1}$$

Alors:

THEOREME 5.1: *Soit f une fonction Lipschitzienne sur ∂D_α. Alors la fonction*

$$F(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{CV_\epsilon(z)} S_\mu(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

est bien définie, continue et bornée sur ∂D_α. De plus:

$$\tfrac{1}{2} f(z) + F(z) = \mathbf{S}_\mu f(z).$$

Le théorème (5.1) découle de façon standard de plusieurs propositions; la première donne une formule de type Plemelj pour le noyau S_μ, analogue aux formules bien connues pour la boule ([16]).

PROPOSITION 5.2:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{CV_\epsilon(z)} S_\mu(z, \zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta) = \frac{1}{2}.$$

L'intérêt de la proposition réside en ce que la limite est la même, que z soit un point de stricte pseudo-convexité ou non. Démontrons-la.

Il suffit de montrer ([15]), en utilisant le fait (proposition (2.1)) que $S_\mu(z', \zeta)$ est uniformément borné lorsque $\zeta \notin V_\epsilon(z)$, et z et z' sont assez proches, et le fait que $\mathbf{S}_\mu 1 = 1$, que:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{z'\to z} \int_{V_\epsilon(z)} S_\mu(z', \zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta) = \frac{1}{2}.$$

Nous allons utiliser l'évaluation de $S_\mu(z', \zeta)$ donnée dans la proposition (2.2): supposons que $z_j = 0$ lorsque $j \in J \subset J_0$, $z_j \neq 0$ lorsque $j \in J_0 \backslash J$, et qu'il en est de même de z'. Alors:

$$S_\mu(z', \zeta) = c_J \frac{\prod_{j\notin J} (z'_j \bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j - 1}}{[1 - \Sigma\, (z'_j \bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}]^{n - |J| + \Sigma_{j\in J}\alpha_j}} + \mathcal{O}(1)$$

avec $c_J = \dfrac{\pi^{-n}}{2} \Gamma(n - |J| + \Sigma_{j\in J}\alpha_j) \times \Pi_{j\in J}(\alpha_j \Gamma(\alpha_j))^{-1}\, \Pi_{j\notin J}\, \alpha_j^{-2}$. Le terme en $\mathcal{O}(1)$ est négligeable puisqu'il donne lieu à une limite nulle.

Considérons d'abord le cas où $J = \emptyset$, et paramétrons, comme dans la démonstration du théorème (4.1), $\bar{D}_\alpha \cap V_\epsilon(z)$ par l'intermédiaire de la boule unité $\bar{B}$ en posant:

$$\tilde{z} = (z_n^{1/\alpha_1}, \ldots, z_n^{1/\alpha_n}),\ \tilde{\zeta} = (\zeta_1^{1/\alpha_1}, \zeta_2^{1/\alpha_2}, \ldots, \zeta_n^{1/\alpha_n})$$

(peu importe la détermination choisie pourvu que ce soit la même). Alors l'application $\zeta \to \tilde{\zeta}$ est un difféomorphisme de $V_\epsilon(z)$ sur $\{\tilde{\zeta} \in \partial B : |1 - \tilde{z} \cdot \bar{\tilde{\zeta}}| < \epsilon\}$, et comme

$$d\mu_\alpha(\zeta) = \alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2 |\tilde{\zeta}_1|^{2\alpha_1 - 2} \ldots |\tilde{\zeta}_n|^{2\alpha_n - 2}\, d\sigma(\tilde{\zeta})$$

il s'agit de montrer que:

$$\frac{(n-1)!}{2\pi^n} \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{\tilde{z}'\to\tilde{z}} \int_{\substack{\partial B \\ |1 - \tilde{z}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}| < \epsilon}} \frac{(\tilde{z}'_1/\tilde{\zeta}_1)^{1-\alpha_1} \cdots (\tilde{z}'_n/\tilde{\zeta}_n)^{1-\alpha_n}}{(1 - \tilde{z}' \cdot \bar{\tilde{\zeta}})^n}\, d\sigma(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{2},$$

ou encore, puisque le numérateur diffère de 1 par un $\mathcal{O}(|\tilde{z}' - \tilde{\zeta}|) = \mathcal{O}(|1 - \tilde{z}' \cdot \bar{\tilde{\zeta}}|^{1/2})$ et puisque $|1 - \tilde{z}' \cdot \bar{\tilde{\zeta}}|^{-n+1/2}$ est uniformément intégrable, que:

$$\frac{(n-1)!}{2\pi^n} \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{\tilde{z}'\to\tilde{z}} \int_{\substack{\partial B \\ |1-\tilde{z}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}|<\epsilon}} \frac{d\sigma(\tilde{\zeta})}{(1-\tilde{z}'\cdot\bar{\tilde{\zeta}})^n} = 1/2$$

Cette formule-là est bien connue, et démontrée dans [1] et [16]. Comme on peut toujours supposer que $\tilde{z}=(1,0,\ldots,0)$ et $\tilde{z}'=(r,0,\ldots,0)$, elle est encore conséquence de la formule:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{r\to 0} \frac{n-1}{\pi} \int_{\substack{|1-u|<\epsilon \\ |u|<1}} \frac{(1-|u|^2)^{n-1}}{(1-ru)^n} dV_1(u) = \frac{1}{2}$$

si l'on fait d'abord une intégration en $\zeta_2,\ldots,\zeta_n$, formule que nous démontrerons dans un instant (lemme 5.2).

Considérons maintenant le cas où $J\neq\emptyset$; on peut toujours supposer, pour simplifier l'écriture, que $J=\{m+1,\ldots,n\}$. Posons $\alpha'=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\beta=\sum_{m=1}^{n}\alpha_j$. Utilisant encore la proposition (2.2) et intégrant d'abord par rapport aux variables $\zeta_{m+1},\ldots,\zeta_n$, on se ramène à montrer que la limite de:

$$\frac{\Gamma(m+\beta)}{\Pi^m\Gamma(\beta)} \prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{-2} \int_{|1-\Sigma_{j=1}^m (z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}<\epsilon} (z_1\bar{\zeta}_1)^{1/\alpha_1-1}\ldots$$

$$(z_m\bar{\zeta}_m)^{1/\alpha_m-1} \frac{\left(1-\sum_{j=1}^{m}|\zeta_j|^{2/\alpha_j}\right)^{\beta-1}}{\left[1-\sum_{j=1}^{m}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right]^{m+\beta}} dV_m(\zeta)$$

est $\frac{1}{2}$. Si l'on fait encore le changement de variables $\zeta_j=\tilde{\zeta}_j^{1/\alpha_j}$ et $z_j=\tilde{z}_j^{1/\alpha_j}$ pour $j=1,\ldots,m$, puis si l'on utilise le fait que:

$$\begin{aligned} 1-\prod_{j=1}^{m}(\tilde{z}_j/\tilde{\zeta}_j)^{1-\alpha_j} &= \mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^{m}|\tilde{z}_j-\tilde{\zeta}_j|\right) \\ &= \mathcal{O}(|1-\tilde{z}_j\cdot\bar{\tilde{\zeta}}_j|^{1/2}) \end{aligned}$$

et donne lieu à un terme intégrable, on est encore ramené à montrer que, quel que soit $\tilde{z}\in\partial B_m$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{r\to 1} \frac{\gamma}{\pi} \int_{\substack{|1-u|<\epsilon \\ |u|<1}} \frac{(1-|u|^2)^{\gamma-1}}{(1-r\bar{u})^{1+\gamma}} dV_1(u) = \frac{1}{2}$$

ou encore, après choisi $\tilde{z}=(1,0,\ldots,0)$, $\tilde{z}'=(r,0,\ldots,0)$, intégré en $\tilde{\zeta}_2,\ldots,\tilde{\zeta}_m$, et posé $\gamma=\beta+m-1$, que:

LEMME 5.2: $$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{r\to 1}\frac{\gamma}{\pi}\int_{\substack{|1-u|<\epsilon\\ |u|<1}}\frac{(1-|u|^2)^{\gamma-1}}{(1-r\bar{u})^{1+\gamma}}\,dV_1(u)=\frac{1}{2}$$

quel que soit $\gamma > 0$.

Démontrons le lemme (5.2). Comme la différentielle de la forme $-\frac{(1-u\bar{u})^\gamma}{\bar{u}(1-r\bar{u})^{1+\gamma}}\,d\bar{u}$ vaut justement $\frac{\gamma(1-|u|^2)^{\gamma-1}}{(1-r\bar{u})^{1+\gamma}}\,du\wedge d\bar{u}$, il s'agit, en vertu de la formule de Stokes, de calculer:

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{r\to 1}\int_{\substack{|1-u|=\epsilon\\ |u|<1}}\frac{(1-|u|^2)^\gamma}{\bar{u}(1-r\bar{u})^{\gamma+1}}\,d\bar{u}$$

ou encore:

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\substack{|1-u|=\epsilon\\ |u|<1}}\frac{(1-u+1-\bar{u})^\gamma}{(1-\bar{u})^{\gamma+1}}\,d\bar{u},$$

les termes négligés correspondant à des fonctions intégrables qui donnent lieu à des limites nulles. Posons $1-u=\epsilon e^{i\theta}$, $d\bar{u}=i\epsilon e^{-i\theta}$: il s'agit de calculer

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\mathrm{Arc}\cos(\epsilon/2)}^{\mathrm{Arc}\cos(\epsilon/2)}(1+e^{2i\theta})^\gamma\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+e^{2i\theta})^\gamma\,d\theta=\frac{1}{2}.$$

PROPOSITION 5.3: *Quel que soit* $\gamma > 0$,

$$\sup_{z\in\partial D_\alpha}\int_{\partial D_\alpha}|S_\mu(z,\zeta)||z-\zeta|^\gamma\,d\mu_\alpha(\zeta)<\infty.$$

Plus précisément, $S_\mu(z,\zeta)|z-\zeta|^\gamma$ *appartient à* $L^p(\partial D_\alpha)$ *uniformément en* z *dés que* $1-1/p<\frac{1}{2n}\inf\alpha_k$.

Il découle de la proposition (2.3) que:

LEMME 5.3: *Quel que soit* $\gamma > 0$, *et quels que soient* $z,\zeta\in\bar{D}_\alpha$

$$|S_\mu(z,\zeta)||z-\zeta|^\gamma\le C\left(1+\sum_{J\subset J_0}\chi_{J_0\setminus J,\delta}(z\bar{\zeta})\frac{\prod_{j\notin J}|z_j\zeta_j|^{1/\alpha_j-1}}{\left|1-\sum_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{\beta_J}}\right),$$

avec $\beta_J=n-|J|+\Sigma_{j\in J}\alpha_j-\frac{\gamma}{2}\inf_{j\in J_0}\alpha_j$.

Il suffit de majorer, quelle que soit la partie J de J_0 et quel que soit $k \leq n$, $\chi_{J_0\backslash J,\delta}(z\bar{\zeta})|z_k - \zeta_k|^\gamma$ par:

$$C\left|1 - \sum_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{1/2\inf\alpha_j}$$

Si $k \notin J$, on majore $|z_k - \zeta_k|$ par $C|z_k^{1/\alpha_k} - \zeta_k^{1/\alpha_k}|^{\alpha_k}$ (cette dernière expression ayant bien un sens puisque, si $k \in J_0\backslash J$, $|\mathrm{Arg}(z_k\bar{\zeta}_k)| < \delta\alpha_k$). Mais il est bien connu que, si $\tilde{z}, \tilde{\zeta}$ appartiennent à la boule unité $\bar{B}$, $|\tilde{z} - \tilde{\zeta}| \leq C|1 - \tilde{z}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}|^{1/2}$: il suffit d'utiliser ce fait avec $\tilde{z} = (z_k^{1/\alpha_k})_{k\notin J}$, $\tilde{\zeta} = (\zeta_k^{1/\alpha_k})_{k\notin J}$. On a donc montré l'inégalité cherchée dans le cas où $k \notin J$.

Soit maintenant $k \in J$: alors $|z_k - \zeta_k| \leq C(|z_k|^{2/\alpha_k} + |\zeta_k|^{2/\alpha_k})^{\alpha_k/2}$, et cette dernière expression est majorée, on l'a vu, par:

$$\left|1 - \sum_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|^{\alpha_k/2}.$$

Là encore, on a l'inégalité cherchée.

Pour démontrer la proposition (5.3), après paramétrage par la sphère unité pour le terme relatif à la partie vide, intégration suivant les variables ζ_j, $j \in J$ puis paramétrage par la boule unité pour les termes relatifs aux parties J non vides, on est ramené à montrer que, quel que soit $\eta > 0$:

$$\sup_{z\in\partial B}\int_{\partial B}\frac{|z_1|^{1-\alpha_1}|\zeta_1|^{\alpha_1-1}\ldots|z_n|^{1-\alpha_n}|\zeta_n|^{\alpha_n-1}}{|1 - z\cdot\bar{\zeta}|^{n-\eta}}\,d\sigma(\zeta) < \infty \tag{5.4}$$

$$\sup_{z\in B}\int_{B}\frac{|z_1|^{1-\alpha_1}|\zeta_1|^{\alpha_1-1}\ldots|z_n|^{1-\alpha_n}|\zeta_n|^{\alpha_n-1}}{|1 - z\cdot\bar{\zeta}|^{n+\beta-\eta}}(1 - |\zeta|^2)^{\beta-1}\,dV(\zeta) < \infty \tag{5.5}$$

On procède comme dans les démonstrations de (4.4) et (4.5): détaillons la démonstration de l'inégalité (5.4) en reprenant les notations utilisées pour l'inégalité (4.4). On peut toujours supposer $|z_1| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; dans ce cas

$$|1 - z\cdot\bar{\zeta}| \sim |z' - \zeta'|^2 + |\theta| \geq |\theta|^{1/n}\prod_{j\geq 2}|z_j - \zeta_j|^{2/n},$$

donc

$$\sup_{\substack{z\in\partial B\\ |z_1|>1/\sqrt{n}}}\int_{\partial B}\cdots \leq \sup_{z\in\partial B}\int_{|\theta|<\pi}\frac{d\theta}{|\theta|^{1-\eta/n}}\times\prod_{j\geq 2}\int_{|\zeta_j|<1}\frac{|z_j/\zeta_j|^{1-\alpha_j}}{|z_j - \zeta_j|^{2-2\eta/n}}\,dV_1(\zeta_j).$$

On conclut en remarquant que, quel que soit $\beta > -1$ et $\gamma > 0$:

$$\int_{|v|<1} \frac{|u|^{-\beta}|v|^{\beta}}{|u-v|^{2-\gamma}}\, dV_1(v) = |u|^{\gamma} \int_{|v|<1/|u|} \frac{|v|^{\beta}}{|1-v|^{2-\gamma}}\, dV_1(v)$$

est majoré indépendamment de u.

L'inégalité (5.5) s'obtient de manière analogue. Un contrôle des indices donne l'appartenance uniforme à L^p du noyau $|S_\mu(z,\zeta)||z-\zeta|^{\gamma}$.

Nous pouvons, grâce aux propositions (5.2) et (5.3), démontrer une grande partie du théorème (5.1). Soit donc f une fonction lipschitzienne d'ordre γ: grâce à la proposition (5.2),

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0} \int_{CV_\epsilon(z)} S_\mu(z,\zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(z) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{CV_\epsilon(z)} S_\mu(z,\zeta)[f(\zeta)-f(z)]\, d\mu_\alpha(\zeta) + \frac{1}{2} f(z). \end{aligned}$$

cette dernière limite ayant bien un sens lorsque f satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre γ, puisque $|S_\mu(z,\zeta)||f(\zeta)-f(z)| \leq |S_\mu(z,\zeta)||z-\zeta|^{\gamma}$ est intégrable.

De plus, lorsque z' tend vers z, $z' = (r^{\alpha_1} z_1, \ldots, r^{\alpha_n} z_n)$, on montre encore que $|S_\mu(z',\zeta)||f(\zeta)-f(z)|$ est majoré uniformément par la fonction intégrable donnée par le membre de droite du lemme (5.3). Donc

$$\lim_{z'\to z} \int S_\mu(z',\zeta)[f(\zeta)-f(z)]\, d\mu_\alpha(\zeta) = \int S_\mu(z,\zeta)[f(\zeta)-f(z)]\, d\mu_\alpha(\zeta),$$

et donc:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\mu f(z) &= \lim_{z'\to z} \int S_\mu(z',\zeta) f(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_\alpha(\zeta) \\ &= \lim_{z'\to z} \int S_\mu(z',\zeta)[f(\zeta)-f(z)]\, \mathrm{d}\mu_\alpha(\zeta) + f(z) \\ &= F(z) + \tfrac{1}{2} f(z). \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que F est continue sur ∂D_α, ce qui va nécessiter des estimations plus précises pour $S_\mu(z,\zeta)$. La proposition (5.2) exprime justement le fait que F est continue lorsque f est une fonction constante. Elle permet, pour montrer la continuité de F en z, de supposer que $f(z) = 0$.

Soit $\xi \in \partial D_\alpha$, $\eta > 0$ tel que $\xi \in V_\eta(z)$:

$$F(\xi) - F(z) = \int_{CV_\eta(z)} [S_\mu(\xi, \zeta) - S_\mu(z, \zeta)] f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$
$$+ f(\xi) \lim_{\epsilon\to 0} \int_{V_\eta(z)\cap CV_\epsilon(\xi)} S_\mu(\xi, \zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$
$$+ \int_{V_\eta(z)} S_\mu(\xi, \zeta)[f(\zeta) - f(\xi)]\, d\mu_\alpha(\zeta)$$
$$- \int_{V_\eta(z)} S_\mu(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta).$$

Le premier terme tend évidemment vers 0 lorsque ξ tend vers z puisque $S_\mu(\xi, \zeta)$ est $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de la diagonale de D_α. Le troisième terme tend vers 0 uniformément en ξ lorsque η tend vers 0 si f satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre γ: grâce à la proposition (5.3), utilisée avec $\gamma' < \gamma$,

$$\int_{V_\eta(z)} |S_\mu(\xi, \zeta)||\zeta - \xi|^\gamma\, d\mu_\alpha(\zeta) \le C_{\gamma'} \sup_{\zeta\in V_\eta(z)} |\zeta - \xi|^{\gamma-\gamma'}.$$

La quatrième terme tend vers 0 pour des raisons analogues ($|f(\zeta)| \le C|\zeta - z|^\gamma$). Il suffit donc, pour montrer que $F(\xi) - F(z)$ tend vers 0, de montrer que

LEMME 5.6: *Quel que soit $\eta < \eta_0$, il existe un voisinage $W_\eta(z)$ tel que:*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{V_\eta(z)\cap CV_\epsilon(\xi)} S_\mu(\xi, \zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

soit uniformément borné en η, ξ, avec $\eta < \eta_0$ et $\xi \in W_\eta(z)$.

En vertu de la proposition (5.2), il suffit de montrer que

$$\int_{CV_\eta(z)} S_\mu(\xi, \zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

est uniformément borné. C'est tout à fait élémentaire si z est un point de stricte pseudo-convexité de ∂D_α, c'est-à-dire $z_j \neq 0$ quel que soit $j \in J_0$: on est alors amené à montrer que:

$$\int_{|1-\tilde{z}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}|>\eta} (1 - \tilde{\xi}\cdot\bar{\tilde{\zeta}})^{-n}\, d\sigma(\tilde{\zeta})$$

est uniformément borné en $\eta > 0$ et $\tilde{\xi} \in \partial B$, lorsque $\tilde{\xi}$ est assez proche de z, disons $|1 - \tilde{z} \cdot \bar{\tilde{\xi}}| < \frac{\eta}{2}$. Mais

$$\left|\int_{|1-\tilde{z}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}|>\eta} (1 - \tilde{\xi} \cdot \bar{\tilde{\zeta}})^{-n}\, d\sigma(\zeta)\right| \leq \left|\int_{|1-\tilde{\xi}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}|>\eta/2} (1 - \tilde{\xi} \cdot \bar{\tilde{\zeta}})^{-n}\, d\sigma(\zeta)\right|$$
$$+ \int_{\eta/2<|1-\tilde{\xi}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}|<3\eta/2} |1 - \tilde{\xi} \cdot \bar{\tilde{\zeta}}|^{-n}\, d\sigma(\tilde{\zeta})$$

puisque l'application $(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}) \to |1 - \tilde{\xi} \cdot \bar{\tilde{\zeta}}|$ est une distance sur ∂B. Les deux termes sont évidemment bornés, le premier grâce à la limite $\frac{1}{2}$ obtenue lorsque η tend vers 0.

Supposons maintenant que $z_j = 0$ si $j \in J \subset J_0$, et montrons encore que:

$$\int_{CV_\eta(z)} S_\mu(\xi, \zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

est uniformément borné. Etant donné $\theta = (\theta_j)_{j\in J} \in \mathbf{T}^{|J|}$, quel que soit $\zeta \in \partial D_\alpha$, appelons $T_\theta\zeta$ l'élément $\zeta' \in \partial D_\alpha$ tel que $\zeta'_j = e^{i\theta_j}\zeta_j$ si $j \in J$, $\zeta'_j = \zeta_j$ si $j \notin J$. Du fait que le domaine d'intégration $V_\eta(z)$ et la mesure μ_α sont invariants sous l'action de T_θ, il s'agit encore de majorer:

$$\int_{\mathbf{T}^{|J|}} \int_{CV_\eta(z)} S_\mu(\xi, T_\theta\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)\, d\theta = \int_{CV_\eta(z)} \left\{\int_{\mathbf{T}^{|J|}} S_\mu(T_{-\theta}\xi, \zeta)\, d\theta\right\} d\mu_\alpha(\zeta).$$

La fonction $S_\mu(\xi, \zeta)$ étant holomorphe en ξ,

$$\int_{\mathbf{T}^{|J|}} S_\mu(T_{-\theta}\xi, \zeta)\, d\theta = S_\mu(\xi', \zeta),$$

avec $\xi'_J = 0$ si $j \in J$, $\xi'_j = \xi_j$ si $j \in J$. Finalement, il suffit de montrer que:

$$\int_{CV_\eta(z)} S_\mu(\xi, \zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

est uniformément borné lorsque ξ est tel que $\xi_j = 0$ si $j \in J$, ξ dans un voisinage $W_\eta(z)$ de z. En utilisant l'expression de $S_\mu(\xi, \zeta)$ donnée par la proposition (2.2), après intégration par rapport aux variables ζ_J, $j \in J$ et paramétrisation par la boule $\bar{B}$ de $\mathbf{C}^m$, $m = n - |J|$, on est ramené à montrer que

$$\int_{|1-\tilde{z}\cdot\bar{\tilde{\zeta}}|>\eta} (1 - \tilde{\xi} \cdot \bar{\tilde{\zeta}})^{-m-\beta}(1 - |\tilde{\zeta}|^2)^{\beta-1}\, dV_m(\tilde{\zeta})$$

est uniformément borné η et $\tilde{\xi} \in \bar{B}$, lorsque $\tilde{\xi}$ est assez proche de $\tilde{z}$: par exemple lorsque $|1 - \tilde{z} \cdot \bar{\tilde{\zeta}}| < \frac{\eta}{2}$. On procède comme dans le cas précédent.

Ceci termine la démonstration du théorème (5.1). Du paragraphe précédent résultent des inégalités L^p, $p > 1$ pour l'opérateur $\mathbf{S}_\mu$ considéré comme opérateur sur le bord ∂D_α. Le théorème suivant donne de plus l'inégalité $(L^1, L^1_{\text{faible}})$:

THEOREME 5.4: *Quelle que soit la fonction $f \in L^1(\partial D_\alpha)$, la fonction*

$$S_\mu f(z) = \tfrac{1}{2} f(z) + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{CV_\epsilon(z)} S_\mu(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

est bien définie p. p. en $z \in \partial D_\alpha$, et il existe des constantes C_p indépendantes de f telles que:

(a) $$\int_{\partial D_\alpha} |\mathbf{S}_\mu f(z)|^p\, d\mu_\alpha(z) \le C_p \int_{\partial D_\alpha} |f(\zeta)^p\, \mathrm{d}\mu_\alpha(\zeta)$$

si $p > 1$:

(b) $$\mu_\alpha(|\mathbf{S}_\mu f| > \lambda) \le \frac{C_1}{\lambda} \int |f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta).$$

Seule l'inégalité faible (b) est à montrer ainsi que le fait que $\mathbf{S}_\mu f$ est bien défini: il s'agit donc de montrer que l'opérateur maximal associé au noyau S_μ:

$$\mathbf{S}^*_\mu f(z) = \sup_\epsilon \left| \int_{CV_\epsilon(z)} S_\mu(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta) \right|$$

satisfait à une inégalité $(L^1, L^1_{\text{faible}})$, ou encore, après réduction à un problème sur la boule comme dans le paragraphe 4, de montrer les deux lemmes suivants:

LEMME 5.7: *Soit T^* l'opérateur maximal associé au projecteur de Szegö de ∂B*:

$$T^* f(z) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{|1 - z \cdot \bar{\zeta}| > \epsilon} \frac{f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)}{(1 - z \cdot \bar{\zeta})^n} \right|.$$

Alors, si W^{-2} appartient à la classe de Muckenhoupt (A_1),

$$\int_{|(T^*f)W|>\lambda} W^{-2}\, d\sigma \leq \frac{C}{\lambda}\int |f|\, W^{-1}\, d\sigma.$$

LEMME 5.8: *Soit Θ l'opérateur maximal associé au noyau de Bergman de la boule B de $\mathbf{C}^n$ pour la mesure* $(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, dV(\zeta)$:

$$\Theta f(z) = \int_B |f(\zeta)| \frac{(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, dV(\zeta)}{|1-z\cdot\bar{\zeta}|^{n+\beta}}.$$

Alors, si W^{-2} appartient à la classe (B_1) des poids W tels

$$\sup_{\substack{z\in\partial D\\ \delta>0}} w(z)^{-1}\frac{1}{\delta^{n+\beta}}\int_{\substack{|1-z\cdot\bar{\zeta}|<\delta\\ \delta>0}} \omega(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, dV(\zeta) < \infty,$$

il existe une constante C indépendante de f telle que:

$$\int_{|(\Theta f)W|>\lambda} W^{-2}(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, dV(\zeta) \leq \frac{C}{\lambda}\int |f|\, W^{-1}(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, dV(\zeta).$$

Il s'agit de deux problèmes à poids qui sont, nous semble-t-il, non standards mais aisés à relier aux résultats à poids classiques. Nous donnons en appendice la démonstration de l'analogue de ces lemmes pour la transformée de Hilbert. Son adaption aux cas étudiés ici ne demande aucune idée nouvelle tout en exigeant de multiples complications techniques (voir par exemple [9] et [4]).

6. A propos d'une métrique adaptée sur ∂d_α

Nous avons démontré les inégalités L^p pour le projecteur de Szegö $\mathbf{S}_\mu$ en ramenant le problème à un problème à poids sur la boule. Il serait évidemment satisfaisant de reconnaître en $\mathbf{S}_\mu$ un opérateur singulier sur ∂D_α relativement à une métrique adaptée. Le but de ce paragraphe est un premier pas dans cette direction: nous y proposons une pseudo-distance sur ∂D_α, $d(z,\zeta)$, telle que, si $d(z,\zeta)$ est assez petit,

$$d(z,\zeta) \simeq \inf\{\epsilon > 0;\ \zeta \in V_\epsilon(z)\}$$

si $V_\epsilon(z)$ désigne encore le voisinage de z qui, dans le paragraphe précédent, a joué un rôle crucial dans la definition de $S_\mu f$ comme valeur principale. Le lemme (6.3), donnant pour cette pseudo-distance la mesure de la boule de rayon ϵ, permet d'imaginer la difficulté d'une étude ultérieure.

Etant donné $\zeta \in \partial D_\alpha$, appelons N_ζ la droite réelle engendrée dans $\mathbf{C}^n$ par $i\nu_\zeta$, et Π_ζ la projection orthogonale sur N_ζ. On définit alors:

$$(6.1) \qquad d(\zeta, z) = |\Pi_\zeta(z-\zeta)| + \sum_j |\zeta_j|^{2/\alpha_j - 2}|z_j - \zeta_j|^2 + \sum |z_j - \zeta_j|^{2/\alpha_j}.$$

Rappelons que la distance de Koranyi sur ∂D_α est équivalente à ([19]):

$$|\Pi_\zeta(z-\zeta)| + |z-\zeta|^2,$$

si bien que $d(\zeta, z)$ est équivalente à la distance de Koranyi en dehors d'un voisinage de l'ensemble de non stricte pseudoconvexité. Si $D_\alpha = \{z \in \mathbf{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$, c'est-à-dire si $\alpha = (1, 1/2)$, et si $z = (1, 0)$, $d(\zeta, z)$ est équivalent à:

$$|\mathrm{Im}\, \zeta_1| + |\zeta_2|^4.$$

Nous allons montrer que $d(\zeta, z)$ est une bonne pseudo-distance sur ∂D_α([10]), c'est-à-dire que:

PROPOSITION 6.1:

(1) $d(\zeta, z) \leq C\, d(z, \zeta)$;

(2) $d(\zeta, \zeta') \leq C[d(\zeta, z) + d(z, \zeta')]$;

(3) *si $B(\zeta, \rho)$ désigne la boule de centre ζ de rayon ρ*

$$B(\zeta, \rho) = \{z \in \partial D_\alpha;\, d(\zeta, z) < \rho\}$$

alors

$$\mu_\alpha(B(\zeta, 2\rho)) \leq C\mu_\alpha(B(\zeta, \rho)).$$

Avant de démontrer la proposition (6.1), nous allons donner une expression équivalente en termes de

$$\lambda_\alpha(z) = \sum_{j=1}^n |z_j|^{2/\alpha_j}.$$

LEMME 6.2: $d(\zeta, z) \simeq |\nabla_z\lambda_\alpha(\zeta) \cdot (z-\zeta)|$.

Ici $\nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)$ est le vecteur $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\lambda_\alpha(\zeta), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\lambda_\alpha(\zeta)\right)$. Comme $\mathrm{Im}(\nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)\cdot(z-\zeta)) = |\nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)|(i\nu_\zeta\cdot(z-\zeta))$ et $|\nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)|$ est majoré et minoré, il suffit de montrer que

$$\mathrm{Re}\,\nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)\cdot(z-\zeta) \simeq \sum_j |\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}|z_j-\zeta_j|^2 + \sum |z_j-\zeta_j|^{2/\alpha_j}.$$

Mais $2\mathrm{Re}\nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)\cdot(z-\zeta) = \Sigma_j\left[\frac{2}{\alpha_j}\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_j|\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}(z_j-\zeta_j)) - |z_j|^{2/\alpha_j} + |\zeta_j|^{2/\alpha_j}\right]$ si bien qu'il suffit de montrer que, quel que soit j,

$$\begin{aligned} 0 \le |z_j|^{2/\alpha_j} - |\zeta_j|^{2/\alpha_j} - \frac{2}{\alpha_j}Re(\bar{\zeta}|\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}(z_j-\zeta_j)) \\ \simeq [|\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}|z_j-\zeta_j|^2 + |z_j-\zeta_j|^{2/\alpha_j}], \end{aligned}$$

ce qui découle de l'équivalence, lorsque $\beta \ge 2$:

$$|1+u|^\beta - 1 - \beta\,\mathrm{Re}\,u \simeq |u|^\beta + |u|^2.$$

Venons-en à la démonstration de la proposition (6.1). Pour montrer (1), il suffit de montrer que:

$$|[\nabla_z\lambda_\alpha(z) - \nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)]\cdot(z-\zeta)| \le C\left[\sum_j |\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}|z_j-\zeta_j|^2 + \sum_j |z_j-\zeta_j|^{2/\alpha_j}\right]$$

inégalité qui provient d'une majoration des dérivées secondes:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}\lambda_\alpha(z)\right| \le C|z_j|^{2/\alpha_j-2},$$

et donc, grâce au théorème des accroissements finis,

$$|[\nabla_z\lambda_\alpha(z) - \nabla_z\lambda_\alpha(\zeta)]\cdot(z-\zeta)| \le C\sum_j |\zeta_j + \theta_j(z_j-\zeta_j)|^{2/\alpha_j-2}|z_j-\zeta_j|^2,$$

avec $0 < \theta_j < 1$.

La propriété (2) découle d'arguments analogues, tandis que la propriété (3) découle du lemme suivant:

LEMME 6.3:

$$\mu_\alpha[B(\zeta,\rho)] \simeq \prod_{j=1}^{n} \inf\left[\frac{\rho}{|\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}}, \rho^{\alpha_j}\right].$$

Nous considérons uniquement le cas où $n=2$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ pour simplifier. On peut supposer $|\zeta_1|<\frac{1}{2}$ (sinon ce serait ζ_2 que serait inférieur à une constante strictement inférieure à 1). Dans ce cas, dans un voisinage de ζ (de la forme $|z-\zeta|<\epsilon$, ϵ indépendant de ζ_1), $z_1=x_1+iy_1$ et $t=\Pi_\zeta z$ forment un système de coordonnées de ∂D_α dans lequel

$$d\mu_\alpha(z)=[C+\mathcal{O}(d(z,\zeta))]\,dx_1\,dy_1\,dt.$$

Pour évaluer $\mu_\alpha[B(\zeta,\rho)]$, il suffit donc de chercher l'aire du domaine de $\mathbf{C}$:

$$\{z_1\in\mathbf{C};\,|\zeta_1|^{2/\alpha_1-2}|z_1-\zeta_1|^2+|z_1-\zeta_1|^{2/\alpha_1}<\rho\}.$$

Comme cette aire est équivalente à $\inf\left[\frac{\rho}{|\zeta_1|^{2/\alpha_1-2}}, \rho^{\alpha_1}\right]$ et $|\zeta_2|\simeq 1$,

$$\mu_\alpha[B(\zeta,\rho)]\simeq\rho\inf\left[\frac{\rho}{|\zeta_1|^{2/\alpha_1-2}}, \rho^{\alpha_1}\right]\simeq\prod_{1,2}\inf\left[\frac{\rho}{|\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}}, \rho^{\alpha_1}\right].$$

Le lemme suivant va nous permettre de relier la pseudodistance $d(z,\zeta)$ au noyau de Szegö $S_\mu(z,\zeta)$.

LEMME 6.4: *Soit J une partie (éventuellement vide) de J_0. Alors, si $\zeta_j=0$ ou $|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)|>\delta\alpha_j$ lorsque $j\in J$, et si $|\mathrm{Arg}(z_j\bar{\zeta}_j)|<\delta\alpha_j$ lorsque $j\in J_0\backslash J$,*

$$d(\zeta,z)\simeq\left|1-\sum_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}\right|.$$

Il résulte des hypothèses que, si $j\in J$:

$$|\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}|z_j-\zeta_j|^2+|z_j-\zeta_j|^{2/\alpha_j}\simeq|z_j|^{2/\alpha_j}+|\zeta_j|^{2/\alpha_j},$$

tandis que, si $j\notin J$,

$$|\zeta_j|^{2/\alpha_j-2}|z_j-\zeta_j|^2+|z_j-\zeta_j|^{2/\alpha_j}\simeq|z_j^{1/\alpha_j}-\zeta_j^{1/\alpha_j}|^2$$

en vertu de l'inégalité élémentaire:

$$|u^\beta - 1| \simeq |u-1| + |u-1|^\beta$$

si $\beta > 1$ et $|\mathrm{Arg}\, u| < \delta < \dfrac{\pi}{\beta}$.

Comme, de plus,

$$\left|\sum_{j\in J} \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial z_j}(\zeta)\cdot(z_j-\zeta_j)\right| \leq C\sum_{j\in J}(|z_j|^{2/\alpha_j} + |\zeta_j|^{2/\alpha_j}),$$

$$d(\zeta, z) \simeq \left|\mathrm{Im}\Big(\sum_{j\notin J}\frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial z_j}(z)\cdot(z_j-\zeta_j)\Big)\right| + \sum_{j\in J}(|z_j|^{2/\alpha_j}+|\zeta_j|^{2/\alpha_j}) + \sum_{j\notin J}|z_j^{1/\alpha_j}\zeta_j^{1/\alpha_j}|^2.$$

Mais, si l'on pose $F(z,\zeta) = 1 - \sum_{j\notin J}(z_j\bar{\zeta}_j)^{1/\alpha_j}$, il est clair que $\dfrac{\partial F}{\partial z_j}(\zeta) = -\dfrac{\partial\lambda_\alpha}{\partial z_j}(\zeta)$ lorsque $j\notin J$, puis, après avoir effectué un développement de Taylor à l'ordre 2 de F en z au voisinage de ζ, que:

$$\left|F(z,\zeta) + \sum_{j\notin J}\frac{\partial\lambda}{\partial z_j}(\zeta)\cdot(z_j-\zeta_j)\right| \leq C\sum_{j\in J}(|z_j|^{2/\alpha_j}+|\zeta_j|^{2/\alpha_j}) + \sum_{j\notin J}|z_j^{1/\alpha_j} - \zeta_j^{1/\alpha_j}|^2.$$
(6.5)

D'autre part, les points $(z_j^{1/\alpha_j})_{j\notin J}$ et $(\zeta_j^{1/\alpha_j})_{j\notin J}$ appartenant à la boule fermée de $\mathbf{C}^{n-|J|}$ et $F(z,\zeta)$ représentant leur distance de Koranyi, il est bien connu [ ] que:

$$(6.6)\quad |F(z,\zeta)| \geq c\left[1 - \sum_{j\notin J}|z_j|^{2/\alpha_j} + 1 - \sum_{j\notin J}|\zeta_j|^{2/\alpha_j} + \sum_{j\notin J}|z_j^{1/\alpha_j} - \zeta_j^{1/\alpha_j}|^2\right].$$

L'équivalence cherchée résulte de (6.5) et (6.6).

PROPOSITION 6.2: *La fonction* $\delta(\zeta, z) = |S_\mu(z,\zeta)|^{-1}$ *définit une pseudo-distance sur* ∂D_α *pour laquelle la mesure d'une boule de rayon* r *est de l'ordre de* r.

Plus précisément, nous allons montrer que $|S_\mu(z,\zeta)|^{-1}$ est de l'ordre de la mesure $\mu[B(\zeta, d(\zeta, z))]$, fonction dont il est aisé de voir qu'elle est une pseudo-distance pour laquelle la mesure de la boule de rayon r est r.

Nous supposerons pour simplifier que $n = 2$, $\alpha = (1, \beta)$. Puisque $|z_2| = |\zeta_2| + \mathcal{O}(|z_2 - \zeta_2|) = |\zeta_2| + \mathcal{O}(d(z,\zeta)^\beta)$, il s'agit, en vertu du lemme

(6.3), de montrer que:

$$S_\mu(z,\zeta) \simeq \sup\left\{\frac{|z_2\zeta_2|^{1/\beta-1}}{[d(z,\zeta)]^2}, \frac{1}{[d(z,\zeta)]^{1+\beta}}\right\}. \tag{6.7}$$

Mais, en vertu de la proposition (2.3),

$$S_\mu(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi^2\beta^2}\frac{(z_2\bar\zeta_2)^{1/\beta-1}}{(1-z_1\bar\zeta_1-(z_2\bar\zeta_2)^{1/\beta})^2}\chi_{\mathrm{Arg}(z_2\bar\zeta_2)<\delta\beta}(z_2\bar\zeta_2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{[d(z,\zeta)]^{1+\beta}}\right),$$

si bien que (6.7) résulte du lemme (6.4) lorsque $\zeta_2 \neq 0$, et $d(z,\zeta) \leq c|z_2\zeta_2|^{1/\beta}$. Si $\zeta_2 = 0$ ou $\mathrm{Arg}(z_2\bar\zeta_2) > \delta\beta$, il résulte de la proposition (3.1) que

$$S_\mu(z,\zeta) = \frac{1/2\pi^2}{(1-z_1\bar\zeta_1)^{1+\beta}} + \mathcal{O}\left(\frac{|z_2\zeta_2|}{|1-z_1\bar\zeta_1|^{1+2\beta}}\right),$$

d'où sous ces conditions, l'équivalence (6.7) lorsque $d(z,\zeta) \geq C|z_2\zeta_2|^{1/\beta}$. Si $d(z,\zeta) \geq C|z_2\zeta_2|^{1/\beta}$ et $|\mathrm{Arg}(z_2\bar\zeta_2)| < \delta\beta$, $d(z,\zeta) \simeq |1-z_1\bar\zeta_1-(z_2\bar\zeta_2)^{1/\beta}| \simeq |1-z_1\bar\zeta_1|$, si bien que là encore, le terme prépondérant est $\frac{1/2\pi^2}{(1-z_1\bar\zeta_1)^{1+\beta}}$, et $|S_\mu(z,\zeta) \simeq \frac{1}{|d(z,\zeta)|^{1+\beta}}$.

Il reste à montrer que $[d(z,\zeta)]^{1+\beta}|S_\mu(z,\zeta)|$ est majorée et minorée lorsque $c|z_2\zeta_2|^{1/\beta} \leq d(z,\zeta) \leq c|z_2\zeta_2|^{1/\beta}$. Mais, sur ce fermé, c'est une fonction bien définie et continue en dehors des points où $z=\zeta$ et $z_2 = \zeta_2 = 0$, et qui admet une limite uniformément majorée et minorée en ces points.

REMARQUE: Soit $z \in \partial D_\alpha$, $z_j = 0$ si $j \in J \subset J_0$, $z_j \neq 0$ si $j \in J_0 \backslash J$. Il résulte des majorations précédentes que, pour γ et η bien choisis,

$$|S_\mu(z,\zeta)|^{-1} = \left\{c\prod_{j\notin J}|z_j|^{2-2/\alpha_j}\right\}1-\sum_{j\notin J}(z_j\bar\zeta_j)^{1/\alpha_j}\Big|^\gamma + \mathcal{O}\left(\Big|1-\sum_{j\in J}(z_j\bar\zeta_j)^{1/\alpha_j}\Big|^{\gamma-\eta}\right),$$

si bien que dans la définition de l'opérateur $\mathbf{S}_\mu$ comme valeur principale les voisinages $V_\epsilon(z)$ peuvent être remplacés par les boules de centre z et de rayon ϵ pour la pseudo-distance δ:

$$\mathbf{S}_\mu f(z) = \frac{1}{2}f(z) + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|S_\mu(z,\zeta)|^{-1}>\epsilon} S_\mu(z,\zeta)f(\zeta)\,d\mu_\alpha(\zeta).$$

7. Projecteur de Szegö de D_α relatif à la mesure euclidienne et projecteur de Bergman de D_α

Considérons maintenant le noyau de Szegö relatif à la mesure euclidienne σ_α sur ∂D_α:

$$S(z, \zeta) = \sum a_m z^m \bar{\zeta}^m,$$

avec $a_m^{-1} = \int_{\partial D_\alpha} |z|^{2m} \, d\sigma_\alpha(z) = \int_{\partial D_\alpha} |z|^{2m} |\nabla\lambda(z)|^{-1} \, d\mu_\alpha(z)$. Comme $|\nabla\lambda(z)|$ est majoré et minoré sur ∂D_α,

$$S(z, z) \simeq S_\mu(z, z).$$

Il en résulte que la série définissant $S(z, \zeta)$ converge absolument lorsque $|z_1\zeta_1|^{1/\alpha_1} + \cdots + |z_n\zeta_n|^{1/\alpha_n} < 1$, c'est-à-dire en particulier lorsque $z \in \bar{D}_\alpha$, $\zeta \in \partial D_\alpha$ et les $|z_j|$ sont non tous égaux aux $|\zeta_j|$.

Nous n'avons pas, par contre, d'expression explicite de $S(z, \zeta)$, mais, en suivant la méthode de N. Kerzman et E. Stein [15] pour relier le projecteur de Szegö relatif à la mesure euclidienne au projecteur de Szegö relatif à la mesure μ_α, nous allons montrer que:

THEOREME 7.1: *Le projecteur de Szegö* $\mathbf{S}$, *défini par*:

$$\mathbf{S}f(z) = \int_{\partial D_\alpha} S(z, \zeta) f(\zeta) \, d\sigma_\alpha(\zeta), \; z \in D_\alpha$$

se prolonge en un opérateur borné de $L^p(\partial D_\alpha)$ *sur* $\mathcal{H}^p(\partial D_\alpha)$ *quel que soit* $p > 1$.

Etant donné $f \in L^2(\partial D_\alpha)$, notons encore $\mathbf{S}f$ la fonction de $L^2(\partial D_\alpha)$ limite au bord de $z \to \int_{\partial D_\alpha} S(z, \zeta) f(\zeta) \, d\sigma_\alpha(\zeta)$. Il s'agit de montrer l'existence d'une constante C indépendante de f dans $L^p \cap L^2(\partial D_\alpha)$ telle que:

$$\|\mathbf{S}f\|_{L^p(\partial D_\alpha)} \leq C \|f\|_{L^p(\partial D_\alpha)}.$$

Comme $\mathbf{S}_\mu$ est également un projecteur, si $\mathbf{S}_\mu^*$ désigne l'adjoint de $\mathbf{S}_\mu$

dans $L^2(\partial D_\alpha, \sigma_\alpha)$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{S}_\mu^* \qquad \mathbf{S}\mathbf{S}_\mu = \mathbf{S}_\mu,$$

donc $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}\mathbf{A}$, avec $\mathbf{A} = \mathbf{S}_\mu^* - \mathbf{S}_\mu$.

Utilisant le théorème (5.1), on montre aisément (comme N. Kerzman et E. Stein dans [15] à propos du projecteur de Henkin) que:

$$\mathbf{S}_\mu^* f(z) = \frac{1}{2} f(z) + |\nabla\lambda(z)| \lim_{\epsilon\to 0} \int_{CV_\epsilon(z)} S_\mu(z, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma_\alpha(\zeta),$$

et

$$\mathbf{A} f(z) = \int_{\partial D_\alpha} A(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

si $\quad A(z, \zeta) = S_\mu(z, \zeta)[|\nabla\lambda(z)| - |\nabla\lambda(\zeta)|]|\nabla\lambda(\zeta)|^{-1}$.

Comme $|A(z, \zeta) \le C|S_\mu(z, \zeta)||z - \zeta|$, il existe $p_0 > 1$ tel que $z \to A(z, \zeta)$ soit uniformément dans $L^{p_0}(\partial D_\alpha)$ (proposition (5.3)). L'opérateur $\mathbf{A}$ envoie donc continuement $L^p(\partial D_\alpha)$ dans $L^q(\partial D_\alpha)$, avec $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p_0} - 1$, $1 \le p < \dfrac{p_0}{p_0 - 1}$. En particulier, si $\dfrac{1}{p_1} = \inf\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{p_0}, 1\right)$ et si $p_1 < p \le 2$,

$$\|\mathbf{S}\mathbf{A}f\|_p \le C\|\mathbf{S}\mathbf{A}f\|_2 \le C\|\mathbf{A}f\|_2 \le C\|f\|_p.$$

Comme $\mathbf{S}_\mu$ opère continuement dans $L^p(\partial D_\alpha)$, il en est de même de $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}\mathbf{A}$. Si $p_1 = 1$, on a démontré le théorème. Sinon, soit p_2 tel que $\dfrac{1}{p_2} = \inf\left(\dfrac{1}{p_1} + 1 - \dfrac{1}{p_0}, 1\right)$. Si $p_2 < p \le p_1$,

$$\|\mathbf{S}\mathbf{A}f\|_p \le C\|\mathbf{S}\mathbf{A}f\|_{p_1} \le C\|\mathbf{A}f\|_{p_1} \le C\|f\|_p,$$

donc $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}\mathbf{A}$ opère encore continuement dans $L^p(\partial D_\alpha)$. Après avoir utilisé un nombre fini de fois le même argument, on montre que $\mathbf{S}$ opère continuement dans $L^p(\partial D_\alpha)$ pour tout $p > 1$, et même envoie $L^1(\partial D_\alpha)$ dans $L^1_{\text{faible}}(\partial D_\alpha)$.

Du fait que $\mathbf{S}_\mu$ est un opérateur borné dans $L^p(\partial D_\alpha)$, on déduit également immédiatement que le projecteur de Bergman de D_α est un opérateur borné $L^p(D_\alpha)$: nous avons vu que le noyau de Bergman de D_α est lié très simplement au noyau de Szegö de $D_{\tilde\alpha}$, où:

$$D_{\tilde\alpha} = \left\{\tilde z \in \mathbf{C}^{n+1};\ \sum |\tilde z_j|^{2/\alpha_j} + |\tilde z_{n+1}|^2 < 1\right\}.$$

En fait

$$B(z,\zeta)=S(\tilde{z},\tilde{\zeta})$$

si $\tilde{\zeta}=(\zeta,0)$ et $\tilde{z}=(z,z_{n+1})$, quel que soit z_{n+1}. Soit f une fonction de $L^2(D_\alpha)$, $\tilde{f}$ la fonction de $L^2(\partial D_\alpha)$ définie par $\tilde{f}(z,z_{n+1})=f(z)$. Alors, si $\tilde{z}=(z,z_{n+1})\in\partial D_\alpha$,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_\mu\tilde{f}(\tilde{z})&=\lim_{\tilde{z}'\to\tilde{z}}\int_{\partial D_{\tilde{\alpha}}}S_\mu(\tilde{z}',\tilde{\zeta})\tilde{f}(\tilde{\zeta})\,d\mu_\alpha(\tilde{\zeta})\\&=\lim_{z'\to z}2\pi\int_{D_\alpha}S_\mu(z',\zeta)f(\zeta)\,dV(\zeta)\end{aligned}$$

après intégration suivant θ si $\zeta_{n+1}=|\zeta_{n+1}|e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_\mu\tilde{f}(\tilde{z})&=\lim_{z'\to z}\int_{D_\alpha}B(z',\zeta)f(\zeta)\,dV(\zeta)\\&=\int_{D_\alpha}B(z,\zeta)f(\zeta)\,dV(\zeta)\end{aligned}$$

si $z\in D_\alpha$ puisque le noyau $B(z,\zeta)$ est alors intégrable en ζ. On reconnait dans cette intégrale la projection de Bergman de f en $z:\mathbf{S}_\mu\tilde{f}(\tilde{z})=\mathbf{B}f(z)$. Comme

$$\|f\|_{L^p(D_\alpha)}=(2\pi)^{1/p}\|\tilde{f}\|_{L^p(\partial D_\alpha,\,\mu_\alpha)}$$

et

$$\|\mathbf{B}f\|_{L^p(D_\alpha)}=(2\pi)^{1/p}\|\mathbf{S}\tilde{f}\|_{L^p(\partial D_\alpha,\,\mu_\alpha)},$$

il en résulte le théorème annoncé:

THEOREME 7.2: *Le projecteur de Bergman de D_α définit un opérateur borné dans $L^p(D_\alpha)$ quel que soit $p>1$.*

On déduirait d'ailleurs de la même manière des résultats sur le projecteur de Szegö le fait que le projecteur de Bergman de D_α pour la mesure $(1-|z|^2)^{\gamma-1}\,dV(z)$, où $\gamma>0$, est borné dans $L^p(D_\alpha,(1-|z|^2)^{\gamma-1}\,dV(z))$.

8. Formules de Cauchy-Fantappie: D'autres projecteurs de L^p sur $\mathcal{H}^p$

Il est clair que la correspondance simple existant entre D_α et la boule B de $\mathbf{C}^n$ a joué un rôle central dans notre approche du noyau de Szegö de D_α. Considérons le cas où tous les α_j sont des inverses d'entiers $\alpha_j = 1/p_j$. Alors, si l'on désigne par Φ l'application de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$:

$$\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2}, \ldots, z_n^{p_n}),$$

Φ définit une application holomorphe de D_α sur B et envoie ∂D_α sur ∂B. L'idée schématique que l'on peut se faire du noyau de Szegö de D_α, ou du moins de son terme le plus singulier, est qu'il ressemble au noyau de Szegö de B pris en $(\Phi(z), \Phi(\zeta))$ pondéré par une fonction du jacobien de Φ. Nous allons, dans ce cas, trouver un projecteur de $L^p(\partial D_\alpha)$ sur $\mathcal{H}^p(\partial D_\alpha)$, non orthogonal, et qui s'exprime aisément en termes de Φ. Donnons tout d'abord une formule de représentation sur D_α:

PROPOSITION 8.1: *Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n entiers strictement positifs, Φ l'application holomorphe $\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1^{p_1}, \ldots, z_n^{p_n})$, $\alpha_1 = 1/p_1, \ldots, \alpha_n = 1/p_n$. Alors, si f appartient à $\mathcal{H}^2(\partial D_\alpha)$,*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} p_1 \ldots p_n \int_{\partial D_\alpha} \frac{N(z, \zeta)}{(1 - \Phi(z) \cdot \overline{\Phi(\zeta)})^n} f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta),\ z \in D_\alpha,$$

avec

$$N(z, \zeta) = \prod_{j=1}^{n} \bar{\zeta}_j^{p_j - 1}(z_j^{p_j-1} + \zeta_j z_j^{p_j-2} + \cdots + \zeta_j^{p_j-2} z_j + \zeta_j^{p_j-1}). \tag{8.1}$$

Nous reconnaîtrons dans un instant une formule de Cauchy Fantappié. Donnons pour l'instant une démonstration élémentaire de cette proposition. Etant donné un n-uple d'entiers $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tel que $0 \le r_j < p_j$, posons

$$\mathcal{H}_r^2(\partial D_\alpha) = \{f \in \mathcal{H}^2(\partial D_\alpha); f(z) = z_1^{r_1} z_2^{r_2} \ldots z_n^{r_n} \tilde{f} \circ \Phi(z)\};$$

$\mathcal{H}_r^2$ est encore le sous-espace de $\mathcal{H}^2(\partial D_\alpha)$ engendré par les fonctions:

$$z_1^{r_1 + p_1 m_1} z_2^{r_2 + p_2 m_2} \ldots z_n^{r_n + p_n m_n},\ m_1 \ge 0, m_2 \ge 0, \ldots, m_n \ge 0.$$

Il est clair que $\mathcal{H}^2(\partial D_\alpha)$ est somme directe des $\mathcal{H}_r^2(\partial D_\alpha)$, et que, si

$f \in \mathcal{H}_r^2(\partial D_\alpha)$,

$$\int_{\partial D_\alpha} \frac{N(z,\zeta)}{(1-\Phi(z)\cdot\overline{\Phi(\zeta)})^n} f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta) = \int_{\partial D_\alpha} \frac{\prod_j \bar{\zeta}_j^{p_j-1}\zeta_j^{p_j-r_j-1} z_j^{r_j}}{[1-\Phi(z)\cdot\overline{\Phi(\zeta)}]^n} f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta)$$

les autres termes du noyau étant orthogonaux à $\mathcal{H}_r^2(\partial D_\alpha)$. Mais, si $f(z) = z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_n^{r_n} \tilde{f} \circ \Phi(z)$, c'est donc que:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_\alpha} & \frac{N(z,\zeta)}{(1-\Phi(z)\cdot\overline{\Phi(\zeta)})^n} f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta) \\ &= z_1^{r_1}\dots z_n^{r_n} \int_{\partial D_\alpha} \frac{|\zeta_1|^{2p_1-2},\dots,|\zeta_n|^{2p_n-2}}{D_\alpha[1-\Phi(z)\cdot\overline{\Phi(\zeta)}]^n} \tilde{f}\circ\Phi(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta) \\ &= \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n z_1^{r_1} z_2^{r_2}\dots z_n^{r_n} \int_{\partial B} \frac{\tilde{f}(\zeta)\, d\sigma(\zeta)}{[1-\Phi(z)\cdot\bar{\zeta}]^n}\end{aligned}$$

puisque l'image par Φ de la mesure $|\zeta_1|^{2p_1-2}\dots|\zeta_n|^{2p_n-2}\, d\mu_\alpha(\zeta)$ est justement $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\, d\sigma(\zeta)$. On termine donc la démonstration de la proposition (8.1) en écrivant que:

$$\tilde{f}(\Phi(z)) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int_{\partial B} \frac{\tilde{f}(\zeta)\, d\sigma(\zeta)}{[1-\Phi(z)\cdot\bar{\zeta}]^n}$$

lorsque $\tilde{f}$ est holomorphe, $\tilde{f} \in \mathcal{H}^1(\partial B)$, ce qui n'est autre que la formule de représentation donnée par le noyau de Szegö de la boule.

Posons, pour $f \in L^1(\partial D_\alpha)$ et $z \in D_\alpha$,

$$\text{(8.2)} \quad \mathbf{H}f(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} p_1 \dots p_n \int_{\partial D_\alpha} \frac{N(z,\zeta)}{(1-\Phi(z)\cdot\overline{\Phi(\zeta)})^n} f(\zeta)\, d\mu_\alpha(\zeta).$$

Il est aisé de voir, et nous le ferons dans un instant dans un cadre plus général, que $\mathbf{H}$ définit un projecteur borné de $L^p(\partial D_\alpha)$ sur $\mathcal{H}^p(\partial D_\alpha)$ pour tout $p > 1$. Par contre, $\mathbf{H}$ n'est pas proche du projecteur de Szegö $\mathbf{S}$:

LEMME 8.3: $\mathbf{H}-\mathbf{S}$ *ne définit pas un opérateur borné de* $L^p(\partial D_\alpha)$ *dans* $\mathcal{H}^q(\partial D_\alpha)$ *quel que soit* $1 \leq p < q$.

Nous allons le démontrer dans le cas où $n = 2$, $\alpha = (1, 1/2)$, si bien que

$$D = D_{(1,1/2)} = \{z \in \mathbf{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\},$$

et

$$\mathbf{H}f(z)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\partial D}\frac{(z_2+\zeta_2)\bar{\zeta}_2}{(1-z_1\bar{\zeta}_1-z_2^2\bar{\zeta}_2^2)^2}f(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Remarquons tout d'abord que puisque $\mathbf{S}-\mathbf{S}_\mu$ est, lui, régularisant, il suffit de montrer que $\mathbf{H}-\mathbf{S}_\mu$ ne l'est pas. Soit $f(\zeta_1,\zeta_2)=g(\zeta_1)$. Alors:

$$\mathbf{H}f(z)=\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta_1|<1}\frac{g(\zeta_1)}{(1-z_1\bar{\zeta}_1)^2}\,dV_1(\zeta_1),$$

tandis que

$$\mathbf{S}_\mu f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta_1|<1}\frac{g(\zeta_1)(1-|\zeta_1|^2)^{-1/2}}{(1-z_1\bar{\zeta}_1)^{3/2}}\,dV_1(\zeta_1).$$

Autrement dit, $\mathbf{H}f$ et $\mathbf{S}_\mu f$ ne dépendent que de z_1, et sont, en tant que fonctions de z_1, les projections de Bergman de g relativement aux mesures $dV_1(\zeta_1)$ et $(1-|\zeta_1|^{-1/2})\,dV_1(\zeta_1)$ respectivement.

Soit $g(\zeta_1)=\frac{1}{R^{3/2}}\chi_{|\zeta_1-\zeta_1^0|<R}(\zeta_1)$, avec $|\zeta_1^0|<1$, et $R=\frac{1}{10}(1-|\zeta_1^0|)$.

Montrons qu'il ne peut y avoir de constante C indépendante de ζ_1^0 telle que

$$\left\{\int_{\partial D}|\mathbf{H}f-\mathbf{S}_\mu f|^q\,d\mu(z)\right\}^{1/q}\leq C\left\{\int_{\partial D}|g(\zeta_1)|^p\,d\mu(\zeta)\right\}^{1/p} \tag{8.4}$$
$$\leq C(1-|\zeta_1^0|)^{3/2((1/p)-1)}.$$

Mais $\mathbf{H}f(z)-\mathbf{S}_\mu f(z)$ vaut, à un terme plus régulier près:

$$\Pi R^{1/2}\{(1-z_1\bar{\zeta}_1^0)^{-2}-\tfrac{1}{2}(1-|\zeta_1^0|^2)^{-1/2}(1-z\bar{\zeta}_1^0)^{-3/2}\}$$

en vertu de la formule de la moyenne. Mais, pour des raisons d'homogénéité,

$$\int_{\partial D}|\mathbf{H}f-\mathbf{S}_\mu f|^q\,d\mu(z)\simeq R^{q/2}\int_{|z_1|<1}|(1-z_1\bar{\zeta}_1^0)^{-2}$$
$$-\frac{1}{2}(1-|\zeta_1^0|^2)^{-1/2}(1-z_1\bar{\zeta}_1^0)|^{-3/2}|^q$$
$$(1-|z_1|^2)^{-1/2}\,dV(z_1)\simeq R^{3/2(q-1)}\simeq(1-|\zeta_1^0|)^{3/2(q-1)}.$$

L'inégalité (8.4) ne peut donc être satisfaite pour tout ζ_1^0 que si $p = q$.

Remarque: En fait l'opérateur $\mathbf{H}$ est somme de projecteurs orthogonaux, chacun l'étant pour une mesure différente: considérons encore le cas de $D = D_{(1,1/2)}$. Soient E_0 l'espace des fonctions définies sur ∂D paires en ζ_2, E_1 l'espace des fonctions définies sur ∂D impaires en ζ_2. Le fait que ∂D soit invariant pour la symétrie $\zeta_2 \to -\zeta_2$ entraîne immédiatement que E_0 et E_1 sont orthogonaux dans $L^2(\nu)$ quelle que soit la mesure ν jouissant de la même invariance. Mais l'opérateur

$$f \to \frac{1}{\pi^2}\int_{\partial D} \frac{z_2\bar{\zeta}_2}{(1 - z_1\bar{\zeta}_1 - z_2^2\bar{\zeta}_2^2)^2} f(\zeta)\, d\mu(\zeta)$$

n'est autre que la projection orthogonale de $L^2(\partial D_\alpha; d\mu(\zeta)) \cap E_1$ sur son sous-espace formé des valeurs au bord de fonctions holomorphes, c'est-à-dire, suivant les notations précédentes, $\mathcal{H}^2_{(0,1)}(\partial D_\alpha)$. Quant à l'opérateur

$$f \to \frac{1}{\pi^2}\int_{\partial D} \frac{\zeta_2\bar{\zeta}_2}{(1 - z_1\bar{\zeta}_1 - z_2^2\bar{\zeta}_2^2)^2} f(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

ce n'est rien d'autre que la projection orthogonale de $L^2(\partial D_\alpha; |\zeta_2|^2\, d\mu(\zeta)) \cap E_0$ sur son sous-espace formé des valeurs au bord de fonctions holomorphes. Finalement

$$\mathbf{H} = S_{\mu,1} \circ P_{E_0} \oplus \mathbf{S}_\mu \circ P_{E_1}$$

si P_{E_0}, P_{E_1} désignent les projections sur E_0 et E_1, et $\mathbf{S}_{\mu,1}$ la projection de Szegö relative à la mesure $|\zeta_2|^2\, d\mu(\zeta)$. Le projecteur $\mathbf{H}$ est donc le projecteur orthogonal dans $\{L^2(\partial D_\alpha; d\mu(\zeta)) \cap E_1\} \oplus \{L^2(\partial D_\alpha; |\zeta_2|^2\, d\mu(\zeta)) \cap E_0\}$.

Montrons maintenant que la formule (8.1) est une formule de Cauchy-Fantappié. Nous allons considérer le cas d'un domaine pseudo-convexe satisfaisant à des hypothèses plus générales que les D_α.

A. Hypotheses sur le domaine:

Dorénavant, nous ferons les hypothèses suivantes:

(8.5) *D est un domaine borné de $\mathbf{C}^n$, $\tilde{D}$ un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$ défini par la fonction plurisousharmonique $\tilde{\lambda}$, Φ une application holomorphe définie dans un voisinage de D à valeurs*

dans* $\mathbf{C}^n$ *telle que

$$D = \{z;\ \lambda(z) = \tilde{\lambda} \circ \Phi(z) < 0\}$$

et $|\nabla\lambda| \neq 0$ sur ∂D.

LEMME 8.6: *Le domaine D est pseudo-convexe, et le rang de la forme de Lévi en $\zeta \in \partial D$ est égal au rang de la matrice jacobienne de Φ en ζ moins un.*

Il suffit de voir que

$$\sum \frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(\zeta) a_i \bar{a}_j = \sum \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\Phi(\zeta))\, b_k \bar{b}_l$$
$$\simeq \|b\|^2 = \left\| \sum a_i \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}(\zeta) \right\|^2$$

si $b_k = \sum_i a_i \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial z_i}(\zeta)$. Or le vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$ appartient au plan complexe tangent en $\zeta \in \partial D$ si et seulement si $\sum_i a_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i}(\zeta)$ appartient au plan complexe en $\Phi(\zeta)$ à $\partial\tilde{D}$, tandis que la condition $|\nabla\lambda| \neq 0$ sur ∂D entraine que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_n}$ sont non tous contenus dans le plan complexe tangent en $\Phi(\zeta)$ à $\partial\tilde{D}$. Le vecteur $\sum a_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i}(\zeta)$ est donc un vecteur quelconque du sous-espace de $\mathbf{C}^n$ intersection du sous-espace engendré par $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_n}$ et du plan complexe tangent en ∂D, sous-espace dont la dimension est exactement égale au rang de la matrice jacobienne moins un.

L'ensemble des points de non stricte pseudo-convexité est donc l'ensemble des $\zeta \in \partial D$ pour lesquels la fonction

$$\varphi(\zeta) = \text{dét}\, \Phi'(\zeta)$$

s'annule, si Φ' désigne la matrice jacobienne. Ceci donne une idée des domaines qui peuvent – ou ne peuvent pas – être ainsi envoyés de manière holomorphe dans un domaine strictement pseudo-convexe: le domaine

$$\{z \in \mathbf{C}^3;\ |z_1|^2 + (|z_2|^2 + |z_3|^2)^2 < 1\}$$

ne peut être envoyé dans un strictement pseudo-convexe, sa forme de Lévi dégénérant uniquement sur l'ensemble $\{\zeta \in \partial D; \zeta_2 = \zeta_3 = 0\}$, qui n'est pas l'intersection d'un ensemble analytique avec ∂D.

B. Construction d'une forme de Cauchy-Fantappie liee a Φ.

Nous allons écrire sur D une formule de Cauchy-Fantappié liée à Φ qui soit en quelque sorte l'image réciproque de la formule de représentation de G. Henkin sur $\tilde{D}$ et qui coïncide avec elle lorsque $\Phi = \mathrm{Id}$.

Si $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) = g(z, \zeta)$ est un n-uple de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, convenons d'appeler

$$\bar{\omega}(g) = g_1 \bar{\partial}_\zeta g_2 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}_\zeta g_n + \cdots + (-1)^{n-1} g_n \bar{\partial}_\zeta g_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}_\zeta g_{n-1}$$

et rappelons que si g est $\mathscr{C}^\infty$ dans $D \times \partial D$ et

$$G(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{n} g_j(z, \zeta)(\zeta_j - z_j)$$

ne s'annule pas dans $D \times \partial D$, on a, pour toute fonction f holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$, la formule de représentation suivante ([14]):

$$f(z) = c_n \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) \bar{\omega}(g) \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{[G(z, \zeta)]^n}, \quad z \in D$$

avec $c_n = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!(2\pi i)^{-n}$.

Soit

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n \int_{\partial \tilde{D}} \frac{f(\zeta) \bar{\omega}(\tilde{p}) \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{[\tilde{P}(z, \zeta)]^n} \\ &= \int_{\partial \tilde{D}} \frac{\tilde{Q}(z, \zeta)}{[\tilde{P}(z, \zeta)]^n} f(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta), \quad z \in \tilde{D} \end{aligned}$$

une formule de représentation de G. Henkin (telle qu'elle est donnée dans [15], §2.5 par exemple). Nous allons définir à partir de $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)$ un n-uple de fonctions $p = (p_1, \ldots, p_n)$ au voisinage de $\bar{D} \times \bar{D}$ de sorte que:

$$P(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{n} p_j(z, \zeta)(\zeta_j - z_j)$$

soit égal à

$$\tilde{P}(\Phi(z), \Phi(\zeta)) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i(z, \zeta)[\Phi_i(\zeta) - \Phi_i(z)].$$

Il suffit de définir:

$$P_j(Z, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ij}(z, \zeta)\tilde{p}_i(\Phi(z), \Phi(\zeta)),$$

où les Φ_{ji} sont des fonctions holomorphes en (z, ζ) telles que

$$\Phi_i(z) - \Phi_i(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(z, \zeta)(z_j - \zeta_j)$$

obtenues par le théorème de division.

Alors on a la formule de représentation dans D pour les fonctions holomorphes

$$f(z) = c_n \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\bar{\omega}(p) \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{[P(z, \zeta)]^n}$$
$$= \int_{\partial D} \frac{Q(z, \zeta)}{[P(z, \zeta]^n} f(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad z \in D,$$

où $Q(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = c_n\bar{\omega}(p) \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$. Nous pouvons énoncer:

PROPOSITION 8.2: *Sous les hypothèses* (8.5), *il existe un noyau* $H(z, \zeta)$, $\mathscr{C}^\infty$ *dans* $\bar{D} \times \partial D \backslash \{(z, \zeta) \in \partial D \times \partial D;\ \Phi(z) = \Phi(\zeta)\}$, *et holomorphe en z dans D tel que, quelle que soit la fonction f holomorphe dans D et continue dans* $\bar{D}$:

$$f(z) = \int_{\partial D} H(z, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad z \in D.$$

De plus:

$$\text{(8.7)} \quad H(z, \zeta) = \text{dét}\{\Phi_{ij}(z, \zeta)\}_{i,j} \times \overline{\text{dét}\, \Phi'(\zeta)} \times \frac{|\nabla\tilde{\lambda}(\Phi(\zeta))|}{|\nabla\lambda(\zeta)|} \tilde{H}(\Phi(z), \Phi(\zeta)),$$

si $\tilde{H}(z, \zeta)$ *désigne le noyau de G. Henkin relatif au domaine* $\tilde{D}$.

Il reste à démontrer (8.7), ou encore, étant donnée la forme de $H(z, \zeta)$ et $\tilde{H}(\Phi(z), \Phi(\zeta))$, qu'une liaison semblable a lieu entre $Q(z, \zeta)$

et $\tilde{Q}[\Phi(z), \Phi(\zeta)]$. Les deux membres étant alors continus, il suffit de le montrer dans le cas où ζ est un point de stricte pseudo-convexité, de sorte que $\Phi'(\zeta)$ soit une bijection. Remarquons tout d'abord qu'il y a alors un lien très simple entre σ et l'image par Φ^* de $\tilde{\sigma}$.

LEMME 8.8:

$$d\tilde{\sigma}(\Phi(\zeta)) = \frac{|\nabla\tilde{\lambda}(\Phi(\zeta))|}{|\nabla\lambda(\zeta)|} |\text{dét}\, \Phi'(\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta).$$

Ceci découle des trois relations:

$$d\lambda(\zeta) \wedge d\sigma(\zeta) = |\nabla\lambda(\zeta)|\, dV(\zeta),$$

$$d\tilde{\lambda}(\zeta) \wedge d\tilde{\sigma}(\zeta) = |\nabla\tilde{\lambda}(\zeta)|\, dV(\zeta),$$

et

$$dV(\Phi(\zeta)) = |\text{dét}\, \Phi'(\zeta)|^2\, dV(\zeta).$$

Revenons à (8.7). Comme les Φ_{ij} sont holomorphes,

$$\bar{\partial}_\zeta p_j(z, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ij}(z, \zeta)\bar{\partial}_\zeta\{\tilde{p}_i(\Phi(z), \Phi(\zeta))\}$$

si bien qu'étant donné le caractère multilinéaire et alterné de $\bar{\omega}$,

$$\bar{\omega}(p) = \text{dét}\{\Phi_{ij}\}_{i,j} \times \bar{\omega}(q),$$

où $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_j(z, \zeta) = p_j(\Phi(z), \Phi(\zeta))$. Mais $\bar{\omega}(q)$ n'est autre que l'image par Φ^* de $\bar{\omega}(p)$, et, comme $d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$ est l'image par Φ^* de $\{\text{dét}\, \Phi'(\zeta)\}^{-1}\, d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, $Q(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$ est l'image par Φ^* de:

$$\begin{aligned} c_n\, \text{dét}\{\Phi_{ij}\}_{i,j} &\times \{\text{dét}\, \Phi'\}^{-1}\bar{\omega}(\tilde{p}) \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ &= \text{dét}\{\Phi_{ij}\}_{i,j} \times \{\text{dét}\, \Phi'\}^{-1}\tilde{Q}\, d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser le lemme (8.8) pour conclure.

Lorsque $\Phi(z) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2}, \ldots, z_n^{p_n})$,

$$\Phi_{ij}(z, \zeta) = 0 \text{ si } j \neq i;$$

$$\Phi_{ii}(z, \zeta) = z_i^{p_i-1} + \zeta_i z_i^{p_i-2} + \cdots + \zeta_i^{p_i-2} z_i + \zeta_i^{p_i-1},$$

et, dans le cas du domaine

$$\{z \in \mathbf{C}^n ; |z_1|^{2p_1} + |z_2|^{2p_2} + \cdots + |z_n|^{2p_n} < 1\},$$

on retrouve la proposition (8.1).

Posons encore, dans le cas général

$$\mathbf{H}f(z) = \int_{\partial D} H(z, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \quad z \in D.$$

La question se pose d'une part de savoir si **H** peut être défini comme opérateur sur ∂D; d'autre part si **H** définit une projection bornée dans $L^p(\partial D)$, $p > 1$. La première question peut recevoir une réponse affirmative, comme nous allons le voir, tandis que la seconde a en général une réponse négative.

C. Definition du projecteur H sur ∂D

Proposition 8.3: *Sous les hypothèses* (8.5), *quelle que soit la fonction* $f \in \mathscr{C}^1(\partial D)$, *la fonction*

$$\mathbf{H}f(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|P(z,\zeta)| > \epsilon} H(z, \zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta) + \frac{1}{2} f(z)$$

est bien définie pour presque tout $z \in \partial D$, *et limite, quand* ϵ *tend vers* 0, *de* $\mathbf{H}f(z - \epsilon \nu_z)$.

La clé d'une telle proposition est, nous l'avons vu au §5, une formule de type Plemelj. Nous laisserons au lecteur le soin de déduire la proposition des lemmes suivants (lemmes (8.9) et (8.12)) (*).

Lemme 8.9: *Soit* $z \in \partial D$ *tel que, quel que soit* $z^0 \in \partial D$ *de non stricte pseudo-convexité,* $\Phi(z) \neq \Phi(z^0)$. *Alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|P(z,\zeta)| > \epsilon} H(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2}.$$

Etant donné le caractère reproduisant de **H** et le fait que H est $\mathscr{C}^\infty$

(*)Le fait que l'ensemble exceptionnel pour le lemme (8.9) soit de mesure nulle découle du fait qu'il existe au plus un nombre fini de $\zeta \in \partial D$ tels que $\Phi(z) = \Phi(\zeta)$.

en dehors de $\{(z, \zeta) \in \partial D; P(z, \zeta) = 0\}$, il suffit de montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{z' \to z} \int_{|P(z, \zeta)| < \epsilon} H(z', \zeta)\, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2}.$$

Il découle de l'hypothèse sur z et de la compacité de ∂D qu'il existe au plus un nombre fini de points $z^1 = z, z^2, \ldots, z^N$ tels que $\Phi(z^k) = \Phi(z)$. Si ϵ est choisi assez petit,

$$\{|P(z, \zeta)| < \epsilon\} \subset V(z^1) \cup V(z^2) \cup \cdots \cup V(z^N),$$

où $V(z^k)$ est un voisinage de z^k sur lequel Φ est un difféomorphisme. Il nous suffit alors de démontrer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{z' \to z} \int_{\{|P(z, \zeta)| < \epsilon\} \cap V(z)} H(z', \zeta)\, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2} \tag{8.10}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{z' \to z} \int_{\{|P(z, \zeta)| < \epsilon\} \cap V(z^l)} H(z', \zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0, \quad l = 2, \ldots, N. \tag{8.11}$$

Commençons par démontrer (8.10): puisque

$$\sum \Phi_{ij}(z, z^k)(z_j - z_j^k) = 0, \quad z \neq z^k,$$

$$\text{dét}\{\Phi_{ij}(z, z^k)\}_{i,j} = 0, \text{ et } \text{dét}\{\Phi_{ij}(z', \zeta)\}_{i,j} = \mathcal{O}(|z^k - \zeta| + |z' - z|)$$

lorsque $z' = z - \eta\gamma_z$, où γ_z est un vecteur non tangent à ∂D en z, $\zeta \in V(z^k) \cap \partial D$. Donc, en vertu de (8.7),

$$\begin{aligned} |H(z', \zeta)| \leq C \frac{|\Phi(z') - \Phi(\zeta)|}{|P(z', \zeta)|^n} &\leq C|\tilde{P}(\Phi(z'), \Phi(\zeta))|^{-n+1/2} \\ &\leq C|\tilde{P}(\Phi(z), \Phi(\zeta))|^{-n+1/2} \end{aligned}$$

qui est intégrable dans $V(z^k) \cap \partial D$ puisque $|\tilde{P}(z, \zeta)|^{-n+1/2}$ l'est ([15]) sur $\partial\tilde{D}$, et Φ est un difféomorphisme sur $V(z^k)$.

Démontrons (8.11): comme

$$\Phi_{ij}(z', \zeta) = \frac{\partial}{\partial z_j} \Phi_i(\zeta) + \mathcal{O}(|z' - \zeta|),$$

$$\text{dét}\, \Phi_{ij}(z', \zeta) = \text{dét}\, \Phi'(\zeta) + \mathcal{O}(|z' - \zeta|).$$

Le terme en $\mathcal{O}(|z' - \zeta|)$ se traite comme précédemment. Il reste à montrer que:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{z'\to z}\int_{\substack{|P(z,\zeta)|<\epsilon\\ \zeta\in V(z)}}\frac{|\nabla\tilde{\lambda}(\Phi(\zeta))|}{|\nabla\lambda(\zeta)|}|\text{dét}\,\Phi'(\zeta)|^2\,\tilde{H}(\Phi(z),\Phi(\zeta))\,d\sigma(\zeta)=\tfrac{1}{2},$$

ou encore, après avoir paramétré $\partial D\cap V(z)$ au moyen de Φ pour se ramener à une intégrale sur $\partial\tilde{D}$, que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{z'\to z}\int_{\substack{|\tilde{P}(z,\lambda)|<\epsilon\\ \zeta\in\partial\tilde{D}}}\tilde{H}(z,\zeta)\,d\tilde{\sigma}(\zeta)=\tfrac{1}{2}.$$

Ceci n'est rien d'autre que la formule de Plemelj pour le projecteur de Henkin dans un domaine strictement pseudo-convexe, et est démontré dans [15].

LEMME 8.12: *Sous les hypothèses du lemme* (8.9),

$$\int_{\partial D}|H(z,\zeta)||z-\zeta|\,d\sigma(\zeta)<\infty.$$

Il suffit évidemment de montrer que

$$\int_{V(z^k)}|H(z,\zeta)||z-\zeta|\,d\sigma(\zeta)<\infty,\ k=1,2,\ldots,n.$$

Mais $|H(z,\zeta)||z-\zeta|\le C|\tilde{H}(\Phi(z),\Phi(\zeta))||\Phi(z)-\Phi(\zeta)|$ dans $V(z)$, fonction qui est intégrable, et

$$|H(z,\zeta)|\le C|\tilde{H}(\Phi(z),\Phi(\zeta))||\Phi(z)-\Phi(\zeta)|$$

dans $V(z^k)$, $k\ge 2$.

REMARQUE: On montre aisément que $\mathbf{H}f$ est continu en tout point $z\in\partial D$ satisfaisant aux hypothèses du lemme (8.9), et on peut raisonnablement conjecturer que $\mathbf{H}f$ est continu partout. En tous cas:

LEMME 8.13: *Sous les hypothèses de la proposition* (8.3) *et sous l'hypothèse supplémentaire que* $\Phi(z)=(\Phi_1(z_1),\ldots,\Phi_n(z_n))$, *pour tout*

$z \in \partial D$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|P(z,\zeta)|>\epsilon} H(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2}.$$

Il suffit, là encore, de se ramener à un calcul sur $\partial\tilde{D}$, en utilisant le fait que si $z \in \partial D$, $z_1 = \cdots = z_l = 0$, $z_{l+1}, \ldots, z_n$ différents de 0, alors, si V est un voisinage assez petit de z et $\tilde{V}$ son image par Φ,

$$c \int_{\zeta \in V \cap \partial D} |\zeta_1|^{2p_1-2} \cdots |\zeta_n|^{2p_n-2} g(\Phi(\zeta)) \frac{|\nabla\tilde{\lambda}(\Phi(\zeta))|}{|\nabla\lambda(\zeta)|}\, d\sigma(\zeta)$$
$$= \int_{\zeta \in \tilde{V} \cap \partial\tilde{D}} g(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta),$$

avec $c = p_1 \ldots p_l p_{l+1}^2 \ldots p_n^2$.

D. Inégalités L^p pour le projecteur H

Il est aisé de montrer qu'en général il ne peut y avoir d'inégalité L^p pour **H** qui a trop de singularités: soit

$$D = \{z \in \mathbf{C}^2;\, |z_1|^2 + |z_2^r(1-z_2)|^2 < 1\},$$
$$\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2) = (z_1, z_2^r(1-z_2)).$$

Alors, si z est proche de $(1,0)$ et ζ proche de $(1,1)$, le terme principal de $H(z,\zeta)$ est

$$\frac{\Phi_2(z) - \Phi_2(\zeta)}{[1 - \Phi(z) \cdot \overline{\Phi(\zeta)}]^2}.$$

Considérant, pour une fonction f à support proche de $(1,1)$ les valeurs de **H**f près de $(1,0)$, on peut montrer que si une telle inégalité L^p existait, on aurait sur la sphère ∂B dans $\mathbf{C}^2$ une inégalité $(L^p(d\sigma), L^p(|\zeta|^{2/r-2}\, d\sigma))$ pour l'opérateur de noyau $\dfrac{z_2 - \zeta_2}{[1 - z \cdot \bar{\zeta}]^2}$. Mais, pour des raisons d'homogénéité, ceci n'est possible que si $r \leq 2$.

On peut par contre conclure positivement si

$$\Phi(z) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2}, \ldots, z_n^{p_n}),$$

application holomorphe qui a l'avantage de ne pas mélanger les points de stricte pseudo-convexité et les autres:

PROPOSITION 8.4: *Sous les hypothèses* (8.5) *et sous l'hypothèse supplémentaire que* $\Phi(z) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2}, \ldots, z_n^{p_n})$, *l'opérateur* $\mathbf{H}$ *est une projection bornée de* $L^p(\partial D)$ *sur* $\mathcal{H}^p(\partial D)$, $p > 1$.

Soit $f \in L^p(\partial D)$; cherchons à évaluer la norme L^p de $\mathbf{H}f$ (en toute rigueur, comme $\mathbf{H}f$ n'est pas encore défini en général, il faudrait d'abord étudier l'opérateur maximal associé, etc...).

Etant donné $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ un multiindice tel que $0 \le k_j \le p_j - 1$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, notons:

$$Y_k = \left\{ z \in \partial D; \frac{2k_j\pi}{p_j} < \operatorname{Arg} z_j < \frac{2(k_j+1)}{p_j},\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Evidemment $\bigcup_k Y_k$ est égal à ∂D à un ensemble de mesure nulle près, et, quitte à écrire f comme somme de $p_1 p_2 \ldots p_n$ fonctions, on peut supposer f à support dans Y_k. Il s'agit, pour une telle fonction f de montrer, quel que soit l, que:

$$\int_{Y_l} |\mathbf{H}f|^p \, d\sigma(\zeta) \le C \int_{Y_k} |f|^p \, d\sigma(\zeta).$$

Mais comme Φ est un difféomorphisme de Y_k sur son image dans $\partial\tilde{D}$, on peut paramétrer à la fois Y_k et Y_l au moyen de Φ. Compte tenu de (8.7), (8.8) et de la forme explicite de Φ, le lecteur se persuadera aisément qu'on est amené à démontrer sur $\partial\tilde{D}$ une inégalité de la forme

$$\int_{\partial\tilde{D}} |\tilde{F}(\zeta)|^p |\zeta_1|^{2\alpha_1-2} \cdots |\zeta_n|^{2\alpha_n-2} \, d\tilde{\sigma}(\zeta)$$
$$\le C \int_{\partial\tilde{D}} |\tilde{f}(\zeta)|^p |\zeta_1|^{2\alpha_1-2} \cdots |\zeta_n|^{2\alpha_n-2} \, d\tilde{\sigma}(\zeta),$$

où $\alpha_1 = 1/p_1$, $\alpha_2 = 1/p_2, \ldots, \alpha_n = 1/p_n$ et

$$\tilde{F}(z) = \sum_r \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\tilde{P}(z,\zeta)| > \epsilon} \frac{\prod_j (z_j/\zeta_j)^{\alpha_j r_j} \tilde{Q}(z,\zeta)}{[\tilde{P}(z,\zeta)]^n} \tilde{f}(\zeta) \, d\tilde{\sigma}(\zeta),$$

la somme étant prise sur tout les multiindices $r = (r_1, \ldots, r_n)$ tels que $0 \le r_j \le p_j - 1$. (Ici $(z_j/\zeta_j)^{\alpha_j}$ désigne une détermination liée aux multiindices k et l, peu importe laquelle comme nous le verrons).

Si $\tilde{\mathbf{H}}$ désigne l'opérateur sur $\partial\tilde{D}$

$$\mathbf{H}\tilde{f}(z) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|\tilde{P}(z,\zeta)|>\epsilon} \frac{\tilde{Q}(z,\zeta)}{[\tilde{P}(z,\zeta)]^n} \tilde{f}(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta),$$

on voit, en posant $\tilde{h}(\zeta) = \prod_j \zeta_j^{-\alpha_j r_j} \tilde{f}(\zeta)$, qu'il suffit de montrer des inégalités L^p à poids pour l'opérateur $\tilde{\mathbf{H}}$:

$$\int_{\partial\tilde{D}} |\tilde{\mathbf{H}}\tilde{h}(z)|^p |z_1|^{2\gamma_1} |z_2|^{2\gamma_2} \cdots |z_n|^{2\gamma_n}\, d\tilde{\sigma}(z)$$

$$\leq C \int_{\partial\tilde{D}} |\tilde{h}(\zeta)|^p |\zeta_1|^{2\gamma_1} \cdots |\zeta_n|^{2\gamma_n}\, d\tilde{\sigma}(\zeta),$$

avec $2\gamma_j = \alpha_j r_j p_j + 2\alpha_j - 2$. Mais l'opérateur $\tilde{\mathbf{H}}$ est étudié dans [15]. Il y est montré que c'est une intégrale singulière relativement à la pseudo-distance $(z,\zeta) \to |\tilde{P}(z,\zeta)|$. Il est aisé, pour une intégrale singulière, de développer une théorie à poids (voir [9]), et il suffit donc de vérifier que les poids étudiés satisfont à la condition de Muckenhoupt relative à la métrique de Koranyi sur $\partial\tilde{D}$:

LEMME 8.14: *Les poids*:

$$\omega(z) = |z_1|^{2\gamma_1} |z_2|^{2\gamma_2} \cdots |z_n|^{2\gamma_n}$$

où $\gamma_j = 0$ *si* $p_j = 1$ *et* $-1 < \gamma_j < \frac{p}{p'}$ *pour tout* $j = 1, \ldots, n$ *appartiennent à la classe* (A_p) *de Muckenhoupt relativement à la métrique de Koranyi.*

Ce lemme généralise évidemment le lemme (4.3). Il s'agit de montrer que:

$$\sup_{z,\delta} \left\{\frac{1}{\delta^n} \int_{\tilde{d}(z,\zeta)<\delta} \omega(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\right\} \left\{\frac{1}{\delta^n} \int_{\tilde{d}(z,\zeta)<\delta} \omega^{-1/p-1}\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\right\}^{p-1} < \infty,$$

où $\tilde{d}(z,\zeta)$ désigne la pseudo-distance de Koranyi sur $\partial\tilde{D}$:

$$\tilde{d}(z,\zeta) = |\nabla_2\tilde{\lambda}(z) \circ (z-\zeta)| + |z-\zeta|^2.$$

Du fait que $\nabla\lambda(z) = \left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial z_1}(\Phi(z)) z_1^{p_1-1}, \ldots, \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial z_n}(\Phi(z)) z_n^{p_n-1}\right) \neq 0$ quel que soit $z \in \partial D$, en tout point $z \in \partial \tilde{D}$ l'une au moins des quantités $\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial z_j}(z)|z_j|^{p_j-1}$ est non nulle; il existe même une constante c telle que $\left|\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial z_j}(z)\right| > c$ et $|z_j|^{p_j-1} > c$ pour un indice j au moins. Nous supposerons pour simplifier qu'il s'agit de l'indice 1 au point z considéré. Dans ce cas $\omega(\zeta) \simeq |\zeta_2|^{2\gamma_2} \cdots |\zeta_n|^{2\gamma_n}$ au voisinage de z, et $t = \operatorname{Im}\{\nabla\tilde{\lambda}_z(z) \cdot (\zeta - z)\}$, $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ forment un système de coordonnées tel que

$$\tilde{d}(z, \zeta) \simeq |t| + \sum_{j=2}^{n} |z_j - \zeta_j|^2$$

et

$$d\tilde{\sigma}(\zeta) \simeq dt\, dV_1(\zeta_2), \ldots, dV_1(\zeta_n).$$

Après intégration en t il s'agit de montrer que (si $\zeta' = (\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$)

$$\sup_{\delta, z} \left\{\frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{|z'-\zeta'|<\delta} |\zeta_2|^{2\gamma_2} \cdots |\zeta_n|^{2\gamma_n}\, dV_{n-1}(\zeta')\right\}$$
$$\times \left\{\frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{|z'-\zeta'|<\delta} |\zeta_2|^{-2\gamma_2/p-1} \cdots |\zeta_n|^{-2\gamma_n/p-1}\, dV_{n-1}(\zeta')\right\}^{p-1} < \infty.$$

On reprend la suite de la démonstration du lemme (4.3).

E. Quelques remarques.

Il nous reste à faire quelques remarques sur les résultats obtenus dans ce paragraphe; tout d'abord sur l'intérêt de noyaux reproduisants pour les domaines étudiés: un corollaire classique en est que:

Corollaire 8.5: *Sous les hypothèses* (8.5), *toute fonction* $f \in \mathcal{H}^p(\partial D)$, $p > 0$, *est la limite dans* $\mathcal{H}^p(\partial D)$ *de fonctions holomorphes dans* D, *continues dans* $\bar{D}$.

Une autre application classique est la donnée de noyaux résolvant les équations $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}_b$. Cette application fera l'objet d'une publication ultérieure.

Il est aisé de construire des domaines D qui satisfont aux hypothèses de la proposition (8.4), autres que les D_α. Par exemple:

LEMME 8.15: *Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, \infty[$, nulles en 0, telles que, quel que soit j, $t\varphi_j'(t)$ soit une fonction croissante, et qu'il existe un entier p_j pour lequel*

$$\varphi_j(t) = a_j t^{p_j} + t^{p_j+1}\mathcal{O}(1).$$

Alors $D = \left\{z \in \mathbf{C}^n; \sum_{j=1}^n \varphi_j(|z_j|^2) < 1\right\}$ *satisfait aux hypothèses* (8.5), *avec*:

$$\Phi(z) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2}, \ldots, z_n^{p_n}).$$

Il suffit de montrer que $\tilde{D} = \left\{z \in \mathbf{C}^n; \sum_{j=1}^n \varphi_j(|z_j|^{2/p_j}) < 1\right\}$ est strictement pseudo-convexe, ce qui est immédiat. (En fait, $\tilde{D}$ n'est pas $\mathscr{C}^\infty$ mais $\mathscr{C}^{2+\epsilon}$, ce qui suffit pour les résultats de [15]).

Faisons une dernière remarque à propos de la formule de représentation proposée par divers auteurs ([18], [13], [15]): lorsque D est un domaine convexe, si l'on définit $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $g_j(z, \zeta) = \dfrac{\partial \lambda}{\partial z_j}(\zeta)$, la fonction $G(z, \zeta) = \sum_{j=1}^n g_j(z, \zeta)(\zeta_j - z_j)$ ne s'annule pas pour $z \in D$, $\zeta \in \partial D$, et la forme de Cauchy-Fantappié construite à partir de g donne donc un noyau reproduisant. En particulier:

LEMME 8.16: *Quelle que soit la fonction f, holomorphe dans $D = D_{(1, 1/2)}$ et continue dans $\bar{D}$,*

$$f(z) = \frac{2}{\pi^2} \int \frac{|\zeta_2|^2 f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{(1 - z_1\bar{\zeta}_1 - 2z_2\zeta_2\bar{\zeta}_2^2 + |\zeta_2|^4)^2}, \quad z \in D.$$

Il serait évidemment intéressant de savoir si ce noyau reproduisant est le noyau d'un opérateur borné dans $L^p(\partial D)$, $p > 1$. Il est en tous cas sûr que sa différence avec le noyau de Szegö n'est pas le noyau d'un opérateur régularisant: comme dans le cas de H, il suffit de considérer le cas des fonctions ne dépendant que de ζ_1, et de remarquer que:

$$\frac{1}{2\pi}(1 - z_1\bar{\zeta}_1)^{-3/2} - \frac{2}{\pi} \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^{1/2}}{(1 - z_1\bar{\zeta}_1 + 1 - |\zeta_1|^2)^2}$$

n'est pas, pour des raisons d'homogénéité, le noyau d'un opérateur borné de L^p dans L^q, $q > p$, dans le disque unité muni de la mesure $(1-|\zeta_1|^2)^{-1/2}\, dV(\zeta_1)$.

Enfin, pour ce noyau, il n'est pas si évident de trouver une définition de l'opérateur correspondant en termes de valeur principale: en effet, si

$$\frac{2}{\pi^2}\int_{|1-z_1\bar{\zeta}_1-2z_2\zeta_2\bar{\zeta}_2^2+|\zeta_2|^4|>\epsilon} \frac{|\zeta_2|^2\, d\mu(\zeta)}{(1-z_1\bar{\zeta}_1-2z_2\zeta_2\bar{\zeta}_2^2+|\zeta_2|^4)^2}$$

tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque ϵ tend vers 0 si z est un point de stricte pseudo-convexité, cette quantité tend vers $\frac{1}{3}$ si $z_2 = 0$. (Voir également [13]).

Appendice

Etant donné $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, on note comme d'habitude:

$$f^*(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\, dy$$

la fonction maximale de Hardy-Littlewood, et

$$\tilde{f}_*(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|y|>0} \frac{f(x-y)}{y}\, dy \right|$$

la transformée de Hilbert maximale de f.

THEOREME: *Soit* W^{-2} *un poids de la classe* (A_1), *c'est-à-dire tel que* $[W^{-2}] \le CW^{-2}$. Alors

$$\int_{f^*W>\lambda} W^{-2}\, dx \le \frac{C}{\lambda}\int |f|W^{-1}\, dx; \tag{1}$$

$$\int_{\tilde{f}_*W>\lambda} W^{-2}\, dx \le \frac{C}{\lambda}\int |f|W^{-1}\, dx. \tag{2}$$

L'inégalité (1) est immédiate: comme $\frac{1}{|I|}\int_I W^{-1}\, dx \le C \inf_I W^{-1}$, si

$$I \ni x \;:\; W(x)\frac{1}{|I|}\int_I |f|\, dx \le \frac{C}{\int_I W^{-1}\, dx}\int_I |f|W \cdot W^{-1}\, dx;$$

Wf^* est donc majoré, à une constante près, par la fonction maximale de fW relative à la mesure $W^{-1}\,dx$. Mais le poids W^{-1} satisfait à une condition (A_1) relativement à cette mesure puisque

$$\frac{1}{\int_I W^{-1}\,dx}\int_I W^{-2}\,dx \leq C\,\frac{|I|(\sup W)^{-2}}{\int_I W^{-1}\,dx} \leq C(\sup W)^{-1}.$$

L'inégalité (1) découle donc de l'inégalité maximale pour fW relativement à la mesure $W^{-1}\,dx$, et pour le poids W^{-1}.

La démonstration de l'inégalité (2) suit le schéma classique relatif au cas où $W \equiv 1$ ([21], p. 43). Grâce à (1), on peut écrire $f = g + b$, avec

$$\cdot\, |gW| \leq C\lambda \ \text{et} \int |g|\, W^{-1}\,dx \leq C \int |f|W^{-1}\,dx;$$

$$\cdot\, b \ \text{à support dans} \ UI_j = \left\{\sup \frac{1}{\int_I W^{-1}\,dx}\int |f|\,dx > \lambda\right\};$$

$$b = \Sigma b_j, \ \text{avec} \ b_j \ \text{à support dans} \ I_j \ \text{et} \int b_j\,dx = 0.$$

Alors

$$\int_{\tilde{g}_* W > \lambda} W^{-2}\,dx \leq \int |\tilde{g}_*|^2\,dx \leq \frac{C}{\lambda^2}\int |g|^2\,dx \leq \frac{C}{\lambda}\int |gW^{-1}|\,dx.$$

Quant à $\tilde{b}_*$, en dehors de $U\,\tilde{I}_j$, où $\tilde{I}_j$ *sont les intervalles doubles des* I_j, si y_j désigne le centre de I_j ([21], p. 43):

$$\tilde{b}*(x) \leq \sum \int_{I_j} \frac{|y - y_j|}{|x - y_j|^2}|b_j(y)|\,dy + b^*(x).$$

Il suffit de montrer pour conclure que:

$$\sum_j \int_{C\tilde{I}_j}\int_{I_j} \frac{|y - y_j|}{|x - y_j|^2}|b_j(y)|\,dy W^{-1}(x)\,dx \leq C \int |f|\, W^{-1}\,dx.$$

Mais $\int_{CI_j} \frac{|y - y_j|}{|x - y_j|^2} W^{-1}(x)\,dx \leq C(W^{-1})^*(t) \leq CW^{-1}(y)$ quel que soit $y \in I_j$. L'inégalité cherchée découle donc du fait que:

$$\sum \int_{I_j} |b_j(y)|W^{-1}(y)\,dy = \int |b(y)|W^{-1}(y)\,dy \leq C \int |f(y)|W^{-1}\,dy.$$

REFERENCES

[1] W. ALT: Singuläre Integrale mit gemischten Homogeneitäten auf Mannigfaltigkeiten und Anwendungen in der Funktionentheorie. *Math. Z. 137* (1974), 227–256.
[2] J. d'ANGELO: A note on the Bergman Kernel. *Duke Math. J. 45* (1978).
[3] P. APPELL et J. KAMPE DE FERIET: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
[4] D. BEKOLLE: Intégrales singulières et inégalités à poids. Thèse de 3ème cycle, Orléans 1978.
[5] D. BEKOLLE: Inégalités à poids pour le projecteur de Bergman de la boule unité de C^n. *Studia Math.* (à paraître).
[6] A. BONAMI et N. LOHOUE: Noyaux de Szegö de certains domaines de C^n et inégalités L^p. *C.R. Acad. Sc. Paris 285* (1977), p. 699.
[7] A. BONAMI et N. LOHOUE: Réduction du calcul du noyau de Szegö.... *C.R. Acad. Sc. Paris 288* (1979), p. 729.
[8] L. BOUTET DE MONVEL et J. SJÖSTRAND: Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö. *Soc. Math. France, Astérique 34–35* (1976), 123–164.
[9] R. COIFMAN et C. FEFFERMAN: Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math. 51* (1974), 241–250.
[10] R. COIFMAN et G. WEISS: Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. *Lect. Notes Springer Verlag*, 1971.
[11] P. COURREGE: Formules de Green. Sém. Théorie du Potentiel. Paris 1965/66.
[12] C. FEFFERMAN: The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. *Inventiones Math. 26* (1974), 1–66.
[13] R. HARVEY et J. POLKING: Fundamental solutions in complex analysis. *Duke Math. J. 46* (1979).
[14] G. HENKIN: Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications. *Math. USSR, Sbornik 7* (1969), 579–616.
[15] N. KERZMAN et E.M. STEIN: The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappié kernels. *Duke Math. J. 45* (1978), 197–224.
[16] A. KORÁNYI et I. VÁGI: Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis. Ann. Scuola Norm. *Superiore Pisa, Sci. fis. mat. III, Ser. 25* (1971), 575–648.
[17] G. MITTAG-LEFFLER: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. *Acta Math. 29* (1905), 101–182.
[18] M. RANGE: On Hölder estimates for $\bar{\partial}u = f$ on weakly pseudo-convex domains, Severam complex variables, Cortona 1977, Scuola normale Superiore Pisa 1978.
[19] E.M. STEIN: Boundary behavior of holomorphic functions in several complex variables. Princeton Univ. Press (1972), Mathematical Notes.
[20] E.M. STEIN: Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press (1970).
[21] G. VALIRON: Théorie des fonctions. Paris, Masson, 1955.

Aline Bonami et Noël Lohoué
département de Mathématiques
Université d'Orléans
45046-Orléans

(Oblatum 5-I-1981)

Aline Bonami et Nöel Lohoué
Université de Paris Sud
équipe de recherche associée n° 296
Analyse Harmonique Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay Cedex