THOMAS ZINK

Über die schlechte Reduktion einiger Shimuramannigfaltigkeiten

Compositio Mathematica, tome 45, nº 1 (1982), p. 15-107
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1982__45_1_15_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 45, Fasc. 1, 1981, pag. 15–107

ÜBER DIE SCHLECHTE REDUKTION EINIGER SHIMURAMANNIGFALTIGKEITEN

Thomas Zink

Einleitung

Die gute Reduktion von Shimurakurven wurde von Eichler, Shimura, Ihara u.a. untersucht, um die ζ-Funktionen dieser Kurven zu bestimmen. Sie zeigten, daß die ζ-Funktionen bis auf endlich viele Eulerfaktoren Produkte automorpher L-Reihen sind und bestätigten so die Vermutung von Hasse und Weil für diese Kurven (siehe: Shimura [22] Chapt. 7).

Im höherdimensionalen Fall erhält man Shimuramannigfaltigkeiten auf die folgende Weise. Es sei G eine reduktive Gruppe über $\mathbb{Q}$ und $h : \mathbb{C}^* \to G(\mathbb{R})$ ein Homomorphismus, der gewissen Bedingungen genügt. Der Zentralisator von h in $G(\mathbb{R})$ sei C_∞ und $C \subset G(\mathbb{A}_f)$ sei eine genügend kleine offene, kompakte Untergruppe. Man weiß, daß

$$M_C(G, h) = C_\infty \times C \backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{Q})$$

die Struktur einer glatten, quasiprojektiven Mannigfaltigkeit über $\mathbb{C}$ besitzt. Man kann nach Deligne [4] ein kanonisches Modell dieser Mannigfaltigkeit über einem Zahlkörper $E(G, h)$ definieren und weiß in vielen Fällen, daß es existiert.

Es sei $\mathfrak{k}$ eine genügend gute Primstelle des Shimurakörpers $E(G, h)$ und $k(\mathfrak{k})$ der Restklassenkörper. Langlands [9] hat für eine geeignete Reduktion von M_C eine hypothetische Beschreibung der Menge der $\overline{k(\mathfrak{k})}$-wertigen Punkte $M_C(\overline{k(\mathfrak{k})})$ zusammen mit der Aktion des Frobenius gegeben, die nur von (G, h) abhängt. Die Beschreibung ist bestätigt, wenn G die multiplikative Gruppe einer total indefiniten Quaternionenalgebra über einem total reellen Zahlkörper ist (Milne

0010-437X/81010015–93$00.20/0

[15]). Mit Hilfe der Beschreibung hat Langlands [10] für Shimuramannigfaltigkeiten, die zu Quaternionenalgebren gehören ein analoges Resultat über ζ-Funktionen bewiesen wie Eichler und Shimura für Kurven.

Über die Reduktion von Shimuramannigfaltigkeiten an schlechten Primstellen ist weniger bekannt.

Čerednik [2] hat den Fall einer indefiniten Quaternionenalgebra D über $\mathbb{Q}$ und einer Primstelle p des Shimurakörpers $\mathbb{Q}$ betrachtet, an der D verzweigt ist. M_C ist dann eine Kurve, die in p schlechte Reduktion hat. Čeredniks Satz besagt, daß $M_C \otimes \mathbb{Q}_p$ eine der Kurven von Mumford [18] ist.

Wir wollen dieses Resultat genauer beschreiben, da es im weiteren eine wichtige Rolle spielt. Wir verwenden einige der Bezeichungen, die am Anfang von §1 zusammengestellt sind.

Es sei $C = C^p C_p \subset D^*(\mathbb{A}_f)$ eine offene, kompakte Untergruppe, so daß $C^p \subset D^*(\mathbb{A}_f^p)$ und $C_p \subset D^*(\mathbb{Q}_p)$ die maximale kompakte Untergruppe ist. D_- sei die Quaternionenalgebra, die man aus D erhält, indem man in p und im Unendlichen twistet. Wir fixieren Isomorphismen $D_-(\mathbb{A}_f^p) \cong D(\mathbb{A}_f^p)$ und $D_-^*(\mathbb{Q}_p) \cong Gl_2(\mathbb{Q}_p)$.

Es sei F die unverzweigte quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und O_F der Ring der ganzen Elemente. Es sei $\mathcal{M}_C$ eine geeignete Reduktion der Shimuramannigfaltigkeit M_C über O_F.

Es sei $\hat{\Omega}^2$ die p-adische obere Halbebene über $\mathbb{Z}_p$. Das ist ein formales Schema über $\mathbb{Z}_p$. Seine allgemeine Faser kann man als eine projektive Gerade interpretieren, aus der alle über $\mathbb{Q}_p$ rationalen Punkte entfernt sind.

Nach Čerednik hat man einen Isomorphismus

$$\hat{\mathcal{M}}_C \cong C^p \backslash \hat{\Omega}^2_{O_F} \times D_-^*(\mathbb{A}_f^p)/D_-^*.$$

$\hat{\mathcal{M}}_C$ bezeichnet das formale Schema von $\mathcal{M}_C$. D_-^* operiert auf $\hat{\Omega}^2$ über die Einbettung $D_-^* \subset Gl_2(\mathbb{Q}_p)$.

Drinfeld [6] hat dieses Resultat folgendermaßen bewiesen.

$\mathcal{M}_C$ ist ein Modulproblem abelscher Mannigfaltigkeiten. Da sie den p-Rang 0 haben, sind ihre Barsotti-Tate Gruppen formale Gruppen. Es zeigt sich, daß sie alle isogen sind. Es sei A eine abelsche Mannigfaltigkeit des Modulproblems und X ihre formale Gruppe. Jede Isogenie formaler Gruppen $Y \to X$ wird durch eine Isogenie abelscher Mannigfaltigkeiten $B \to A$ induziert. B ist ein Punkt des Modulproblems $\mathcal{M}_C$. Umgekehrt erhält man jeden Punkt auf diese Weise. Anstatt abelsche Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren, hat man daher das einfachere Problem der Klassifikation von Isogenien formaler

Gruppen zu lösen. Es führt in diesem Fall auf das formale Schema $\hat{\Omega}^2_C$.

Rapoport hatte die Idee, Ceredniks Satz auf höherdimensionale Shimuramannigfaltigkeiten zu verallgemeinern. Wie er mir zeigte, ist das leicht möglich, wenn D eine total indefinite Quaternionenalgebra über einem total reellen Zahlkörper K ist, in dem p total zerfällt und wenn D an den Primstellen über p verzweigt ist.

Langlands hat anschließend an Diskussionen mit Rapoport in einigen Briefen an ihn den Fall betrachtet, wo p in K unverzweigt und unzerlegt ist, und wo D in p verzweigt ist. Der Inhalt dieser Briefe ist in [11] zusammengfaßt. Es zeigt sich, daß es nicht mehr möglich ist, eine p-adische Uniformisierung zu finden, d.h. das formale Schema zu berechnen. Das wichtigste Hindernis dafür ist das Vorhanden sein mehrerer Isogenieklassen formaler Gruppen. Man kann das Modulproblem nicht mehr wie in Čeredniks Fall auf ein Problem über formale Gruppen zurückführen.

Langlands hat im Fall $[K:\mathbb{Q}]=2$ jedoch eine Beschreibung von $\mathcal{M}_C \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ gegeben. Sein Beweis enthält ernsthafte Lücken, die in [11] diskutiert sind.

In dieser Arbeit betrachten wir den Fall eines total reellen Zahlkörpers vom Grad n über $\mathbb{Q}$, in dem p prim ist. Wir geben eine Beschreibung von $\mathcal{M}_C$, die im Fall $n=2$ die Beschreibung von Langlands noch etwas verbessert.

Ich möchte mich bei Langlands und besonders bei Rapoport für die geduldige Unterstützung bei dieser Arbeit bedanken.

Wir geben jetzt eine zusammenfassende Beschreibung des Modulschemas. Dabei beschränken wir uns auf das Wichtigste und verweisen für Details auf die entsprechenden Stellen der Arbeit.

Es sei O_D eine Ordnung in D, die in p maximal ist. In §3 zeigen wir, daß M_C die allgemeine Faser des folgenden feinen Modulproblems über $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist. Ein Punkt des Funktors $\underline{\mathcal{M}}_C$ über einem $\mathbb{Z}_{(p)}$-Schema T besteht aus:

(a) einem abelschen Schema A über T bis auf zu p prime Isogenie und einer Einbettung

$$\iota : O_D \to \operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_{(p)}, \text{ so daß}$$

$$\operatorname{Tr}_{O_T}(\iota(d) \mid \operatorname{Lie} A) = \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}} \operatorname{Tr}^0_D d \text{ für } d \in O_D,$$

(b) einer Äquivalenzklasse von O_D-Modulisomorphismen

$$\bar{\eta} : \hat{V}^p(A) \to D \otimes \mathbb{A}^p_f \bmod C^p.$$

Dabei bezeichnet $\hat{V}^p(A)$ das eingeschränkte Produkt über die Tatemoduln

$$\hat{V}^p(A) = \Big(\prod_{l \neq p} T_\ell(A)\Big) \otimes \mathbb{Q}.$$

Wir bemerken, daß der Funktor $\underline{\mathcal{M}}_C$ nicht von der gewählten Ordnung O_D abhängt. $\mathcal{M}_C$ bezeichne das entsprechende Modulschema. Es ist projektiv und hat die allgemeine Faser $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{C} = M_C$. Es sei $F \subset D$ ein total imaginärer Zerfällungskörper, in dem p prim ist. Wir betrachten das Schema $\mathcal{M}_C \otimes O_F/pO_F$.

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ heißt zulässig, wenn i oder $i+n \in S$ für alle $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. Die zulässigen Teilmengen klassifizieren die möglichen Darstellungen von O_D auf Lie A über O_F/pO_F. Wir erhalten eine Stratifizierung des Modulraumes.

Satz (3.10): Einer zulässigen Menge S entspricht ein glattes abgeschlossenes Unterschema $\mathcal{M}_{C,S} \subset \mathcal{M}_C \otimes O_F/pO_F$ der Dimension card $(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\backslash S)$. Die Unterschema $\mathcal{M}_{C,S}$ schneiden sich transversal, d.h. der Tangentialkonus von $\mathcal{M}_C \otimes O_F/pO_F$ in einem geometrischen Punkt ist der induktive Limes der Tangentialräume der $\mathcal{M}_{C,S}$. Es gilt:

(1) $\mathcal{M}_{C,S} \subset \mathcal{M}_{C,S'} \Leftrightarrow S' \subset S$,

(2) $\mathcal{M}_{C,S} \cap \mathcal{M}_{C,S'} = \mathcal{M}_{C,S \cup S'}$,

(3) $\mathcal{M}_C \otimes O_F/pO_F = \cup \mathcal{M}_{C,S}$.

Wir betrachten Funktionen t: $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$, so daß

$$t(i) + t(i+n) = 0, \left|\sum_{k=i}^{i+n-1} t(k)\right| = 1 \text{ für } i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}.$$

Jeder Funktion t entspricht eine zulässige Menge:

$$S_t = \left\{ i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \;\middle|\; |t(i)| = 1 \text{ oder } \sum_{k=i-n+1}^{i} t(k) = 1 \right\}$$

Eine zulässige Menge heißt gesättigt, wenn $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ oder $S = S_t$ für ein t.

Wir assoziieren zu einer gesättigten Menge eine Quaternionenalgebra über K. Dazu fixieren wir Einbettungen $\bar{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$, $K \to \bar{\mathbb{Q}}$. Es bezeichne $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ein Frobeniuselement. Dann sind

$$v_i : K \to \bar{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sigma - i} \bar{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

die archimedischen Stellen von K.

Wenn $S = S_t$, so assoziieren wir die Quaternionenalgebra D_t über K mit den folgenden Invarianten:

$$\mathrm{inv}_p\, D_t = 0,\ \mathrm{inv}_{v_i}\, D_t = \tfrac{1}{2}\,|t(i)|,\ \mathrm{inv}_\nu\, D_t = \mathrm{inv}_\nu\, D$$
für die übrigen Stellen von K

Wenn $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so assoziieren wir D_-/K mit den folgenden Invarianten:

$$\mathrm{inv}_p\, D_- = \tfrac{1}{2}(n+1),\ \mathrm{inv}_{v_t}\, D_- = \tfrac{1}{2},\ \mathrm{inv}_\nu\, D_- = \mathrm{inv}_\nu\, D \text{ sonst.}$$

Wir fixieren Isomorphismen $D_t(\mathbb{A}_f^p) \cong D_-(\mathbb{A}_f^p) \cong D(\mathbb{A}_f^p)$. Es seien $C_t = C_{t,p}C_t^p \subset D_t^*(\mathbb{A}_f)$ und $C_- = C_{-p}C_-^p \subset D_-^*(\mathbb{A}_f)$ offene, kompakte Untergruppen, so daß $C_t^p = C_-^p = C^p$ und so daß $C_{t,p}$ und C_{-p} maximal kompakt sind.

Zu den Gruppen D_t^* und D_-^* gehören Shimuramannigfaltigkeiten $M_{D_t^*,C_t}$ und $M_{D_-^*,C_-}$, die über F_p definiert sind und gute Reduktion besitzen, d.h. es existieren glatte, projektive Schemata $\mathcal{M}_{D_t^*,C_t}$ und $\mathcal{M}_{D_-^*,C_-}$ über O_{F_p} mit den allgemeinen Fasern $M_{D_t^*,C_t}$ und $M_{D_-^*,C_-}$ (4.21).

$K^*(\mathbb{A}_f)$ operiert auf diesen Schemata. Es sei $k = \Sigma_{i\in Z/nZ}\,|t(i)|$. Das Idèle $h_{p^k} = (1, \ldots, p^k, \ldots, 1)$ (bzw. h_{p^n}) aus $K^*(\mathbb{A}_f)$, das an den von p verschiedenen Stellen gleich 1 ist, definiert einen Automorphismus endlicher Ordnung von $\mathcal{M}_{D_t^*,C_t}$ (bzw. $\mathcal{M}_{D_-^*,C_-}$).

Es sei $\tilde{\mathcal{M}}_{D_t^*,C_t}$ die Form von $\mathcal{M}_{D_t^*,C_t}$, so daß

$$\tilde{\mathcal{M}}_{D_t^*,C_t} \otimes O_{F_p^{nr}} \cong \mathcal{M}_{D_t^*,C_t} \otimes O_{F_p^{nr}}$$

und so daß der Frobenius auf der linken Seite wie h_{p^k} multipliziert mit dem Frobenius auf der rechten Seite operiert.

Analog ist $\tilde{\mathcal{M}}_{D_-^* C_-}$ definiert.

Satz (4.21, 4.8): Es sei $|t| \neq 1$. Dann existiert ein eigentlicher, radikaler, surjektiver Morphismus (universeller Homöomorphismus) von O_F/pO_F-Schemata

$$\mathcal{M}_{C,S_t+1} \to \tilde{\mathcal{M}}_{D_t^*,C_t} \otimes O_F/pO_F.$$

Für variables C ist das ein Morphismus von Proschemata, der die Wirkung von $D^*(\mathbb{A}_f^p) \cong D_t^*(\mathbb{A}_f^p)$ auf beiden Seiten respektiert.

In jeder geometrischen Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C$ liegt genau eine geometrische Zusammenhengskomponente von $\mathcal{M}_{C,S_t}$ (4.22).

Wenn $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so hat man einen Morphismus

$$\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} \to \tilde{\mathcal{M}}_{D^*_-,C_-},$$

der ein Isomorphismus für gerades n und eine Etaleüberlagerung vom Grad $p^n + 1$ für ungerades n ist (4.7).

In jeder geometrischen Zusammenhangskomponente liegt ein Punkt von $\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}$ (4.7).

Wenn S nicht gesättigt ist, so gibt es in $\mathcal{M}_{C,S}$. Untermannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 1, längs denen der Isogenietyp der abelschen Mannigfaltigkeiten konstant ist. Wie im Fall von Čerednik kann man diese Untermannigfaltigkeiten berechnen.

Satz (5.15): Es sei S eine zulässige Menge und $S' = S \cup \{i_1, \ldots, i_m\}$ eine minimale gesättigte Menge, die S umfaßt. Dann gibt es eine Folge von $\mathbb{P}^1$-Faserungen (im Sinne von 5.14)

$$\mathcal{M}_{C,S} \to \mathcal{M}_{C,S\cup\{i_1\}} \to \cdots \to \mathcal{M}_{C,S\cup\{i_1,\ldots,i_m\}}$$

wenn $S \cup \{i_1, \ldots, i_m\} \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. Wenn $S \cup \{i_1, \ldots, i_m\} = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so hat man den letzten Pfeil durch

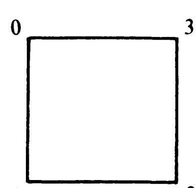
$$\mathcal{M}_{C,S\cup\{i_1,\ldots,i_{m-1}\}} \to \tilde{\mathcal{M}}_{D^*_-,C_-}$$

zu ersetzen.

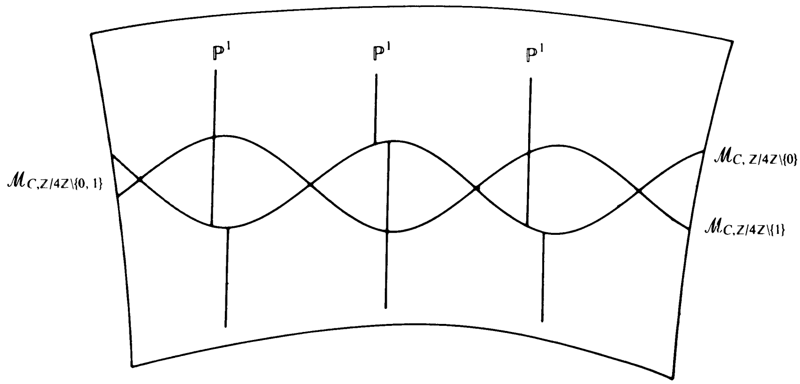
Grob gesagt sind alle $\mathcal{M}_{C,S}$ $(\mathbb{P}^1)^m$-Faserungen über guten Reduktionen von Shimuramannigfaltigkeiten.

Man kann $\mathcal{M}_C \otimes O_F/pO_F$ einen simplizialen Komplex zuordnen, der eine geometrische Vorstellung von diesem Schema vermittelt. Die zugrundeliegende Menge ist $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ und die Simplexe sind die Komplemente von zulässigen Mengen.

Für $n = 2$ ergibt sich folgendes Bild:

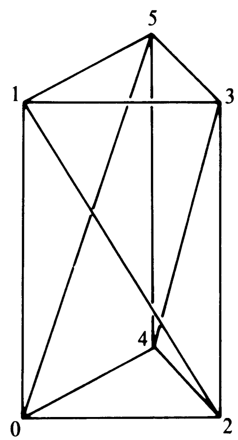


Die Eckpunkte entsprechen den gesättigten Mengen. Die assoziierten Schemata $\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\setminus\{i\}}$, $i = 0, \ldots, 3$ sind annähernd gute Reduktionen von Shimurakurven. Die Seiten entsprechen Flächen mit einer $\mathbb{P}^1$-Faserung.



Die Fasern der $\mathbb{P}^1$-Faserung schneiden $\mathcal{M}_{C,Z/4Z\setminus\{0\}}$ mit der Multiplizität p und $\mathcal{M}_{C,Z/4Z\setminus\{1\}}$ mit der Multiplizität 1 (5.15). Die Schnittpunkte der Kurven $\mathcal{M}_{C,Z/4Z\setminus\{i\}}$, $i = 0, 1$ sind die Punkte von $\mathcal{M}_{C,Z/4Z}$.

Für $n = 3$ erhält man ein Prisma:



Die gesättigten Mengen entsprechen den Kanten, die die Grundfläche mit der Deckfläche verbinden. Die $\mathbb{P}^1$-Faserungen verlaufen horizontal. Insbesondere sind die der Grund- und Deckfläche entsprechenden $\mathcal{M}_{C,S}$ universell homöomorph zu $(\mathbb{P}^1)^3$.

§1. Das Modulproblem

Wir werden die folgenden Bezeichnungen verwenden:

K ein total reeller Zahlkörper,

O_K der Ring der ganzen Elemente von K,

$n = [K:\mathbb{Q}]$,
p eine rationale Primzahl, die in K prim ist,
D eine Quanternionenalgebra über K, die in p verzweigt ist, und in allen archimedischen Stellen von K unverzweigt ist,
$d \mapsto d^*$, $d \in D$ die Hauptinvolution von D,
$\mathrm{Tr}^0\, d$, $\mathrm{Nm}^0\, d$, $d \in D$ die reduzierte Spur und Norm von D,
$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ die totale Vervollständigung von $\mathbb{Z}$,
$\hat{\mathbb{Z}}^p = \varprojlim_{(m,p)=1} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Z}_{(p)}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ in dem Primideal $p\mathbb{Z}$,
$\mathbb{A}$ der Adèlering von $\mathbb{Q}$,
$\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{A}_f^p = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p$,
$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ die Weilrestriktion der multiplikativen Gruppe.

Wir fassen die multiplikative Gruppe D^* als algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$ auf und definieren

$$h_0 : \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \longrightarrow D_{\mathbb{R}}^* = (D \otimes \mathbb{R})^* \cong \prod_{i=1}^{n} Gl_2(\mathbb{R})$$

$$a + b\sqrt{-1} \longrightarrow \prod \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

Die Konjugationsklasse von h_0 ist unabhängig von dem gewählten Isomorphismus $D_{\mathbb{R}}^* \cong \Pi\, Gl_2(\mathbb{R})$.

Nach Deligne [4] gehört zu dem Paar (D^*, h_0) eine Shimuramannigfaltigkeit M_{D^*}. Genauer sei $C_\infty \subset D^*(\mathbb{R})$ der Zentralisator von $h_0(\sqrt{-1})$ und $C \subset D^*(\mathbb{A}_f)$ eine offene, kompakte Untergruppe. Der Quotient $M_{D^*,C} = C_\infty \times C \backslash D^*(\mathbb{A})/D^*(\mathbb{Q})$ besitzt die Struktur einer quasiprojektiven Mannigfaltigkeit über $\mathbb{C}$. Auf dem projektiven System $M_{D^*} = \varprojlim_{C} M_{D^*,C}$ operiert die Gruppe $D^*(\mathbb{A}_f)$ von links.

Wir betrachten offene, kompakte Untergruppen der Form $C = C^pC_p \subset D^*(\mathbb{A}_f)$, wobei $C^p \subset D^*(\mathbb{A}_f^p)$ und $C_p \subset D^*(\mathbb{Q}_p)$ die maximale kompakte Untergruppe ist. In diesem Paragraphen definieren wir die Reduktion der Mannigfaltigkeiten $M_{D^*,C}$ modulo p. Dazu erinnern wir daran, daß $M_{D^*,C}$ die Lösung eines Modulproblems abelscher Mannigfaltigkeiten ist.

Wir wählen einen total reellen Zerfällungskörper E von D der in p unverzweigt ist. Es sei τ der nichttriviale Automorphismus von E über K. Nach dem Satz von Skolem-Noether finden wir ein $a \in D$, so daß $ae = e^\tau \cdot a$ für $e \in E$. Es gilt $a^2 \in K$. Da a nur bis auf Multiplikation mit einem Element aus E bestimmt ist, können wir es so wählen, daß $a^2 = -\delta \in O_K$, wobei δ ein total positives Element ist und

$\mathrm{ord}_p \delta = 1$. Es sei O_E der Ring der ganzen Elemente von E. Dann ist $O_D = O_E[a]$ eine Ordnung von D, die in p maximal ist. Man sieht leicht, daß $\hat{d} = ad^*a^{-1}$, $d \in D$ eine positive Involution auf D ist. Es sei $V = O_D$ aufgefaßt als O_D-Linksmodul. Wir definieren auf V eine Bilinearform

$$\psi(v, w) = \mathrm{Tr}^0\, a^{-1}\hat{v}w = \mathrm{Tr}^0\, a^{-1}wv^*, \quad v, w \in V.$$

1.1 Lemma: *$\psi : V \times V \to O_K$ ist eine nichtausgeartete alternierende Bilinearform, die an allen in E unverzweigten Primstellen von K perfekt ist. Es gilt*

$$\psi(dv, w) = \psi(v, \hat{d}w), \quad d \in O_D, v, w \in V.$$

Beweis: Wir definieren eine Einbettung $O_D \hookrightarrow M_2(O_E)$ durch die Zuordnung $e \mapsto \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^\tau \end{pmatrix}$, $e \in E$, $a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$O_D = \{d \in M_2(O_E) / ad = d^\tau a\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\delta x_2^\tau & x_1^\tau \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in O_E\right\}$$

Es sei $v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\delta x_2^\tau & x_1^\tau \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -\delta y_2^\tau & y_1^\tau \end{pmatrix}$. Das Lemma folgt unmittelbar aus der Formel $\psi(v, w) = \mathrm{Tr}_{E/K} x_1 y_2 - \mathrm{Tr}_{E/K} x_2 y_1$.

1.2 Lemma: *Es sei F ein Körper der Charakteristik 0 und $V_F = V \otimes_{\mathbb{Z}} F$. Dann ist $\psi_F = \psi \otimes F$ eine Bilinearform auf $V \otimes_{\mathbb{Z}} F$ mit Werten in $O_K \otimes_{\mathbb{Z}} F$. Es sei $\tilde{\psi}$ eine alternierende nichtausgeartete Bilinearform auf V_F mit Werten in $O_K \otimes_{\mathbb{Z}} F$, so daß*

$$\tilde{\psi}(dv, w) = \tilde{\psi}(v, \hat{d}w), \; v, w \in V_F, d \in D.$$

Dann existiert eine Konstante $f \in (O_K \otimes_{\mathbb{Z}} F)^*$, so daß $\tilde{\psi} = f\psi_F$.

Beweis: Als K-Algebra ist $O_K \otimes F$ ein direktes Produkt von Erweiterungskörpern L von K. Auf $W = V \otimes_{O_K} L$ induziert ψ eine L-Bilinearform ψ^L und $\tilde{\psi}$ eine L-Bilinearform $\tilde{\psi}^L$. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $\tilde{\psi}^L = f\psi^L$, $f \in L$. Wir können dafür L als algebraisch abgeschlossen voraussetzen. $O_D \otimes_{O_K} L = M_2(L)$ operiert auf W. Wir identifizieren W mit $M_2(L)$ und schreiben

$$\tilde{\psi}(v, w) = \tilde{\psi}(1, \hat{v}w) = \mathrm{Tr}^0 c\hat{v}w, \; c, v, w \in M_2(L).$$

Da $\tilde{\psi}$ alternierend ist finden wir $c = -\hat{c}$. Wegen $\mathrm{Tr}^0 c = \mathrm{Tr}^0 \hat{c}$, folgt $c + c^* = 0$. Die Gleichung $\hat{c} = c^*$ besagt, daß die Matrizen a und c vertauschbar sind. Da a und c halbeinfach sind, kann man sie gleichzeitig auf Diagonalform bringen. Daraus erhält man unmittelbar die Behauptung.

Es sei G die Gruppe aller D-linearen Transformationen g aus $Gl_D(V_{\mathbb{Q}})$, für die ein $\mu(g) \in K$ existiert, so daß $\psi(gv, gw) = \mu(g)\psi(v, w)$ für $v, w \in V_{\mathbb{Q}}$. Nach dem letzten Lemma gilt $G = Gl_D(V_{\mathbb{Q}})$ Wenn wir ein $d \in D$ durch Rechtsmultiplikation mit d^* auf $V_{\mathbb{Q}} = D$ wirken lassen, so erhalten wir einen Isomorphismus $Gl_D(V_{\mathbb{Q}}) \cong D^*$.

1.3 LEMMA: *Es existiert ein $k \in K$, so daß*
(1) *$k\psi$ ist alternierend,*
(2) *$k\psi(v, wh_0(\sqrt{-1}))$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf $V_{\mathbb{R}}$.*

BEWEIS: Offenbar genügt es ein $k \in K \otimes \mathbb{R}$ zu finden, so daß $k\psi(v, wh_0(\sqrt{-1}))$ positiv definit ist. Da $K \otimes \mathbb{R} \cong \Pi\mathbb{R}$, finden wir eine ψ-orthogonale Zerlegung

$$V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\mathbb{R}}^{i}.$$

Identifizieren wir $V_{\mathbb{R}}^i$ mit $M_2(\mathbb{R})$, so hat die Einschränkung ψ^i von ψ auf $V_{\mathbb{R}}^i$ die Form

$$\psi^i(v, wh_0(\sqrt{-1})) = \mathrm{Tr}\, a_i^{-1} w \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v^*,\ v, w \in M_2(\mathbb{R}).$$

Dabei ist a_i eine Matrix deren Spur Null ist und deren Eigenwerte total imaginär sind. Wir finden nach Skolem-Noether $r_i \in \mathbb{R}$ und $d_i \in M_2(\mathbb{R})$, so daß $r_i a_i = d_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d_i^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, a_i^{-1} w \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v^* &= r_i\, \mathrm{Tr}\, d_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} d_i^{-1} w \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v^* \\ &= r_i d_i d_i^*\, \mathrm{Tr}\, d_i^{-1} w \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (d_i^{-1} v)^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß man $k = \Pi r_i d_i d_i^* \in \Pi\mathbb{R}$ wählen kann. h_0 definiert eine Hodgestruktur vom Typ $(-1, 0)$, $(0, -1)$ auf $V_{\mathbb{R}}$, die mit der O_D-Modulstruktur vertauschbar ist. Man sieht leicht, daß h_0 durch diese

Eigenschaft bis auf Konjugation mit einem Element aus $(D \otimes \mathbb{R})^*$ eindeutig bestimmt ist. Es sei

$$t_0(d) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(d \mid V_{\mathbb{C}}/V_{\mathbb{C}}^{0,-1}),\ d \in D.$$

Dann gilt $t_0(d) + \overline{t_0(d)} = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(d/V_{\mathbb{C}}) = 2\,\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\,\mathrm{Tr}^0 d$. Da K total reell ist, muß $t_0(d)$ reell sein. Wir erhalten $t_0(d) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\,\mathrm{Tr}^0 d$.

Wir sind jetzt in der gleichen Situation, wie Deligne [4] 4.13 und können ein grobes Modulproblem definieren, dessen Lösung $M_{D^*,C}$ ist. Wir wollen dazu noch einige Bemerkungen über Polarisierungen abelscher Mannigfaltigkeiten machen.

Es sei B ein abelsches Schema über einem lokal noetherschen Basisschema T. Das duale abelsche Schema bezeichnen wir mit B^*. Unter einer Polarisierung von B verstehen wir eine Quasiisogenie $\lambda \in \mathrm{Hom}^0(B, B^*) = \mathrm{Hom}(B, B^*) \otimes \mathbb{Q}$, so daß eine natürliche Zahl m existiert, für die $m\lambda$ durch ein amples Linienbündel induziert wird. Wenn λ eine Isogenie ist, so nennen wir λ effektiv. Wenn λ einen Isomorphismus der p-dividierbaren Gruppen von B und B^* induziert, so heißt λ in p prinzipal. Es sei ℓ eine Primzahl, die verschieden von den Restklassencharakteristiken von T ist. Es sei $T_\ell(B) = \varprojlim B_{\ell^n}$ der Tatemodul von B und $V_\ell(B) = T_\ell(B) \otimes \mathbb{Q}$ der rationale Tatemodul. Wenn T ein $\mathbb{Q}$-Schema ist, so sei $\hat{T}(B) = \prod_{\ell \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} T_\ell(B)$, $\hat{V}(B) = \hat{T}(B) \otimes \mathbb{Q}$. Wenn T ein $\mathbb{Z}_{(p)}$-Schema ist, so sei $\hat{T}^p(B) = \prod_{\ell \neq p} T_\ell(B)$, $\hat{V}^p(B) = \hat{T}^p(B) \otimes \mathbb{Q}$. Eine Polarisierung λ induziert auf dem rationalen Tatemodul eine Riemannsche Form.

$$E^\lambda : V_\ell(B) \times V_\ell(B) \to \mathbb{Q}_\ell(1)$$

Es sei $\iota : K \to \mathrm{End}^0 B$ eine Einbettung und λ eine Polarisierung auf B, so daß $\lambda \circ \iota(k) = \iota(k)^* \circ \lambda$, wobei $k \in K$ und $\iota(k)^*$ die duale Abbildung bezeichnet. Wir schreiben dafür $\lambda \in \mathrm{Hom}_K^0(B, B^*)$. Dann gilt für die Riemannsche Form

$$E^\lambda(kx, y) = E^\lambda(x, ky), \quad k \in K, x, y \in V_\ell(B).$$

Wir definieren eine $K \otimes \mathbb{Q}_\ell$-Bilinearform

$$_K E^\lambda : V_\ell(B) \times V_\ell(B) \longrightarrow K \otimes \mathbb{Q}_\ell(1)$$

durch die Gleichung $\mathrm{Tr}_{K \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell} k\, {_K E^\lambda}(x, y) = E^\lambda(kx, y)$. Die Bilinearform $_K E^\lambda$ ist alternierend und nichtausgeartet.

Unter einer K-homogenen Polarisierung über einem zusammenhängenden Schema T verstehen wir ein Element aus $\mathrm{Hom}_K^0(B, B^*)/K^*$, das durch ein amples Linienbündel induziert wird. Eine K-homogene Polarisierung $\bar{\lambda}$ definiert eine positive Involution auf $\mathrm{End}_K^0 B$. Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \bar{\lambda}$ zwei Polarisierungen. Nach dem folgenden Lemma unterscheiden sich die Riemannschen Formen ${}_K E^{\lambda_1}$ und ${}_K E^{\lambda_2}$ um eine total positive Konstante aus K.

1.4 Lemma: *Es sei K ein total reeller Zahlkörper und B ein abelsches Schema auf dem K operiert. Es seien $\lambda \in \mathrm{Hom}_K^0(B, B^*)$ eine Polarisierung und $k \in K$. Dann ist $k\lambda$ genau dann eine Polarisierung von B, wenn k total positiv ist.*

Beweis: Man kann sich auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers beschränken. In Charakteristik 0 folgt das Lemma aus den Riemannschen Periodenrelationen.

Offenbar dürfen wir annehmen, daß λ durch ein amples Linienbündel $\mathcal{M}$ und $k\lambda = \lambda \circ \iota(k)$ durch ein Linienbündel $\mathcal{L}$ induziert wird. Nach Mumford [17] (Beweis des Theorems aus §17) ist $\mathcal{L}$ genau dann ample, wenn der Index von $\mathcal{L}$ gleich 0 ist. Der Index von $\mathcal{L}$ ist gleich der Anzahl der positiven Wurzeln des Polynoms $P(s) = \chi(\mathcal{M}^s \otimes \mathcal{L})$, $s \in \mathbb{Z}$([17] 16). Nach dem Satz von Riemann-Roch folgt

$$\begin{aligned} P^2(s) = \chi^2(\mathcal{M}^s \otimes \mathcal{L}) &= \deg(\lambda\iota(s) + \lambda\iota(k)) \\ &= \deg \lambda \deg \iota(s+k). \end{aligned}$$

Da deg auf K eine Potenz der Norm induziert, hat $P^2(s)$ genau dann keine positiven Wurzeln, wenn k total positiv ist. Q.E.D.

Wir definieren einen Funktor auf der Kategorie der $\mathbb{C}$-Schemata. Ein Punkt mit Werten in einem $\mathbb{C}$-Schema T ist:

M1

(a) ein abelsches Schema A über T bis auf Isogenie,

(b) ein Homomorphismus $\iota : D \to \mathrm{End}^0 A$, so daß

$$\mathrm{Tr}(\iota(d)/\mathrm{Lie}\ A) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\mathrm{Tr}^0 d,\ d \in D,$$

(c) eine K-homogene Polarisierung $\bar{\lambda}$ von A, so daß ι involutionstreu ist, d.h. $\iota(\hat{d})$ ist die Rosatiinvolution von $\iota(d)$,

(d) eine C-Äquivalenzklasse von $D \otimes \mathbb{A}_f$-Molulisomorphismen

$$\bar{\eta} : \hat{V}(A) \to V \otimes \mathbb{A}_f \bmod C,$$

die die $K \otimes \mathbb{A}_f$-Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante erhalten.

$M_{D^*,C}$ ist ein grobes Modulschema für diesen Funktor. In der Tat, es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ein $\mathbb{C}$-wertiger Punkt des Funktors. Wir finden einen D-linearen Isomorphismus $\alpha : V_{\mathbb{Q}} \to H_1(A, \mathbb{Q})$. Es sei $\eta \in \bar{\eta}$. Dann ist $\eta \circ (\alpha \otimes \mathbb{A}_f) : V \otimes \mathbb{A}_f \to V \otimes \mathbb{A}_f$ die Rechtsmultiplikation mit einem endlichen Idèle $x_f^* \in D^*(\mathbb{A}_f)$. Es sei h_A die Hodgestruktur auf $H_1(A, \mathbb{R})$. Nach der Bemerkung hinter Lemma 1.3 finden wir ein $x_\infty \in D^*(\mathbb{R})$, so daß $\alpha_{\mathbb{R}}^{-1} h_A \alpha_{\mathbb{R}} = x_\infty^* h_0 x_\infty^{*-1}$. Die Klasse von (x_f, x_∞) in

$$M_{D^*,C}(\mathbb{C}) = C_\infty \times C \backslash D^*(\mathbb{A}) / D^*(\mathbb{Q})$$

ist unabhängig von der Wahl von α und η. Umgekehrt bestimmt (x_f, x_∞) den Punkt $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$, da α die Bilinearformen auf $H_1(A, \mathbb{Q})$ und $V_{\mathbb{Q}}$ nach 1.2 respektiert.

Bemerkung: Präziser kann man (c) folgendermaßen formulieren. Es sei T zusammenhängend und $t_0 \in T(\mathbb{C})$. Dann ist $\bar{\eta}$ eine Klasse von $D \otimes \mathbb{A}_f$-Modulisomorphismen $\bar{\eta} : \hat{V}(A_{t_0}) \to V \otimes \mathbb{A}_f \mod C$, die invariant unter der Wirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(T, t_0)$ ist. D.h. für $g \in \pi_1(T, t_0)$ und $\eta \in \bar{\eta}$ gilt $\eta \circ g = \eta c^*$ für ein $c \in C$.

Es sei A eine abelsche Mannigfaltigkeit über $\mathbb{C}$ der Dimension $2n$ auf der D operiert. Die Lemmata 1.2 und 1.3 zeigen, daß A eine eindeutig bestimmte involutionstreue K-homogene Polarisierung besitzt. Jeder D-Modulisomorphismus $\eta : \hat{V}(A) \to V \otimes \mathbb{A}_f$ erhält nach 1.2 die Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante. Schließlich haben wir bereits gesehen, daß die Spurbedingung unter (b) erfüllt ist. Über einem beliebigen Basisschema T, das kein $\mathbb{Q}$-Schema ist, ist die Spurbedingung im allgemeinen nicht erfüllt.

1.5 Definition: Es sei B ein abelsches Schema über T und $\iota : O_D \to \operatorname{End} B$ ein Homomorphismus, so daß

$$\operatorname{Tr}(d \mid \operatorname{Lie} B) = \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}} \operatorname{Tr}^0 d, \; d \in O_D.$$

Dann nennen wir (B, ι) ein spezielles abelsches (s.a.) O_D-Schema.

Es sei $C_N \subset \operatorname{Aut}_{O_D}(V \otimes \hat{\mathbb{Z}})$, $N \in \mathbb{Z}$ die Untergruppe aller Automorphismen, die auf $V \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ trivial wirken. Wir betrachten im weiteren nur offene kompakte Untergruppen $C \subset D^*(\mathbb{A}_f)$, die den folgenden Bedingungen genügen.

(1.6)
(a) $C = C^p C_p$, wobei $C^p \subset D^*(\mathbb{A}_f^p)$ und $C_p = Gl_{O_D}(V \otimes \mathbb{Z}_p)$.
(b) $C \subset C_N$ für ein $N \geq 3$.

Es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ein Punkt von M1. Dann ist $\eta^{-1}(V \otimes \hat{\mathbb{Z}}) \subset \hat{V}(A)$ unabhängig von der Wahl von $\eta \in \bar{\eta}$ und definiert ein abelsches Schema B aus der Isogenieklasse A. Wir erhalten eine Klasse von $O_D \otimes \hat{\mathbb{Z}}$-Modulisomorphismen $\bar{\eta}: \hat{T}(B) \to V \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ mod C. Man kann $\bar{\eta}$ aus $\bar{\eta}^p: \hat{T}^p(B) \to V \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p$ mod C^p rekonstruieren. In der Tat sind $T_p(B)$ und $V \otimes \mathbb{Z}_p$ als torsionsfreie $O_D \otimes \mathbb{Z}_p$-Moduln vom Rang 1 isomorph. Da nach der Wahl von C_p die Äquivalenzklasse $\bar{\eta}_p$ aus sämtlichen $O_D \otimes \mathbb{Z}_p$-Modulisomorphismen besteht, folgt die Behauptung.

Deshalb ist ein T-wertiger Punkt des Modulproblems M1 daselbe wie:

M2
(a) ein s.a. O_D-Schema (B, ι) über T,
(b) eine involutionstreue K-homogene Polarisierung $\bar{\lambda}$ von (B, ι),
(c) eine C^p-Äquivalenzklasse von $O_D \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p$-Modulisomorphismen

$$\bar{\eta}: \hat{T}^p(B) \longrightarrow V \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p \bmod C^p.$$

Dieser Funktor ist offenbar für ein beliebiges $\mathbb{Z}_p$-Schema T definiert. Wir bezeichnen ihn mit $\underline{\mathcal{M}}_C$.

1.7 Satz: *$\underline{\mathcal{M}}_C$ besitzt ein grobes projektives Modulschema $\mathcal{M}_C$ über $\mathbb{Z}_p$.*

Beweis: Wir definieren ein feines Modulproblem $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_C$, das eine endliche Galoisüberlagerung von $\underline{\mathcal{M}}_C$ ist.

Mit Hilfe der Methoden von Mumford [16] folgt, daß wir ein feines Modulproblem erhalten, wenn wir an Stelle von M2 b) die Existenz einer effektiven involutionstreuen Polarisierung fordern.

Es sei $(B, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \in \underline{\mathcal{M}}_C(T)$. Wir wählen eine Polarisierung $\lambda \in \bar{\lambda}$. In einem geometrischen Punkt t_0 von T, wählen wir ein $\eta \in \bar{\eta}$. Dann existieren nach 1.2 Konstanten $k_\ell \in K \otimes \mathbb{Z}_\ell(-1)$, so daß

$$\psi(\eta_\ell(x), \eta_\ell(y)) = k_{\ell K} E^\lambda(x, y), \; x, y \in T_\ell(B_{t_0}),$$

wobei η_ℓ die ℓ-Komponente von η bezeichnet und B_{t_0} die Faser im Punkt t_0. Es sei

$$K^*(\mathbb{A}_f^p(-1)) = \{k \in K \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p(-1) \mid k' \cdot k = 1 \quad \text{für ein } k' \in K \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p(1)\}.$$

Wir setzen $k = (k_\ell) \in K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))$. Die Restklasse $\kappa \in \mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))$ von k ist unabhängig von der Wahl von $\eta \in \bar{\eta}$. In der Tat, es sei $\eta' = \eta c^*$, $c \in C^p$. Dann gilt

$$\psi(\eta'(x), \eta'(y)) = \mathrm{Tr}^0 a^{-1} \eta(y) c^* c \eta(x)^* = c^* c \psi(\eta(x), \eta(y)).$$

Da die Klasse $\bar{\eta}$ invariant unter der Wirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(T, t_0)$ ist, erhalten wir, daß auch κ invariant ist. Deshalb können wir κ als Schnitt der Garbe $\mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))$ über T auffassen.

Wir werden später beweisen (3.8), daß eine Polarisierung $\lambda \in \bar{\lambda}$ existiert, die in p prinzipal ist. Zwei solche Polarisierungen unterscheiden sich nach 1.4 durch ein total positives Element $k' \in K_+^*$ mit $\mathrm{ord}_p k' = 0$. Wir schreiben dafür $k' \in U_p(K_+)$. Es gilt

$$k'{}_\kappa E^\lambda = {}_\kappa E^{k'\lambda}.$$

Die Klasse $\bar{\kappa} \in \mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))/U_p(K_+)$ hängt folglich nur von dem Punkt $(B, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ab.

Wir bemerken, daß $\mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))/U_p(K_+)$ als $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{nr}/\mathbb{Q}_p)$-Modul isomoph zu $\mathrm{Nm}^0 C \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K_+^*$ ist, wobei der Frobenius wie das Idèle $(1, \ldots, p, \ldots, 1)$ wirkt, das an allen von p verschiedenen Stellen 1 ist und an der Stelle p gleich p.

Über einer geeigneten endlichen unverzweigten Erweiterung R von $\mathbb{Z}_p$ finden wir Schnitte $\kappa_1, \ldots, \kappa_h \in \mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))$, die ein Repräsentantensystem der endlichen Menge $\mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))/U_p(K_+)$ bilden.

Ein Punkt des Funktors $\tilde{\mathcal{M}}_C$ über einem R-Schema T ist:

M3

(a) ein s.a. O_D-Schema (B, ι) über T,
(b) eine involutionstreue Polarisierung λ von B, die in p prinzipal ist.
(c) eine Klasse von $O_D \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p$-Modulisomorphismen

$$\bar{\eta} : \hat{T}^p(B) \longrightarrow V \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p \bmod C^p,$$

so daß $\kappa(B, \iota, \lambda, \bar{\eta}) = \kappa_i$, für ein $i = 1, \ldots, h$.)

Wenn wir die κ_i so wählen, daß sie Repräsentanten ganzer Idèle sind, so ist λ eine effektive Polarisierung, deren Grad sich aus κ_i berechnet. Deshalb ist $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_C$ nach Mumford durch ein quasiprojektives Schema $\tilde{\mathcal{M}}_C$ über $\mathbb{R}$ darstellbar.

Die Gruppe $K_{\ddagger}^* \cap \mathrm{Nm}^0 C$ operiert durch Abänderung der Polarisierung auf $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_C$. Der Quotient unter dieser Wirkung ist $\underline{\mathcal{M}}_C$. Wir zeigen, daß $K_{\ddagger}^* \cap \mathrm{Nm}^0 C$ über den endlichen Quotienten $K_{\ddagger}^* \cap \mathrm{Nm}^0 C/(K^* \cap C^*)^2$ operiert. Es seien $(B, \iota, \lambda, \bar{\eta})$ ein Punkt von $\tilde{\mathcal{M}}_C$ und $\zeta \in (K^* \cap C^*)^2$. Dann definieren $(B, \iota, \lambda, \bar{\eta})$ und $(B, \iota, \zeta\lambda, \bar{\eta})$ den gleichen Punkt von $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_C$. Denn es sei $\zeta = \zeta_1^2$, $\zeta_1 \in K^* \cap C^*$. Dann gilt $\iota(\zeta_1)^* \lambda \iota(\zeta_1) = \lambda \iota(\hat{\zeta}_1)\iota(\zeta_1) = \lambda\iota(\zeta)$ und $\bar{\eta} = \bar{\eta}\zeta_1$. Die Multiplikation $\iota(\zeta_1): B \to B$ liefert den gewünschten Isomorphismus. Der Quotient von $\tilde{\mathcal{M}}_C$ nach der Wirkung der endlichen Gruppe $K_{\ddagger}^* \cap \mathrm{Nm}^0 C/(K^* \cap C^*)^2$ ist ein grobes Modulschema $\mathcal{M}_C$. Die Projektivität erhält man aus dem folgenden:

1.8 Lemma: *Es sei B ein abelsches O_D-Schema der Dimension $2n$ über einem diskret bewerteten Körper F. Dann hat B potentiell gute Reduktion.*

Beweis: Es sei $\tilde{B}$ das Néronmodell von B über dem Ring der ganzen Elemente O_F. Wir dürfen annehmen, daß B semistabile Reduktion hat. Die Zusammenhangskomponente der 1 der speziellen Faser $\tilde{B}_s^0$ ist dann eine Extension einer abelschen Mannigfaltigkeit mit einem Torus S, $\dim S \leq 2n$. Da es keine nichttrivialen Homomorphismen zwischen einer abelschen Mannigfaltigkeit und einem Torus gibt, operiert O_D auf S und auf der Gruppe der rationalen Charaktere von S. Da es keine Darstellung von D in einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension kleiner als $4n$ gibt, folgt $\dim S = 0$. Q.E.D.

Es sei $\mathcal{M}^p = \varprojlim_{C \in \mathscr{C}} \mathcal{M}_C$, wobei $\mathscr{C}$ das System aller offenen kompakten Untergruppen von $D^*(\mathbb{A}_f)$ ist, die den Bedingungen 1.6 genügen. Auf dem Proschema $\mathcal{M}^p \otimes \mathbb{C}$ operiert die Gruppe $D^*(\mathbb{A}_f)$ von links. Es seien $C' \in \mathscr{C}$ und $g \in D^*(\mathbb{A}_f)$. Wir wählen $C \in \mathscr{C}$, so daß $g^{-1}Cg \subset C'$. Wenn wir mit dem Modulproblem M1 arbeiten, sieht die Operation von g wie folgt aus:

1.9
$$g: \mathcal{M}_C(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_{C'}(\mathbb{C}).$$
$$(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \longmapsto (A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}g^*)$$

Wir wollen zeigen, daß sich diese Operation auf das Proschema $\mathcal{M}^p$ fortsetzen läßt. Dafür formulieren wir das Modulproblem M2 folgendermaßen:

M4

(a) ein s.a. O_D-Schema (A, ι) bis auf zu p prime Isogenie,
(b) eine K-homogene involutionstreue Polarisierung $\bar{\lambda}$,
(c) eine Äquivalenzklasse von $D \otimes \mathbb{A}_f^p$-Modulisomorphismen $\bar{\eta}: \hat{V}^p(A) \to V \otimes \mathbb{A}_f^p \bmod C^p$.

Die Wirkung eines $g \in D^*(\mathbb{A}_f^p)$ auf einen Punkt des Modulproblems M4 definieren wir wie unter 1.9. Es sei $g \in D^*(\mathbb{A}_f)$, $g = g^p g_p$, $g^p \in D^*(\mathbb{A}_f^p)$, $g_p \in D^*(\mathbb{Q}_p)$. Wenn $g_p \in C_p$, so lassen wir g wie g^p auf $\mathcal{M}^p$ wirken. Auf $\mathcal{M}^p(\mathbb{C})$ stimmt diese Operation offenbar mit 1.9 überein.

Wir betrachten ein $d \in D$, so daß $d\hat{d} \in K$ und $dO_D d^{-1} = O_D$. Dann ist $\operatorname{int} d$ ein involutionstreuer Automorphismus von O_D. Es sei $X = (A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ein Punkt von M4. Wir definieren

$$X^d = (A^d, \iota^d, \bar{\lambda}^d, \bar{\eta}^d) = (A, \iota \circ \operatorname{int} d, \bar{\lambda}, \operatorname{int} d^{-1}\bar{\eta}).$$

Dadurch erhalten wir einen Morphismus $\mathcal{M}_C \to \mathcal{M}_{d^{*-1}Cd^*}$ Wenn $X \in \mathcal{M}_C(\mathbb{C})$, so haben wir andererseits die Wirkung des adelischen Punktes $d \in D^*(\mathbb{Q}) \subset D^*(\mathbb{A}_f)$, $X \mapsto dX$.

1.10 Lemma: *Für einen Punkt $X \in \mathcal{M}^p(\mathbb{C})$ gilt $X^d = d^*X$.*

Beweis: Es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ der Punkt des Modulproblems M1, der X entspricht. Die Isogenie $\iota(d): A \to A$ definiert einen Isomorphismus der Punkte $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ und $(A, \iota \circ \operatorname{int} d, \bar{\lambda}, d^{-1}\bar{\eta})$. Deshalb gilt $d^*X = (A, \iota \circ \operatorname{int} d, \bar{\lambda}, \operatorname{int} d^{-1}\bar{\eta})$. Die Behauptung folgt, da $\bar{\eta}^{-1}(V \otimes \mathbb{Z}_p) = (\operatorname{int} d^{-1}\bar{\eta})^{-1}(V \otimes \mathbb{Z}_p)$.

Jedes $g \in D^*(\mathbb{A}_f)$ besitzt eine Zerlegung $g = g'a^r$, wobei $r \in \mathbb{Z}$ und $g_p' \in C_p$. Nach Definition normalisiert a die Ordnung $O_D = O_E[a]$ und es gilt $a\hat{a} = \delta \in K$. Wir definieren die Wirkung von g auf einen Punkt X von M4 durch $gX = g'X^{a^r}$.

1.11 Korollar: *Die Wirkung von $D^*(\mathbb{A}_f)$ auf $\mathcal{M}^p \otimes \mathbb{C}$ läßt sich auf $\mathcal{M}^p$ fortsetzen.*

§2. Formale O_D-Moduln

Um uns Indexe zu ersparen, modifizieren wir in diesem Paragraphen die Bezeichnungen. Es sei K eine unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ vom Grad n. Es sei D eine Quaternionenalgebra über K mit der Invariante $\frac{1}{2}$ und E eine unverzweigte, quadratische Erweiterung von K, die in D enthalten ist. Die Ringe der ganzen Elemente bezeichnen wir mit O_K, O_E und O_D. Es sei σ der Frobenius von $E/\mathbb{Q}_p$. Der nichttriviale Automorphismus von E/K ist $\tau = \sigma^n$. Es sei Π ein Primelement von O_D, so daß $\Pi^2 = p$, $\Pi e = e^\tau \Pi$ für $e \in E$.

Ein formaler O_D-Modul ist eine formale Gruppe X über einem $\mathbb{Z}_p$-Schema T zusammen mit einem Algebrahomomorphismus

$$\iota : O_D \longrightarrow \operatorname{End} X.$$

Wir interessieren uns für formale O_D-Moduln mit einer vorgeschriebenen Aktion von O_D auf Lie X. Dazu betrachten wir Funktionen $t : \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ mit folgenden Eigenschaften

$$t(i) + t(i+n) = 0, \quad i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \tag{1}$$

$$\left| \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k) \right| \leq 1. \tag{2}$$

2.1 Definition: Ein formaler O_D-Modul vom Typ t ist ein formaler O_D-Modul über einem O_E-Schema T, so daß für $e \in E$

$$\operatorname{Tr}_{O_T}(\iota(e) \mid \operatorname{Lie} X) = \operatorname{Tr}_{E/\mathbb{Q}_p} e + \sum_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} t(i) \sigma^{-i}(e). \tag{2.1.1}$$

Wenn $t = 0$, so nennen wir X einen speziellen formalen (s.f.) O_D-Modul.

Für $t \neq 0$ gilt $|\Sigma_{k=i+1}^{i+n} t(k)| = 1$. Das folgt aus der Gleichung

$$\sum_{k=i}^{i+n-1} t(k) = 2t(i) + \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k). \tag{2.1.2}$$

Einen guten Überblick über die formalen O_D-Moduln vom Typ t erhält man mit Hilfe der Cartiertheorie.

Es sei $T = \operatorname{Spec} R$. Cart R bezeichne den Cartierring der $\mathbb{Z}_p$-Algebra R.

$$\operatorname{Cart} R = \left\{ \sum_{r,s \geq 0} V^r [x_{r,s}] F^s \;\middle|\; x_{r,s} \in R,\, x_{r,s} = 0 \text{ bei festem } r \text{ für fast alle } s \right\}$$

Die $\mathbb{Z}_p$-Algebrastruktur auf Cart R ist durch Funktorialität und die folgenden Relationen eindeutig bestimmt.

$1 = [1]$, $FV = p$, $F[x] = [x^p]F$, $[x]V = V[x^p]$, $[x][y] = [xy]$, wo $x, y \in R$
$[x] + [y] = [x+y] + \Sigma_{r \geq 1} V^r [z_r] F^r$, für gewisse Elemente $z_r \in R$.

Die Elemente der Form $\Sigma\, V^r[x_r]F^r$ bilden den Teilring der Wittvektoren $W(R) \subset \mathrm{Cart}\, R$.

Es sei R ein Ring der Charakteristik p, d.h. $pR = 0$. Dann gilt $VF = FV = p$. Die Erhebung in die p-te Potenz $R \to R$ induziert wegen der Funktorialität einen Homomorphismus $\mathrm{Cart}\, R \to \mathrm{Cart}\, R$, den wir mit $u \mapsto u^F$ bezeichnen. Wenn

$$u = \sum V^r[x_{r,s}]F^s, \text{ so gilt } u^F = \sum V^r[x_{r,s}^p]F^s.$$

Ein Cart R-Modul M heißt reduziert, wenn V injektiv auf M operiert, M/VM ein projektiver, endlich erzeugter R-Modul ist und wenn $\varprojlim_i M/V^iM = M$. Die Kategorie der formalen Gruppen über R ist äquivalent zur Kategorie der reduzierten Cartiermoduln. Den Tangentialraum der entsprechenden formalen Gruppe kann man dabei mit M/VM identifizieren.

Es sei M/VM ein freier R-Modul. Wir nennen $\gamma_j, \ldots, \gamma_d \in M$ eine V-Basis, wenn ihre Restklassen mod VM eine Basis des R-Moduls M/VM bilden. Jedes Element des reduzierten Moduls M hat eine eindeutige Darstellung

$$\gamma = \sum V^r[x_{r,s}]\gamma_s.$$

2.2 Satz: *Es sei R eine O_E-Algebra. Dann ist die Kategorie der formalen O_D-Moduln vom Typ t über R äquivalent zur Kategorie der $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$-graduierten, reduzierten Cartiermoduln $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} M_i$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *V, F und $[x]$, $x \in R$ operieren auf M als homogene Abbildungen vom Grad* $1, -1, 0$.

(2) *Es existiert ein homogener Endomorphismus Π* vom Grad *n des Moduls M, so daß $\Pi^2 = p$.*

(3) $rg_R M_i/VM_{i-1} = 1 + t(i)$, $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$.

Beweis: Es sei X ein formaler O_D-Modul vom Typ t über R und M sein Cartiermodul. Die Operation von O_D auf X induziert einen Homomorphismus $\iota: O_D \to \mathrm{End}_{\mathrm{Cart}\, R} M$. Es führt nicht zu Verwechslungen, wenn wir den Endomorphismus $\iota(\Pi)$: $M \to M$ einfach mit Π bezeichnen.

Es gibt einen kanonischen Homomorphismus $O_E \to \mathrm{Cart}\, R$. In der Tat, da O_E aus $\mathbb{Z}_p$ durch Adjunktion der $(p^{2n} - 1)$-ten Einheitswurzeln ζ entsteht, genügt es deren Bild anzugeben. Man nimmt $[\zeta] \in \mathrm{Cart}\, R$. Wir erhalten eine Operation von O_E auf M, die wir mit em, $e \in O_E$, $m \in M$ bezeichnen. Andererseits operiert O_E über ι auf M. Deshalb erhalten wir eine Zerlegung

$$M = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M_i, M_i = \{m \in M \mid \iota(e)m = e^{\sigma^{-i}}m, e \in O_E\}.$$

Wir zeigen, daß $\deg \Pi = n$. Es sei $m \in M_i$. Dann gilt

$$\iota(e)\Pi m = \Pi\iota(e^{\tau^{-1}})m = \Pi\iota(e^{\sigma^{-n}})m = \Pi e^{\sigma^{-n-i}}m = e^{\sigma^{-n-i}}\Pi m.$$

Folglich gilt $\Pi m \in M_{i+n}$. Völlig analog zeigt man $\deg V = 1$, $\deg F = -1$, $\deg [x] = 0$ für $x \in R$. Daß $rg_R M_i/VM_{i-1} = 1 + t(i)$ äquivalent mit 2.1.1 ist, sieht man unmittelbar. Damit ist der Satz bewiesen.

2.3 Bemerkung: Es sei X ein formaler O_D-Modul vom Typ $t \neq 0$ über einer O_E-Algebra R. Dann gilt $pR = 0$. Um das einzusehen, betrachten wir einen Index i, so daß $t(i) = 1$. Die Multiplikation mit p: $M_i/VM_{i-1} \to M_i/VM_{i-1}$ faktorisiert sich

$$M_i/VM_{i-1} \longrightarrow M_{i+n}/VM_{i-1+n} \longrightarrow M_i/VM_{i-1}.$$

Da $M_{i+n}/VM_{i-1+n} = 0$, erhalten wir $pR = 0$.

Wir zeigen jetzt, wie man formale O_D-Moduln vom Typ t mit Hilfe der Cartiertheorie konstruieren kann.

$\mathbb{E}^+$ sei der folgende Teilring von Cart R

$$\mathbb{E}^+ = \left\{\sum_{r \geq s} V^r[x_{r,s}]F^s \mid x_{r,s} \in R\right\}.$$

Der Ring $\mathbb{E}^+$ enthält die zweiseitigen Ideale

$$\mathbb{E}^+_m = \left\{\sum_{r \geq s+m} V^r[x_{r,s}]F^s \mid x_{r,s} \in R\right\}, m \in \mathbb{Z}.$$

Den folgenden Satz findet man bei Lazard [12] Chapt. V3.

2.4 Lokaler Struktursatz: Es sei L der freie Cart R-Modul mit der Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$. Gegeben seien Relationen der Form

$$\rho_i = F\gamma_i - \sum_{j=1}^{d} c_{i,j}\gamma_j, \; c_{i,j} \in \mathbb{E}^+. \tag{2.4.1}$$

Dann ist $M = L/\Sigma \,\text{Cart}\, R \cdot \rho_i$ ein reduzierter Cartiermodul und die Restklassen der γ_i in M eine V-Basis.

Wir sagen, daß die Gleichungen $F\gamma_i = \Sigma\, c_{i,j}\gamma_j$ einen reduzierten Cartiermodul M mit der V-Basis γ_i definieren. Anstelle von 2.4.1 kann man auch Relationen der folgenden Art betrachten

$$p\gamma_i = [p]\gamma_i + \sum c_{i,j}\gamma_j,\; c_{i,j} \in \mathsf{E}_1^+. \tag{2.4.2}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmter reduzierter Cartiermodul M mit der V-Basis γ_i, in dem die Relationen 2.4.2 erfüllt sind. In der Tat ist $p - [p] = V\epsilon F$, wobei ϵ eine Einheit im Wittring $W(R)$ ist. Da V auf einem reduzierten Cartiermodul injektiv operiert, sind die Relationen 2.4.2 äquivalent mit

$$F\gamma_i = \epsilon^{-1}V^{-1} \sum c_{i,j}\gamma_j.$$

Offenbar liegen die Elemente $\epsilon^{-1}V^{-1}c_{i,j}$ in dem Ring E^+.

Es sei X ein formaler O_D-Modul vom Typ t über einer O_E-Algebra R. Wir setzen voraus, daß die M_i/VM_{i-1} freie R-Moduln sind. Es seien $\gamma_i^{(j)} \in M_i$, $1 \leq j \leq 1 + t(j)$, Elemente, deren deren Restklassen modulo VM_{i-1} eine Basis des R-Moduls M_i/VM_{i-1} bilden. Wir nennen die Elemente $\gamma_i^{(j)}$ eine homogene V-Basis von M. Wenn X ein s.f. O_D-Modul ist, so setzen wir zur Abkürzung $\gamma_i^{(1)} = \gamma_i$.

2.5 Satz:

(a) *Gegeben seien Relationen der Form*

$$\Pi\gamma_i = [a_i]\gamma_{i+n} + \sum_{m\geq 1} V^m c_{m,i}\gamma_{i-m+n},\; i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}, \tag{2.5.1}$$

so daß $c_{m,i} \in W(R)$ $a_i \in R$, $a_i a_{i+n} = p$.

Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter s.f. O_D*-Modul* X *mit einer homogenen* V*-Basis* γ_i *seines Cartiermoduls* M, *so daß in* M *die Relationen* 2.5.1 *erfüllt sind. Ist umgekehrt* X *ein s.f.* O_D*-Modul und* $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ *eine homogene* V*-Basis seines Cartiermoduls, so sind Relationen der Form* 2.5.1 *erfüllt.*

(b) *Es sei* $t \neq 0$ *und* R *eine* O_E*-Algebra der Charakteristik* p. *Gegeben seien Relationen der Form*

$$\Pi\gamma_i^{(j)} = [a_i^{(j)}]\gamma_{i+n}^{(j)} + \sum_{\ell, m\geq 1} V^m c_{m,i}^{(\ell)}\gamma_{i-m+n}^{(\ell)},\; i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}, \tag{2.5.2}$$

Wobei $1 \leq j \leq 1 + t(i)$, $1 \leq \ell \leq 1 + t(i - m + n)$, $a_i^{(j)} \in R$, $c_{m,i}^{(\ell)} \in W(R)$, $a_i^{(j)}$ *ist eine Einheit, wenn* $t(i) = 0$ *und* $\Sigma_{k=i+1}^{i+n} t(k) = -1$, $a_i^{(j)} = 0$, *wenn* $t(i) \neq 0$ *oder* $\Sigma_{k=i+1}^{i+n} t(k) = 1$.

Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter formaler

O_D-Modul vom Typ t und eine homogene V-basis seines Cartiermoduls $\gamma_i^{(j)}$, so daß die Relationen 2.5.2 erfüllt sind.

Beweis: Berechnet man $p\gamma_i = \Pi^2\gamma_i$ mit Hilfe von 2.5.1 bzw. 2.5.2, so erhält man Relationen der Form

$$p\gamma_i - [p]\gamma_i \in \mathbb{E}_1^{\dagger}\gamma_0^{(1)} + \cdots + \mathbb{E}_1^{\dagger}\gamma_{2n-1}^{(2)}. \tag{2.5.3}$$

Nach dem lokalen Struktursatz finden wir einen reduzierten Cartiermodul M mit einer V-Basis $\gamma_i^{(j)}$, so daß die Relationen 2.5.3 erfült sind. Es sei

$$M_i = \left\{ \sum_{j,m \geq 0} V^m x_{m,j}\gamma_{i-m}^{(j)} \mid x_{m,j} \in W(R) \right\}, i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}.$$

Wenn wir deg $V = 1$, deg $\gamma_i^{(j)} = i$ und deg $x = 0$ für $x \in W(R)$ setzen, so sind die Relationen 2.5.3 homogen. Deshalb sind die M_i eine Graduierung von M. Wir definieren den Operator Π mit Hilfe von 2.5.1 bzw. 2.5.2. Die Existenz von X folgt dann aus 2.2. Die Umkehrung von (a) ist offensichtlich. Wir werden später eine Umkehrung von (b) beweisen.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo $R = L$ ein perfekter Körper der Charakteristik p ist. Es sei X eine formale Gruppe der Höhe h über L. Ihr Cartiermodul M ist dann ein freier $W(L)$-Modul vom Rang h.

Es sei $\mathcal{K}$ der Quotientenkörper von $W(L)$. Für zwei Gitter G_1 und G_2 in einem $\mathcal{K}$-Vektorraum definieren wir

$$[G_1 : G_2] = \text{Länge}_{W(L)} G_1/G_1 \cap G_2 - \text{Länge}_{W(L)} G_2/G_1 \cap G_2.$$

2.6 Satz: *Es sei X ein formaler O_D-Modul vom Typ t und der Höhe h über L. Dann ist h ein Vielfaches von $4n$. Der Cartiermodul M eines formalen O_D-Moduls der Höhe $4nh_0$ vom Typ t läßt sich folgendermaßen charakterisieren. Es existiert eine Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} M_i$ mit den Eigenschaften von 2.2, so daß*

(i) *M_i sind freie $W(L)$-Moduln vom Rang $2h_0$,*

(ii) *$pM_{i+n} \subset \Pi M_i \subset M_{i+n}$,*

$$[M_{i+n} : \Pi M_i] = h_0 + \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k).$$

Beweis: Da VM_i in M_{i+1} einen endlichen Index hat, ist $rg_{W(L)} M_i = r$

unabhängig von i. Es gilt:

$$\begin{aligned}
[M_{i+1} : \Pi M_{i+1-n}] &= [M_{i+1} : VM_i] + [VM_i : \Pi VM_{i-n}] \\
&\quad - [\Pi M_{i+1-n} : \Pi VM_{i-n}] = [M_i : \Pi M_{i-n}] \\
&\quad + t(i+1) - t(i+1-n) = [M_i : \Pi M_{i-n}] \\
&\quad + 2t(i+1), \\
[M_{i+n} : \Pi M_i] &= [M_i : \Pi M_{i-n}] + 2 \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k), \\
[M_{i+n} : \Pi M_i] &+ [M_i : \Pi M_{i-n}] = [M_{i+n} : pM_{i+n}] = r.
\end{aligned}$$

Wir erhalten: $2[M_{i+n} : \Pi M_i] = r + 2\sum_{k=i+1}^{i+n} t(k)$.
Also muß r gerade sein und wir können schreiben

$$[M_{i+n} : \Pi M_i] = h_0 + \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k).$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Wir betrachten im folgenden nur noch formale O_D-Moduln vom Typ t und der minimalen Höhe $4n$. Dann gilt für einen s.f. O_D-Modul

(2.6.1) $$[M_{i+n} : \Pi M_i] = 1$$

und für einen formalen O_D-Modul vom Typ $t \neq 0$

(2.6.2) $$M_{i+n} = \Pi M_i, \text{ wenn } \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k) = -1,$$

$$pM_{i+n} = \Pi M_i, \text{ wenn } \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k) = 1.$$

Wir können jetzt die partielle Umkehrung von 2.5 (b) beweisen.

2.7 Korollar: *Es sei X ein formaler O_D-Modul der Höhe $4n$ und vom Typ $t \neq 0$ über einer O_E-Algebra R der Charakteristik p. Es sei $\gamma_i^{(j)}$ eine homogene V-Basis seines Cartiermoduls M. Dann erfüllen die $\gamma_i^{(j)}$ Relationen der Form 2.5.2.*

Beweis: Wenn $t(i) = 1$, so gilt $M_{i+n} = VM_{i+n-1}$ und wir finden eine Relation der gewünschten Form. Wir betrachten den Fall $t(i) = 0$. Dann ist $a_i^{(1)}$ eine Einheit, wenn $\sum_{k=i+1}^{i+n} t(k) = -1$. In der Tat genügt es zu beweisen, daß $a_i^{(1)}$ in keinem geometrischen Punkt $R \to L$ verschwindet. Das folgt aus 2.6.2. Wegen $\Pi^2 = 0$ erhalten wir schließlich $a_{i+n}^{(1)} = 0$.

Mit Hilfe des Bruhat-Titsgebäudes von $PGl_2(\mathcal{K})$ kann man den Satz 2.6 in einer besonders handlichen Weise formulieren. Wir wählen dazu eine $W(L)$-lineare Einbettung $\varphi_0 : M_0 \to \mathcal{K}^2$. Es wird nicht zu Verwechslungen führen, wenn wir den Frobenius automorphismus von $W(L)$ ebenfalls mit σ bezeichnen, da wir im Beweis von 2.2 eine kanonische Einbettung $O_E \to W(L)$ definiert haben. Wir finden eindeutig bestimmte σ^i-lineare Einbettungen $\varphi_i : M_1 \to \mathcal{K}^2$, $i \in \mathbb{Z}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{2n-1} \arrow[r, "V"] \arrow[d, "\varphi_{-1}"] & M_0 \arrow[r, "V"] \arrow[d, "\varphi_0"] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & \cdots \arrow[r] & M_{2n-1} \arrow[r, "V"] \arrow[d, "\varphi_{2n-1}"] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{2n}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, equal] & \mathcal{K}^2 \arrow[r, equal] & \mathcal{K}^2 \arrow[r, equal] & \mathcal{K}^2 \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & \mathcal{K}^2 \arrow[r, equal] & \mathcal{K}^2 \arrow[r, equal] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\Pi : M_0 \to M_n$ induziert eine σ^n-lineare Abbildung $U : \mathcal{K}^2 \to \mathcal{K}^2$, $Ux = J^{-1}x^{\sigma^n}$, $x \in \mathcal{K}^2$, $J \in M_2(\mathcal{K})$. Wir bezeichnen mit A_i das Bild der Abbildung φ_i und mit a_i die Klasse des Gitters A_i im Bruhat-Titsgebäude von $PGl_2(\mathcal{K})$ (siehe [21]).

SATZ 2.7: *Es sei X ein formaler O_D-Modul vom Typ t und der Höhe 4n über L. Es sei M der Cartiermodul von X und $\varphi_0 : M_0 \to \mathcal{K}^2$ eine $W(L)$-lineare Einbettung. Dann genügen $U : \mathcal{K}^2 \to \mathcal{K}^2$ und $\{a_i\}_{i \in Z}$ den folgenden Bedingungen:*

(i) ord det U = ord det $J^{-1} = 1 - n$,

(ii) $d(a_i, a_{i-1}) = 1 - |t(i)|$, (*d ist der Abstand im Gebäude*)

(iii) $Ua_i = a_{i+n}$, *wenn* $t \neq 0$,

$d(Ua_i, a_{i+n}) = 1$ *und* $U^2 a_i = a_{i+2n}$, *wenn* $t = 0$.

Umgekehrt wird jedes Paar U, $\{a_i\}_{i \in Z}$, das den Bedingungen (i)–(iii) genügt durch einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten formalen O_D-Modul X vom Typ t und der Höhe 4n und eine bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte Einbettung $\varphi_0 : M_0 \to \mathcal{K}^2$ induziert. Bei vorgegebenem U definieren zwei Diagramme $\{a_i\}_{i \in Z}$ und $\{b_i\}_{i \in Z}$ genau dann isomorphe formale O_D-Moduln, wenn eine Matrix $A \in Gl_2(\mathcal{K})$ existiert, so daß $JA = A^{\sigma^{-n}}J$ und $Aa_i = b_i$.

BEWEIS: Die Bedingungen (i)–(iii) folgen direkt aus 2.6. Es seien ungekehrt U und a_i gegeben. Wir wählen Gitter A_i aus den Klassen a_i, so daß $pA_i \subset A_{i-1} \subset A_i$, $[A_i : A_{i-1}] = 1 + t(i)$. Wir bezeichnen mit $A_{i,[\sigma]}$ das Gitter, das durch Restriktion der Skalare bezüglich $\sigma : W(L) \to W(L)$ aus A_i entsteht. Es sei $M_i = A_{i,[\sigma^i]}$ und $N_i = M_i \otimes \mathcal{K}$. Wir identifizieren N_i und N_{i+2n} mit Hilfe des $W(L)$-linearen Isomorphismus $U^2/p : N_i \to N_{i+2n}$. Dann erhalten wir einen $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$-graduierten $\mathcal{K}$-Modul $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} N_i$. Der Operator U induziert eine $W(L)$-lineare Abbildung Π: $N \to N$ vom Grad n, so daß $\Pi^2 = p$. Die Einbettung $A_{i-1} \subset A_i$ induziert eine σ^{-1}-lineare Abbildung $V : N_{i-1} \to N_i$, so daß

$$pM_i \subset VM_{i-1} \subset M_i, [M_i : VM_{i-1}] = 1 + t(\mathrm{i}).$$

Der Satz folgt, wenn wir zeigen: $M_i = M_{i+2n}$, $\Pi M_i \subset M_{i+n}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}[M_{i+n} : \Pi M_i] &= [M_{i+n} : V^n M_i] + [V^n M_i : \Pi M_i] = [A_{i+n} : A_i] + [A_i : UA_i] \\ &= \sum_{k=i+1}^{i+n} (1 + t(k)) + (1 - n) = 1 + \sum_{k=i+1}^{i+n} t(k) \geq 0,\end{aligned}$$

da ord det $U = 1 - n$. Wir erhalten $\Pi M_i \subset M_{i+n}$, da der Abstand der Gitter ΠM_i und M_{i+n} höchstens 1 ist. Es gilt weiter

$$[M_{i+2n} : pM_i] = [M_{i+2n} : \Pi M_{i+n}] + [\Pi M_{i+n} : pM_i] = 2 + \sum_{k=i+1}^{i+2n} t(k) = 2.$$

Da wegen $U^2 a_i = a_{i+2n}$ die Gitter M_i und M_{i+2n} ähnlich sind, erhalten wir $M_i = M_{i+2n}$. Die letzte Behauptung des Satzes ist klar.

Wir werden die formalen O_D-Moduln vom Typ t über einem algebraisch abgeschlossenen Körper L klassifizieren. Dazu erinnern wir uns an die Resultate von Dieudonné (siehe [5]).

Es sei W ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathcal{K}$ und $T : W \to W$ eine σ^m-lineare Abbildung, wobei $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Wir nennen (W, T) einen σ^m-Raum. Einen σ^m-Raum kann man auch als Modul über dem nichtkommutativen Polynomring $\mathcal{K}_{\sigma^m}[T]$ auffassen, in dem gilt $Tk = k^{\sigma^m} T$ für $k \in \mathcal{K}$. Wenn in W ein $W(L)$-Gitter existiert, das durch T in sich abgebildet wird, so nennen wir (W, T) einen effektiven σ^m-Raum.

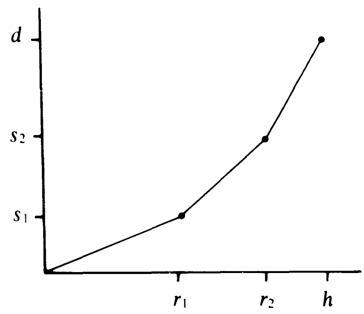
Satz (Dieudonné): Es sei (W, T) ein effektiver σ^m-Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper L. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$W = \bigoplus_i \mathcal{K}_{\sigma^m}[T]/T^{r_i} - p^{s_i}, r > 0, s_i \geq 0, (r_i, s_i) = 1.$$

Man nennt $\Sigma\, r_i$ die Höhe, $\Sigma\, s_i$ die Dimension und s_i/r_i die Anstiege von W. Es sei

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_h, h = \sum r_i$$

die Sequenz der Anstiege von W. Jeder Anstieg λ wird dabei so oft aufgefürt, wie die Höhe der isotypischen Komponente mit dem Anstieg λ ist (Multiplizität). Aus der Sequenz der Anstiege erhält man das Newtonpolygon von W.



2.8 Satz: *Es sei X ein formaler O_D-Modul vom Typ t und der Höhe $4n$ über einem perfekten Körper L. Der Cartiermodul von X sei $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} M_i$. Dann ist $(M_0 \otimes_{W(L)} \mathcal{K}, V^n \Pi^{-1})$ ein effektiver σ^{-n}-Raum der Höhe 2 und der Dimension $n-1$, der den formalen O_D-Modul X bis auf Isogenie bestimmt.*

Beweis: Man weiß, daß der Cartiermodul $M \otimes \mathcal{K}$ die formale Gruppe X bis auf Isogenie bestimmt. Die Kenntnis des formalen O_D-Moduls X bis auf Isogenie ist deshalb äquivalent mit der Kenntnis der Vektorräume $M_i \otimes \mathcal{K}$ und der Operatoren Π und V. Identifizieren wir $M_i \otimes \mathcal{K}$ und $(M_0 \otimes \mathcal{K})_{[\sigma^i]}$ mit Hilfe von V^i, $i = 0, \ldots, 2n-1$, so sehen wir, daß die Kenntnis von M_0 und des Operators $V^n \Pi^{-1}$ ausreichend ist. Die Effektivität folgt, wenn wir einen Index i finden, so daß $V^n M_i \subset \Pi M_i$. Wenn $t \neq 0$, so existiert ein i mit $\Pi M_i = M_{i+n}$ und die Behauptung ist klar. Für den Fall $t = 0$ führen wir folgenden Begriff ein, der im weiteren wesentlich sein wird.

2.9 Definition: Es sei X ein s.f. O_D-Modul über einem Ring R der Charakteristik p und $M = \bigoplus M_i$ sein Cartiermodul. Ein Index $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ heißt kritisch, wenn die Abbildung $\Pi : M_i / VM_{i-1} \to M_{i+n} / VM_{i-1+n}$ gleich Null ist.

Die Menge der kritischen Indexe von X bezeichnen wir mit $S(X)$. Wenn R ein Integritätsbereich ist, so folgt aus $\Pi^2 = 0$ auf M/VM, daß i oder $i+n$ in $S(X)$ liegt. Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so daß i oder $i+n \in S$ für alle $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ nennen wir zulässig.

Wir beenden jetzt den Beweis von 2.8. Es sei i ein kritischer Index von X. Dann gilt $\Pi M_i \subset VM_{i-1+n}$ und da beide Gitter nach 2.6.1 in M_{i+n} den Index 1 haben, sogar $\Pi M_i = VM_{i-1+n}$. Daraus folgt $V^n M_i \subset VM_{i-1+n} = \Pi M_i$, was wir zeigen wollten.

In der Ausdrucksweise von 2.7 bestimmt die Matrix J den formalen O_D-Modul vom Typ t bis auf Isogenie. Nach dem Satz von Dieudonné sind über einem algebraisch abgeschlossenen Körper L der Charakteristik p für J die folgenden Normalformen möglich:

$$J = \begin{pmatrix} p^{s_1} & 0 \\ 0 & p^{s_2} \end{pmatrix}, 0 \leq s_1 \leq s_2, s_1 + s_2 = n - 1,$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p^{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{für } n \text{ gerade.}$$

Den Isogenietyp geben wir im folgenden durch die Normalform von J an.

Wir berechnen den Endomorphismenring $\mathrm{End}_D^0 X = \mathrm{End}_{O_D} X \otimes \mathbb{Q}$, der zu dem Isogenietyp J gehört. Dazu betrachten wir den σ^{-n}-Raum

$$W = \mathcal{K}_{s^{-n}}[T]/T^r - p^s, r > 0, s \geq 0, (r, s) = 1.$$

Ein Endomorphismus von (W, T) ist offenbar durch das Bild der 1 bestimmt. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\mathrm{End}(W, T) \xrightarrow{\sim} W(\mathbb{F}_{p^{nr}})[1/p]_{\sigma^{-n}}[T]/T^r.$$

In der Tat genügt das Bild $x \in W$ der 1 der Gleichung $T^r x = p^s x$. Es sei $x = \Sigma a_i T^i$ und $\rho = \sigma^{-n}$. Dann gilt

$$T^r x = \sum a_i^{\rho^r} T^{i+r} = p^s \sum a_i^{\rho^r} T^i = p^s \sum a_i T^i.$$

Folglich erhalten wir $a_i \in W(\mathbb{F}_{p^{nr}})[1/p]$. Es sei φ der Endomorphismus mit $\varphi(1) = T$. Wir finden natürliche Zahlen s und m, so daß $ss' - rm = 1$. Es sei $\tilde{\Pi} = \varphi^{s'}/p^m$. Dann gilt

$$\tilde{\Pi}^r = \varphi^{rs'}/p^{rm} = p^{ss'}/p^{rm} = p, \quad \tilde{\Pi} a = a^{\rho^{s'}} \tilde{\Pi}, \quad a \in W(\mathbb{F}_{p^{nr}}).$$

Also ist End (W, T) die Divisionsalgebra über $W(\mathbb{F}_{p^n})[1/p]$ mit der Invariante $-s'/r$.

Wir erhalten $\mathrm{End}_D^0 X$ für einen formalen O_D-Modul vom Typ t über einem algebraisch abgeschlossenen Körper L der Charakteristik p:

(2.10) $$\mathrm{End}_D^0 X = K \times K, \text{ wenn } J = \begin{pmatrix} p^{s_1} & 0 \\ 0 & p^{s_2} \end{pmatrix}, s_1 \neq s_2,$$

$$\mathrm{End}_D^0 X = Gl_2(K), \text{ wenn } J = \begin{pmatrix} p^{s} & 0 \\ 0 & p^{s} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{End}_D^0 X = D, \text{ wenn } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p^{n-1} & 0 \end{pmatrix}, n \text{ gerade}.$$

Unter den Anstiegen von X versteht man die Anstiege des σ^{-1}-Raumes $(M \otimes \mathcal{K}, V)$. Sie berechnen sich wie folgt:

2.11 Satz: *Es seien* $\lambda_i = s_i/r_i$ *die Anstiege von* $(M_0 \otimes \mathcal{K}, \Pi^{-1}V^n)$, *wobei der Bruch so geschrieben sei, daß* r_i *die Multiplizität von* λ_i *ist. Dann sind* $\lambda'_i = (r_i + 2s_i)/2nr_i$ *die Anstiege von* X *und* $2nr_i$ *ihre Multiplizitäten.*

Beweis: Es sei $N_0 = \mathcal{K}_{\sigma^{-n}}[T]/T^{r_i} - p^{s_i} \hookrightarrow (M_0 \otimes \mathcal{K}, \Pi^{-1}V^n)$ ein direkter Summand. Dann ist $\bigoplus_{i=0}^{2n-1} N_{0[\sigma^i]} = N$ ein σ^{-1}-Unterraum von $(M \otimes \mathcal{K}, V)$, wobei die Operation von V auf N folgendermaßen gegeben ist:

$$N_0 = N_{0[\sigma]} = \cdots = N_{0[\sigma^{2n-1}]} \xrightarrow{p(\Pi^{-1}V^n)^2} N_0.$$

Wir erhalten $V^{2nr_i}T = p^{r_i}T^{2r_i} = p^{r_i+2s_i}$. Daraus folgt unmitelbar die Behauptung.

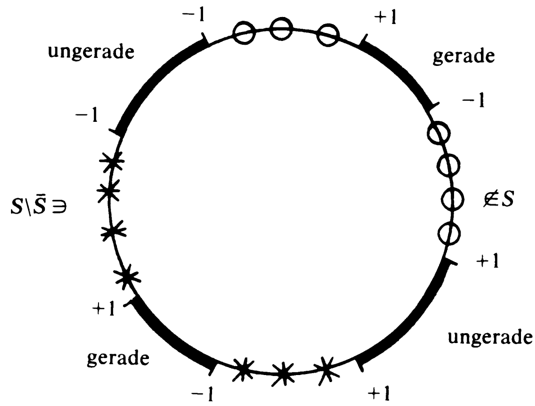
Wir zeigen im folgenden, wie man s.f. O_D-Moduln aus formalen O_D-Moduln vom Typ $t \neq 0$ konstruieren kann. Der Funktion t ordnen wir eine zulässige Teilmenge $S_t \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ zu.

$$S_t = \left\{ i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \;\middle|\; |t(i)| = 1 \text{ oder } \sum_{k=i-n+1}^{i} t(k) = 1 \right\}.$$

Die Teilmengen S_t lassen sich folgendermaßen charakterisieren.

2.12 Definition: Es sei $S \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ eine zulässige Teilmenge und $\bar{S} = S \cap S + n$. Wir nennen S gesättigt, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist. Für beliebige $i, j \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \setminus \bar{S}$ gilt:
$i \in S \Leftrightarrow j \in S$, wenn card $[i, j] \cap \bar{S}$ gerade
$i \in S \Leftrightarrow j \notin S$, wenn card $[i, j] \cap \bar{S}$ ungerade.

Dabei bezeichnet $[i, j]$ das Intervall $\{i, i+1, \ldots, j\}$ und $S + n = \{i + n \mid i \in S\}$. Wir erhalten ein gutes Bild einer gesättigten Menge S, wenn wir $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ mit den $2n$-ten Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis identifizieren.



Die dick gezeichneten Intervalle liegen in $\bar{S}$ und "gerade" bzw. "ungerade" bezieht sich auf die Anzahl der Elemente in den entsprechenden Intervallen. S entspricht einer Funktion t. Die Menge der Punkte, wo t den Absolutbetrag 1 hat, ist $\bar{S}$. An zwei benachbarten Punkten aus $\bar{S}$ hat t unterschiedliches Vorzeichen. Die Zahlen in der Abbildung sind die Werte von t in den entsprechenden Punkten.

Wir bemerken, daß für eine gesättigte Menge $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ die Zahl $\frac{1}{2}\operatorname{card} \bar{S} = \operatorname{card}[i, i+n] \cap \bar{S}$ ungerade ist.

2.13 Satz: *Es sei $t \neq 0$. Dann ist S_t eine gesättigte Menge. Umgekehrt sei S eine gesättigte Menge, so daß $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ für gerades n. Dann ist $S = S_t$, und t ist eindeutig bestimmt, wenn $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$.*

Beweis: Es seien $i, j \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\sum_{k=j-n+1}^{j} t(k) = \sum_{k=i-n+1}^{i} t(k) + 2\sum_{k=i+1}^{j} t(k). \tag{2.13.1}$$

Deshalb muß für zwei in $\bar{S}_t$ benachbarte Indexe k_1 und k_2 gelten, daß $t(k_1) + t(k_2) = 0$. Wir erhalten

$$\left|\sum_{k=i+1}^{j} t(k)\right| = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \operatorname{card}[i+1, j] \cap \bar{S}_t \text{ gerade} \\ 1, & \text{wenn } \operatorname{card}[i+1, j] \cap \bar{S}_t \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{2.13.2}$$

Aus den beiden Formeln folgt unmittelbar, daß S_t gesättigt ist.

Umgekehrt sei $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ eine gesättigte Menge. Es gibt einen Index $i+1 \in \bar{S}$, so daß $i+2 \in S\backslash\bar{S}$. Wir setzen $t(i+1) = 1$ und definieren $t(j)$ rekursiv mit Hilfe von 2.13.2. Dann gilt $S_t = S$. Der Fall $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ ist trivial.

Es sei Y ein s.f. O_D-Modul über einem perfekten Körper L der

Charakteristik p, so daß $S(Y) \supset S_t$ für ein $t \neq 0$. Der Cartiermodul von Y sei $M = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M_i$. Wir definieren

$$M'_i = \begin{cases} M_i, \text{ wenn } \sum_{k=i-n+1}^{i} t(k) = 1, \text{ d.h. wenn } i \in S_t \backslash \bar{S}_t \text{ oder } t(i) = 1 \\ \\ VM_{i-1}, \text{ wenn } \sum_{k=i-n+1}^{i} t(k) = -1, \text{ d.h. wenn } i \notin S_t \text{ oder } t(i) = -1 \end{cases}$$

Wir verifizieren, daß $M' = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M'_i$ der Cartiermodul eines formalen O_D-Moduls X vom Typ t ist.

Es sei $i \in S_t \backslash \bar{S}_t$. Dann gilt $M'_i = M_i$ und $M'_{i-1} = M_{i-1}$. Wir erhalten rg $M'_i / VM'_{i-1} = 1 = 1 + t(i)$. Wenn $i \notin S_t$, so folgt das gleiche Resultat, da $M'_i = VM_{i-1}$ und $M'_{i-1} = VM_{i-2}$. Wenn $t(i) = 1$ so gilt $M'_i = M_i$, $M'_{i-1} = VM_{i-2}$ und $i - 1 + n \in S_t$. Da $S_t \subset S(Y)$, gilt $pM_i = \Pi^2 M_i = \Pi VM_{i+n-1} = V^2 M_{i-2}$. Wir erhalten: $pM'_i = VM'_{i-1}$, rg $M'_i / VM'_{i-1} = 2 = 1 + t(i)$. Schließlich gilt für $t(i) = -1$, daß $M'_i = VM_{i-1}$, $M'_{i-1} = M_{i-1}$ und rg $M'_i / VM'_{i-1} = 0$. Es bleibt noch zu verifizieren, daß $\Pi M'_i \subset M'_{i+n}$. Es sei $i \notin S_t$ oder $t(i) = -1$. Dann gilt $\Pi M'_i = \Pi VM_{i-1} = \Pi^2 M_{i+n} = pM'_{i+n}$. Der Fall $i \in S_t \backslash \bar{S}_t$ oder $t(i) = 1$ ist analog.

Wir haben damit für jeden s.f. O_D-Modul Y mit $S(Y) \supset S_t$ einen formalen O_D-Modul X vom Typ t konstruiert und eine Isogenie α_Y: $X \to Y$ formaler O_D-Moduln.

2.14 Satz: *Es sei $|t| \neq 0, 1$. Die Zuordnung $Y \mapsto X$ ist eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen s.f. O_D-Moduln Y mit $S(Y) \supset S_t$ und den Isomorphieklassen formaler O_D-Moduln X vom Typ t.*

Beweis: Es seien a_i, $i \in \mathbb{Z}$ ein Diagramm von Punkten im Bruhat-Titsgebäude und U ein Operator, die Y im Sinne von 2.7 entsprechen. Für das gleiche U entspricht X dem Diagramm a'_i:

$$a'_i = \begin{cases} a_i, \text{ wenn } i \in S_t \backslash \bar{S}_t \text{ oder } t(i) = 1 \\ a_{i-1}, \text{ wenn } i \notin S_t \text{ oder } t(i) = -1. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $k(i)$ den ersten auf i folgenden Index, so daß $d(a'_{k(i)}, a'_i) = 1$. Da $S_t \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, existiert $k(i)$. Man erhält umgekehrt a_i aus den a'_i.

$$a_i = \begin{cases} a'_i, \text{ wenn } i \in S_t \backslash \bar{S}_t \text{ oder } t(i) = 1 \\ a'_{k(i)}, \text{ wenn } i \notin S_t \text{ oder } t(i) = -1 \end{cases} \tag{2.14.1}$$

Um das einzusehen bemerken wir, daß $a_{j-2} = a_j$, wenn $j, j+n-1 \in S_t$. In der Tat: $a_{j+2n} = U^2 a_j = U a_{j+n-1} = a_{j+2n-2}$.

Es sei $i \notin S_t$. Wenn $i+1 \notin S_t$, so ist $k(i) = i+1$. Dann gilt $a'_{k(i)} = a'_{i+1} = a_i$. Wenn $i+1 \in \bar{S}_t$, so gilt $t(i+1) = 1$. Wir betrachten zunächst den Fall $[i+1, i+2m] \subset \bar{S}_t$, $i+2m+1 \notin S_t$. Dann gilt nach der obigen Bemerkung

$$a_{i-1} = a_{i+1} = a_{i+3} = \cdots = a_{i+2m-1} = a'_i = a'_{i+1} = a'_{i+2} \cdots = a'_{i+2m},$$
$$a_i = a_{i+2} = a_{i+4} = \cdots = a_{i+2m} = a'_{i+2m+1}.$$

Der Index $k(i)$ ist folglich $i+2m+1$. Wir erhalten $a_i = a'_{i+2m+1} = a'_{k(i)}$. Wenn $[i+1, i+2m-1] \subset \bar{S}_t$ und $i+2m \in S_t \backslash \bar{S}_t$, so gilt

$$\begin{aligned} a_{i-1} = a_{i+1} = a_{i+3} \cdots = a_{i+2m-1} = a'_1 = a'_{i+1} = a'_{i+2} \cdots \\ = a'_{i+2m-1}, a_i = a_{i+2} = a_{i+4} = \cdots = a_{i+2m} = a'_{i+2m}. \end{aligned}$$

Hier ist $k(i) = i+2m$ und wieder $a_i = a'_{k(i)}$. Den Fall $t(i) = -1$ erledigt man mit der gleichen Überlegung.

Es sei umgekehrt a'_i das Diagramm eines formalen O_D-Moduls vom Typ t. Wir müssen beweisen, daß durch 2.14.1 das Diagramm eines s.f. O_D-Moduls definiert wird. Nach 2.7 ist das äquivalent mit:

$$d(a_i, a_{i-1}) = 1, d(Ua_i, a_{i+n}) = 1, U^2 a_i = a_{i+2n}.$$

Wir lassen die einfache, aber etwas lange Verifikation aus.

2.15 Satz: *Es sei $S \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ eine gesättigte Menge. Dann existiert über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper L der Charakteristik p ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter s.f. O_D-Modul Y, so daß $S(Y) \neq S$. Y ist supersingulär, wenn $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ und wenn $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so ist sein Isogenietyp $J = \begin{pmatrix} p^{s_1} & 0 \\ 0 & p^{s_2} \end{pmatrix}$, wobei $s_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\mathrm{card}\, \bar{S} - 1)$ und $s_2 = n - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\mathrm{card}\, \bar{S} + 1)$.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. Es sei $S = S_t$ und Y ein s.f. O_D-Modul, so daß $S(Y) \subset S_t$. Wir benutzen die Bezeichnungen des Beweises von 2.14. Ich behaupte, daß ein Index $i \notin S_t$ genau dann für Y kritisch ist, wenn $a'_{i-1} = a'_{k(i)}$. In der Tat:

$$\begin{aligned} i \in S(Y) &\Leftrightarrow Ua_i = a_{i+n-1} \Leftrightarrow a_{i+2n} = U^2 a_i = a_{i+2n-2} \\ &(da\ i+n-1 \in S_t) \Leftrightarrow a_i = a_{i-2} \Leftrightarrow a'_{i-1} = a'_{k(i)} \\ &(da\ a'_{i-1} = a_{i-2}\ \text{und}\ a'_{k(i)} = a_i) \end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet das, daß das Diagramm $\{a'_j\}$ an der Stelle a'_i einen Schritt rückwärts macht,

$$a'_{k(i)} = a'_{i-1} \qquad\qquad a'_i = a'_{i+1} = \cdots = a'_{k(i)-1}$$

Da $Ua'_j = a'_{j+n}$, ist es dasselbe zu fordern, daß das Diagramm an der Stelle a'_{i+n} einen Schritt rückwärts macht. Es sei jetzt $S(Y) = S_t$. Dann gibt es in dem Diagramm a'_j keine Rückwärtsschritte. Da für jedes $j \in \mathbb{Z}$ ein $i \in \mathbb{Z}$ existiert, so daß i mod $2n \notin \bar{S}_t$ und $a'_i = a'_j$, bilden die a'_i, $i \in \mathbb{Z}$, i mod $2n \notin \bar{S}_t$ ein Appartement $\mathscr{A}$ auf dem U durch Translation um $n - \frac{1}{2}\mathrm{card}\, \bar{S}$ operiert. Nach [21] (Chapt. II Annexe) ist U ein hyperbolischer Operator und $\mathscr{A}$ das eindeutig bestimmte Appartement auf dem U durch Translation operiert. Wir erhalten, daß

$$J = \begin{pmatrix} p^{s_1} & 0 \\ 0 & p^{s_2} \end{pmatrix}, \; s_2 - s_1 = n - \tfrac{1}{2}\mathrm{card}\, \bar{S}.$$

Umgekehrt existiert zu diesem J ein bis auf Translation eindeutig bestimmtes Diagramm a'_j ohne Rückwärtsschritte. Ihm entspricht ein formaler O_D-Modul X vom Typ t. Nach der letzten Behauptung von 2.7 definieren zwei Diagramme isomorphe O_D-Moduln vom Typ t, wenn sie sich um ein Element von $\mathrm{End}(\mathscr{K}^2, U) = \mathrm{End}^0_D X = K \times K$ unterscheiden. Folglich ist X und damit nach 2.14 Y bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Es sei $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. Da alle Indexe kritisch sind, folgt wie oben $a_i = a_{i-2}$ für $i \in \mathbb{Z}$. Das Diagramm von Y sieht deshalb wie folgt aus:

(2.15.1)
$$a_{2k} \qquad\qquad a_{2k+1}$$

Im Fall n ungerade können wir $Ux = p^{1/2(1-n)} x^{\sigma^n}$, $x \in \mathscr{K}^2$, annehmen. Da $Ua_i = a_{i+n-1} = a_i$, werden die Punkte a_i durch über K rationale Gitter definiert. Zwei Diagramme der Form 2.15.1 für die die a_i rational über K sind, kann man offenbar durch ein Element aus $Gl_2(K) = \mathrm{End}^0_D Y$ ineinander transformieren. Sie entsprechen deshalb nach 2.7 isomorphen s.f. O_D-Moduln.

Wenn n gerade ist, können wir annehmen, daß

$$Ux = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p^{1-n} & 0 \end{pmatrix} x^{\sigma^n}, \; x \in \mathscr{K}^2.$$

U operiert ohne Fixpunkte auf dem Bruhat-Titsgebäude und läßt das

Segment

$$\zeta = \left(W(L)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + W(L)\begin{pmatrix}0\\p^{-n/2}\end{pmatrix}, W(L)\begin{pmatrix}p^{n/2-1}\\0\end{pmatrix} + W(L)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

als einziges fest. Weil U das Diagramm 2.15.1 fest läßt, folgt $\zeta = (a_{2k}, a_{2k+1})$. Da $\begin{pmatrix}0 & 1\\ p^{n-1} & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{End}_D^0 Y$ die Ecken von ζ vertauscht, ist Y dadurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

§3. Die lokale Struktur des Modulraumes $\mathcal{M}_C$

Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie in §1. Es seien $D_p = D \otimes \mathbb{Q}_p$, $E_p = E \otimes \mathbb{Q}_p$, $K_p = K \otimes \mathbb{Q}_p$ und O_{D_p}, O_{E_p}, O_{K_p} die Ringe der ganzen Elemente. Da die Erweiterung E/K in p unverzweigt ist, finden wir ein $u \in O_{E_p}$, so daß $(au)^2 = a^2 u^\tau u = -\delta Nm_{E_p/K_p} u = p$. Wir setzen $\Pi = au \in O_{D_p}$. Dann gilt:

$$O_{D_p} = O_{E_p}[\Pi], \Pi^2 = p, \Pi e = e^\tau \Pi, e \in O_{E_p}.$$

Die Klassifikation der s.f. O_{D_p}-Moduln in §2 legt nahe, das Schema $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{E_p}$ zu betrachten.

Es sei T ein O_{E_p}-Schema und A ein s.a. O_D-Schema über T. Die formale Gruppe X von A ist ein s.f. O_{D_p}-Modul. Wenn T die Charakteristik p hat, so bezeichnen wir die Menge der kritischen Indexe von X mit $S(A)$ und sprechen von den kritischen Indexen von A. Wenn T das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers der Charakteristik p ist, so bezeichnen wir die Matrix J von X auch mit $J(A)$ (siehe 2.7)

3.1 Satz: *Es sei A ein s.a. O_D-Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p. Dann hat A den p-Rang 0. A ist genau dann isogen zu einem Produkt von supersingulären elliptischen Kurven, wenn die formale Gruppe von A supersingulär ist, d.h. wenn*

$$J(A) = \begin{pmatrix}p^{(n-1)/2} & 0\\ 0 & p^{(n-1)/2}\end{pmatrix} \text{ für } n \text{ ungerade},$$

$$J(A) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ p^{n-1} & 0\end{pmatrix} \text{ für } n \text{ gerade}.$$

Wenn $S(A) = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so ist A isomorph zu einem Produkt von supersingulären elliptischen Kurven.

BEWEIS: A hat den p-Rang 0, da die formale Gruppe von A nach 2.6 mindestens die Höhe $4n$ hat. Die zweite Behauptung des Satzes ist wohlbekannt (Oort [19] Theorem 4.2). Nach Oort [20] ist A isomorph zu einem Produkt von supersingulären elliptischen Kurven, wenn die Hasse-Wittmatrix von A verschwindet. Das bedeutet in der Terminologie der Cartiermoduln $FM \subset VM$. Da alle Indexe kritisch sind, gilt

$$VFM_i = pM_i = \Pi^2 M_i = \Pi VM_{i+n-1} = V^2 M_{i-2}. \quad \text{Q.E.D.}$$

3.2 SATZ: *Es sei A eine s.a. O_D-Mannigfaltigkeit über $\bar{\mathbb{F}}_p$. Wenn A nicht supersingulär ist, so ist $\mathrm{End}^0_D A$ eine total imaginäre, quadratische Erweiterung von K, die in p zerlegt ist. Wenn A supersingulär ist, so ist $D_- = \mathrm{End}^0_D A$ die Quaternionenalgebra über K mit den folgenden Invarianten*:

$$\mathrm{inv}_\nu D_- = \begin{cases} \frac{1}{2}(n+1) \bmod \mathbb{Z}, \textit{ wenn } \nu = p \\ \mathrm{inv}_\nu D, \textit{ wenn } \nu \textit{ nichtarchimedisch}, \nu \neq p \\ \frac{1}{2}, \textit{ wenn } \nu \textit{ archimedisch} \end{cases}$$

BEWEIS: Wir betrachten zunächst den Fall, wo A nicht supersingulär ist. Es sei $\mathbb{F}_q$ ein Definitionskörper für A und für sämtliche Automorphismen von A. Es sei $A = A_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_p$. Wir bezeichnen mit F: $A_0 \to A_0$ den Frobenius von A_0 über $\mathbb{F}_q$. Nach dem Satz von Tate [23] gilt $K[F] = \text{Zentrum } \mathrm{End}^0_K A_0$. Offenbar haben wir $K[F] \subset \mathrm{End}^0_D A_0$. Der Grad von $K[F]$ bzw. $\mathrm{End}^0_D A_0$ über K ist höchstens zwei, da nach 2.10 der Endomorphismenring $\mathrm{End}^0_D X$ der formalen Gruppe von A isomorph zu $K_p \times K_p$ ist. Nach dem Satz von Manin [5] und 2.11 sind die p-adischen Absolutbeträge der Wurzeln des Minimalpolynoms von F über K $(1+2s_1)/2n$ und $(1+2s_2)/2n$, wobei $s_1 \neq s_2$, $s_1 + s_2 = n-1$. Da nach Weil die archimedischen Absolutbeträge dieser Wurzeln $q^{1/2}$ sind, können sie nicht reell sein. Deshalb muß $K[F]$ eine total imaginäre, quadratische Erweiterung von K sein.

Es sei A supersingulär. Dann ist A isogen zu C^{2n}, wobei C eine supersinguläre elliptische Kurve über $\bar{\mathbb{F}}_p$ ist. $Q = \mathrm{End}^0 C$ ist die Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, die nur in p und im Unendlichen verzweigt ist. Wir erhalten:

$$\iota : D \longrightarrow \mathrm{End}^0 A = M_{2n}(Q)$$

Der Kommutator von D in $M_{2n}(Q)$ sind die $D \otimes_{\mathbb{Q}} Q$-linearen Endomorphismen des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes Q^{2n}. Man berechnet leicht die Invarianten von $D \otimes_{\mathbb{Q}} Q = D \otimes_K (K \otimes_{\mathbb{Q}} Q)$ und erhält $D \otimes_{\mathbb{Q}} Q \cong M_2(D_-)$. Die Behauptung ist dann klar.

Wir betrachten offene kompakte Untergruppen $C \subset D^*(\mathbb{A}_f)$, die den Bedingungen 1.6 genügen. Insbesondere gilt $C \subset C_N$ für ein $N \geq 3$, $(N, p) = 1$.

3.3 KOROLLAR: *Es sei* $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ *ein Punkt von* $\mathcal{M}_C(T)$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Aut}(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) = K^* \cap C.$$

BEWEIS: Da s.a. O_D-Mannigfaltigkeiten potentiell gute Reduktion besitzen, kann man sich auf den Fall beschränken, daß A über $\bar{\mathbb{F}}_p$ definiert ist. Gegeben sei ein Automorphismus

$$\alpha : (A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \longrightarrow (A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}).$$

Da α die K-homogene Polarisierung $\bar{\lambda}$ auf sich abbildet, gilt $\alpha \cdot \hat{\alpha} = k \in K^*$, wobei $\hat{\alpha}$ die Rosatiinvolution von α bezeichnet.

Die einzige positive Involution auf einer imaginärquadratischen Erweiterung von K ist die Konjugation $\alpha \mapsto \alpha^*$, und die einzige positive Involution auf einer im Unendlichen überall verzweigten Quaternionenalgebra über K ist die Hauptinvolution $\alpha \mapsto \alpha^*$.

Da $\alpha \in \mathrm{End}_D^0 A$, folgt aus 3.2, daß $\hat{\alpha} = \alpha^*$. Ein $\eta \in \bar{\eta}$ definiert einen Homomorphismus von K-Algebren

$$\mathrm{End}_{O_D} A \longrightarrow \mathrm{End}_{O_D} V \otimes \mathbb{A}_f^p = D \otimes \mathbb{A}_f^p.$$

Dabei wird α auf ein Element aus $C \subset C_N$ abgebildet und folglich α^* auf ein Element aus C_N. Wir erhalten $k \in C_N$. Der Endomorphismus $\alpha^2 k^{-1}$ wirkt also auf den N-Teilungspunkten von A trivial und fixiert jede Polarisierung $\lambda \in \bar{\lambda}$. Nach dem Lemma von Serre (Mumford [17]) erhalten wir $\alpha^2 = k$. Daraus folgt $\alpha = \alpha^* \in K$. Q.E.D.

3.4 KOROLLAR: $\mathcal{M}_C$ *ist ein feines Modulschema.*

BEWEIS: $\mathcal{M}_C$ ist der Quotient von $\tilde{\mathcal{M}}_C$ nach der Wirkung der Gruppe $(K_+^* \cap \mathrm{Nm}\, C)/(K^* \cap C)^2$. Wir müssen beweisen, daß diese Gruppe fixpunktfrei auf $\tilde{\mathcal{M}}_C$ operiert. Es sei $(A, \iota, \lambda, \bar{\eta}) \in \tilde{\mathcal{M}}_C(\bar{\mathbb{F}}_p)$ ein Fixpunkt von $\zeta \in K_+^* \cap \mathrm{Nm}\, C$. Dann existiert ein Isomorphismus α: $(A, \iota, \lambda\zeta, \bar{\eta}) \to (A, \iota, \lambda, \bar{\eta})$. Da nach 3.3 $\alpha \in K^* \cap C$, folgt $\zeta = \alpha^2 \in (K^* \cap C)^2$. Q.E.D.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß jedes s.a. O_D-Schema (A, ι) über einem $\mathbb{Z}_p$-Schema T eine eindeutig bestimmte involutionstreue, K-homogene, Polarisierung besitzt.

3.5 Lemma: *Es sei (A, ι) ein s.a. O_D-Schema über einem zusammenhängenden $\mathbb{Z}_p$-Schema T. Dann gibt es zu jeder positiven Involution auf D höchstens eine K-homogene, involutionstreue Polarisierung von A.*

Beweis: Wegen der potentiell guten Reduktion kann man wieder $T = \operatorname{Spec} \bar{\mathbb{F}}_p$ annehmen. Es seien λ_1 und λ_2 involutionstreue Polarisierungen. Dann gilt $\lambda_1 = \lambda_2\alpha$, wobei $\alpha \in \operatorname{End}^0 A$ invariant unter der durch λ_2 induzierten Rosatiinvolution ist. Da λ_1 und λ_2 die gleiche Involution auf D induzieren, folgt $\alpha \in \operatorname{End}_D^0 A$. Aus der Invarianz unter einer positiven Involution erhalten wir wie im Beweis von 3.3, daß $\alpha \in K^*$.

3.6 Lemma: *Es seien T und T' zwei O_{E_p}-Schemata, auf denen p lokal nilpotent ist, und es sei $T \to T'$ eine Nilimmersion. (B', ι') sei ein s.a. O_D-Schema über T' und (B, ι) seine Reduktion über T. Dann läßt sich jede effektive, involutionstreue Polarisierung von B zu einer effektiven, involutionstreuen Polarisierung von B' liften.*

Beweis: Wir wenden das Kriterium von Messing [14] (Chapt. V Theorem 1.6) an. Offenbar dürfen wir voraussetzen, daß $T \to T'$ dividierte Potenzen besitzt. Es sei M die Liealgebra der universellen Erweiterung von B'. Da M ein $O_D \otimes O_{T'}$-Modul ist, finden wir eine Zerlegung

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} M_i, M_i = \{m \in M \mid \iota(e)m = e^{\sigma^{-i}}m, e \in O_{E_p}\}$$

Eine effektive Polarisierung λ definiert eine alternierende Bilinearform

$$\Phi : M \times M \longrightarrow O_T.$$

Da λ involutionstreu ist, gilt

$$\Phi(\iota(e)m, m') = \Phi(m, \iota(e)m'), e \in O_{E_p}.$$

Wenn $m \in M_i$ und $m' \in M_j$, so folgt

$$e^{\sigma^{-i}}\Phi(m, m') = e^{\sigma^{-j}}\Phi(m, m').$$

Wir erhalten $\Phi(M_i, M_j) = 0$ für $i \neq j$.

Es sei $\mathrm{Fil} \subset M$ die Hodgefiltration. Wir finden $\mathrm{Fil} = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} \mathrm{Fil}_i$, wobei $\mathrm{Fil}_i \subset M_i$ ein direkter Summand vom Rang 1 ist. Wir dürfen nach dem Kriterium von Messing liften, da Fil_i bezüglich Φ isotrop ist.

3.7 LEMMA: *Es sei (A, ι) ein s.a. O_D-Schema über einem zusammenhängenden $\mathbb{Z}_p$-Schema T und λ eine involutionstreue Polarisierung von A. Dann existiert ein $s \in \mathbb{Z}$, so daß $p^s\lambda$ in p prinzipal ist.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, daß man sich auf den Fall beschränken kann, wo $T = \mathrm{Spec}\ L$ das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers ist. Wir dürfen annehmen, daß λ effektiv ist. Es bezeichne K die p-Komponente des Kerns von $\lambda : B \to B^*$. Nach Voraussetzung gilt für jeden geometrischen Punkt t von T, daß $K_t = \mathrm{Ker}\ p^{h(t)}$. Da K lokal konstant ist, muß $h(t) = h$ konstant sein. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{Ker}\ p^h \subset K$. Offenbar kann man dafür annehmen, daß T artinsch ist. Wenn T von der Charakteristik 0 ist, so ist K étale. Die Behauptung ist dann klar. Es sei T von der Charakteristik p. Nach Voraussetzung ist $p^{-h}\lambda$ eine effektive Polarisierung über dem Restklassenkörper, die sich nach 3.6 zu einer effektiven Polarisierung λ' über T liften läßt. Nach dem Rigiditätslemma (Mumford [16]) folgt schließlich $\lambda' p^h = \lambda$.

Es sei $T = \mathrm{Spec}\ L$. Wenn L die Charakteristik 0 hat, so folgt das Lemma unmittelbar aus 1.1, 1.2 und 1.4. Es sei $\mathrm{Char}\ L = p$. Wir wählen einen Homomorphismus $O_{E_p} \to L$ und erhalten eine Zerlegung des Cartiermoduls M von A:

$$M = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M_i.$$

Die Polarisierung λ definiert eine alternierende Bilinearform Φ: $M \times M \to W(L)$, so daß

$$\Phi(Vm, Vm) = p\Phi(m, m)^{\sigma^{-1}}. \tag{3.7.1}$$

Aus dem Beweis von 3.6 folgt $\Phi(M_i, M_j) = 0$ für $i \neq j$. Da VM_i in M_{i+1}

den Index 1 hat, folgt aus 3.7.1

$$\operatorname{ord}_p \det \Phi|_{M_i} = \operatorname{ord}_p \det \Phi|_{M_{i+1}}.$$

Weil $\Lambda^2 M_0 = W(L)$, finden wir ein s, so daß $p^s\Phi|_{M_0}$ eine perfekte Paarung ist. Offenbar ist dann $p^s\lambda$ in p prinzipal.

3.8 SATZ: *Es sei (A, ι) ein s.a. O_D-Schema über einem $\mathbb{Z}_p$-Schema T. Dann gibt es zu jeder positiven Involution auf D genau eine K-homogene Polarisierung, so daß ι involutionstreu ist.*

BEWEIS: Die Eindeutigkeit haben wir bereits bewiesen. Wir geben zunächst auf D unsere fixierte Involution $d \mapsto \hat{d}$ vor.

Es sei $T' \to T$ ein f.p.q.c. Morphismus. Wir zeigen, daß aus der Existenz einer K-homogenen Polarisierung λ' auf $A_{T'}$ die Existenz einer solchen auf A folgt. Wenn $T' \to T$ eine unverzweigte Galoisüberlagerung mit der Galoisgruppe G ist, so ist $\Sigma_{g \in G}\, g^*(\lambda')$ die gewünschte Polarisierung auf A.

Über einer geeigneten unverzweigten Galoisüberlagerung von T finden wir eine Rigidifizierung

$$\bar{\eta}\colon \hat{V}^p(A) \to V \otimes \mathbb{A}_f^p \bmod C_N,\ N \geq 3, (N, p) = 1.$$

Wenn wir A in seiner Isogenieklasse abändern, so dürfen wir annehmen, daß $\bar{\eta}$ einen Isomorphismus induziert

$$\bar{\eta}: \hat{T}^p(A) \longrightarrow V \otimes \hat{Z}^p \bmod C_N$$

Wir dürfen deshalb voraussetzen, daß A über T eine Rigidifizierung $\bar{\eta}$ besitzt. Dann ist $(A_{T'}, \iota_{T'}, \lambda', \bar{\eta}_{T'})$ ein Punkt des Modulproblems $\mathcal{M}_{C_N}$. Wegen der Eindeutigkeit von K-homogenen Polarisierungen erhalten wir nach treuflachem Abstieg einen Punkt von $\mathcal{M}_{C_N}(T)$ und folglich eine K-homogene involutionstreue Polarisierung von A.

Wir zeigen, daß es genügt, den Satz über einem Grundkörper zu beweisen. Es sei $t \in T$. Da es ausreicht, lokal für die f.p.q.c. Topologie eine involutionstreue Polarisierung zu finden, genügt es, deren Existenz über Spec $\hat{O}_{T,t}$ zu zeigen. Wir können deshalb annehmen, daß T artinsch ist. Wenn T die Charakteristik p hat, so folgt die Behauptung aus 3.6. Wenn T die Charakteristik 0 hat, so können wir annehmen, daß T ein Schema über $\mathbb{C}$ ist. Die alternierende Form ψ auf $H_1(A, \mathbb{Q}) \cong D$ respektiert die Hodgefiltration auf $H_1(A, \mathbb{Q}) \otimes O_T$. Daher definiert ψ eine Abbildung $A \to A^*$, die nach 1.1 und 1.3 die gewünschte Polarisierung ist.

Es bleibt der Fall, wo $T = \operatorname{Spec} L$ das Spektrum eines Körpers der Charakteristik p ist. Wegen 3.6 und da s.a. O_D-Mannigfaltigkeiten potentiell gute Reduktion besitzen, beschränkt man sich weiter auf den Fall, wo L ein endlicher Körper ist.

Es sei zunächst A nicht supersingulär. Dann ist $Z = \operatorname{End}_D^0 A$ eine total imaginäre, quadratische Erweiterung von K und $F = EZ$ ein CM-Körper von A. Wir haben eine Einbettung $\kappa : F \to \operatorname{End}^0 A$. Nach Tate [25] Lemme 3 finden wir ein abelsches F-Schema $\tilde{A}$ über einem diskreten Bewertungsring der Charakteristik 0 mit dem Restklassenkörper L, dessen Reduktion isogen zu A ist. Man weiß, daß $\tilde{A}$ eine Polarisierung besitzt, für die $F \to \operatorname{End}^0 \tilde{A}$ involutionstreu ist. Deshalb finden wir eine Polarisierung λ_1 von A und eine involutionstreue Einbettung $\kappa_1 : F \to \operatorname{End}^0 A$. Es sei $\kappa = x^{-1}\kappa_1 x$, $x \in \operatorname{End}^0 A$. Dann ist $\lambda_2 = x^* \lambda_1 x$ eine Polarisierung, für die κ involutionstreu ist. Die Rosatiinvolution $x \mapsto x'$ von λ_2 läßt D invariant und ist auf E trivial. Man sieht leicht, daß $x' = \alpha \hat{x} \alpha^{-1}$, $\alpha \in E$, $x \in D$. Da die Involution $x \mapsto x' = \alpha a x^* (\alpha a)^{-1}$ positiv ist, erhalten wir, daß $(\alpha a)^2 = a^2 \alpha^\tau \alpha$ ein total negatives Element von K ist. Dann ist $\alpha^\tau \alpha$ total positiv. Nach Abänderung durch ein Element aus K, können wir annehmen, daß α total positiv ist. Nach 1.4 ist dann $\lambda = \lambda_2 \alpha$ die gewünschte Polarisierung.

Für den Fall A supersingulär benötigen wir das folgende elementare Lemma.

3.9 Lemma: *Es sei Q eine Quaternionenalgebra über einem total reellen Zahlkörper K, die überall im Unendlichen verzweigt ist. Wir bezeichnen mit $x \mapsto x^*$, $x \in Q$ die Hauptinvolution auf Q. Jede positive Involution auf $M_r(Q)$ hat die Form $X \mapsto A\,{}^tX^* A^{-1}$, wobei $A = C\,{}^tC^*$, $A, C \in M_r(Q)$.*

Beweis: Jede Involution auf $M_r(Q)$ ist von der Form $X \mapsto A\,{}^tX^*A^{-1}$, wobei $A = \pm {}^tA^*$. Wir zeigen, daß für eine positive Involution der Fall $A = -{}^tA^*$ ausgeschlossen ist.

Es sei $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = B = (b_{ij})$. Wir betrachten Matrizen $X = (x_{ij})$, so daß $x_{11} = x$ und sonst $x_{ij} = 0$. Da die Involution positiv ist, gilt

$$0 < \operatorname{Tr}^0_{M_r(Q)} X A\,{}^tX^* A^{-1} = \operatorname{Tr}^0_Q x a_{11} x^* b_{11}.$$

Setzen wir $x = a_{11}$, so folgt $\operatorname{Tr}^0_Q a_{11} b_{11} > 0$. Da $a_{11} = -a^*_{11}$, existiert nach dem Satz von Skolem–Noether ein $x \in Q$, so daß $x a_{11} x^{-1} = -a_{11}$.

$$0 < \operatorname{Tr}^0_Q x a_{11} x^* b_{11} = \operatorname{Tr}^0_Q x a_{11} x^{-1} x x^* b_{11} = -xx^* \operatorname{Tr}^0_Q a_{11} b_{11}.$$

Wir erhalten den gewünschten Widerspruch $\operatorname{Tr}^0_Q a_{11} b_{11} < 0$.

Es sei $(v, w) = {}^t v^* B w$, $v, w \in Q^r$. Das ist eine hermitsche Bilinearform auf dem Q-Rechtsmodul Q^r. Wir können sie auf Diagonalform bringen

$$ {}^t C_1^* B C_1 = \begin{pmatrix} k_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_{rr} \end{pmatrix}, \; k_{ij} \in K. $$

Da die Involution positiv ist, folgt, daß die k_{ii} entweder alle total positiv oder alle total negativ sein müssen. Ersetzt man eventuell A durch $-A$, so kann man annehmen, daß der erste Fall vorliegt. Dann existieren $q_{ii} \in Q$, so daß $k_{ii} = q_{ii} q_{ii}^*$. Daraus erhält man unmittelbar die Behauptung des Lemmas.

Es sei C eine supersinguläre elliptische Kurve und $Q = \mathrm{End}^0 C$. Nach einer endlichen Erweiterung des Körpers L dürfen wir annehmen, daß A isogen zu C^{2n} ist. Wir erhalten eine Einbettung

$$ \iota : D \longrightarrow \mathrm{End}^0(C^{2n}) = M_{2n}(Q). $$

Aus 3.9 sieht man leicht, daß jede positive Involution auf $M_{2n}(Q)$ durch ein amples Linienbündel auf C^{2n} induziert wird.

Wir zeigen, daß eine Einbettung ι_0: $D \to M_{2n}(Q)$ und eine positive Involution $X \mapsto X'$ auf $M_{2n}(Q)$ existiert, so daß $\iota_0(\hat{d}) = \iota_0(d)'$. Dann finden wir eine Matrix $G \in M_{2n}(Q)$, so daß $\iota_0 = G^{-1} \iota G$. Offenbar ist $X \mapsto GG'X'(GG')^{-1}$ eine positive Involution auf $M_{2n}(Q)$ für die ι involutionstreu ist.

Es bleiben also ι_0 und $X \mapsto X'$ zu konstruieren. Wir betrachten auf $D \otimes Q = M_2(D_-)$ die positive Involution $d \otimes x \mapsto \hat{d} \otimes x^*$. Auf $M_2(D_-)$ hat diese Involution die Form $X \mapsto A^{-1}{}^t X^* A$. Nach 3.9 kann man annehmen, daß $(v, w) = \mathrm{Tr}^0_{D_-} {}^t v^* A w$, $v, w \in D_-^2$ eine positiv definite, symmetrische K-Bilinearform auf D_-^2 ist. Es gilt

$$ (dv, w) = (v, \hat{d} w), (xv, w) = (v, x^* w), \; d \in D, x \in Q. $$

Deshalb induziert (,) auf $\mathrm{End}_Q D_-^2 = M_{2n}(Q)$ die gesuchte positive Involution. Damit ist die Existenz von ι_0 und $X \mapsto X'$ bewiesen.

Wir haben 3.9 für die Involution $d \mapsto \hat{d}$ auf D gezeigt. Es sei $d \mapsto d'$ irgendeine andere positive Involution auf D. Dann gilt $d' = \alpha^{-1} \hat{d} \alpha$, wobei $\alpha \in D$, $\hat{\alpha} = \alpha$ und $\mathrm{Nm}^0 \alpha$ total positiv ist. Es sei $\bar{\lambda}$ eine K-homogene Polarisierung von A, die auf D die Involution $d \mapsto \hat{d}$ induziert. Mit Hilfe von 1.4 sieht man, daß $\bar{\lambda}\alpha$ eine K-homogene Polarisierung ist, die die Involution $d \mapsto d'$ induziert. Der Beweis von 3.9 ist beendet.

Einen T-wertigen Punkt von $\mathcal{M}_C$ kann man jetzt folgendermaßen beschreiben:

(a) ein abelsches Schema A über T bis auf zu p prime Isogenie und eine Einbettung $\iota : O_D \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \mapsto \operatorname{End} A \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, so daß

$$\operatorname{Tr}(\iota(d)/\operatorname{Lie} A) = \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}} \operatorname{Tr}^0 d \text{ für } d \in O_D \otimes \mathbb{Z}_{(p)},$$

(b) eine Äquivalenzklasse von $D \otimes \mathbb{A}_f^p$-Modulisomorphismen

$$\bar{\eta} : \hat{V}^p(A) \longrightarrow V \otimes \mathbb{A}_f^p \bmod C^p.$$

Da $O_D \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ die eindeutig bestimmte $\mathbb{Z}_{(p)}$-Maximalordnung in D ist, hängt dieses Modulproblem auch nicht mehr von der Wahl von O_D ab.

Es sei $S \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ eine zulässige Menge, d.h. i oder $i+n \in S$ für $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{C,S}$ das abgeschlossene Unterschema von $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_E/pO_E = \mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_{p^{2n}}$, das aus allen Punkten $(A, \iota, \bar{\eta})$ besteht, so daß $S(A) \supset S$.

3.10 Satz: *$\mathcal{M}_{C,S}$ ist ein glattes Schema der Dimension $2n$-card S über O_E/pO_E. Die abgeschlossenen Unterschema $\mathcal{M}_{C,S}$ von $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_E/pO_E$ schneiden sich transversal, und es gilt $\cup_S \mathcal{M}_{C,S} = \mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_E/pO_E$, $\mathcal{M}_{C,S} \cap \mathcal{M}_{C,S'} = \mathcal{M}_{C,S\cup S'}$.*

Es sei x ein abgeschlossener Punkt von $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{E_p}$ und O_x der lokale Ring im Punkt x. Die Menge der kritischen Indexe des s.a. O_D-Schemas, das über dem Punkt x liegt, bezeichnen wir mit S_x. Es sei $\bar{S}_x = S_x \cap (S_x + n)$, $S'_x = S_x \backslash \bar{S}_x$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$W(k(x))[[X_i, U_j]]_{i \in S'_x, j \in \bar{S}_x}/(U_j U_{j+n} - p) \longrightarrow \hat{O}_x.$$

Es sei $S \subset S_x$ eine zulässige Teilmenge. Dann wird das Schema $\mathcal{M}_{C,S}$ lokal im Punkt x durch die Gleichungen $U_j = 0$ für $j \in S \cap \bar{S}_x$ definiert.

Beweis: Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß $\mathcal{M}_{C,S}$ nicht leer ist. Offenbar genügt es, die Behauptungen über $\hat{O}_x$ zu beweisen. Es sei A_x das s.a. O_D-Schema über dem Punkt x und X_0 seine formale Gruppe. Wir fixieren eine homogene Basis $\bar{\gamma}_i$, $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ der Liealgebra von X_0. Unter einer Deformation von $(X_0, \bar{\gamma}_i)$ über einer artinschen $W(k(x))$-Algebra $\mathcal{O}$ mit dem Restklassenkörper $k(x)$ verstehen wir einen s.f. O_D-Modul X' über $\mathcal{O}$ zusammen mit einer homogenen Basis $\bar{\gamma}'_i$ von Lie X' und einem Isomorphismus $(X_0, \bar{\gamma}_i) = (X', \bar{\gamma}'_i) \otimes_{\mathcal{O}} k(x)$. Offenbar existiert die universelle Deformation $(Y, \bar{\delta}_i)$ über einer kompletten lokalen $W(k(x))$-Algebra R. Es sei

$$\Pi \bar{\delta}_i = \tilde{a}_i \bar{\delta}_{i+n}, \ \tilde{a}_i \tilde{a}_{i+n} = p.$$

Wenn der Index i bezüglich X_0 kritisch ist, so liegt $\tilde{a}_i$ im Maximalideal von R. Deshalb haben wir einen Homomorphismus

$$\alpha : W(k(x))[\![U_j]\!]_{j\in \bar{S}_x}/(U_jU_{j+n}-p) \longrightarrow R,$$
$$U_j \longmapsto a_j$$

der nach Satz 2.5 formal glatt ist.

Nach dem Kriterium von Serre und Tate (Drinfeld [6]) ist $\hat{O}_x$ die Basis der universellen Deformation von X_0. Deshalb finden wir einen Homomorphismus $\beta : \hat{O}_x \to R$, der ebenfalls formal glatt ist. Es sei X der s.f. O_D-Modul über $\hat{O}_x$. Da $\hat{O}_x$ lokal ist, finden wir eine homogene Basis von Lie X und damit einen Schnitt $s: R \to \hat{O}_x$. Wir werden zeigen, daß $s\alpha$ eine Surjektion in den Tangentialräumen induziert.

Es sei M der Cartiermodul von X_0, und es sei $k = k(x)$. Wir wählen eine Basis γ_i, δ_i des k-Vektorraumes M_i/pM_i, so daß $\delta_i \in VM_{i-1}$ und γ_i mod $VM_{i-1} = \bar{\gamma}_i$. Dann erhalten wir Gleichungen

$$\Pi\delta_i = b_i\delta_{i+n},\ \Pi\gamma_i = a_i\gamma_{i+n} + c_i\delta_{i+n},\ a_i, b_i, c_i \in k.$$

Der Index i ist genau dann kritisch, wenn $a_i = 0$, und $i+n$ ist ganau dann kritisch, wenn $b_i = 0$. In der Tat:

$$b_i = 0 \Leftrightarrow \Pi VM_{i-1} \subset pM_{i+n} = \Pi^2 M_{i+n} \Leftrightarrow VM_{i-1} \subset \Pi M_{i+n} \Leftrightarrow i+n \text{ kritisch.}$$

Deshalb können wir nach Abänderung der δ_i annehmen, daß $b_i = a_{i+n}$.

Wir betrachten die Deformationen von X_0 über dem Ring $k[\epsilon]$, $\epsilon^2 = 0$. Nach Messing [14] entsprechen sie den Liftungen der Filtrationen $VM_{i-1}/pM_i \subset M_i/pM_i$ zu Filtrationen $L_i \subset M_i/pM_i \otimes k[\epsilon] = M_i/pM_i \oplus \epsilon M_i/pM_i$. Man kann die L_i in der Form $L_i = k[\epsilon](\delta_i + \epsilon\beta_i)$ schreiben, wobei L_i nur von β_i modulo VM_{i-1} abhängt. Die Invarianz von $\bigoplus L_i$ unter Π bedeutet

$$\Pi(\delta_i + \epsilon\beta_i) = (u_i + \epsilon v_i)(\delta_{i+n} + \epsilon\beta_{i+n}).$$

Betrachtet man diese Gleichungen modulo ϵ, so folgt $u_i = a_{i+n}$. Wir erhalten:

$$\Pi\beta_i = a_{i+n}\beta_{i+n} \bmod VM_{i+n-1} \tag{3.10.1}$$

Der Raum der infinitesimalen Deformationen von X_0 ist folglich isomorph zum Raum aller $\beta = (\beta_i) \in \bigoplus M_i/VM_{i-1}$, so daß die Gleichungen 3.10.1 erfüllt sind. Offenbar sind diese Gleichungen äquivalent mit

$$\beta_i = 0 \bmod VM_{i-1} \text{ für i nicht kritisch.}$$

Die universelle, erste infinitesimale Deformation von X_0 läßt sich deshalb folgendermaßen beschreiben. Sie ist definiert über dem Ring $k[u_j]_{j \in S_x}$, $u_i u_j = 0$, durch die Filtrationen

$$L_i = k[u_j](\delta_i + u_i \gamma_i) \subset M_i/pM_i \otimes_k k[u_j], \text{ für } i \in S_x$$
$$L_i = k[u_j]\delta_i \subset M_i/pM_i \otimes_k k[u_j], \text{ für } i \notin S_x.$$

Die Liealgebra dieser Deformation ist $\bigoplus (M_i/pM_i \otimes_k k[u_j])/L_i$ und γ_i ist eine homogene Basis über $k[u_j]$. Wenn i und $i+n$ kritisch sind, so gilt $c_i \neq 0$, $\Pi\gamma_i = c_i\delta_{i+n} = -c_i u_{i+n}\gamma_{i+n} \bmod L_i$.

Der Morphismus $s\alpha$ sieht deshalb auf der ersten infinitesimalen Umgebung wie folgt aus

$$W(k)[\![U_j]\!]_{j\in \bar{S}_x}/(p, U_iU_j) \longrightarrow k[u_j]$$
$$U_j \longrightarrow -c_j u_{j+n}$$

Die Injektivität der Abbildung $s\alpha$ auf den Kotangentialräumen ist jetzt offensichtlich.

Es seien $f_1, \ldots, f_{2n}$ Erzeugende des Kerns von s. Die Injektivität besagt, daß das Bild von $d\alpha$ und $(df_1, \ldots, df_{2n})$ den Durchschnitt 0 haben. Da R eine Potenzreihenalgebra über $W(k)[\![U_j]\!]_{j\in \bar{S}_x}/(U_jU_{j+n} - p)$ ist, folgt dasselbe für $R/(f_1, \ldots, f_{2n}) = \hat{O}_x$. Die übrigen Behauptungen von 3.10 sind jetzt klar.

§4. Die Schema $\mathcal{M}_{C,S}$ für gesättigte Mengen S

Wir beginnen mit einer Bemerkung über die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{M}_C$. Die reduzierte Norm Nm^0: $D \hookrightarrow K$ induziert eine* Abbildung

$$\bar{\kappa}_C : M_{D^*,C} = C_\infty \times C\backslash D^*(\mathbb{A})/D^* \longrightarrow \mathrm{Nm}^0 C_\infty \times \mathrm{Nm}^0 C\backslash K^*(\mathbb{A})/K^*.$$

Nach Deligne [4] 2.7.1 sind die Fasern dieser Abbildung die Zusammenhangskomponenten von $M_{D^*,C}$. Offenbar ist $\mathrm{Nm}^0 C_\infty$ gleich der Menge der total positiven Elemente von $(K \otimes \mathbb{R})^*$. Die Einbettung

$K^*(\mathbb{A}_f) \subset K^*(\mathbb{A})$ definiert daher eine Bijektion

$$\mathrm{Nm}^0 C_\infty \times \mathrm{Nm}^0 C \backslash K^*(\mathbb{A})/K^* \longrightarrow \mathrm{Nm}^0 C \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*_+$$

Nach 1.6 ist C_p die Menge der Einheiten in $D \otimes \mathbb{Q}_p$. Da folglich $\mathrm{Nm}^0 C_p = O_{K_p}$, erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Nm}^0 C \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*_+ \longrightarrow \mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p)/U_p(K_+).$$

Andererseits haben wir während des Beweises von 1.7 einen Morphismus definiert.

$$\bar{\kappa} : \mathcal{M}_C \longrightarrow \mathrm{Nm}^0 C^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))/U_p(K_+)$$

Man sieht leicht, daß $\bar{\kappa} \otimes \mathbb{C} = \bar{\kappa}_{\mathbb{C}}$, wobei man über $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Exponentials $\mathbb{A}_f(-1)$ und $\mathbb{A}_f$ identifiziert (vergl. Deligne [4] 4.6). Aus dem Zusammenhangssatz von Zariski folgern wir:

4.1 SATZ: *Die geometrischen Fasern von $\bar{\kappa}$ sind zusammenhängend.*

Die gesättigte Menge $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ spielt eine besondere Rolle. Wir betrachten daher zunächst diesen Fall.

4.2 LEMMA: *Es gibt über einem algebraisch abgeschlossenen Körper bis auf zu p prime Isogenie genau eine s.a. O_D-Mannigfaltigkeit (B, ι) mit $S(B) = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Es sei C eine supersinguläre elliptische Kurve und Q ihr Endomorphismenring. Nach 3.1 ist B isogen zu C^{2n} und hat den Endomorphismenring $M_{2n}(Q)$. Da alle Einbettungen $D \to M_{2n}(Q)$ konjugiert sind, ist (B, ι) bis auf Isogenie eindeutig bestimmt. Wir erhalten die Eindeutigkeit bis auf zu p prime Isogenie aus 2.15.

Es seien $O_Q = \mathrm{End}\ C$, $\Lambda = O_Q \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ und $\mathcal{D} = O_D \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Zur Konstruktion von (B, ι) genügt es, eine Einbettung

$$\iota : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{End}\ C^{2n} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong M_{2n}(\Lambda)$$

zu finden, so daß die Spurbedingung erfüllt ist und alle Indexe kritisch sind.

Wir bezeichnen mit $\hat{D}, \hat{\mathcal{D}}, \hat{\Lambda}$ die p-adischen Komplettierungen. Da

$D \otimes Q = M_2(D_-)$, finden wir einen $D \otimes Q$-Modul vom Rang $8n$ über $\mathbb{Q}$ und folglich eine Einbettung

$$\iota_0 : D \longrightarrow M_{2n}(Q) = \mathrm{End}^0 C^{2n}.$$

Es sei Y die formale Gruppe von C. Wir betrachten den s.f. O_D-Modul X für den alle Indexe kritisch sind (2.15). Nach 3.1 gibt es einen Isomorphismus $X \cong Y^{2n}$. Wir erhalten eine Einbettung

$$\alpha : \hat{\mathscr{D}} \longrightarrow \mathrm{End}\, Y^{2n} = M_{2n}(\hat{\Lambda}),$$

so daß die Spurbedingung erfüllt ist und alle Indexe kritisch sind. Nach dem Satz von Skolem-Noether sind die Einbettungen $\hat{\iota}_0, \alpha_{\mathbb{Q}} : D \to \mathrm{End}^0\, Y^{2n}$ konjugiert.

$$x\hat{\iota}_0 x^{-1} = \alpha_{\mathbb{Q}}, \quad x \in Gl_{2n}(\hat{Q}).$$

Es gilt $x = \hat{z} \cdot y$, wobei $\hat{z} \in Gl_{2n}(\hat{\Lambda})$, $y \in Gl_{2n}(Q)$. Offenbar definiert $\iota = y\iota_0 y^{-1}$ die gesuchte Einbettung $\mathscr{D} \to M_{2n}(\Lambda)$.

Das Lemma 4.2 gibt uns die Möglichkeit, $\mathscr{M}_{Z/2nZ}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ zu berechnen. (B, ι) sei die s.a. O_D-Mannigfaltigkeit bis auf zu p prime Isogenie über $\bar{\mathbb{F}}_p$ aus 4.2. Den Endomorphismenring $\mathrm{End}^0_D B$ identifizieren wir mit D_-. Wir wählen einen $D(\mathbb{A}_f^p)$-Linksmodulisomorphismus

$$\eta_0 : \hat{V}^p(B) \longrightarrow V \otimes \mathbb{A}_f^p.$$

η_0 definiert einen Isomorphismus

$$\varphi : D_-(\mathbb{A}_f^p) \longrightarrow D^{opp}(\mathbb{A}_f^p),$$

so daß $\eta_0(dx) = \eta_0(x)\varphi(d), x \in \hat{V}^p(B), d \in D_-(\mathbb{A}_f^p)$.

Es sei $I \subset D_-^*$ die Untergruppe aller Automorphismen von (B, ι), d.h. der zu p primen Isogenien $(B, \iota) \to (B, \iota)$. Man kann I folgendermaßen berechnen. Es sei $\{a_i\}_{i \in Z}$ das Diagramm von B im Bruhat–Titsgebäude. $(D_- \otimes \mathbb{Q}_p)^*$ operiert auf dem Gebäude. I ist der Durchschnitt von D_- mit der Untergruppe $I_p \subset (D_- \otimes \mathbb{Q}_p)^*$ aller Elemente, die das Simplex (a_0, a_1) fixieren und deren Determinante eine Einheit ist. Wenn n gerade ist, so ist $D_- \otimes \mathbb{Q}_p$ die Quaternionenalgebra mit der Invariante $\frac{1}{2}$ über K_p und I_p die Gruppe ihrer Einheiten. Wenn n ungerade ist, so gilt $D_- \otimes \mathbb{Q}_p = Gl_2(K_p)$. Wir können annehmen, daß a_0 die Klasse des Gitters $O_{K_p} \oplus O_{K_p}$ und a_1

die Klasse des Gitters $O_{K_p} \oplus pO_{K_p}$ ist. Dann gilt

$$I_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_2(O_{K_p}) \mid p|c \right\}.$$

Es sei $P_p = I_p$ für n gerade und $P_p = Gl_2(O_{K_p})$ für n ungerade.

Ein beliebiger Punkt aus $\mathcal{M}_{Z/2nZ}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ ist von der Form $(B, \iota, \bar{\eta})$. Es gilt $\bar{\eta} = \overline{\eta_0 d}$, $d \in D^*(\mathbb{A}_f^p)$ wobei die Klasse dC^p durch $\bar{\eta}$ eindeutig bestimmt ist. Wir erhalten

$$\mathcal{M}_{C,Z/2nZ}(\bar{\mathbb{F}}_p) = \varphi(I)\backslash D^*(\mathbb{A}_f^p)/C^p = \varphi^{-1}(C^p)\backslash D^*_-(\mathbb{A}_f^p)/I.$$

Die Gruppe $\varphi^{-1}(C^p)$ bezeichnen wir mit $C^p_- \subset D^*_-(\mathbb{A}_f^p)$. Es sei $C_{-p} = P_p$, $C_- = C_{-_p} C^p_-$ und $P = P_p \cap D^*_-$. Wir haben eine Bijektion

$$C^p_- \backslash D^*_-(\mathbb{A}_f^p)/P \cong C_- \backslash D^*_-(\mathbb{A}_f)/D^*_-.$$

Deshalb erhalten wir eine Abbildung

$$\mathcal{M}_{C,Z/2nZ}(\bar{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow C_- \backslash D^*_-(\mathbb{A}_f)/D^*_- \tag{4.3}$$

4.4 Lemma: *Wenn n gerade ist, so ist* 4.3 *eine Bijektion. Wenn n ungerade ist, so enthält jede Faser der Abbildung* 4.3 *genau* $p^n + 1$ *Elemente.*

Beweis: Der Fall n gerade ist bereits klar. Es sei n ungerade. Wir betrachten zwei Punkte $(B, \iota, \bar{\eta})$ und $(B, \iota, \bar{\eta}')$ aus $\mathcal{M}_{Z/2nZ}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Sie liegen genau dann in der gleichen Faser, wenn es eine Quasiisogenie der Höhe Null gibt

$$\alpha : (B, \iota, \bar{\eta}) \longrightarrow (B, \iota, \bar{\eta}'),$$

so daß $\alpha(a_0) = a_0$. Es sei $M = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M_i$ der Cartiermodul von B. Das Diagramm a_i haben wir mit Hilfe einer Einbettung $\varphi : M_0 \to \mathcal{K}^2$ erhalten. Wir wählen $\varphi' : M_0 \to \mathcal{K}^2$, so daß $\varphi' \circ \alpha = \varphi$. Es sei a'_i das Diagramm von B bezüglich der Einbettung φ'. Wir können annehmen, daß U auf dem Gebäude wie die n-te Potenz σ^n des Frobenius operiert. Die Diagramme a_i und a'_i sehen folgendermaßen aus.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] a_{2j} = a'_{2j} \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & a_{2j+1} \\ & a'_{2j+1} \end{tikzcd} \qquad a_i^{\sigma^n} = a_i,\ a_i'^{\sigma^n} = a'_i$$

Der Strukturmorphismus $O_{E_p} \to \bar{\mathbb{F}}_p$ liefert eine Einbettung $K_p \to \mathcal{K}$. Die Invarianz unter σ^n besagt, daß die Diagramme bereits im Gebäude von $Sl_2(K_p)$ liegen. Umgekehrt definiert jeder über K_p rationale Punkt a_1' im Abstand 1 von a_0 ein Diagramm a_1' und eine Quasiisogenie der Höhe 0 α: $(B, \iota, \bar{\eta}) \to (B, \iota, \bar{\eta}')$ mit $\alpha(a_0) = a_0$. Es bleibt also zu beweisen, daß $(B, \iota, \bar{\eta})$ und $(B, \iota, \bar{\eta}')$ genau dann isomorph sind, wenn $a_1' = a_1$. Das erhalten wir aus:

4.5 Lemma: *Es sei* $(B, \iota, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{C,Z/2nZ}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ und $\alpha : (B, \iota, \bar{\eta}) \to (B, \iota, \bar{\eta})$ *eine Quasiisogenie der Höhe Null, so daß* $\alpha(a_{i_0}) = a_{i_0}$ *für ein* $i_0 \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. *Dann ist* α ein Isomorphismus.

Beweis: Wir müssen beweisen, daß $\alpha(a_i) = a_i$ für alle i. Wenn n gerade ist, so gilt $Ua_i = a_{i+1}$. Wir erhalten die Behauptung, da α und U vertauschbar sind. Mit den oben gewählten Bezeichnungen gilt $\alpha(a_i') = a_i$. Da es für a_i' nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ist eine geeignete Potenz α^r ein Isomorphismus. Aus 3.3 erhalten wir $\alpha^r \in K^* \cap C$. Andererseits folgt wie im Beweis von 3.3, daß $\alpha\alpha^* = k \in C_N \cap K$ für ein $N \geq 3$. Dann ist $\alpha_1 = \alpha^2 k^{-1}$ eine Quasiiosogenie, so daß $\alpha_1 = 1$ mod C_N und $\alpha_1^r = 1$. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, daß $\alpha_1 = 1$, da dann $\alpha = \alpha^* \in K$.

Der Rest des Beweises ist analog zum Satz von Serre (Mumford [17] Chapt. IV §21 Thm. 5). Wir wählen B so in seiner Isogenieklasse, daß $\eta(\hat{T}^p(B)) = V \otimes \mathbb{Z}^p$ für $\eta \in \bar{\eta}$. Dann ist $p^s\alpha_1$ für eine genügend hohe Potenz von p ein Endomorphismus von B, der auf den N-Teilungspunkten wie die Multiplikation mit p^s wirkt. Wir erhalten

$$p^s\alpha_1 = p^s + N\beta, \beta \in \text{End } B.$$

Wenn $\alpha_1 \neq 1$ sein sollte, so kann man annehmen, daß α_1 eine primitive ℓ-te Einheitswurzel ist. Nimmt man die Norm der Gleichung $p^s(\alpha_1 - 1) = N\beta$, so erhält man $p^{s(\ell-1)}\ell = N^{\ell-1}m$ für $m = \text{Nm } \beta \in \mathbb{Z}$. Da $(N, p) = 1$, erhalten wir den gewünschten Widerspruch $N^{\ell-1} | \ell$.

Um das Schema $\mathcal{M}_{C,Z/2nZ}$ vollständig zu beschreiben, müssen wir noch berechnen, wie der Frobenius auf $\mathcal{M}_{C,Z/2nZ}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ wirkt. Wir bemerken, daß $\mathcal{M}_{C,Z/2nZ}$ über $\mathbb{F}_p$ definiert ist.

4.6 Lemma: *Es sei* $\Pi \in D \otimes \mathbb{Q}_p$ *ein Primelement. Wir fassen* Π *als Idêle von* $D^*(\mathbb{A}_f)$ *bezüglich der kanonischen Einbettung* $(D \otimes \mathbb{Q}_p)^* \to D^*(\mathbb{A}_f)$ *auf. Die Wirkung* 1.11 *von* Π *auf dem Proschema* $\mathcal{M}^{\varrho}_{Z/2nZ}$ *ist gleich der Wirkung des Frobenius.*

BEWEIS: Wir wählen $a \in D \subset D \otimes \mathbb{Q}_p$ (Bezeichnungen von §1) als Primelement. Es sei $C \subset D^*(\mathbb{A}_f)$ eine offene kompakte Untergruppe, die durch a normalisiert wird. Nach 1.10 ist die Wirkung des Idèles $(1, \ldots, a, \ldots, 1) = a(a^{-1}, \ldots, 1, \ldots, a^{-1})$ auf $\mathcal{M}_{C, Z/2nZ}$:

$$(B, \iota, \bar{\eta}) \longrightarrow (B, \iota \circ \operatorname{int} a, a^{-1}\bar{\eta})$$

Die Multiplikation mit a definiert eine Isogenie

$$a : (B, \iota, \bar{\eta}) \longrightarrow (B, \iota \circ \operatorname{int} a, a^{-1}\bar{\eta}).$$

Andererseits haben wir die Wirkung des Frobenius auf $\mathcal{M}_{C, Z/2nZ}$:

$$(B, \iota, \bar{\eta}) \longmapsto (B^{(p)}, \iota^{(p)}, \bar{\eta}^{(p)})$$

Der relative Frobenius definiert eine Isogenie

$$\mathrm{Fr}: (B, \iota, \bar{\eta}) \longrightarrow (B^{(p)}, \iota^{(p)}, \bar{\eta}^{(p)})$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen, daß $\mathrm{Fr} \circ a^{-1}$ eine zu p prime Isogenie ist.

Es seien $M = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M_i$, $M' = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M'_i$ und $M^{(p)} = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M_i^{(p)}$ die Cartiermoduln von (B, ι), $(B, \iota \circ \operatorname{int} a)$ und $(B^{(p)}, \iota^{(p)})$. Dann gilt $M'_i = M_{i+n}$ und $M_i^{(p)} = M_{i+1, [\sigma^{-1}]}$. Die Abbildungen a und Fr sehen auf den Cartiermoduln wie folgt aus.

$$a : M_i \longrightarrow M_{i+n}, \quad V : M_i \longrightarrow M_{i+1, [\sigma^{-1}]}$$

Da $i+1$ kritisch ist, gilt $aM_{i+1} = VM_{i+n}$, d.h. $V \circ a^{-1}$ ist ein Isomorphismus auf den Cartiermoduln. Q.E.D.

Insbesondere operiert der Frobenius über $\mathbb{F}_{p^2}$ wie das Idèle $(p^{-1}, \ldots, p^{-1}) \in D^*(\mathbb{A}_f^p)$. Wir bezeichnen mit $C_-\backslash D^*_-(\mathbb{A}_f(-\frac{1}{2}))/D^*_-$ den $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_{p^2})$-Modul auf dem der relative Frobenius wie das Idèle $(1, \ldots, p, \ldots, 1)$ wirkt, das an der Stelle p gleich p und sonst 1 ist. Da die Abbildung 4.3 verträglich mit der $D^*(\mathbb{A}_f^p) = D^*_-(\mathbb{A}_f^p)$-Aktion auf beiden Seiten ist, folgt:

4.7 SATZ: *Wir haben ein kommutatives Diagramm von $\mathbb{F}_{p^2}$-Schemata*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{C, Z/2nZ} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\tilde{\kappa}"'] & C_-\backslash D^*_-(\mathbb{A}_f(-\frac{1}{2}))/D^*_- \arrow[d, "\mathrm{Nm}^0"] \\ & \mathrm{Nm}^0\, C\backslash K^*(\mathbb{A}_f(-1))/K^*_+ \end{tikzcd}$$

α ist ein Isomorphismus, wenn n gerade ist und eine Etaleüberlagerung vom Grad $p^n + 1$, wenn n ungerade ist.

In jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ gibt es einen Punkt von $\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}$.

BEWEIS: Die letzte Behauptung erhält man aus 4.1. Damit ist die Lücke aus dem Beweis von 3.10 gefüllt.

Es sei $h_- : \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \to (D_- \otimes \mathbb{R})^*$ der triviale Homomorphismus $h_-(z) = 1$ für $z \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Die assoziierte Shimuramannigfaltigkeit $M_{C_-}(D^*_-, h_-)$ ist das konstante Schema $C_- \backslash D^*_-(\mathbb{A}_f)/D^*_-$. Sie besitzt gute Reduktion modulo p. Der Satz 4.7 besagt für gerades n, daß $\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}$ eine Form einer guten Reduktion einer Shimuramannigfaltigkeit ist. Wir wollen diesen Sachverhalt für gesättigte Mengen $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ beweisen.

Da das Modulproblem $\mathcal{M}_C$ nicht von der gewählten Ordnung O_D und der Involution abhängt, dürfen wir eine neue Wahl treffen. Wir setzen dafür die entsprechenden Bezeichnungen von §1 außer Kraft. Es sei F eine total imaginäre, quadratische Erweiterung von K, die in p unverzweigt ist und die D zerfällt. Wir finden ein $u \in D$, so daß

$$D = F[u],\ ue = e^{\tau}u \text{ für } e \in F,\ (\tau) = \mathrm{Gal}(F/K),\ u^2 \in O_K,\ \mathrm{ord}_p\, u^2 = 1.$$

Es sei $O_D = O_F[u]$ und $V = O_D$ aufgefaßt als O_D-Linksmodul. Mit $a \in F$ bezeichnen wir ein Element, so daß $a + a^{\tau} = 0$ und $\mathrm{ord}_p\, a = 0$. Dann ist $\hat{d} = a{}^{\iota}d^* a^{-1}$ eine positive Involution auf D. Schließlich definieren wir auf V eine alternierende O_K-Bilinearform

$$\psi(v, w) = \mathrm{Tr}^0\, a^{-1}\hat{v}w = \mathrm{Tr}^0\, a^{-1}wv^*,\ v, w \in V.$$

Dann gilt $\psi(dv, w) = \psi(v, \hat{d}w)$ und das Lemma 1.2.

Es sei $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ eine im folgenden fixierte gesättigte Menge und $t : \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ die assoziierte Funktion (2.13). Für eine offene kompakte Untergruppe, die der Bedingung 1.6 genügt, definieren wir ein Modulproblem $\underline{\mathcal{M}}_{t,C}$ über O_{F_p}. Ein Punkt über einem O_{F_p}-Schema T ist:

$\underline{\mathcal{M}}_{t,C}$

(a) ein abelsches Schema A bis auf zu p prime Isogenie über T und eine Injektion $\iota : O_D \to \mathrm{End}\ A$, so daß $\mathrm{Tr}_{O_T}(e/\mathrm{Lie}\, A) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}|e| + \Sigma_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}\, t(i)\sigma^{-i}u(e),\ e \in F,$

(b) eine K-homogene involutionstreue Polarisierung $\bar{\lambda}$ von A, so daß ein $\lambda \in \bar{\lambda}$ existiert, das in p prinzipal ist,

(c) ein $D \otimes \mathbb{A}_f^p$-Modulisomorphismus

$$\bar{\eta} : V^p(A) \longrightarrow V \otimes \mathbb{A}_f^p \bmod C^p,$$

der die Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante erhält.

Die formale Gruppe von A ist ein formaler O_D-Modul vom Typ t. Nach der Bemerkung 2.3 gilt daher $pO_T = 0$.

4.8 SATZ: *$\underline{\mathcal{M}}_{t,C}$ ist repräsentierbar durch ein glattes projektives Schema $\mathcal{M}_{t,C}$ über O_F/pO_F. Es gibt einen universellen Homöomorphismus $\mathcal{M}_{C,S+1} \to \mathcal{M}_{t,C}$.*

BEWEIS: Wie im Beweis von 1.7 definiert man ein Modulproblem $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{t,C}$. Ein Punkt von $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{t,C}$ über einem O_{F_p}-Schema T ist ein abelsches O_D-Schema (B, ι), so daß die Spurbedingung unter $a)$ erfüllt ist zusammen mit einer Polarisierung λ und einer Rigidfizierung $\bar{\eta}$, die den Bedingungen M3b–c) aus §1 genügen. Nach Mumford ist $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{t,C}$ durch ein quasiprojektives O_{F_p}-Schema $\tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$ repräsentierbar. Auf $\tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$ operiert die Gruppe $(K^*_{\ddagger} \cap \mathrm{Nm}^0 C)/(K^* \cap C)^2$. Man erhält ein grobes Modulschema als Quotient dieser Wirkung. Es sei T das Spektrum eines perfekten Körpers. Dann ist B nach 2.14 isogen zu einer s.a. O_D-Mannigfaltigkeit und folglich nach 3.4 $\mathrm{Aut}(B, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) = K^* \cap C$. Daraus erhält man wie unter 3.5, daß $\mathcal{M}_{t,C}$ ein feines Modulschema ist. Da abelsche O_D-Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n$ potentiell gute Reduktion besitzen, ist $\mathcal{M}_{t,C}$ ein projektives Schema über O_F/pO_F.

Um zu zeigen, daß $\mathcal{M}_{t,C}$ glatt ist, betrachten wir das Spektrum T' einer lokalen artinschen O_F/pO_F-Algebra mit perfektem Restklassenkörper. Es sei $T \to T'$ eine Nilimmersion mit dividierten Potenzen. Es genügt zu beweisen, daß $\mathcal{M}_{t,C}(T') \to \mathcal{M}_{t,C}(T)$ surjektiv ist. Es sei $(B, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{t,C}(T)$ und $\lambda \in \bar{\lambda}$ eine effektive Polarisierung, die in p prinzipal ist. Nach 2.7 und dem Kriterium von Serre und Tate läßt sich (B, ι) zu einer abelschen O_D-Mannigfaltigkeit (B', ι') über T' liften, so daß die Spurbedingung unter (a) erfüllt ist. Wir müssen zeigen, daß sich λ zu einer effektiven Polarisierung λ' von (B', ι') liften läßt, die dann in p prinzipal ist. Es sei M' die Liealgebra der universellen Erweiterung von B' und $\mathrm{Fil} \subset M'$ die Hodgefiltration. Wir finden Zerlegungen

$$M' = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M'_i, \mathrm{Fil} = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} \mathrm{Fil}_i.$$

Die Polarisierung λ definiert eine perfekte Paarung

$$\Phi : M' \times M' \longrightarrow O_{T'}.$$

Da λ involutionstreu ist, findet man $\Phi(M'_i, M'_j) = 0$ für $i \neq j + n$. Nach dem Kriterium von Messing [14] liftet die Polarisierung genau dann, wenn

$$\Phi(\mathrm{Fil}_i, \mathrm{Fil}_{i+n}) = 0.$$

Wir können annehmen, daß $\Sigma_{k=i+1}^{i+n} t(k) = -1$. Dann ist $\Pi: M'_i \to M'_{i+n}$ ein Isomorphismus, da nach 2.6.1 Π einen Isomorphismus über dem Restklassenkörper induziert. Genauso erhält man mit Hilfe von 2.2 und 2.6.1, daß $\mathrm{Fil}_{i+n} = 0$, wenn $t(i) \neq 0$ und $\Pi\, \mathrm{Fil}_i = \mathrm{Fil}_{i+n}$, wenn $t(i) = 0$. Die Behauptung folgt, da die Fil_i für $t(i) = 0$ lokal frei vom Rang 1 sind und $\Phi(x, \Pi y)$ eine alternierende Bilinearform ist.

Um den universellen Homöomorphismus zu konstruieren, betrachten wir das universelle abelsche Schema $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ über $\mathcal{M}_{C,S+1}$. Die formale Gruppe von A ist ein s.f. O_D-Modul X. Die Liealgebra von X zerfällt in eine direkte Summe von Linienbündeln $\mathrm{Lie}\ X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}^i X$. Wir betrachten eine offene affine Menge $T = \mathrm{Spec}\ R \subset \mathcal{M}_{C,S+1}$, über der die $\mathrm{Lie}^i X$ freie R-Moduln sind.

Es sei γ_i eine V-Basis des Cartiermoduls M_X von X, so daß $\gamma_i \in M_{X,i+1}$. Es sei $\alpha: O_{F_p} \to R$ der Strukturmorphismus. $T_{[\sigma^r]}$ bezeichne das Schema T mit dem Strukturmorphismus $\alpha\sigma^r: O_{F_p} \to R$. Es sei Frob: $T \to T_{[\sigma^{-1}]}$ der absolute Frobenius. Mit $X^{(p)}$ bezeichnen wir die formale Gruppe Frob* $X_{[\sigma^{-1}]}$ über T und mit $\mathrm{Fr}_X: X \to X^{(p)}$ den relativen Frobenius.

Die Strukturgleichungen von X haben die Form

$$\Pi\gamma_i = \sum_{m \geq 0} V^m[c_{m,i}]\gamma_{i-m+n},\ c_{m,i} \in R,\ c_{0,i} = 0 \text{ für } i \in S.$$

Dann ist $X^{(p)}$ durch die folgenden Gleichungen definiert

(4.8.1) $$\Pi\gamma'_i = \sum_{m \geq 0} V^m[c^p_{m,i}]\gamma'_{i-m+n},\ \gamma'_i \in M_{X^{(p)},i}.$$

Wir definieren Elemente $\delta_i^{(j)} \in M_{X^{(p)},i}$, $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq 1 + t(i)$:

(4.8.2) $$\begin{gathered}\delta_i^{(1)} = \gamma'_i, \text{ wenn } i \in S\backslash\bar{S}\\ \delta_i^{(1)} = V\gamma'_{i-1}, \text{ wenn } i \notin S\\ \delta_i^{(1)} = V\gamma'_{i-1},\ \delta_i^{(2)} = \gamma'_i, \text{ wenn } t(i) = 1.\end{gathered}$$

Wir werden Gleichungen angeben, denen die $\delta_i^{(j)}$ genügen und die Strukturgleichungen eines formalen O_D-Moduls Y vom Typ t sind.

(4.8.3) $$\Pi\bar{\delta}_i^{(j)} = \sum_{m,k} V^m[r^{(k)}_{m,i}]\bar{\delta}^{(k)}_{i-m+n}$$

Die Abbildung $\bar{\delta}_i^{(j)} \mapsto \delta_i^{(j)}$ definiert dann eine Isogenie $Y \to X^{(p)}$, von der man leicht nachweist, daß sie unabhängig von der gewählten V-Basis ist.

Die Gleichungen 4.8.3 erhält man, wenn man $\Pi\delta_i^{(j)} \in VM_{X^{(p)}}$ mit Hilfe von 4.8.1 berechnet und dabei beachtet, daß man Ausdrücke der Form $V^m[a^p]\gamma'_{i-1}$, $i \notin S$ oder $t(i) = 1$, $m \geq 1$, als $V^{m-1}[a]\delta_i^{(1)}$ schreiben kann.

Um zu zeigen, daß wir einen formalen O_D-Modul vom Typ t erhalten, müssen wir noch 2.5.2 verifizieren: $r_{0,i}^{(1)}$ ist eine Einheit für $i \in S\backslash\bar{S}$ und $r_{0,i}^{(k)} = 0$ für $t(i) = 1$ oder $i \notin S$.

Es sei $i \in S\backslash\bar{S}$. Dann gilt:

$$\Pi\gamma'_i = \sum_{m\geq 1} V^m[c^p_{m,i}]\gamma'_{i-m+n}$$
$$\Pi\delta_i^{(1)} = [c_{1,i}]\delta_{i+n}^{(1)} + V(\text{Terme in } \delta_k^{(j)})$$

Wenn $c_{1,i}$ keine Einheit wäre, so fänden wir einen geometrischen Punkt $s:\operatorname{Spec} L \to T$ mit $c_{1,i}(s) = 0$. Es sei $M = M_{s^*X^{(p)}}$ und $\bar{\gamma}'_i$ die induzierte V-Basis von M. Dann gilt $\Pi\bar{\gamma}'_i \in V^2M_{i+n-2}$. Da $i-1$ für $X^{(p)}$ kritisch ist, folgt $\Pi VM_{i-1} \subset V^2M_{i+n-2}$. Daraus erhalten wir den Widerspruch $\Pi M_i \subset V^2M_{i+n-2}$.

Es sei $i \notin S$. Dann gilt:

$$\Pi\delta_i^{(1)} = \Pi V\gamma'_{i-1} = \sum_{m\geq 0} V^{m+1}[c^p_{m,i-1}]\gamma'_{i-1-m+n}$$
$$= V[c^p_{0,i-1}]\gamma'_{i-1+n} + V(\text{Terme in } \delta_k^{(j)})$$

Wenn $i-1 \notin S$, so folgt $i-1+n \in S\backslash\bar{S}$ und $\delta_{i-1+n}^{(1)} = \gamma'_{i-1+n}$. Wenn $i-1 \in S$, so folgt $t(i-1) = -1$ und $t(i-1+n) = 1$. Dann gilt $\gamma'_{i-1+n} = \delta_{i-1+n}^{(2)}$. Wir erhalten in beiden Fällen $r_{0,i}^{(k)} = 0$.

Es sei schließlich $t(i) = 1$. Dann gilt wie oben:

$$\Pi\delta_i^{(1)} = V[c^p_{0,i-1}]\gamma'_{i-1+n} + V(\text{Terme in } \delta_k^{(j)})$$
$$\Pi\delta_i^{(2)} = \Pi\gamma'_i = V[c^p_{1,i}]\gamma'_{i-1+n} + V(\text{Terme in } \delta_k^{(j)})$$

Wenn $i-1 \in S$, so folgt $t(i-1) = -1$ und wir schließen wie oben. Wenn $i-1 \notin S$, so gilt $i-1+n \in S\backslash\bar{S}$ und $\gamma'_{i-1+n} = \delta_{i-1+n}^{(1)}$.

Wir finden eine Isogenie abelscher O_D-Mannigfaltigkeiten $(B, \iota', \bar{\eta}') \to (A^{(p)}, \iota^{(p)}, \bar{\eta}^{(p)})$, die $Y \to X^{(p)}$ induziert. Die K-homogene Polarisierung von $A^{(p)}$ induziert eine K-homogene Polarisierung $\bar{\lambda}'$ von B. Wir müssen zeigen, daß ein $\lambda' \in \bar{\lambda}'$ existiert, das in p prinzipal ist. Der Beweis ist analog zu 3.7. Zunächst kann man sich wie dort auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers beschränken. Wir betrachten ein effektives $\lambda' \in \bar{\lambda}'$ und die zugehörige Paarung auf dem Cartiermodul von B

$$\Phi : M \times M \to W(L)$$

Dann gilt $\Phi(M_i, M_j) = 0$ für $i \neq j + n$.

Wir müssen zeigen, daß für ein geeignetes von i unabhängiges $s \in \mathbb{Z}$ die Paarung

$$p^s \Phi_i : M_i \times M_{i+n} \longrightarrow W(L),$$

die durch $p^s \Phi$ induziert wird, perfekt ist. Das ist äquivalent mit $\operatorname{ord}_p \det \Phi_i = -2s$, da $\Phi(x, \Pi y)$ eine alternierende Bilinearform auf M_i ist und die Gitter M_{i+n} und ΠM_i ähnlich sind. Die Unabhängigkeit von i erhält man aus der Gleichung

$$[M_i : VM_{i-1}] + [M_{i+n} : VM_{i-1+n}] = 2.$$

$(B, \iota', \bar{\lambda}', \bar{\eta}')$ definiert einen Morphismus Spec $R \to \mathcal{M}_{t,C}$. Wegen der Unabhängigkeit der Konstruktion von der V-Basis, erhalten wir den gewünschten Morphismus

$$\alpha : \mathcal{M}_{C,S+1} \to \mathcal{M}_{t,C}.$$

Es bleibt zu beweisen, daß $\alpha : \mathcal{M}_{C,S+1}(L) \to \mathcal{M}_{t,C}(L)$ für jeden perfekten Körper L bijektiv ist. Der Frobenius induziert eine Bijektion

$$\text{Frob}: \mathcal{M}_{C,S+1}(L) \longrightarrow \mathcal{M}_{C,S}(L).$$

Wir zeigen, daß $\beta = \alpha \circ \text{Frob}^{-1}$ eine Bijektion ist.

Es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ein Punkt von $\mathcal{M}_{C,S}(L)$ und M der assoziierte Cartiermodul. Der Punkt $\beta(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ist gegeben durch eine Isogenie $M' \to M$. Aus 4.8.2 erkennt man sofort

$$M'_i = \begin{cases} M_i, \text{ wenn } i \in S \backslash \bar{S} \text{ oder } t(i) = 1 \\ VM_{i-1}, \text{ wenn } i \notin S \text{ oder } t(i) = -1. \end{cases}$$

Die Bijektivität von β folgt daher aus 2.14. Q.E.D.

Bemerkung: Es sei (B, ι) ein abelsches O_D-Schema vom Typ t. Analog zu 3.8 zeigt man ohne Schwierigkeiten, daß es zu jeder positiven Involution von D genau eine K-homogene Polarisierung von B gibt, für die ι involutionstreu ist.

Wir möchten $\mathcal{M}_{t,C}$ zu einem glatten Schema über O_{F_p} liften. Dazu definieren wir im folgenden ein glattes Modulschema $\mathcal{M}_{G_t^{\cdot},C^{\cdot}}$ über O_{F_p}, dessen spezielle Faser $\mathcal{M}_{t,C}$ als offenes und abgeschlossenes Unterschema enthält.

Wir fixieren ein Langlandsdiagramm

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{C} \\ F \arrow[r] & \bar{F} \arrow[r] \arrow[ur] & \bar{F}_p \end{tikzcd}$$

und ein Frobeniuselement $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_p/\mathbb{Q}_p)$. Es seien $v_0: K \to \mathbb{R}$ und $w_0: F \to \mathbb{C}$ die dadurch fixierten archimedischen Stellen. Es sei $w_i = w_0\sigma^{-i}: F \to \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ und $v_i = v_0\sigma^{-i}: K \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Es sei D_t die Quaternionenalgebra über K mit den folgenden Invarianten.

$$\mathrm{inv}_\nu D_t = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \nu = p \\ \mathrm{inv}\, D, \text{ wenn } \nu \neq p \text{ nichtarchimedisch ist} \\ \frac{1}{2}|t(i)|, \text{ wenn } \nu = v_i,\, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{cases}$$

Das ist sinnvoll, da $|t(i)|$ eine wohldefinierte Funktion auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist und da $\sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} |t(i)| = 1 \bmod 2$. F ist in D_t enthalten.

D_t aufgefaßt als D_t-Linksmodul bezeichnen wir mit W_t. Wir betrachten auf W_t die K-Bilinearform $\psi_t(v, w) = \mathrm{Tr}^0\, a^{-1}wv^*$, wobei $a \in F$ die Spur 0 hat und in F_p eine Einheit ist.

Es sei $G_t^{\cdot}$ die folgende algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$

$$G_t^{\cdot}(\mathbb{Q}) = \{g \in Gl_F(W_t) \mid \psi_t(gv, gw) = \mu(g)\psi_t(v, w),\, \mu(g) \in K^*\}$$

Es sei $(e, d) \in F^* \times D_t^*$. Der Automorphismus $v \mapsto evd^*$, $v \in W_t$ von W_t ist F-linear und erhält die Bilinearform ψ_t bis auf eine Konstante aus K. Wir erhalten eine Abbildung algebraischer Gruppen über $\mathbb{Q}$

$$F^* \times D_t^* \to G_t^{\cdot}$$

4.9 Lemma: $1 \to K^* \to F^* \times D_t^* \to G_t^{\cdot} \to 1$

$$k \mapsto (k, k^{-1})$$

ist eine exakte Folge algebraischer Gruppen.

BEWEIS: Wir zeigen die Surjektivität der Abbildung $F^*(\bar{\mathbb{Q}}) \times D_1^*(\bar{\mathbb{Q}}) \to G_t^{\cdot}(\bar{\mathbb{Q}})$. Die Exaktheit an den übrigen Stellen der Sequenz ist klar. Offenbar hat man einen kanonischen Isomorphismus $Gl_F(W_t) = (F \otimes_K D_t)^*$. Jedes Element $g \in G_t(\bar{\mathbb{Q}})$ hat deshalb die Form $g = 1 \otimes d_1^* + a \otimes d_2^*$, wobei $d_1, d_2 \in D_t \otimes \bar{\mathbb{Q}}$. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen, daß d_1 und d_2 linear abhängig über $K \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ sind.

$$\begin{aligned}\mu(g)\psi_t(v, w) &= \psi_t(gv, gw) = \psi_t(vd_1 + avd_2, wd_1 + awd_2)\\ &= \psi_t(vd_1, wd_1) + \psi_t(avd_2, awd_2) + \psi_t(vd_1, awd_2)\\ &\quad + \psi_t(avd_2, wd_1) = (d_1 d_1^* + aa^* d_2 d_2^*)\psi_t(v, w)\\ &\quad + \mathrm{Tr}^0\, w(d_2 d_1^* - d_1 d_2^*)v^*\end{aligned}$$

Es sei $k = \mu(g) - (d_1 d_1^* + aa^* d_2 d_2^*) \in K \otimes \bar{\mathbb{Q}}$. Dann folgt

$$\mathrm{Tr}^0\, ka^{-1}wv^* = \mathrm{Tr}^0\, w(d_2 d_1^* - d_1 d_2^*)v^*.$$

Da die Spur eine nichtausgeartete Bilinearform definiert, folgt

$$ka^{-1}w = w(d_2 d_1^* - d_1 d_2^*).$$

ka^{-1} muß also im Zentrum von $D_t \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ liegen. Wir erhalten $k = 0$ und $d_2 d_1^* \in K \otimes \bar{\mathbb{Q}}$. Dann sind aber d_1 und d_2 linear abhängig über $K \otimes \bar{\mathbb{Q}}$.

$$(d_2 d_1^*)d_1 - (d_1 d_1^*)d_2 = 0$$

In der Tat, wenn für irgendeine Einbettung $K \to \bar{\mathbb{Q}}$ $d_2 d_1^* = d_1 d_1^* = 0$, so folgt $g(1 \otimes d_1) = 0$. Wir erhalten $d_1 = 0$ für diese Einbettung. Q.E.D.

Wir definieren einen Homomorphismus

(4.9.1) $$h_t : \mathscr{S}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \bigoplus_{i \in Z/nZ} (F \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R})^* \times (D_t \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R})^* \longrightarrow G_t^{\cdot}(\mathbb{R}),$$

indem wir die Komponenten

$$h_i : \mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* \longrightarrow (F \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R})^* \times (D_t \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R})^*$$

angeben. Wenn $t(i) = 0$, so wählen wir einen Isomorphismus $D_t \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$ und setzen

$$h_i(x + y\sqrt{-1}) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{-1}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Es sei $|t(i)| = 1$ und $j \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so daß $j = i \bmod n$ und $t(j) = 1$. Wir identifizieren $F \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit Hilfe von w_j und setzen $h_i(x +$

$y\sqrt{-1}) = (x + y\sqrt{-1})^{-1} \times 1$. Die Konjugationsklasse von h_t ist unabhängig von den gewählten Isomorphismen $D_t \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$.

4.10 LEMMA: *Es existiert ein $k \in K$, so daß $k\psi_t$ die Riemannschen Periodenrelationen erfüllt:*

(1) *$k\psi_t$ ist alternierend,*
(2) *$k\psi_t(v, h_t(\sqrt{-1})w)$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf $W_t \otimes \mathbb{R}$ mit Werten in $K \otimes \mathbb{R}$.*

BEWEIS: Man hat eine orthogonale Zerlegung

$$W_t \otimes \mathbb{R} = \bigoplus_{i \in Z/nZ} (D_t \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R}), \ \psi_t = \bigoplus_{i \in Z/nZ} \psi_i.$$

Wie im Beweis von 1.3 genügt es $k_i \in \mathbb{R}$ zu finden, so daß $k_i\psi_i$ die Periodenrelationen erfüllen. Wenn $t(i) = 0$, so gilt wörtlich der Beweis von 1.3. Wenn $|t(i)| = 1$, so gilt

$$\psi_i(v, h_i(\sqrt{-1})w) = \mathrm{Tr}^0 - a^{-1}\sqrt{-1}wv^*.$$

Da a rein imaginär ist, haben wir $a^{-1}\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$. Die Behauptung folgt, da $D_t \otimes_{K,\nu_i} \mathbb{R}$ isomorph zu den Hamiltonquaternionen ist. Die Abbildung h_t^{-1} definiert einen Algebrahomomorphismus

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}_F\,(W_t \otimes \mathbb{R}).$$

Es sei $V_t \subset W_t$ ein O_F-Gitter. Dann ist $A = W_t \otimes \mathbb{R}/V_t$ ein komplexer Torus auf dem O_F operiert. Die Form ψ_t definiert eine K-homogene Polarisierung von A. Wir berechnen die Spur der Wirkung von O_F auf Lie $A = W_t \otimes \mathbb{R}$.

4.11 LEMMA:

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(e \mid W_t \otimes \mathbb{R}) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}\, e + \sum_{j \in Z/2nZ} t(j) w_j(e),\ e \in F$$

BEWEIS: Wir betrachten die Zerlegung $W_t \otimes \mathbb{R} = \bigoplus W_t \otimes_{K,v_i} \mathbb{R}$. Es sei $j \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so daß $j = i \bmod n$ und $t(j) = |t(i)|$. Wir müssen zeigen:

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(e \mid D_t \otimes_{K,v_i} \mathbb{R}) = \begin{cases} w_j(e) + w_{j+n}(e), & \text{für } t(j) = 0 \\ 2w_j(e), & \text{für } t(j) = 1. \end{cases}$$

Es sei $t(j) = 0$. Dann ist $D_t \otimes_{K,v_i} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$ ein $F \otimes_{K,v_i} \mathbb{C}$-Modul, auf dem F durch Matrixmultiplikation von links und $\mathbb{C}$ durch

Matrixmultiplikation von rechts operiert. Deshalb ist $M_2(\mathbb{R})$ ein treuer $F \otimes_{K,v_i} \mathbb{C}$-Modul und als solcher isomorph zu $F \otimes_{K,v_i} \mathbb{C}$. Daraus folgt die Behauptung in diesem Fall.

Es sei $t(j) = 1$. Dann gilt:

$$\mathbb{C} \xrightarrow[\sim]{w_j} F \otimes_{K,v_i} \mathbb{R} \longrightarrow D_t \otimes_{K,v_i} \mathbb{R} = \mathbb{H}.$$

Die komplexe Struktur auf $\mathbb{H}$ ist die Linksmultiplikation mit Elementen aus $\mathbb{C}$. Wir erhalten die Behauptung, da $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = 2$.

Wir sind jetzt wieder in der Situation von Deligne [4] 4.13 und können das dort angegebene Modulproblem in unserem Fall formulieren.

Es sei $C^{\cdot} \subset G_t^{\cdot}(\mathbb{A}_f)$ eine offene, kompakte Untergruppe. Ein Punkt des Modulproblems über einem F_p-Schema T ist:

$M_{G_t^{\cdot}, C^{\cdot}}$

(a) ein abelsches Schema A bis auf Isogenie und eine Injektion $\iota : F \to \mathrm{End}^0 A$, so daß

$$\mathrm{Tr}_{O_T}(e \mid \mathrm{Lie}\, A) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}|e| + \sum_{j \in Z/2nZ} t(j)\sigma^{-j}(e),\ e \in F,$$

(b) eine K-homogene Polarisierung $\bar{\lambda}$ von A, so daß ι involutionstreu ist,

(c) eine $C^{\cdot}$-Äquivalenzklasse von $F \otimes \mathbb{A}_f$-Modulisomorphismen

$$\bar{\eta} : \hat{V}(A) \longrightarrow W_t \otimes \mathbb{A}_f,$$

die die Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante aus K erhalten.

Wir wollen zeigen, daß

$$\underline{M}_{G_t^{\cdot}, C^{\cdot}}(\mathbb{C}) = C_\infty^{\cdot} \times C^{\cdot} \backslash G_t^{\cdot}(\mathbb{A}) / G_t^{\cdot}(\mathbb{Q}).$$

Nach Deligne [4] 4.10 müssen wir dazu folgendes beweisen:

Es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \in M_{G_t^{\cdot}, C^{\cdot}}(\mathbb{C})$. Dann gibt es einen F-linearen Isomorphismus $\alpha : H_1(A, \mathbb{Q}) \to W_t$, der die Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante erhält. Es sei $h_A^{-1} : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_F H_1(A, \mathbb{R})$ die komplexe Struktur auf $H_1(A, \mathbb{R})$. Dann ist $\alpha_{\mathbb{R}} h_A \alpha_{\mathbb{R}}^{-1}$ konjugiert zu h_t unter $G_t^{\cdot}(\mathbb{R})$.

4.12 Lemma: *Es sei H ein $F \otimes \mathbb{R}$-Modul, $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_F H$ eine komplexe Struktur auf H und φ eine alternierende Bilinearform mit Werten* *in $K \otimes \mathbb{R}$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind*

(1) $\varphi(ex, y) = \varphi(x, e^\tau y), x, y \in H, e \in F$,

(2) *φ genügt den Riemannschen Periodenrelationen,*

(3) $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(e \mid H) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}|e| + \sum_{i \in Z/2nZ} t(i) w_i(e)$.

Dann ist (H, φ, h) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir haben Zerlegungen

$$F \otimes R = \bigoplus_{i \in Z/nZ} F \otimes_{K, v_i} \mathbb{R}, H = \bigotimes_{i \in Z/nZ} H_i,$$

die mit der komplexen Struktur verträglich und bezüglich φ orthogonal sind. Es sei $\varphi \mid_{H_i} = \varphi_i$. Wir definieren eine $\mathbb{R}$-Bilinearform Φ_i mit Werten in $\mathbb{C}$ durch die Gleichung

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} z \Phi_i(x, y) = \varphi_i(h(z)x, h(\sqrt{-1})y), z \in \mathbb{C}.$$

Nach den Periodenrelationen ist Φ_i eine positiv definite, hermitsche Form auf H_i.

Die komplexe Struktur auf H_i sieht folgendermaßen aus:

$$H_i \cong F \otimes_{K, v_i} \mathbb{C} \text{ für } t(i) = 0$$

$$H_i = (F \otimes_{K, v_i} \mathbb{R})^2 \xrightarrow[\sim]{w_j} \mathbb{C}^2 \text{ für } t(j) = 1, j = i \bmod n$$

Für $t(i) = 0$ gilt:

$$F \otimes_{K, v_i} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$e \otimes z \longmapsto (w_j(e)z, w_{j+n}(e)z)$$

Da $\Phi_i(ex, y) = \Phi_i(x, e^\tau y)$ für $e \in F$, sind die beiden Faktoren auf der rechten Seite orthogonal bezüglich Φ_i. Nach geeigneter Wahl der Basisvektoren in beiden Faktoren erhält Φ_i die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ist (H_i, φ_i, h) als $F \otimes_{K, v_i} \mathbb{R}$-Raum bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wenn $|t(i)| = 1$, so gilt $\mathrm{Aut}_{F \otimes_{K, v_i} \mathbb{R}} H_i = Gl_2(\mathbb{C})$. Wir erhalten die Behauptung, da sich jede positiv definite, hermitesche Bilinearform auf $\mathbb{C}^2$ auf die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bringen läßt.

Es sei $\alpha : H_1(A, \mathbb{Q}) \to W_t$ eine symplektische Ähnlichkeit von F-Moduln. Nach 4.12 existiert eine symplektische Ähnlichkeit von

$F \otimes \mathbb{R}$-Moduln $\beta : H_1(A, \mathbb{R}) \to W_t \otimes \mathbb{R}$, so daß $\beta h_A \beta^{-1} = h_t$. Folglich ist $\alpha_{\mathbb{R}} h_A \alpha_{\mathbb{R}}^{-1}$ konjugiert zu h_t unter $\beta \circ \alpha_{\mathbb{R}}^{-1} \in G_t^{\cdot}(\mathbb{R})$. Es bleibt also nur die Existenz von α zu beweisen.

Aus der Eigenschaft (a) der Punkte von $\underline{M}_{G_t^{\cdot}, C}$ erhalten wir

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}(e \mid H_1(A, \mathbb{Q})) - 2\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} e, \; e \in F.$$

Der Zerlegung $F \otimes \bar{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{j \in Z/2nZ} F \otimes_{F, w_j} \bar{\mathbb{Q}}$ entspricht daher eine Zerlegung $H_1(A, \bar{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{j \in Z/2nZ} H_j$ in zweidimensionale Vektorräume. Für die Riemannsche Form einer Polarisierung $\lambda \in \bar{\lambda}$ gilt

$${}_K E^{\lambda}(H_i, H_j) = 0 \text{ für } i \neq j + n.$$

Da eine entsprechende Überlegung für W_t gilt, finden wir eine symplektische Ähnlichkeit über $\bar{\mathbb{Q}}$.

Die Formen von (W_t, ψ_t) über $\mathbb{Q}$ werden bis auf symplektische Ähnlichkeit durch die Gruppe $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), G_t^{\cdot}(\bar{\mathbb{Q}}))$ klassifiziert. Wir müssen deshalb beweisen

$$\mathrm{cls}(W_t, \psi_t) = \mathrm{cls}(H_1(A, \mathbb{Q}), {}_K E^{\lambda}) \in H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), G_t^{\cdot}(\bar{\mathbb{Q}})).$$

Aus der Existenz von $\bar{\eta}$ und dem Lemma 4.12 wissen wir bereits, daß diese Klassen lokal gleich sind. Andererseits erhalten wir aus der exakten Folge 4.9.1 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), G_t^{\cdot}(\bar{\mathbb{Q}})) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), K^*(\bar{\mathbb{Q}})) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\
\prod_{\nu} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\nu/\mathbb{Q}_\nu), G_t^{\cdot}(\bar{\mathbb{Q}}_\nu)) & \longrightarrow & \prod_{\nu} H^2(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\nu/\mathbb{Q}_\nu), K^*(\bar{\mathbb{Q}}_\nu))
\end{array}$$

Die Abbildung δ ist nach Hilbert Satz 90 injektiv, und γ ist nach der Klassenkörpertheorie injektiv. Daraus erhalten wir die Behauptung.

Wir definieren jetzt eine Reduktion von $\underline{M}_{G_t^{\cdot}, C^{\cdot}}$ modulo p. Es sei O_{D_t} eine Ordnung von D_t, die O_F enthält und die an der Stelle p maximal ist. Da $O_{D_t} \otimes \mathbb{Z}_p \cong M_2(O_{K_p})$ und $\mathrm{ord}_p\, a = 0$, erhalten wir eine perfekte Paarung

$$\psi_t : O_{D_t} \otimes \mathbb{Z}_p \times O_{D_t} \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow O_{K_p}.$$

Umgekehrt sei T_p ein freier O_{F_p}-Modul vom Rang 2 und $\varphi : T_p \times$

$T_p \to O_{K_p}$ eine alternierende Bilinearform, deren Diskriminante eine Einheit ist und für die

$$\varphi(ex, y) = \varphi(x, e^{\tau}y), \; e \in O_{F_p}.$$

4.13 LEMMA: *(T_p, φ) ist als symplektischer O_{F_p}-Modul isomorph zu $(O_{D_t} \otimes \mathbb{Z}_p, \psi_t)$.*

BEWEIS: Wir definieren auf T_p eine hermitsche Form Φ durch die Gleichung

$$\mathrm{Tr}_{F_p/K_p}\, ae\Phi(x, y) = \varphi(ex, y).$$

Die Diskriminante von Φ ist dann ebenfalls eine Einheit. Es existiert ein $x \in T_p$, so daß $\Phi(x, x)$ eine Einheit ist.

In der Tat, es sei $\Phi(x, x) = 0 \bmod p$ für alle $x \in T_p$. Wir finden $x, y \in T_p$, so daß $\Phi(x, y)$ eine Einheit ist. Es gilt:

$$0 = \Phi(ex + y, ex + y) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y) = \mathrm{Tr}_{F_p/K_p}\, e\Phi(x, y) \bmod p$$

Da $\mathrm{Tr}: O_{F_p} \to O_{K_p}$ sujektiv ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Da Nm: $O^*_{F_p} \to O^*_{K_p}$ surjektiv ist, kann man Φ auf die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bringen. Damit ist das Lemma bewiesen.

Es sei $V_t = O_{D_t}$ aufgefaßt als O_{D_t}-Linksmodul. Wir betrachten offene, kompakte Untergruppen $C^{\cdot} \subset G_t^{\cdot}(\mathbb{A}_F)$, so daß $C^{\cdot} = C^{\cdot p} C_p^{\cdot}$, $C^{\cdot p} \subset G_t^{\circ}(\mathbb{A}_f^p)$, $C_p = G_t^{\cdot}(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{Aut}_{O_{F_p}}(V_t \otimes \mathbb{Z}_p)$. Wir wollen außerdem annehmen, daß $C_N \supset C$ für ein $N \geq 3$, $(N, p) = 1$. Dabei bezeichnet C_N die Hauptkongruenzuntergruppe (vergl. 1.6).

Wir definieren einen Funktor über O_{F_p}, dessen allgemeine Faser $\underline{M}_{G_t^{\cdot}, C^{\cdot}}$ ist. Ein Punkt über einem O_{F_p}-Schema T ist:

$\underline{\mathcal{M}}_{G_t^{\cdot}, C^{\cdot}}$

(a) Ein abelsches Schema A über T und eine Einbettung $\iota: O_F \to \mathrm{End}\, A$, so daß

$$\mathrm{Tr}_{O_T}(e \mid \mathrm{Lie}\, A) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} e + \sum_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} t(i)\sigma^{-i}(e), \; e \in O_F,$$

(b) Eine K-Homogene Polarisierung $\bar{\lambda}$ von A, so daß ι involutionstreu ist und so daß ein $\lambda \in \bar{\lambda}$ existiert, das in p prinzipal ist,

(c) eine Äquivalenzklasse von $O_F \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p$-Modulisomorphismen

$$\bar{\eta}: \hat{T}^p(A) \longrightarrow V_t \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p \bmod C^{\cdot p},$$

die die Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante aus K erhalten.

Aus 4.13 erhält man unmittelbar $\underline{M}_{G_l',C'} = \underline{\mathcal{M}}_{G_l',C'} \otimes O_{F_p}F_p$.

4.14 LEMMA: *Der Funktor $\underline{\mathcal{M}}_{G_l',C'}$ ist glatt und eigentlich über O_{F_p}.*

BEWEIS: Um die Glattheit zu beweisen, wenden wir wieder das Kriterium von Messing an. Es seien T und T' artinsche O_{F_p}-Schemata auf denen p nilpotent ist. Es sei $T \to T'$ eine Nilimmersion mit dividierten Potenzen. Wir zeigen, daß wir einen Punkt $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{G_l',C'}(T)$ nach T' liften können. M bezeichne die Liealgebra der universellen Erweiterung von A über T'. Dann haben wir eine Zerlegung in freie $O_{T'}$-Moduln vom Rang 2.

$$M = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M^i$$

Wir finden eine effektive Polarisierung $\lambda \in \bar{\lambda}$, die in p prinzipal ist. Sie definiert eine perfekte Paarung Φ auf M, so daß $\Phi(M^i, M^j) = 0$ für $i \neq j + n$. Es sei $\mathrm{Fil}_T^i \subset M_T^i = M^i \otimes O_T$ die Hodgefiltration. Fil_T^{i+n} ist das orthogonale Komplement von Fil_T^i.

Wir wählen Liftungen $\mathrm{Fil}^i \subset M^i$ von Fil_T^i für $i = 1, \ldots, n$ und definieren Fil^{i+n} als das orthogonale Komplement von Fil^i bezüglich Φ. Damit erhalten wir die gewünschte Liftung. Die Glattheit der Einschränkung des Funktors auf die O_{F_p}-Schemata, auf denen p lokal nilpotent ist, ist dadurch bewiesen. Die Glattheit wird daraus folgen, sobald wir die Darstellbarkeit des Funktors bewiesen haben.

Um zu zeigen, daß A potentiell gute Reduktion hat, benutzen wir eine Variante des Kriteriums von Néron-Ogg-Šafarévic.

4.15 BEMERKUNG: Es sei B eine abelsche Mannigfaltigkeit über einem separabel abgeschlossenen Körper L. Es sei K ein Zahlkörper, der auf B operiert.

Der rationale Tatemodul $V_\ell(B)$, $\ell \neq \mathrm{Char}\, L$ ist ein $K \otimes \mathbb{Q}_\ell$-Modul. Wir haben deshalb eine Zerlegung

$$V_\ell(B) = \prod_{\nu | \ell} V_\nu(B),$$

wobei ν die Primstellen von K durchläuft, die über ℓ liegen. Es sei $g = \dim B$. Dann gilt

$$\dim_{K_\nu} V_\nu(B) = 2g/[K : \mathbb{Q}].$$

In der Tat, es sei $\dim_{K_\nu} V_\nu(B) = n_\nu$ und $k \in K$. Dann gilt

$$(4.15.1) \qquad \det(k/V_\ell(B)) = \prod_{\nu/\ell} \mathrm{Nm}^{n_\nu}_{K_\nu/\mathbb{Q}_\ell} k.$$

Andererseits ist $\det(k/V_\ell(B)) = \deg k$ eine polynomiale, multiplikative Funktion vom Grad $2g$ auf K. Daraus folgt

$$(4.15.2) \quad \det(k/V_\ell(B)) = \mathrm{Nm}_{K/\mathbb{Q}} k^{2g/[K:\mathbb{Q}]} = \prod_{\nu/\ell} \mathrm{Nm}_{K_\nu/\mathbb{Q}_\ell} k^{2g/[K:\mathbb{Q}]}.$$

Die Behauptung folgt aus 4.15.1 und 4.15.2.

Es sei L ein diskret bewerteter Körper, dessen Restklassencharakteristik verschieden von ℓ ist. $\bar{L}$ sie der separable Abschluß von L. Wir nehmen an, daß B mit seiner K-Aktion über L definiert ist. Dann erhalten wir eine Darstellung

$$\rho_\nu : \mathrm{Gal}(\bar{L}/L) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{K_\nu} V_\nu(B).$$

NOŠ: B besitzt genau dann gute Reduktion, wenn ρ_ν unverzweigt ist.

Der Beweis ist völlig analog zu dem von Serre und Tate [26] für den Fall $K = \mathbb{Q}$.

Wir können jetzt den Beweis von 4.14 beenden. Es sei O_L ein diskreter Bewertungsring über O_{F_p} und L sein Quotientenkörper. Wir zeigen, daß ein Punkt $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{G_t',C'}(L)$ potentiell gute Reduktion besitzt. Es sei $\nu \neq p$ eine endliche Stelle von K, wo D_t nicht zerfällt. Die Trägheitsgruppe I von L operiert auf dem Tatemodul

$$\rho_\nu : I \longrightarrow \mathrm{End}_F\, V_\nu(A) = \mathrm{End}_F(W_t \otimes K_\nu).$$

Indem wir L erweitern, dürfen wir nach dem Monodromiesatz annehmen

$$(\rho_\nu(g) - id)^2 = 0, \quad g \in I.$$

Da $\rho_\nu(g)$ die Bilinearform auf $W_t \otimes K_\nu$ respektiert, ist es nach 4.9 von der Form $\rho_\nu(g)x = exd$, $e \in F$, $d \in D_t \otimes K_\nu$. Dann gilt

$$(\rho_\nu(g) - id)^2 x = e^2 x d^2 - 2exd + x = 0.$$

Wählt man zuerst $x = 1$ und dann x so, daß $x^{-1}ex = e^\tau$, so erhält man das Gleichungssystem

$$e^2d^2 - 2ed = -1$$
$$e^{2\tau}d^2 - 2e^\tau d = -1$$

Diese Gleichungen widersprechen sich, wenn $e \neq e^\tau$. Wir finden $e \in K_\nu$, $d = e^{-1}$. Daraus folgt $\rho_\nu(g) = 1$. Der Beweis von 4.14 ist damit beendet.

Da D und D_t an allen von p verschiedenen endlichen Stellen von K die gleiche Invariante haben, finden wir einen Algebraisomorphismus

$$D_t \otimes \mathbb{A}_f^p \cong D \otimes \mathbb{A}_f^p.$$

Nach Skolem-Noether können wir ihn so wählen, daß er auf $F \otimes \mathbb{A}_f^p$ die Identität induziert. Die symplektischen $F \otimes \mathbb{A}_f^p$-Räume $(V_t, \psi_t) \otimes \mathbb{A}_f^p$ und $(V, \psi) \otimes \mathbb{A}_f^p$ können wir dann miteinander identifizieren.

Es sei $C \subset D^*(\mathbb{A}_f)$ eine offene kompakte Untergruppe, die den Bedingungen 1.6 genügt. Es sei $C_t = C_t^p C_{t,p} \subset D_t^*(\mathbb{A}_f)$ die offene kompakte Untergruppe, für die $C_{t,p} = (O_{D_t} \otimes \mathbb{Z}_p)^*$ und $C_t^p = C^p$. Der Durchschnitt $C_K = C \cap K^*(\mathbb{A}_f) = C_t \cap K^*(\mathbb{A}_f)$ ist eine offene, kompakte Untergruppe von $K^*(\mathbb{A}_f)$, die in p maximal ist. Man findet eine offene, kompakte Untergruppe $C_F \subset F^*(\mathbb{A}_f)$, so daß

(1) $C_F = C_F^p C_{F,p}$, wobei $C_{F,p} = O_{F_p}^*$ und $C_F^p \subset F^*(\mathbb{A}_f^p)$,
(2) $C_F \cap K^*(\mathbb{A}_f) = C_K$,
(3) $C_F F^* \cap K^*(\mathbb{A}_f) = C_K K^*$.

In der Tat, findet man ein C_F, das der ersten Bedingung genügt und für das $C_F \cap K^*(\mathbb{A}_f) \subset C_K$. Es genügt ein C_F zu finden, das der ersten Bedingung genügt und für das $C_F F^* \cap K^*(\mathbb{A}_f) \subset C_K K^*$. Denn wenn C_F beide Inklusionen erfüllt, so leistet $C_K C_F$ das Gewünschte.

Deshalb genügt es, die Injektivität der folgenden Abbildung zu beweisen.

$$\varprojlim_{C_K} C_K \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^* \xrightarrow{\alpha} \varprojlim_{C_F} C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^*.$$

Dabei durchlaufen C_K und C_F alle Kongruenzuntergruppen, die durch eine zu p prime Kongruenz definiert werden.

Es sei T ein Torus über $\mathbb{Q}$ und $U_T \subset T$ die Einheitengruppe. Nach einem Satz von Chevalley [3] ist die Topologie, die durch U_T^n, $n \in \mathbb{N}$

auf $T(\mathbb{Q})$ definiert wird äquivalent mit der Topologie $C \cap T(\mathbb{Q})$, wobei $C \subset T(\mathbb{A}_f)$ alle Kongruenzuntergruppen durchläuft, die durch eine zu p prime Kongruenz definiert werden.

Die Injektivität der Abbildung α erhält man jetzt genauso wie Deligne [4] 1.15.3.

Das Bild von $C_F \times C_t$ bei der Abbildung $F^*(\mathbb{A}_f) \times D_t^*(\mathbb{A}_f) \to G_t^{\cdot}(\mathbb{A}_f)$ bezeichnen wir mit $C_t^{\cdot}$. Das ist eine offene, kompakte Untergruppe der Form $C_t^{\cdot p} \cdot C_{t,p}^{\cdot}$, wobei $C_{t,p}^{\cdot} = \mathrm{Aut}_{O_F}(V_t \otimes \mathbb{Z}_p) \cap G_t^{\cdot}(\mathbb{Q}_p)$.

Wir definieren einen Morphismus

$$\alpha_t : \underline{\mathcal{M}}_{t,C} \times C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^* \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}_{G_t^{\cdot}, C_t^{\cdot}} \otimes_{O_{F_p}} O_F/pO_F. \tag{4.16}$$

Dabei ist $C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^*$ als konstantes Schema über O_F/pO_F aufzufassen. Es sei $U_p(F)$ die Menge der Elemente von F, die an der Stelle p eine Einheit sind. Dann gilt

$$C_F^p \backslash F^*(\mathbb{A}_f^p)/U_p(F) \cong C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^*.$$

Der Morphismus α_t ordnet einem Punkt $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ von $\underline{\mathcal{M}}_{t,C}$ und einem $f \in F^*(\mathbb{A}_f^p)$ den Punkt $(A, \iota \mid O_F, \bar{\lambda}, f\bar{\eta})$ zu.

Ein $k \in C_K^p \backslash K^*(\mathbb{A}_f^p)/U_p(K)$ operiert auf $\mathcal{M}_{t,C}$ durch Multiplikation von $\bar{\eta}$ mit k und auf $C_K^p \backslash F^*(\mathbb{A}_f^p)/U_p(F)$ durch Multiplikation mit k^{-1}.

4.17 SATZ: *$\underline{\mathcal{M}}_{G_t^{\cdot}, C_t^{\cdot}}$ ist repräsentierbar durch ein glattes projektives Schema. Der Morphismus α_t ist eine konstante Galoisüberlagerung mit der Galoisgruppe $C_K \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*$.*

Für den Beweis benötigen wir einige Lemmata.

4.18 LEMMA: *Es sei L ein perfekter Körper über O_F/pO_F. Es sei X eine Barsotti–Tate Gruppe über L. Gegeben seien ein Homomorphismus $\iota : O_{F_p} \to \mathrm{End}\ X$ und ein Isomorphismus $\lambda : X \to X^*$ auf die duale Barsotti–Tate Gruppe, so daß*

(1) $\lambda = \lambda^*$,

(2) *die Rosatiinvolution von λ induziert auf O_{F_p} den Automorphismus τ,*

(3) $\mathrm{Tr}_L(\iota(e)/\mathrm{Lie}\ X) = \mathrm{Tr}_{F_p/\mathbb{Q}_p} e + \sum_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} t(i)\, \sigma^{-i}(e),\ e \in O_{F_p}$.

Dann existiert ein bis auf Konjugation mit einem Element aus O_{F_p} eindeutig bestimmter involutionstreuer Homomorphismus

$$\iota' : O_{D_p} \longrightarrow \mathrm{End}\, X,$$

so daß (X, ι') ein formaler O_{D_p}-Modul vom Typ *t ist und $\iota' \mid O_{F_p} = \iota$.*

Beweis: Es sei M der kovariante Dieudonnémodul von X. Wir haben eine Zerlegung

$$M = \bigoplus_{i \in Z/2nZ} M_i, M_i = \{m \in M \mid \iota(e)m = \sigma^{-i}(e)m, e \in O_{F_p}\}$$

Die Verschiebung V ist ein Operator vom Grad 1, und es gilt $\dim M_i/VM_{i-1} = 1 + t(i)$. Da Höhe $X = \dim X + \dim X^* = 4n$, sind die M_i freie $W(L)$-Moduln vom Rang 2. Der Isomorphismus λ definiert eine perfekte Paarung $\Phi : M \times M \to W(L)$, so daß

$$\Phi(x, y) = -\Phi(y, x), \Phi(Vx, Vy) = p\Phi(x, y)^{\sigma^{-1}},$$

$$\Phi(M_i, M_j) = 0 \text{ für } i \neq j + n.$$

Es sei $N = M \otimes \mathbb{Q}$ der rationale Dieudonnémodul. Ich behaupte, daß auf N eine nichtausgeartete, alternierende Bilinearform Ψ existiert, so daß

(4.18.1) $\qquad \Psi(Vx, Vy) = p\Psi(x, y)^{\sigma^{-1}}, \Psi(N_i, N_j) = 0 \text{ für } i \neq j.$

Jede andere Form mit diesen Eigenschaften hat die Gestalt $\Psi(\iota(e)x, y)$ für ein $e \in F_p$.

In der Tat, wir wählen eine nichtausgeartete, alternierende Bilinearform $\Psi_0' : N_0 \times N_0 \to W(L) \otimes \mathbb{Q}$ und definieren rekursiv

$$\Psi_{i+1}'(Vx, Vy) = p\Psi_i(x, y)^{\sigma^{-1}}, i = 0, \ldots, 2n.$$

Da $\dim M_i/VM_{i-1} = 1 + t(i)$, folgt

(4.18.2) $\qquad \operatorname{ord}_p \det \Psi'_{i+1\,|\,M_{i+1}} = \operatorname{ord}_p \det \Psi'_{i/M_i} - 2t(i + 1).$

Ψ_0' und Ψ_{2n}' sind alternierende Bilinearformen auf M_0, die sich wegen 4.18.2 und $\Sigma_{i=0}^{2n-1} t(i + 1) = 0$ um eine Einheit $w \in W(L)$ unterscheiden.

$$\Psi_{2n}' = w\Psi_0'$$

Es sei $\Psi_0 = u\Psi_0'$. Dann gilt $\Psi_i = u^{\sigma^{-i}}\Psi_i'$ und folglich

$$\Psi_{2n} = wu^{\sigma^{-2n}}u^{-1}\Psi_0.$$

Da jede Einheit im Wittring von der Form $u^{\sigma^{-2n}}u^{-1}$ ist, erhalten wir für geeignetes u

$$\Psi_0 = \Psi_{2n}.$$

Die orthogonale Summe $\bigoplus \Psi_i$ ist das gewünschte Ψ. Die Eindeutigkeitsaussage ist klar.

Nach 4.18.2 kann man Ψ so wählen, daß

$$\operatorname{ord}_p \det \Psi_{i\,|\,M^i} = -\left(1 + \sum_{k=i-n+1}^{i} t(k)\right)$$

Wir definieren einen Homomorphismus $\Pi : N \to N$ durch die Gleichung

$$\Psi(\Pi x, y) = \Phi(x, y)$$

Dann ist Π ein Operator vom Grad n. Eine leichte Verifikation zeigt:

$$(4.18.3) \qquad \begin{gathered} \Phi(\Pi x, y) = \Phi(x, \Pi y),\ \Psi(\Pi x, y) = \Psi(x, \Pi y), \\ \Pi V = V\Pi,\ \iota(e)\Pi = \Pi\iota(e^\tau) \text{ für } e \in O_{F_p}. \end{gathered}$$

Da Φ eine perfekte Paarung ist folgt

$$\Pi M_{i-n} = \{x \in N_i \mid \Psi_i(x, M_i) \subset W(L)\} = p^{1/2(1+\Sigma_{k=i-n+1}^{i} t(k))} M_i \subset M_i.$$

Wir erhalten

$$(4.18.4) \qquad \Pi^2 M_i = pM_i.$$

Die Abbildung $\Pi^2 : M_i \to M_i$ ist selbstadjungdiert bezüglich Ψ_i und deshalb die Multiplikation mit einer Konstanten $c_i \in W(L)$. Da Π^2 und V vertauschbar sind, folgt $c_{i+1} = c_i^{\sigma^{-1}}$. Deshalb gilt $\Pi^2 = \iota(\delta)$, $\delta \in O_{F_p}$. Da nach der ersten Gleichung von 4.18.3 Π^2 invariant unter der Involution ist, folgt $\delta \in O_{K_p}$ und nach 4.18.4 $\operatorname{ord}_p \delta = 1$. Also ist $O_{F_p}[\Pi]$ isomorph zu O_{D_p}. Wir erhaleinen Homomorphismus

$$\iota' : O_{D_p} \longrightarrow \operatorname{End} X.$$

Daß ι' involutionstreu ist, folgt aus $\hat{\Pi} = a\Pi_a^{*-1} = -a\Pi a^{-1} = -aa^{-\tau}\Pi = \Pi$.

Es sei umgekehrt $\iota_1 : O_{D_p} \to \operatorname{End} X$ gegeben. Dann ist $\Psi_1(x, y) = \Phi(\iota_1(\Pi)^{-1}x, y)$ eine alternierende Bilinearform auf N, die den Bedingungen 4.18.1 genügt. Aus der Eindeutigkeit von Ψ erhalten wir $\iota_1(\Pi) = \iota(e)\iota'(\Pi)$. Dann gilt:

$$\iota(\Pi^2) = \iota_1(\Pi^2) = \iota(ee^\tau)\iota(\Pi^2) \qquad ee^\tau = 1$$

Wir finden ein $e_1 \in O_{F_p}$, so daß $e_1 e_1^{-\tau} = e$. Es folgt

$$\iota_1(\Pi) = \iota'(e_1 \Pi e_1^{-1}). \quad \text{Q.E.D.}$$

Es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \in \underline{\mathcal{M}}_{G_t', C_t'}(\mathbb{F}_q)$. Die Barsotti–Tate Gruppe X von A genügt den Voraussetzungen von 4.18. Nach dem Satz von Tate ist die Abbildung End $A \otimes \mathbb{Z}_p \to \operatorname{End} X$ bijektiv. Da jedes lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Z}$, das über $\mathbb{Z}_p$ eine Lösung hat auch über $\mathbb{Z}$ eine Lösung hat, finden wir ein $\Pi \in \operatorname{End} A$, so daß $\Pi\iota(e) = \iota(e^\tau)\Pi$, $e \in O_F$ und Π invariant unter der Rosatiinvolution ist. Dann ist $\Phi(\Pi^{-1}x, y)$ eine alternierende Bilinearform auf N, die 4.18.1 genügt. Deshalb finden wir

$$O_{F_p}[\Pi] \cong O_{D_p}, \Pi^2 \in O_{K_p} \cap \operatorname{End} A = O_K.$$

Wir zeigen, daß die Quaternionenalgebra $\Delta = F[\Pi]$ isomorph zu D ist.

Es sei $u \in D$ ein Element mit der Spur 0, so daß int u auf F den Automorphismus τ induziert. Es sei $\ell \neq p$ eine Primzahl. Wir haben einen Isomorphismus symplektischer F-Moduln gewählt

$$(W_t \otimes Q_\ell, \psi_t) = (D \otimes Q_\ell, \psi).$$

Über $\eta \in \bar{\eta}$ induziert Π eine ψ-selbstadjungdierte Abbildung $D \otimes \mathbb{Q}_\ell \to D \otimes \mathbb{Q}_\ell$, die wir ebenfalls mit Π bezeichnen. Ich behaupte, daß Π die Linksmultiplikation mit einem Element der Form eu, $e \in F \otimes \mathbb{Q}_\ell$ ist. Daraus folgte dann $D \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong \Delta \otimes \mathbb{Q}_\ell$.

Da $u^{-1}\Pi$ ein F-linearer symplektischer Automorphismus ist, folgt aus 4.9 $u^{-1}\Pi x = fxd$, $d \in D \otimes Q_\ell$. Π und eu sind bezüglich ψ selbstadjungdiert. Wir erhalten

$$\psi(xd, y) = \psi(x, yd) = \psi(xd^*, y).$$

Deshalb gilt $d = d^* \in K \otimes \mathbb{Q}_\ell$, was wir zeigen wollten.

Wir brauchen nur noch zu beweisen, daß Δ an den archimedischen Stellen von K isomorph zu D ist, d.h. daß Δ dort zerfällt. Die Rosatiinvolution auf Δ ist aber $x \mapsto ax^*a^{-1}$, während die einzige positive Involution auf den Hamiltonquaternionen die Hauptinvolution ist.

Wir haben eine O_D-Aktion auf A gefunden

$$\iota' : O_D \longrightarrow \operatorname{End} A,$$

so daß $\iota'/O_F = \iota$. Wir wählen einen $O_D \otimes \mathbb{Q}_\ell$-Isomorphismus

$$\eta'_\ell : V_\ell(A) \longrightarrow V \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong W_t \otimes \mathbb{Q}_\ell.$$

Da η'_ℓ die Bilinearformen auf beiden Seiten bis auf eine Konstante erhält (1.2), gilt nach 4.9 $\eta_\ell = e\eta'_\ell d$, $e \in F \otimes \mathbb{Q}_\ell$, $d \in D \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Das bedeutet, daß ein $e \in F^*(\mathbb{A}_f^p)$ existiert, so daß $e\eta$ ein $O_D \otimes \mathbb{A}_f^p$-Modulisomorphismus ist. Dann ist $(A, \iota', \bar{\lambda}, \overline{en})$ aus $\mathcal{M}_{t,C}(\mathbb{F}_q)$, was die Surjektivität von α_t auf den $\mathbb{F}_q$-wertigen Punkten beweist.

4.19 Lemma: *Es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ein Punkt von $\underline{\mathcal{M}}_{G'_t, C'_t}$. Dann gilt:*

$$\operatorname{Aut}(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta}) = F \cap C_F.$$

Beweis: Da A potentiell gute Reduktion besitzt, beschränkt man sich leicht auf den Fall eines $\mathbb{F}_q$-wertigen Punktes. Dann gibt es auf A eine O_D-Aktion ι'. Wir finden ein $f \in F^*(\mathbb{A}_f^p)$, so daß $(A, \iota', \bar{\lambda}, \overline{f\eta})$ ein Punkt von $\mathcal{M}_{t,C}$ ist. Wir können $f = 1$ annehmen.

Es sei γ ein Automorphismus von $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$. Da die O_D-Aktion ι' bis auf Konjugation mit einem Element aus F^* eindeutig bestimmt ist, finden wir

$$\iota'(d)\gamma = \gamma\iota'(ede^{-1}), \ e \in F^*.$$

Folglich ist $\gamma\iota(e)$ ein Endomorphismus von (A, ι'). Es sei $\eta \in \bar{\eta}$ ein $O_D \otimes \mathbb{A}_f^p$-Modulisomorphismus. Dann gilt

$$\eta\gamma\iota(e) = e\eta\gamma = \eta d, \ d \in D^*(\mathbb{A}_f^p).$$

Da andererseits γ die Klasse $\bar{\eta}$ fixiert, haben wir

$$\eta\gamma = e_1\eta c, \ e_1 \in C_F^p, \ c \in C_t^p \cong C^p.$$

Nach 4.9 finden wir ein $k \in K^*(\mathbb{A}_f^p)$, so daß $kc = d$ und $k^{-1}e_1 = e^{-1}$. Dann folgt $k \in C_F^p F^* \cap K^*(\mathbb{A}_f^p) = C_K^p K^*$. Wir können nach Abänderung von (e, d) durch ein Element aus K und von (e_1, c) durch ein Element aus C_K annehmen, daß $k = 1$. Dann ist $\gamma\iota(e)$ ein Automorphismus von $(A, \iota', \bar{\lambda}, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{t,C}$. Die Behauptung folgt wie im Beweis von 4.8 aus 3.4.

Wir definieren in völliger Analogie zu 1.7 ein feines Modulproblem $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{G'_t, C'_t}$, das eine endliche Galoisüberlagerung von $\underline{\mathcal{M}}_{G'_t, C'_t}$ ist.

Es sei $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ ein Punkt von $\underline{\mathcal{M}}_{G'_t, C'_t}$. Wir wählen eine p-prinzipale, effektive Polarisierung $\lambda \in \bar{\lambda}$ und in einem geometrischen Punkt ein $\eta \in \bar{\eta}$. Dann gibt es ein $k^p \in K^*(\mathbb{A}_f^p(-1))$, so daß

$$\psi_t(\eta(x), \eta(y)) = k_K^p E^\lambda(x, y).$$

Wir setzen $k_p = 1$ und erhalten ein Idèle aus $K^*(\mathbb{A}_f(-1))$. Die Klasse κ dieses Idèles in $\mathrm{Nm}\, C_F \cdot \mathrm{Nm}^0 C_t \backslash K^*(\mathbb{A}_f(-1))$ hängt nicht von der Wahl von $\eta \in \bar{\eta}$ und $\bar{\kappa} \in \mathrm{Nm}\, C_F\, \mathrm{Nm}^0\, C_t \backslash K^*(\mathbb{A}_f(-1))/K_+^*$ hängt nicht von der Wahl von $\eta \in \bar{\eta}$ und $\lambda \in \bar{\lambda}$ ab. Wir wählen ein Repräsentantensystem $\kappa_i \in \mathrm{Nm}\, C_F\, \mathrm{Nm}^0\, C_t \backslash K^*(\mathbb{A}_f(-1))$ der endlichen Menge $\mathrm{Nm}\, C_F\, \mathrm{Nm}^0\, C_t \backslash K^*(\mathbb{A}_f(-1))/K_+^*$. Mit Hilfe der κ_i definieren wir $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{G_t', C_t'}$ genauso wie $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_C$. Da nach Lemma 4.19 $\mathrm{Nm}\, C_F\, \mathrm{Nm}^0 C_t \cap K_+^*/\mathrm{Nm}(F \cap C_F)$ fixpunktfrei auf $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{G_t', C_t'}$ operiert, erhalten wir, daß $\underline{\mathcal{M}}_{G_t, C_t}$ repräsentierbar ist.

Die Gruppe $C_K \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*$ operiert fixpunktfrei auf dem Schema $\mathcal{M}_{t,C} \times C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^*$. Der Quotient dieser Wirkung ist $\mathcal{N}_t = \mathcal{M}_{t,C} \times C_F K^*(\mathbb{A}_f) \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^*$. Die Abbildung 4.16 faktorisiert sich über $\beta_t : \mathcal{N}_t \to \mathcal{M}_{G_t', C_t'} \otimes_{O_{F_p}} O_{F/pO_F}$. Es bleibt zu beweisen, daß β_t ein Isomorphismus ist. Wir wissen bereits, daß β_t auf den $\mathbb{F}_p$-wertigen Punkten surjektiv ist. Da $\mathcal{M}_{G_t', C_t'} \otimes_{O_{F_p}} O_F/pO_F$ ein reduziertes Schema ist, genügt es zu beweisen, daß β_t eine abgeschlossene Einbettung ist. Nach EGA IV 8.11.5 ist das äquivalent damit, daß β_t eigentlich, unverzweigt und radikal ist. Offensichtlich ist β_t eigentlich. Die Unverzweigtheit folgt aus der Tatsache, daß man einen Homomorphismus abelscher Mannigfaltigkeiten auf höchstens eine Weise infinitesimal liften kann.

Um zu zeigen, daß β_t radikal ist, betrachten wir zwei Punkte $(A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ und $(A', \iota', \bar{\lambda}', \bar{\eta}')$ von $\mathcal{M}_{t,C}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper L und zwei Elemente $e, e' \in F^*(\mathbb{A}_f^p)$. Gegeben sei ein Isomorphismus von Punkten von $\mathcal{M}_{G_t', C_t'}$

$$\varphi : (A, \iota/_{O_F}, \bar{\lambda}, \overline{e\eta}) \longrightarrow (A', \iota'/_{O_F}, \bar{\lambda}', \overline{e'\eta'})$$

Wir müssen zeigen, daß ein $k \in K^*(\mathbb{A}_f^p)$ existiert, so daß $e'k = e$ mod $C_F F^*$ und ein Isomorphismus von Punkten von $\mathcal{M}_{t,C}$

$$(A, \iota, \bar{\lambda}, \overline{k\eta}) \longrightarrow (A', \iota', \bar{\lambda}', \bar{\eta}').$$

Wir finden Elemente $u \in C_F$ und $w \in C_t$, so daß

$$e'\eta'(\varphi(x)) = ue\eta(x)w, x \in \hat{V}^p(A), \eta \in \bar{\eta}, \eta' \in \bar{\eta}'.$$

Da ι und ι' durch ihre Einschränkungen auf O_F bis auf Konjugation eindeutig bestimmt sind, finden wir ein $f \in F^*$, so daß

$$\varphi(\iota(d)x) = \iota'(fdf^{-1})\varphi(x).$$

Dann gilt:

$$\eta'(\varphi(\iota(d)x)) = \eta'(\iota'(fdf^{-1})\varphi(x)) = fdf^{-1}ue'^{-1}e\eta(x)w$$
$$\eta'(\varphi(\iota(d)x)) = ue'^{-1}e\eta(\iota(d)x)w = ue'^{-1}ed\eta(x)w$$

Folglich liegt $f^{-1}ue'^{-1}e = k$ im Zentrum $K^*(\mathbb{A}_f^p)$ von $D \otimes \mathbb{A}_f^p$.

Wir erhalten, daß $e'k = e \mod C_F F$ und daß $\varphi_1 = \iota(f^{-1})\varphi$ einen Isomorphismus von Punkten von $\mathcal{M}_{G_t^{\cdot}, C_t^{\cdot}}$ definiert

$$\varphi_1 : (A, \iota, \bar{\lambda}, \overline{k\eta}) \longrightarrow (A', \iota', \bar{\lambda}', \bar{\eta}').$$

Damit ist Satz 4.17 bewiesen.

Wir können jetzt eine Liftung des Schemas $\mathcal{M}_{t,C}$ nach Charakteristik 0 definieren. Die Einschränkung von α_t auf $\mathcal{M}_{t,C} \times 1$ ist eine offene und abgeschlossene Einbettung. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$ die Vereinigung aller Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{M}_{G_t^{\cdot}, C_t^{\cdot}}$, die mit $\alpha_t(\mathcal{M}_{t,C} \times 1)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben. $\tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$ ist ein glattes Schema über O_{F_p} und α_t induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{M}_{t,C} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{M}}_{t,C} \otimes_{O_{F_p}} O_F/pO_F.$$

Da $C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^*$ auf $\mathcal{M}_{G_t^{\cdot}, C_t^{\cdot}}$ operiert, erhält man einen Morphismus

$$\tilde{\alpha}_t : \tilde{\mathcal{M}}_{t,C} \times C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^* \longrightarrow \mathcal{M}_{G_t^{\cdot}, C_t^{\cdot}}. \tag{4.20}$$

Wenn wir C alle offenen, kompakten Untergruppen von $D^*(\mathbb{A}_f)$ durchlaufen lassen, die der Bedingung 1.6 genügen, so erhalten wir ein Proschema $\tilde{\mathcal{M}}_t^p = \varprojlim \tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$. Da $G_t^{\cdot}(\mathbb{A}_f^p)$ auf dem Proschema $\mathcal{M}_{G_t^{\cdot}}^p = \varprojlim \mathcal{M}_{G_t^{\cdot}, C_t^{\cdot}}$ operiert, können wir die Operation von $D^*(\mathbb{A}_f^p) = D_t^*(\mathbb{A}_f^p)$ auf $\mathcal{M}_t^p = \varprojlim \mathcal{M}_{t,C}$ nach $\tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$ liften. Wir erhalten eine Abbildung von Proschemata

$$\tilde{\alpha}_t^p : \tilde{\mathcal{M}}_t^p \times (F^*(\mathbb{A}_f)/F)^\wedge \longrightarrow \mathcal{M}_{G_t^{\cdot}}^p, \tag{4.20.1}$$

wobei $(F^*(\mathbb{A}_f)/F^*)^\wedge = \varprojlim C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^*$. Nach Definition der Aktionen ist $\tilde{\alpha}_t^p$ äquivariant bezüglich der Abbildung $D_t^*(\mathbb{A}_f^p) \times$

$F^*(\mathbb{A}_f^p) \to G_t^{\cdot}(\mathbb{A}_f^p)$. Nach 4.17 sind $\tilde{\alpha}_t$ und $\tilde{\alpha}_t^p$ konstante Galoisüberlagerungen.

Wir wollen die allgemeine Faser von $\tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$ berechnen. Dazu erinnern wir an die Definition der seltsamen Modelle.

Der Morphismus 4.9.1 faktorisiert sich folgendermaßen:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow{h_{Dt} \times h_{F^*}} D_t^*(\mathbb{R}) \times F^*(\mathbb{R}) \longrightarrow G_t^{\cdot}(\mathbb{R})$$

Die Paare $(D_t^*, h_{D_t^*})$ und (F^*, h_{F^*}) definieren Shimuramannigfaltigkeiten $M_{D_t^*}$ und M_{F^*}. Der Shimurakörper $E(D_t^*, h_{D_t^*})$ von $M_{D_t^*}$ ist der Teilkörper von $\mathbb{C}$, der von allen Elementen $\Sigma_{i \in Z/nZ} |t(i)| v_i(k)$, $k \in K$ erzeugt wird. Nach Deligne [4] §6 besitzt $M_{D_t^*}$ ein kanonisches Modell. Im Sinne des vor 4.9 gewählten Langlandsdiagramms liegt $E(D_t^*, h_{D_t^*})$ in F_p. Es ist daher sinnvoll, wenn wir im weiteren $M_{D_t^*}$ als Proschema über F_p auffassen.

Der Frobenius $\rho \in \mathrm{Gal}(F_p^{nr}/F_p)$ definiert durch Wirkung auf dem zweiten Faktor einen Morphismus $\alpha_\rho : M_{D_t^*,C_t} \otimes_{F_p} F_p^{nr} \to M_{D_t^*,C_t} \otimes_{F_p} F_p^{nr}$, den wir den Frobenius von $M_{D_t^*,C_t}$ nennen. Es sei h irgendein Automorphismus endlicher Ordnung des F_p-Schemas $M_{D_t^*,C_t}$. Dann existiert eine Form von $M_{D_t^*,C_t}$, d.h. ein F_p-Schema M', das über F_p^{nr} isomorph zu $M_{D_t^*,C_t}$ ist, so daß $\alpha_\rho \circ h_{F_p^{nr}}$ der Frobenius von M' ist.

Es sei $\Sigma_{i \in Z/nZ} |t(i)| = k$. Wir bezeichnen mit $h_{p^k} \in K^*(\mathbb{A}_f)$ das Idèle, welches an der Primstelle p gleich p^k und sonst gleich 1 ist. Da $K^*(\mathbb{A}_f)$ auf $M_{D_t^*,C_t}$ operiert, erhalten wir einen Automorphismus endlicher Ordnung von $M_{D_t^*,C_t}$. Die h_{p^k} entsprechende Form von $M_{D_t^*,C_t}$ bezeichnen wir mit $\tilde{M}_{D_t^*,C_t}$.

Läßt man C wieder das System aller offenen, kompakten Untergruppen mit der Eigenschaft 1.6 durchlaufen, so erhält man Proschemata auf denen $D_t^*(\mathbb{A}_f^p)$ operiert.

$$M_{D_t}^p = \varprojlim M_{D_t^*,C_t}, \; \tilde{M}_{D_t}^p = \varprojlim \tilde{M}_{D_t^*,C_t}$$

4.21 Satz: *Es existiert ein glattes O_{F_p}-Proschema $\tilde{\mathcal{M}}_t^p = \varprojlim \tilde{\mathcal{M}}_{t,C}$ mit einer $D_t^*(\mathbb{A}_f^p)$-Aktion. Die spezielle Faser $\tilde{\mathcal{M}}_t^p \otimes_{O_{F_p}} O_F/pO_F$ ist isomorph zu $\mathcal{M}_t^p$, und die allgemeine Faser $\tilde{\mathcal{M}}_t \otimes_{O_{F_p}} F_p$ ist isomorph zu $\tilde{M}_{D_t}^p$. Diese Isomorphismen respektieren die $D_t(\mathbb{A}_f^p)$-Aktionen.*

Beweis: Die erste Aussage haben wir bereits bewiesen. Wir erinnern an die Definition des kanonischen Modells M_F.

Es sei w_j die Fortsetzung von $v_i : K \to \mathbb{R}$, für die $t(j) \geq 0$. Wir haben nach Definition

$$\begin{aligned} h_F : \mathscr{S}_{\mathbb{R}} &\longrightarrow (F \otimes \mathbb{R})^* \cong \prod_{v_i} (F \otimes_{K,v_i} \mathbb{R})^* \cong \prod_{w_j} \mathbb{C}^*. \\ z &\longmapsto z^{-t(j)} \end{aligned}$$

Es sei μ das Kompositum von $h_F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* = \mathscr{S}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \\ z &\longmapsto (z, 1) \end{aligned}$$

Die Abbildung μ faktorisiert sich:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \prod_{j \in Z/2nZ, t(j)=1} \mathbb{C}^* \longrightarrow (F \otimes \mathbb{C})^* \cong \prod_{j \in Z/2nZ} \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto (z^{-1}, \ldots, z^{-1}) \end{aligned}$$

Der Shimurakörper $E(F^*, h_F)$ ist der Definitionskörper von μ. Er wird erzeugt von den Elementen $\Sigma_{t(j)=1}\, w_j(f)$, $f \in F$, Im Sinne des gewählten Langlandsdiagramms ist er in F_p enthalten. Wir betrachten M_{F^*, C_F} als Schema über F_p. Da C_F in p maximal ist, ist M_{F^*, C_F} endlich und étale über F_p. Der Frobenius über F_p operiert auf M_{F^*, C_F} nach Definition wie das Bild von p^{-1} bei der Abbildung

$$r : F_p^* \longrightarrow (F_p \otimes F_p)^* \xrightarrow{\mathrm{Nm}_{F_p/\mathbb{Q}_p}} F_p^* \subset F^*(\mathbb{A}_f).$$

Man sieht leicht, daß $r(p^{-1})$ das Idèle h_{p^k} ist. Aus 4.9 folgt ohne Schwierigkeiten, daß die kanonische Abbildung

$$\beta_t : M_{D_t^*, C_t} \times M_{F^*, C_F} \longrightarrow M_{G_t', C_t'} \tag{4.21.1}$$

eine unverzweigte Galoisüberlagerung mit der Gruppe $C_K \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*$ ist.

Der Morphismus β_t ist über F_p definiert. Wenn man die linke Seite von 4.21.1 mit Hilfe des Automorphismus endlicher Ordnung $h_{p^k} \times h_{p^{-k}}$ twistet, so ergibt sich eine konstante Galoisüberlagerung

$$\tilde{M}_{D_t^*, C_t} \times C_F \backslash F^*(\mathbb{A}_f)/F^* \longrightarrow M_{G_t', C_t'}.$$

Geht man zu den Proschemata über, so erhält man einen bezüglich

$\pi: D_t^*(\mathbb{A}_f^p) \times F^*(\mathbb{A}_f^p) \to G_t^{\cdot}(\mathbb{A}_f^p)$ äquivarianten Morphismus

$$\tilde{\beta}_t^p : \tilde{M}_{D_t^*}^p \times (F^*(\mathbb{A}_f)/F^*)^\Lambda \longrightarrow M_{G_t^{\cdot}}^p, \tag{4.21.2}$$

der eine konstante Galoisüberlagerung mit der Gruppe $(K^*(\mathbb{A}_f)/K^*)^\Lambda$ ist.

Andererseits definiert 4.20.1 eine π-äquivariante, konstante Galoisüberlagerung von F_p-Schemata mit der Gruppe $(K^*(\mathbb{A}_f)/K^*)^\Lambda$

$$\pi' : M' \times (F^*(\mathbb{A}_f)/F^*)^\Lambda \longrightarrow M_{G_t^{\cdot}}^p.$$

Die letzte Behauptung von 4.21 folgt, wenn wir zeigen, daß ein $f \in F(\mathbb{A}_f^p)$ existiert, so daß

$$f\pi'(M' \times 1) = \tilde{\beta}_t^p(\tilde{M}_{D_t}^p).$$

Beide Seiten der Gleichung sind Vereinigungen von Zusammenhangskomponenten von $M_{G_t^{\cdot}}^p$. Wir können f so wählen, daß sie eine Zusammenhangskomponente gemeinsam haben. Ich behaupte, daß $D_t^*(\mathbb{A}_f^p)$ transitiv auf den geometrischen Zusammenhangskomponenten $\pi_0(\tilde{M}_{D_t^*}^p) = \pi_0(M_{D_t^*}^p)$ operiert. Dann folgte $\tilde{\beta}_t^p(M_{D_t}^p) \subset f\pi'(M' \times 1)$ und damit die Gleichheit.

Nach dem chinesischen Restsatz liegt $D_t^*(\mathbb{Q})$ dicht in $D_t^*(\mathbb{R}) \times D_t^*(\mathbb{Q}_p)$, Daraus folgt

$$D_t^*(\mathbb{R})^0 C_{t,p} D_t^*(\mathbb{A}_f^p) D_t(\mathbb{Q}) = D_t^*(\mathbb{R}) D_t^*(\mathbb{A}_f) = D^*(\mathbb{A}).$$

Wir erhalten die behauptete Transitivität.

Der Beweis zeigt, daß die π-äquivarianten Galoisüberlagerungen π' und 4.21.2 isomorph sind.

Es sei $S \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ die gesättigte Menge, die der Funktion t entspricht. Wenn wir die Sätze 4.21 und 4.8 kombinieren, so erhalten wir, daß $\mathcal{M}_{C,S+1}$ universell homöomorph zur Reduktion des F_p-Schemas $\tilde{M}_{D_t^*,C_t}$ ist. Der Satz 4.7 sagt aus, daß das auch noch richtig ist, wenn $t = 1$, $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ und n gerade ist.

4.22 Satz: *Es sei $S \neq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ eine gesättigte Menge. Z sei eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{F_p}} \bar{\mathbb{F}}_p$. Dann ist der Durchschnitt Z_S von Z mit $\mathcal{M}_{C,S} \otimes_{O_F/pO_F} \bar{\mathbb{F}}_p$ nicht leer und zusammenhängend.*

Beweis: Wir wissen bereits, daß Z_S nicht leer ist. Nach 4.7 enthält Z nämlich einen Punkt, für den alle Indexe kritisch sind. Deshalb genügt es zu beweisen:

$$\operatorname{card} \pi_0(\mathcal{M}_{C,S} \otimes_{O_F/pO_F} \bar{\mathbb{F}}_p) = \operatorname{card} \pi_0(\mathcal{M}_C \otimes_{O_{F_p}} \bar{\mathbb{F}}_p) = \mathrm{Nm}^0 C \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*_+$$

Die letzte Gleichung folgt aus 4.1.

Es sei t die zu $S-1$ assoziierte Funktion. Da $\mathcal{M}_{C,S} \otimes_{O_F/pO_F} \bar{\mathbb{F}}_p$ universell homöomorph zur Reduktion von $\tilde{M}_{D_t^*,C_t} \otimes_{F_p} F_p^{nr}$ ist, genügt es, nach Zariskis Zusammenhangssatz zu beweisen, daß

$$\operatorname{card} \pi_0(M_{D_t^*,C_t} \otimes_{F_p} \mathbb{C}) = \mathrm{Nm}^0 C \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*_+.$$

Es sei $D_t^{*\prime}$ die Untergruppe der Elemente von D_t^* mit der Norm 1. Das ist eine einfach zusammenhängende Gruppe über $\mathbb{Q}$, die im Unendlichen nicht kompakt ist. Deshalb können wir Deligne [4] 2.7.1 anwenden. $C_{t,\infty}$ bezeichne den Zentralisator von $h_{D_t^*}(\sqrt{-1})$ in $D_t^*(\mathbb{R})$. Dann ist $\mathrm{Nm}^0 C_{t,\infty}$ gleich der Menge der total positiven Elemente von $K^*(\mathbb{R})$. Wir erhalten eine Bijektion

$$\pi_0(M_{D_t^*,C_t} \otimes_{F_p} \mathbb{C}) \cong \mathrm{Nm}^0 C_{t,\infty} \times \mathrm{Nm}^0 C_t \backslash K^*(\mathbb{A})/K^* \cong \mathrm{Nm}^0 C_t \backslash K^*(\mathbb{A}_f)/K^*_+.$$

Da $\mathrm{Nm}^0 C_t = \mathrm{Nm}^0 C$, folgt die Behauptung.

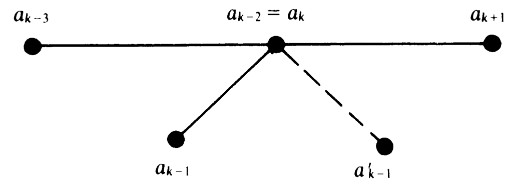
§5. Die Schema $\mathcal{M}_{C,S}$ für nichtgesättigte Mengen S

Wir zeigen in diesem Paragraphen, daß die $\mathcal{M}_{C,S}$ im gewissen Sinne $(\mathbb{P}^1)^r$-Faserungen über $\mathcal{M}_{C,S'}$ sind, wobei S' eine minimale gesättigte Menge ist, die S umfaßt. Der Beweis beruht auf dem lokalen Struktursatz 2.4. Wir beginnen mit einigen Betrachtungen, die das Hauptresultat plausibel machen und die wir später präzisieren werden.

Es sei X ein s.f. O_{D_p}-Modul über einem perfekten Körper L. Es sei $k \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ ein Index, so daß k und $k+n-1$ für X kritisch sind. $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} M_i$ sei der Cartiermodul von X. Wir wählen eine Einbettung $\varphi_0: M_0 \to \mathcal{K}^2$ und erhalten ein Diagramm a_i, $i \in \mathbb{Z}$ im Bruhat–Tits-gebäude. Wir fixieren einen Repräsentanten aus der Klasse k mod $2n$ und bezeichnen ihn ebenfalls mit k. k ist genau dann kritisch, wenn $Ua_k = a_{k+n-1}$. Da k und $k+n-1$ kritisch sind, erhalten wir:

$$a_{k+2n} = U^2 a_k = U a_{k+n-1} = a_{k+2n-2} \Rightarrow a_k = a_{k-2}.$$

Es sei a'_{k-1} irgendein Punkt im Abstand 1 von a_k. Wir definieren $a'_j = a_j$, wenn $j \neq k-1 \bmod 2n$ und $a'_{k-1+2jn} = U^{2j}a'_{k-1}$ für $j \in \mathbb{Z}$.



Nach 2.7 definiert das Diagramm a'_i einen s.f. $O_{D_{\bar{p}}}$-Modul X' und eine Quasiisogenie der Höhe Null $X \to X'$. Da die Punkte im Abstand 1 von a_k durch $\mathbb{P}^1(L)$ parametrisiert werden, erhalten wir eine Menge von Quasiisogenien

$$X \to X_t,\ t \in \mathbb{P}^1(L). \tag{5.1}$$

Wir bemerken, daß $S(X_t) \supset S(X) \backslash \{k-1, k+n\}$. Es sei $n \geq 2$. Dann gibt es genau einen Punkt $t \in \mathbb{P}^1(L)$, so daß $k-1 \in S(X_t)$. Er ist bestimmt durch die Gleichung $Ua_{k-1}(t) = a_{k+n-2}$, wobei $a_j(t)$ das Diagramm von X_t bezeichnet. Entsprechend gibt es genau ein t, so daß $k+n \in S(X_t)$. Es wird durch $Ua_{k-n} = a_{k-1}(t)$ bestimmt. Es sei $n = 1$ und L algebraisch abgeschlossen. Wir können annehmen, daß U wie der Frobenius σ operiert. Dann lauten beide Gleichungen $Ua_{k-1}(t) = a_{k-1}(t)$ und haben $p+1$ Lösungen.

Um uns von dem Fall eines perfekten Grundkörpers zu lösen, übersetzen wir die Konstruktion in die Sprache der Cartiertheorie. Mit den gleichen Bezeichnungen gilt:

$$pM_k = \Pi^2 M_k = \Pi V M_{k+n-1} = V^2 M_{k-2} \tag{5.2}$$

Es sei γ_i eine homogene V-Basis von M. Nach 5.2 ist γ_k, $V\gamma_{k-1}$ eine Basis des $W(L)$-Moduls M_k. Die Gitter im Abstand 1 von M_k lassen sich folgendermaßen parametrisieren

$$pM_k \subset pM_k + W(L)([u]\gamma_k + [w]V\gamma_{k-1}) \subset M_k,\ (u, w) \in \mathbb{P}^1(L).$$

Wir setzen:

$$M'_{k-1} = VM_{k-2} + W(L)(V^{-1}[u]\gamma_k + [w^p]\gamma_{k-1}) \subset M_{k-1} \otimes \mathbb{Q}$$
$$M'_i = M_i \text{ für } i \neq k-1$$

Dann ist $M' = \bigoplus M'_i$ der Cartiermodul eines s.f. O_D-Moduls. Eine homogene V-Basis sieht fogendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \delta_{k-1} &= [w^p]\gamma_{k-1} + V^{-1}[u]\gamma_k \\ \delta_i &= \gamma_i \text{ für } i \neq k-1, k \\ \delta_k &= \begin{cases} \gamma_k, \text{ wenn } w \neq 0 \\ V\gamma_{k-1}, \text{ wenn } u \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Wir werden zeigen, daß die Konstruktion 5.1 in dieser Form über einem Basisschema T der Charakteristik p möglich ist.

Es sei $(A, \iota, \bar{\eta})$ ein L-wertiger Punkt von $\mathcal{M}_C$ und X seine formale Gruppe. Die Quasiisogenien $X \to X_t$, $t \in \mathbb{P}^1(L)$ definieren Quasiisogenien $\rho_t : (A, \iota, \bar{\eta}) \to (A_t, \iota_t, \bar{\eta}_t)$. Wir erhalten eine Abbildung

$$\mathbb{P}^1(L) \longrightarrow \mathcal{M}_C(L). \tag{5.4}$$

5.5 Lemma: *Die Abbildung 5.4 ist injektiv.*

Beweis: Wir beginnen mit einer Definition. Es sei $\alpha : X \to X'$ eine Quasiisogenie s.f. O_{D_p}-Moduln über L. Es seien M und M' die Cartiermoduln von X und X' und $\varphi_0 : M_0 \to \mathcal{K}^2$, $\varphi'_0 : M'_0 \to \mathcal{K}^2$ Einbettungen, so daß $\varphi_0 = \alpha \circ \varphi'_0$. Wir sagen dann, daß die entsprechenden Diagramme a_i und a'_i von X und X' kompatibel bezüglich α gewählt sind.

Wir können voraussetzen, daß $k-1$ für $(A, \iota, \bar{\eta})$ kritisch ist. Es sei $\alpha : (A_t, \iota_t, \bar{\eta}_t) \to (A_{t'}, \iota_{t'}, \bar{\eta}_{t'})$ ein Isomorphismus. Wir betrachten folgendes Diagramm von Quasiisogenien der Höhe 0.

$$\begin{array}{cccc} (A, \iota, \bar{\eta}) \xrightarrow{\rho_t} & (A_t, \iota_t, \bar{\eta}_t) \xrightarrow[\sim]{\alpha} & (A_{t'}, \iota_{t'}, \bar{\eta}_{t'}) \xleftarrow{\rho_{t'}} & (A, \iota, \bar{\eta}) \\ a_i & a_i(t) = c_i & c'_i & a'_i \end{array}$$

Die Diagramme seien kompatibel bezüglich der Quasiisogenien gewählt. Da α ein Isomorphismus ist, gilt $c_i = c'_i$. Nach Konstruktion von ρ_t und $\rho_{t'}$ haben wir $a_i = c_i$ für $i \neq k-1$ und $a'_i = c'_i$ für $i \neq k-1$. Da $k-1$ kritisch ist, folgt weiter $Ua_{k-1} = a_{k-n-2}$ und $Ua'_{k-1} = a'_{k-n-2}$.

Es sei $n \geq 2$. Dann erhalten wir $a_i = a'_i$ für alle i und damit $a_i(t) = c_i = c'_i = a_i(t')$, was wir zeigen wollten.

Es sei $n = 1$. Wir müssen zeigen, daß $\beta = \rho_{t'}^{-1}, \alpha\rho_t$ ein Isomorphismus ist. Da alle Indexe kritisch sind, folgt die Behauptung aus 4.5.

Unser Ziel ist es, projektive Geraden in $\mathcal{M}_{C,S}$ zu finden. Leider liegt für einen Punkt $(A, \iota, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{C,S}(L)$ das Bild von 5.4 nicht notwendig in $\mathcal{M}_{C,S}(L)$. Deshalb müssen wir die Konstruktion 5.1 etwas verallgemeinern.

Wenn S nicht gesättigt ist, finden wir ein Intervall $[i+1, j]$ in $\bar{S}$, so daß $i \in S \backslash \bar{S}$, $j+1 \notin \bar{S}$ und $j+1 \in S\backslash \bar{S}$ genau dann, wenn $j-i$ ungerade ist. Wir nennen dann $[i+1, j]$ und $[i+n+1, j+n]$ ungesättigte Intervalle von S. Dabei lassen wir auch den Fall eines leeren Intervalles zu: $i \in S\backslash\bar{S}$, $i+1 \notin S$.

Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall $j = i+2k$ und $i+2k+1 \notin S$. Der Fall $j-i$ ungerade ist völlig analog.

Man betrachte die folgenden Paare kritischer Indexe.

$$\{i+n+1, i\}, \{i+2, i+n+1\}, \{i+n+3, i+2\}, \ldots, \{i+n+2k+1, i+2k\}$$

Nach 5.1 gibt jedes Paar Anlaß zu einer Menge X_t, $t \in \mathbb{P}^1(L)$ s.f. O_{D_p}-Moduln, wenn wir die Punkte $a_{i+n}, a_{i+1}, a_{i+n+2}, a_{i+3}, \ldots, a_{i+2n+k}$ in der dort beschriebenen Weise bewegen. Insgesamt erhalten wir eine Menge von Quasiisogenien der Höhe Null von s.f. O_{D_p}-Moduln.

$$X \longrightarrow X_t,\ t \in \mathbb{P}^1(L) \times \cdots \times \mathbb{P}^1(L) = (\mathbb{P}^1(L))^{2k+1} \tag{5.6.1}$$

Da nach Voraussetzung $i+n$, $i+2k+1 \notin S$, gilt

$$S(X_t) \supseteq S\backslash\{i+1, i+n+2, i+3, \ldots, i+n+2k\}.$$

Die Menge der Punkte t, so daß $S(X_t) \supset S$ wird durch die folgenden Gleichungen definiert.

$$\begin{aligned} Ua_{i+1}(t) &= a_{i+n}(t)\\ Ua_{i+n+2}(t) &= a_{i+1}(t)\\ Ua_{i+3}(t) &= a_{i+n+2}(t)\\ &\vdots\\ Ua_{i+n+2k}(t) &= a_{i+2k-1}\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\{t \mid S(X_t) \supset S\} = \mathbb{P}^1(L) \tag{5.6.2}$$

Es sei $n \neq 2k+1$. Dann bestimmt die Gleichung $Ua_{i+n}(t) = a_{i-1}$ (bzw. $Ua_{i+2k+1} = a_{i+n+2k}(t)$) den einzigen Punkt der Menge 5.6.2, so daß $i+n \in S(X_t)$ (bzw. $i+2k+1 \in S(X_t)$).

Es sei $n = 2k + 1$. Dann gilt $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\backslash\{i + n\}$. Wenn $j = i \bmod 2$, so ist j und $j + n - 1$ kritisch. Daraus folgt $a_j = a_{j-2}$ und $Ua_j = a_{j+n-1} = a_j$. Wir erhalten, daß X supersingulär ist. Es sei L algebraisch abgeschlossen. Wir können annehmen, daß U wie σ^n auf dem Gebäude operiert. Dann gibt es $p^n + 1$ Punkte $t \in \mathbb{P}^1(L)$, für die $i + n = i + 2k + 1 \in S(X_t)$. Es sind die Lösungen der Gleichung

$$a_{i+n}(t)^{\sigma^n} = a_{i+n}(t).$$

Es sei X der s.f. O_{D_p}-Modul eines Punktes $(A, \iota, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{C,S}(L)$. Dann definieren 5.6.1 und 5.6.2 Abbildungen

$$(5.7.1) \qquad (\mathbb{P}^1(L))^{2k+1} \longrightarrow \mathcal{M}_C(L),$$

$$(5.7.2) \qquad \mathbb{P}^1(L) \longrightarrow \mathcal{M}_{C,S}(L).$$

5.8 Lemma: *Die Abbildungen* 5.7.1 *und* 5.7.2 *sind injektiv.*

Der Beweis ist völlig analog zu dem von 5.5.

Es sei $n \neq 2k + 1$. Wir erhalten Abbildungen, deren Fasern isomorph zu $\mathbb{P}^1(L)$ sind.

$$(5.9.1) \qquad \mathcal{M}_{C,S}(L) \begin{array}{l} \nearrow \mathcal{M}_{C,S\cup\{i+2k+1\}}(L) \\ \searrow \mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}}(L) \end{array}$$

Es sei $L = \bar{\mathbb{F}}_p$ und $n = 2k + 1$. Dann gilt $S = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\backslash\{i + n\}$. Es sei zunächst i ungerade. Dann ist der Durchschnitt des Bildes von 5.7.2 mit $\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ gleich einer Faser des Morphismus 4.3. Deshalb erhalten wir eine $\mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p)$-Faserung, die die Aktion des Frobenius auf beiden Seiten respektiert.

$$(5.9.2) \qquad \mathcal{M}_{C,S}(\bar{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow C_{-}\backslash D^*_{\pm}(\mathbb{A}_f(-\tfrac{1}{2}))/D^*_{\pm}$$

Wir bemerken, daß 4.3 willkürlich gewählt ist. Wir hätten für P_p auch den Stabilisator von a_1 wählen können. Dann gilt eine analoge Betrachtung für i gerade. Wir erhalten 5.9.2 auch in diesem Fall.

Zu dem ungesättigten Intervall $[i + 1, i + 2k] \subset \bar{S}$ assoziieren wir das Paar $\{i + n, i + 2k + 1\} \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\backslash S$. Analog assoziieren wir zu einem ungesättigten Intervall $[i + 1, i + 2k - 1]$ mit i, $i + 2k \in S\backslash\bar{S}$ das Paar $\{i + n, i + 2k + n\} \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\backslash S$. Wenn $i \in S\backslash\bar{S}$ und $i + 1 \notin S$, so assoziieren wir $\{i + n, i + 1\} \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\backslash S$.

Es sei $\{i, j\}$ ein auf diese Weise zu S assoziiertes Paar. Wenn $i \neq j$, so erhalten wir auch in diesem allgemeineren Fall $\mathbb{P}^1(L)$-Faserungen

$$\mathcal{M}_{C,S}(L) \begin{array}{l} \nearrow \mathcal{M}_{C,S\cup\{i\}}(L) \\ \searrow \mathcal{M}_{C,S\cup\{j\}}(L) \end{array} \tag{5.9.3}$$

Wenn $\{i, i\}$ ein ungesättigtes Paar ist, so haben wir den Fall 5.9.2.

5.10 Lemma: *Es seien $\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_k, j_k\}$ die zu S assoziierten Paare. Es seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ verschiedene Indexe, so daß in jedem assoziierten Paar mindestens ein m_s liegt. Die Mengen der Form $S \cup \{m_1, \ldots, m_k\}$ sind die minimalen gesättigten Mengen, die S umfassen.*

Beweis: Wir zeigen durch Induktion nach k, daß $S \cup \{m_1, \ldots, m_k\}$ eine minimale gesättigte Menge ist, die S umfaßt.

Es sei S' eine gesättigte Menge, so daß $S \subset S' \subset S \cup \{m_1, \ldots, m_k\}$ oder $S' = S \cup \{m_1, \ldots, m_k\}$. Wir können annehmen, daß $m_1 = i_1 \in S'$. Wenn m_1 in keinem anderen assoziierten Paar liegt, so sind $\{i_2, j_2\}, \ldots, \{i_k, j_k\}$ die assoziierten Paare von $S \cup \{m_1\}$. Dann ist nach Induktion $S \cup \{m_1, \ldots, m_k\}$ gesättigt und gleich S'. Es sei $m_1 = i_1 = i_2 \in S'$. Mit den Bezeichnungen der Abbildung nach 2.12 sind die folgenden Fälle möglich

j_2 ungerade m_1 gerade $j_1 + n$

$\circ \;\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv\; \circ \;\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv\; *$

$j_2 + n$ gerade m_1 gerade $j_1 + n$

$* \;\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv\; \circ \;\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv\; *$

j_2 ungerade m_1 ungerade j_1

$\circ \;\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv\; \circ \;\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv\; \circ$

Man sieht, daß $\{j_1, j_2\}, \{i_3, j_3\}, \ldots, \{i_k, j_k\}$ die zu $S \cup \{m_1\}$ assoziierten Paare sind. Die Behauptung folgt durch Induktion. Es ist klar, daß man auf diese Weise jede minimale gesättigte Menge erhält, die S umfaßt.

Mit den Bezeichnungen von 5.10 erhalten wir eine Folge von $\mathbb{P}^1(L)$-Fasserungen.

$$\mathcal{M}_{C,S}(L) \longrightarrow \mathcal{M}_{C,S\cup\{m_1\}}(L) \ldots \longrightarrow \mathcal{M}_{C,S\cup\{m_1,\ldots,m_k\}}(L)$$

Wenn $S \cap \{m_1, \ldots, m_k\} = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, so muß man die letzte Faserung durch 5.9.2 ersetzen.

Wir hätten gerne, daß die konstruierten Abbildungen auf den L-wertigen Punkten durch Morphismen induziert werden. Dafür führen wir die Konstruktion im Rahmen der Cartiertheorie durch.

Wir verwenden Bezeichnungen aus dem Beweis von 4.8. Es sei T ein reduziertes O_F/pO_F-Schema. X sei ein s.f. O_{D_p}-Modul über T und Fr_X der relative Frobenius. Es sei $T = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema und M_X der Cartiermodul von X. Wir bezeichnen mit $\tilde{M}_X$ den V-dividierten Cartiermodul

Wir verwenden Bezeichnungen aus dem Beweis von 4.8. Es sei T ein reduziertes O_F/pO_F-Schema. X sei ein s.f. O_{D_p}-Modul über T und Fr_X der relative Frobenius. Es sei $T = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema und M_X der Cartiermodul von X. Wir bezeichnen mit $\tilde{M}_X$ den V-dividierten Cartiermodul

$$\tilde{M}_X = \varinjlim_{M(\mathrm{Fr}_X(p^r))} M_{X^{(p^r)}}$$

$\tilde{M}_X$ bestimmt die formale Gruppe bis auf Isogenie [27]. Wir bemerken, daß $S(X^{(p)}) = S(X) - 1$.

5.11 SATZ: *Es sei X ein s.f. O_{D_p}-Modul über T, für den die Indexe k und $k+n-1$ kritisch sind. Es gibt einen Funktor, der jedem Paar (X, T) ein Tripel $(Y, P \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} T, \pi^*X^{(p)} \to Y)$ zuordnet. Dabei ist $\pi : P \to T$ ein lokal triviales $\mathbb{P}^1$-Bündel und s ein Schnitt. Y ist ein s.f. O_{D_p}-Modul über P und $\pi^*X^{(p)} \to Y$ eine Quasiisogenie der Höhe Null, die über s ein Isomorphismus ist.*

Folgende Eigenschaften sind erfüllt:

(1) *Der Funktor ist mit Basiswechsel verträglich. Genauer sei T' ein reduziertes O_F/pO_F-Schema und $f : T' \to T$ ein Morphismus. Dann ist $(f^\natural Y, f^*P, f^\natural\pi^*X^{(p)} \to f^\natural Y)$ das (f^*X, T') zugeordnete Tripel.*

(2) *Es sei $T = \operatorname{Spec} L$ das Spektrum eines perfekten Körpers. Dann gibt es einen Isomorphismus $P \cong \mathbb{P}^1_L$, so daß für $t \in P(L) = \mathbb{P}^1_L(L)$ $X^{(p)} \cong \pi^*X_t^{(p)} \to Y_t$ die Quasiisogenie aus 5.1 ist.*

Beweis: Wir führen die Konstruktion zunächst lokal durch. Es sei $\operatorname{Spec} R \subset T$ eine offene, affine Menge über der X eine homogene V-Basis besitzt. Nach Abänderung des Strukturmorphismus dürfen wir annehmen, daß $k = 2$. Wir wählen eine homogene V-Basis $\gamma_i \in M_{i+1}$ des Cartiermoduls M von X. Die Strukturgleichungen von X

haben die Form

$$\Pi\gamma_i = [x_i]\gamma_{i+n} + \sum_{m\geq 1} V^m c_{m,i}\gamma_{i-m+n},\ x_1 = x_n = 0,\ c_{m,i} \in W(R).$$

Es bezeichne $c \mapsto c^F$ den Frobenius von $W(R)$. Dann lauten die Strukturgleichungen von $X^{(p)}$

$$\Pi\gamma'_i = [x_i^p]\gamma'_{i+n} + \sum_{m\geq 1} V^m c^F_{m,i}\gamma'_{i-m+n},$$

wobei $\gamma'_i = V^{-1}\gamma_i$.

Es sei $\tilde{M}$ der V-dividierte Cartiermodul von X. Für eine Unbestimmte U sei $\tilde{M}[U] = \text{Cart } R[U] \otimes_{\text{Cart } R} \tilde{M}$. Wir betrachten in $\tilde{M}[U]$ die Elemente

(5.11.1) $$\gamma'_0 + V^{-1}[U]\gamma'_1,\ \gamma'_1,\ '_2, \ldots, \gamma'_{2n-1}$$

und entsprechend für eine Unbestimmte W in $\tilde{M}[W]$ die Elemente

(5.11.2) $$[W^p]\gamma'_0 + V^{-1}\gamma'_1,\ V\gamma'_0,\ \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{2n-1}.$$

Wir zeigen, daß die Elemente 5.11.1 bzw. 5.11.2 eine homogene V-Basis eines reduzierten Cartieruntermoduls $M^U \subset \tilde{M}[U]$ bzw. $M^W \subset \tilde{M}[W]$ sind. Es sei $\varphi: R[U, U^{-1}] \to R[W, W^{-1}]$ der Isomorphismus, für den $\varphi(U) = W^{-1}$. M^U und M^W definieren s.f. O_{D_p}-Moduln über $R[U]$ und $R[W]$, die über $R[U, U^{-1}] \cong R[W, W^{-1}]$ isomorph sind.

Wir erhalten folglich einen s.f. O_{D_p}-Modul $Y \to \mathbb{P}^1_R$ und eine Quassi-isogenie der Höhe Null $\pi^* X^{(p)} \to Y$, wobei $\pi: \mathbb{P}^1_R \to \text{Spec } R$ die Projektion bezeichnet. Wir wissen bereits, daß diese Konstruktion mit 5.1 übereinstimmt, wenn R ein perfekter Körper ist.

Es sei $\delta_0 = \gamma'_0 + V^{-1}[U]\gamma'_1$ und $\delta_i = \gamma'_i$ für $i \neq 0$. Um zu zeigen, daß M^U ein reduzierter Cartiermodul ist, genügt es, Strukturgleichungen der Form 2.5.1 anzugeben, denen die δ_i genügen.

Wir benutzen dazu die folgende Formel

(5.11.3) $$V^m c^F \gamma'_0 = V^m c^F(\gamma'_0 + V^{-1}[U]\gamma'_1) - V^{m-1}c[U]\gamma'_1 = V^m c^F \delta_0 - V^{m-1}c[U]\delta_1, \text{ wobei } m \geq 1 \text{ und } c \in W(R[U]).$$

Es gilt:

$$\Pi\delta_0 = \Pi(\gamma'_0 + V^{-1}[U]\gamma'_1) = [x_0^p]\gamma'_n + [U^p]c^F_{1,1\gamma'_n} + \sum_{m\geq 1} V^m c^F_{m,0}\gamma'_{-m+n} + \sum_{m\geq 2} V^{m-1}[U^{p^m}]c^F_{m,1}\gamma'_{1-m+n}$$

Wenn $n \geq 2$, so finden wir für die letzten beiden Summen s nach 5.11.3

$$s = \sum \zeta_i \delta_i,\ \zeta_i \in \mathrm{E}_1^+.$$

Für die ersten beiden Summanden können wir schreiben:

$$[x_0^p]\gamma_n' + [U^p]c_{1,1}^F\gamma_n' = [x_0^p + r^p U^p]\gamma_n' + Vb^F F\gamma_n',\ r \in R,\ b \in W(R[U])$$

Wir haben eine Relation

$$F\gamma_n' = \sum_{m \geq 0} V^m a_{m,n}^F \gamma_{n-m-1}',\ a_{m,n} \in W(R[U]).$$

Deshalb finden wir nach 5.11.3

$$Vb^F F\gamma_n' = \sum \xi_i \delta_i,\ \xi_i \in \mathrm{E}_1^+.$$

Daraus ergibt sich die erste Strukturgleichung

$$\Pi\delta_0 = [x_0^p + r^p U^p]\delta_n + \sum (\xi_i + \zeta_i)\delta_i.$$

Für $n = 1$ führen die gleichen Überlegungen zum Ziel, wenn man benutzt, daß

$$VFM_0 = \Pi^2 M_0 \subset \Pi V M_0 \subset V^2 M_0.$$

Da in den Strukturgleichungen von $M^{(p)}$ für $i \neq 0,\ n+1$ der Koeffizient vor γ_0' in E_2^+ liegt, bekommen wir mit Hilfe von 5.11.3 ohne weiteres Strukturgleichungen für die δ_i.

Es bleibt der Fall $i = n + 1$ und $n \geq 2$ zu betrachten.

$$\Pi\gamma_{n+1}' = [x_{n+1}^p]\gamma_1' + Vc_{1,n+1}^F\gamma_0' + V^2 \ldots$$

Die Terme hinter V^2 machen keine Schwierigkeiten.

$$\begin{aligned}[x_{n+1}^p]\gamma_1' + Vc_{1,n+1}^F\gamma_0' &= [x_{n+1}^p]\gamma_1' + Vc_{1,n+1}^F\delta_0 - c_{1,n+1}[U]\gamma_1' \\ &= [x_{n+1}^p + Ur]\gamma_1' + VbF\gamma_1' + Vc_{1,n+1}^F\delta_0.\end{aligned}$$

Da die Indexe 2 und $n + 1$ kritisch sind, gilt

$$VFM_2 = \Pi^2 M_2 \subset \Pi V M_{n+1} \subset V^2 M_2.$$

Deshalb haben wir eine Gleichung der Form

$$F\gamma_1' = \sum_{m\geq 1} V^m a_{m,1}^F \gamma_{-m}'.$$

Dann gilt:

$$VbF\gamma_1' = \sum_{m\geq 1} V^{m+1} b^{F^m} a_{m,1}^F \gamma_{-m}' = \sum \xi_i \delta_i,\ \xi_i \in E_1^+$$

Wir finden die letzte Strukturgleichung

$$\Pi\delta_{n+1} = [x_{n+1}^p + Ur]\delta_1 + Vc_{1,n+1}^F\delta_0 + \sum \xi_i\delta_i.$$

Es sei Z der durch die Strukturgleichungen für die δ_i definierte s.f. O_{D_p}-Modul. Dann haben wir einen Morphismus $Z \to \pi^* X^{(p^2)}$, von dem man faserweise nachweist, daß er eine Isogenie ist. Folglich ist $M_Z \subset \tilde{M}[U]$ der von den Elementen 5.11.1 erzeugte Untermodul.

Der Beweis dafür, daß $M^W \subset \tilde{M}[W]$ ein reduzierter Cartiermodul ist, ist analog. Damit haben wir einen s.f. O_{D_p}-Modul $Y^\gamma \to \mathbb{P}_R^1$ konstruiert, für den alle Aussagen des Satzes erfüllt sind. Wir müssen noch die Unabhängigkeit von der V-Basis γ_i nachweisen.

Wir wählen homogene Koordinaten T_0, T_1 auf $\mathbb{P}_R^1$, so daß $T_0/T_1 = U$. Es sei Z^γ das Urbild von Y^γ bei der Projektion $A_R^2\backslash\{0\} \to \mathbb{P}_R^1$. Den Cartiermodul von Z^γ über einer fixierten offenen, affinen Menge von $\mathbb{A}_R^2\backslash\{0\}$ bezeichnen wir mit M^γ. Er besitzt das Erzeugendensystem

$$[T_1^p]\gamma_0' + V^{-1}[T_0]\gamma_1',\ V\gamma_0',\ \gamma_1',\ \gamma_2', \ldots, \gamma_{2n-1}'.$$

Es sei δ_i eine andere homogene V-Basis von M, so daß $\delta_i \in M_{i+1}$.

$$\delta_i = \sum V^m [r_{m,i}]\gamma_{i-m},\ r_{m,i} \in R,\ r_{0,i} \text{ Einheiten}$$

Der V-Basis δ_i entspricht analog ein Cartieruntermodul M^δ des V-dividierten Cartiermoduls. Es sei $N^\gamma \subset M^\gamma$ der Cartieruntermodul, der von den Elementen $V\gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_{2n}'$ erzeugt wird. Offensichtlich gilt $N^\gamma = N^\delta$. Wir finden

$$[T_1^p]\delta_0' + V^{-1}[T_0]\delta_1' = [T_1^p r_{0,0}^p]\gamma_0' + V^{-1}[T_0]([r_{0,1}^p]\gamma_1' + V[r_{1,1}^p]\gamma_0')$$
$$\bmod N^\gamma = [T_1^p r_{0,0}^p + T_0^p r_{1,1}^p]\gamma_0' + Vb^F F\gamma_0' + V^{-1}[T_0 r_{0,1}^p]\gamma_1' \bmod N^\gamma.$$

Da der mittlere Term in N^γ liegt, werden M^γ und M^δ nach der folgenden projektiven Transformation gleich.

$$T_1' = T_1 r_{0,0} + T_0 r_{1,1},\ T_0' = T_0 r_{0,1}^p$$

Damit ist der Beweis von 5.11 beendet.

Entsprechend kann man auch die Konstruktionen 5.6.1 und 5.6.2 über einem beliebigen reduzierten Basisschema durchführen. Dazu betrachten wir eine zulässige Menge S und ein ungesättigtes Intervall $[i+1, j]$ von S, so daß $i \in S \backslash \bar{S}$. Wir setzen $m = \operatorname{card}[i+1, j]$.

Es sei X ein s.f. O_{D_p}-Modul mit $S \subset S(X)$. Dann haben wir auch in diesem allgemeineren Fall wie unter 5.6.1 eine Menge von Quasiisogenien der Höhe Null.

$$X \longrightarrow X_t,\ t \in \mathbb{P}^1(L)^{m+1} \tag{5.12.1}$$

$$X \longrightarrow X_t,\ t \in \mathbb{P}^1(L),\ S(X_t) \supset S \tag{5.12.2}$$

5.13 SATZ: *Es sei X ein s.f. O_{D_p}-Modul über einem reduzierten O_F/pO_F-Schema T mit der kritischen Menge $S(X) \supset S$. Es gibt einen Funktor, der jedem Paar (X, T) ein Tripel $(Y, P \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} T, \pi^* X^{(p)} \to Y)$ zuordnet. Dabei ist P ein lokal triviales $(\mathbb{P}^1)^{m+1}$-Bündel über T und s ein Schnitt. Y ist ein s.f. O_{D_p}-Modul über P und $\pi^* X^{(p)} \to Y$ eine Quasiisogenie der Höhe Null, die über s ein Isomorphismus ist.*

Folgende Eigenschaften sind erfüllt.

(1) *Der Funktor ist mit Basiswechsel verträglich.*
(2) *Über einem perfekten Körper ist $X^{(p)} = \pi^* X_t^{(p)} \to Y_t$, $t \in \mathbb{P}(L)$ die Familie $X^{(p)} \to X_t^{(p)}$ unter* 5.12.1.
(3) *Es sei $Q \subset P$ des maximale Unterschema, so daß $S(Y_{|Q}) \supset S - 1$. Dann ist Q ein lokal triviales $\mathbb{P}^1$-Bündel über T.*

BEWEIS: Wir betrachten wieder nur den Fall $j = i + 2k$. Man kann $i = 1$ voraussetzen. Über einer hinreichend kleinen, offenen, affinen Teilmenge Spec $R \subset T$ gibt es eine homogene V-Basis $\gamma_s \in M_{s+1}$ des Cartiermoduls M von X. Man hat Strukturgleichungen der Form

$$\Pi \gamma_s = \sum V^m [c_{m,s}] \gamma_{s+n-m},\ c_{0,s} = 0 \text{ für } s \in S - 1.$$

Folglich hat $X^{(p)}$ die Strukturgleichungen

$$\Pi \gamma_s' = \sum V^m [c_{m,s}^p] \gamma_{s+n-m}',\ \gamma_s' = V^{-1} \gamma_s.$$

Wir betrachten in dem V-dividierten Cartiermodul $\tilde{M}[U_0, \ldots, U_{2k}]$ die Elemente

$$
\begin{aligned}
&\delta_{2r+1} = \gamma'_{2r+1} + V^{-1}[U_{2r+1}]\gamma'_{2r+2}, 0 \leq r \leq k-1, \\
(5.13.1) \qquad &\delta_{n+2r} = \gamma'_{n+2r} + V^{-1}[U_{2r}]\gamma'_{n+2r+1}, 0 \leq r \leq k, \\
&\delta_s = \gamma'_s \text{ sonst.}
\end{aligned}
$$

Entsprechend betrachten wir in $\tilde{M}[W_0, \ldots, W_{2k}]$ die Elemente

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{2r+1} = [W^p_{2r+1}]\gamma'_{2r+1} + V^{-1}\gamma'_{2r+2}, 0 \leq r \leq k-1, \\
&\epsilon_{2r+2} = V\gamma'_{2r+1}, 0 \leq r \leq k-1, \\
(5.13.2) \qquad &\epsilon_{2r+n} = [W^p_{2r}]\gamma'_{n+2r} + V^{-1}\gamma'_{n+2r+1}, 0 \leq r \leq k, \\
&\epsilon_{2r+n+1} = V\gamma'_{n+2r}, 0 \leq r \leq k, \\
&\epsilon_s = \gamma'_s \text{ sonst.}
\end{aligned}
$$

Man verifiziert analog zu 5.12, daß diese Elemente reduzierte Cartiermoduln erzeugen. Dadurch wird ein s.f. O_{D_p}-Modul Y über $(\mathbb{P}^1_R)^{2k+1}$ definiert, der bis auf eine Transformation aus $PGl(2, R)^{2k+1}$ unabhängig von der gewählten V-Basis γ_i ist.

Wir berechnen die Gleichungen von Q über Spec R. Es sei $r > 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\Pi\delta_{n+2r} &= \Pi\gamma'_{n+2r} + V^{-1}[U_{2r}]\Pi\gamma'_{n+2r+1} \\
&= V[c^p_{1,n+2r}]\gamma'_{2r-1} + [U^p_{2r}c^p_{1,n+2r+1}]\gamma'_{2r} \\
&\quad + V[U^{p^2}_{2r}c^p_{2,n+2r+1}]\gamma'_{2r-1} + V^2(\text{Terme in } \gamma'_s) \\
&= ([U^p_{2r}c^p_{1,n+2r+1}] - [U_{2r-1}c_{1,n+2r}] \\
&\quad - [U_{2r-1}U^p_{2r}c_{2,n+2r+1}])\gamma'_{2r} + V[c^p_{1,n+2r}]\delta_{2r-1} \\
&\quad + V[U^{p^2}_{2r}c^p_{1,n+2r+1}]\delta_{2r-1} + V^2(\text{Terme in } \gamma'_s)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
(5.13.3) \qquad \Pi\delta_{n+2r} = {} & [U^p_{2r}c^p_{1,n+2r+1} - U_{2r-1}c_{1,n+2r} - U_{2r-1}U^p_{2r}c_{2,n+2r+1}] \\
& \times \delta_{2r} + V(\text{Terme in } \delta_s), 1 \leq r \leq k
\end{aligned}
$$

Eine Indexverschiebung ergibt:

$$
\begin{aligned}
(5.13.4) \qquad \Pi\delta_{2r+1} = {} & [U^p_{2r+1}c^p_{1,2r+2} - U_{2r}c_{1,2r+1} - U_{2r}U^p_{2r+1}c_{2,2r+2}] \\
& \times \delta_{2r+n+1} + V(\text{Terme in } \delta_s), 0 \leq r \leq k-1
\end{aligned}
$$

Für $n \neq 2k+1$ ergeben sich folgende Gleichungen, die wir später brauchen werden.

$$
(5.13.5) \qquad \begin{aligned} \Pi\delta_n &= [c^p_{0,n} + U^p_0 c^p_{1,n+1}]\delta_0 + V(\text{Terme in } \delta_s) \\ \Pi\delta_{2k+1} &= [c^p_{0,2k+1} - U_{2k} c_{1,2k+1}]\delta_{n+2k+1} + V(\text{Terme in } \delta_s) \end{aligned}
$$

Die Gleichungen des Schemas Q lauten:

$$
U^p_{2r} c^p_{1,n+2r+1} - U_{2r-1} c_{1,n+2r} - U_{2r-1} U^p_{2r} c_{2,n+2r+1} = 0, \quad \text{für } 1 \le r \le k
$$

$$
(5.13.6) \qquad U^p_{2r+1} c^p_{1,2r+2} - U_{2r} c_{2r+1} - U_{2r} U^p_{2r+1} c_{2,2r+2} = 0, \quad \text{für } 0 \le r \le k-1
$$

Wir zeigen, daß $c_{1,s}$ für $s \in [1, 2k] \cup [n+2, n+2k+1]$ Einheiten sind.

In der Tat, es sei $t : \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} R$ ein geometrischer Punkt, in dem $c_{1,s}$ verschwindet. M' sei der Cartiermodul von X_t. Dann gilt $\Pi\gamma_s \in V^2 M'_{s-1+n}$ und andererseits $\Pi V M'_s \subset V^2 M'_{s-1+n}$, da s kritisch ist. Wir erhalten den Widerspruch $\Pi M'_{s+1} \subset V^2 M'_{s-1+n}$.

Man sieht jetzt, daß die Gleichungen (5.13.6) ein glattes Unterschema von $\mathbb{A}^{2r+1}_R$ definieren. Die Glattheit von Q im Unendlichen folgt, da man zu einer anderen V-Basis übergehen kann. Das bedeutet, daß man eine Transformation aus $PGl(2, R)^{2k+1}$ anwendet. Daß Q isomorph zu $\mathbb{P}^1_R$ ist, erhalten wir, da U_{2k} eine Uniformisierende ist. Damit ist 5.13 bewiesen.

5.14 Definition: Es sei M eine glatte algebraische Mannigfaltigkeit über einem Körper. Eine $\mathbb{P}^1$-Faserung auf M ist

(1) ein eindimensionales projektives Bündel über einer Mannigfaltigkeit T'

$$
\pi : P_{T'}(\mathscr{E}) \to T',
$$

wobei $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang 2 über T' bezeichnet,

(2) ein universeller Homöomorphismus

$$
f : P_{T'}(\mathscr{E}) \to M,
$$

so daß für jeden geometrischen Punkt t von T' das mengentheoretische Bild $f(\pi^{-1}(t))$ eine glatte rationale Kurve ist.

Wir nennen $f(\pi^{-1}(t))$ die Fasern der $\mathbb{P}^1$-Faserung. Das Bild eines Schnittes von π unter f nennen wir eine Basis der $\mathbb{P}^1$-Faserung.

Wenn $\dim M = 2$ und M eine $\mathbb{P}^1$-Faserung besitzt, so wissen wir nach dem Rationalitätskriterium von Zariski, daß M eine Regelfläche ist. Ich weiß nicht, ob ähnliches in höheren Dimensionen gilt.

Wir können jetzt das Hauptresultat dieses Paragraphen formulieren.

5.15 SATZ: *Es sei $S \subset \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ eine zulässige Menge. Es sei $[i+1, j] \subset \bar{S}$ ein Intervall, so daß $i \in S \backslash \bar{S}$, $j+1 \notin \bar{S}$ und $j+1 \in S$ genau dann, wenn $j-i$ ungerade ist. Wir setzen $m = \mathrm{card}[i+1, j]$.*

Dann existiert ein $\mathbb{P}^1$-Faserung auf $\mathcal{M}_{C,S}$ mit den folgenden Eigenschaften.

Wenn $j-i$ ungerade ist, so sind $\mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}}$ und $\mathcal{M}_{C,S\cup\{j+1+n\}}$ Basen der $\mathbb{P}^1$-Faserung. Die Fasern schneiden $\mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}}$ mit der Multiplizität p^{m+1} und $\mathcal{M}_{C,S\cup\{j+1+n\}}$ mit der Multiplizität 1.

Wenn $j-i$ gerade ist und card $S \neq 2n-1$, so sind $\mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}}$ und $\mathcal{M}_{C,S\cup\{j+1\}}$ Basen der $\mathbb{P}^1$-Faserung. Die Fasern schneiden $\mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}}$ mit der Multiplizität p^{m+1} und $\mathcal{M}_{C,S\cup\{j+1\}}$ mit der Multiplizität 1.

Wenn card $S = 2n-1$, so ist n ungerade. Eine Basis der $\mathbb{P}^1$-Faserung ist isomorph zu $C_-\backslash D^*_-(\mathbb{A}_f(-\frac{1}{2}))/D^*_-$. Jede Faser schneidet $\mathcal{M}_{C,Z/2nZ}$ in p^n+1 Punkten.

BEWEIS: Es sei $S' = (S \cup \{i+n\}) + 1$. Es sei X der s.f. O_{D_p}-Modul der universellen abelschen Mannigfaltigkeit $(A, \iota, \bar{\eta})$ über $\mathcal{M}_{C,S'}$. Nach 5.13 finden wir einen s.f. O_{D_p}-Modul Y über einem eindimensionalen projektiven Bündel $\pi: Q \to \mathcal{M}_{C,S'}$ und eine Quasiisogenie $\alpha: \pi^* X^{(p)} \to Y$, Es gilt $S(Y) \supset S$. Es sei $\pi^*(A^{(p)}, \iota^{(p)}, \bar{\eta}^{(p)}) \to (A', \iota', \bar{\eta}')$ die radikale Quasiisogenie abelscher Mannigfaltigkeiten, die α induziert. $(A', \iota', \bar{\eta}')$ definiert einen Punkt

$$f: Q \longrightarrow \mathcal{M}_{C,S}. \tag{5.15.1}$$

Es sei s der Schnitt von Q aus 5.13. Dann können wir $f \cdot s$ mit dem Frobenius identifizieren

$$f \circ s: \mathcal{M}_{C,S'} \longrightarrow \mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}} = \mathcal{M}^{(p)}_{C,S'}.$$

Es sei card $S = 2n-1$. Nach 5.8 wissen wir, daß f eingeschränkt auf die geometrischen Fasern eine radikale Abbildung ist. Da dim $\mathcal{M}_{C,S} = 1$, ist das Bild einer geometrischen Faser unter f eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_{C,S} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ und folglich eine glatte rationale Kurve. Die Behauptung folgt aus 5.9.2.

Es sei card $S \neq 2n-1$. Nach 5.9.1 wissen wir bereits, daß f radikal und surjektiv ist. Da f eigentlich ist, folgt, daß es ein universeller

Homöomorphismus ist. Aus dem folgenden Lemma erhalten wir, daß f eine $\mathbb{P}^1$-Faserung ist.

5.16 LEMMA: *Die Einschränkung von f auf jede geometrische Faser von π ist ein Isomorphismus.*

BEWEIS: Wir betrachten das zum Paar $(X, \mathcal{M}_{C,S'})$ nach 5.13 assoziierte Bündel P. Wie oben erhalten wir einen radikalen Morphismus $f: P \to \mathcal{M}_C$. Es sei Q_t eine geometrische Faser von $\pi: Q \to \mathcal{M}_{C,S'}$. Es genügt zu beweisen, daß die Tangentialabbildung von $f_{|Q_t}$ in keinem Punkt verschwindet.

Wir beschränken uns auf den Fall $j = i + 2k$ und $i = 0$. Dann wird $Q \subset P$ durch die Gleichungen 5.13.6 definiert. Man sieht, daß die Fasern Q_t und die Kurven $U_0 = \text{const}, \ldots, U_{2k-1} = \text{const}$ in ihren Schnittpunken den gleichen Tangentialraum haben. Es genügt also zu zeigen, daß die Einschränkung von f auf jede Kurve $\Gamma_u: U_0 = \text{const}, \ldots, U_{2k-1} = \text{const}$ ein Isomorphismus ist.

Ich behaupte, daß f eine birationale Abbildung von Γ_u auf sein Bild induziert. Da es uns freisteht, die homogene V-Basis von X zu verändern, dürfen wir annehmen, daß $c_{1,2k+1} \neq 0$ in den Strukturgleichungen von X. Im Punkt $U_{2k} = c_{\delta,2k+1}^{\S}/c_{1,2k+1}$ hat $Y_{|\Gamma_u}$ den kritischen Index $2k+1$. Über dem Tangentialraum Spec $L[\epsilon]$, $\epsilon^2 = 0$ in diesem Punkt lautet die $(2k+1)$-Strukturgleichung von Y

$$\Pi\delta_{2k+1} = -[\epsilon c_{1,2k+1}]\delta_{n+2k+1} + V \ldots.$$

Da der Index $2k+1$ nicht kritisch bleibt, ist diese Deformation nichttrivial. Folglich ist die Tangentialabbildung von $f_{|\Gamma_u}$ im Punkt $U_{2k} = c_{\delta,2k+1}^{\S}/c_{1,2k+1}$ nichttrivial. Da f radikal ist, folgt, daß f eine birationale Abbildung von Γ_u auf sein Bild induziert.

Das Lemma 5.16 folgte, wenn wir wüßten, daß $f(\Gamma_u)$ glatt ist. Der Fall card $S = 2n - 1$ ist damit bereits erledigt. Insbesondere dürfen wir im folgenden $n > 1$ annehmen. Folgendes Lemma zeigt, daß man sich auf eine spezielle Kurve Γ_u beschränken kann.

5.17 LEMMA: *Es sei T eine glatte algebraische Mannigfaltigkeit über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper. Es sei $\bar{p}: \Gamma \to T$ eine glatte Kurve über T. Gegeben sei ein Morphismus in eine glatte Mannigfaltigkeit $f: \Gamma \to M$, der eingeschränkt auf die Fasern Γ_t von $\bar{p}$ birational ist. Wenn $f(\Gamma_{t_0})$ für einen geometrischen Punkt t_0 von T glatt ist, so ist $f(\Gamma_t)$ für alle t glatt.*

BEWEIS: Da $f_{|\Gamma_t}$ birational ist, gilt $f_*(\Gamma_t) = f(\Gamma_t)$ im Sinne von Zyklen. Daher ist $f(\Gamma_t)$ eine algebraische Familie. Die Behauptung folgt, weil daß arithmetische Geschlecht in algebraischen Familien konstant ist.

Das Lemma 5.16 folgt, wenn wir zeigen, daß f eingeschränkt auf die Kurve $U_0 = \cdots = U_{2k-1} = 0$ ein Isomorphismus ist. Allgemeiner gilt:

5.18 LEMMA: *Es sei $(A, \iota, \bar{\eta})$ ein Punkt von $\mathcal{M}_C$ über einem glatten, zusammenhängenden $\bar{\mathbb{F}}_p$-Schema T. Die Indexe k und $k + n - 1$ seien für A kritisch. Wir haben nach* 5.11 *ein eindimensionales projektives Bündel $\pi : P \to T$ und einen Morphismus $f : P \to \mathcal{M}_C$. Die Einschränkung von f auf die geometrischen Fasern von π ist ein Isomorphismus.*

BEWEIS: Man sieht wie oben, daß die Einschränkung von f auf die Fasern von π birational ist. Der Fall $n = 1$ ist damit erledigt.

Wir wissen bereits, daß es genügt, die Behauptung für einen speziellen Punkt von T zu zeigen. Deshalb können wir annehmen, daß T eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_{C,S_1} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ für eine gewisse zulässige Menge S_1 ist. Indem wir die Faserungen 5.15.1 verwenden, finden wir nach 5.10 Punkte t, für die $S(A_t)$ eine gesättigte Menge umfaßt. Wir können deshalb außerdem annehmen, daß S_1 gesättigt ist. Dann enthält T nach 4.22 einen Punkt von $\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Folglich dürfen wir voraussetzen, daß $T = \operatorname{Spec} \bar{\mathbb{F}}_p$ und $(A, \iota, \bar{\eta}) \in \mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(\bar{\mathbb{F}}_p)$.

Über $\bar{\mathbb{F}}_p$ gibt es bis auf, Isomorphie genau einen s.f. O_{D_p}-Modul X mit $S(X) = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ (2.15). Er besitzt die Strukturgleichungen

$$\Pi\gamma_i = V\gamma_{i+n-1}, \ \gamma_i \in M_{X,i+1}.$$

Wir können $k = 2$ annehmen. Es sei

$$\delta_0 = \gamma_0' + V^{-1}[U]\gamma_1', \ \delta_1 = \gamma_1', \ldots, \delta_{2n-1} = \gamma_{2n-1}',$$

$$\beta_0 = [W^p]\gamma_0' + V^{-1}\gamma_1', \ \beta_1 = V\gamma_0', \ \beta_2 = \gamma_2', \ldots, \beta_{2n-1} = \gamma_{2n-1}'.$$

Der s.f. O_{D_p}-Modul $Y \to \mathbb{P}^1$ ist durch die folgenden Strukturgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} &\Pi\delta_0 = [U^p]\delta_n + V\delta_{n-1}, \\ (5.18.1) \qquad &\Pi\delta_{n+1} = -[U]\delta_1 + V\delta_0, \qquad \text{über } \bar{\mathbb{F}}_p[U] \\ &\Pi\delta_j = V\delta_{j+n-1}, \text{ für } j \neq 0, n+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi\beta_0 &= \beta_n + V[W^{p^2}]\beta_{n-1}, \\ \Pi\beta_1 &= V^2\beta_{n-1} \\ \Pi\beta_{n+1} &= \beta_1, \qquad \text{über } \bar{\mathbb{F}}_p[W] \text{ für } n > 2 \\ \Pi\beta_{n+2} &= -V[W]\beta_1 + V^2\beta_0, \\ \Pi\beta_j &= V\beta_{j+n-1}, \text{ sonst.} \end{aligned} \tag{5.18.2}$$

Wir zeigen, daß 5.18.1 in jedem Punkt $U = u$ eine nichttriviale, erste infinitesimale Deformation definiert und 5.18.2 im Punkt $W = 0$. Den Fall $W = 0$ und $n = 2$, den man ohne Schwierigkeiten auf dieselbe Weise behandeln kann, wollen wir auslassen. Insgesamt würde daraus 5.18 folgen.

Wir bemerken, daß $F\delta_1 \in VM_{Y,-1}$ und folglich $[u+\epsilon]\delta_1 = [u]\delta_1 + [\epsilon]\delta_1$ über Spec $\bar{\mathbb{F}}_p[\epsilon]$, $\epsilon^2 = 0$. Wir müssen zeigen, daß die folgende Deformation nichttrivial ist.

$$\begin{aligned} \Pi\delta_0 &= [u^p]\delta_n + V\delta_{n-1} \\ \Pi\delta_{n+1} &= -[u]\delta_1 + V\delta_0 - [\epsilon]\delta_1 \\ \Pi\delta_j &= V\delta_{j+n-1} \text{ sonst} \end{aligned} \tag{5.18.3}$$

Wenn die Deformation 5.18.3 trivial wäre, so fänden wir eine V-Basis $\tilde{\delta}_i$, die den Gleichungen 5.18.1 genügt und so daß

$$\tilde{\delta}_i = \delta_i + \sum_{m \geq 0} V^m[b_{m,i}\epsilon]\delta_{i-m}.$$

Offensichtlich gilt $F\delta_i = F\tilde{\delta}_i$. Deshalb finden wir

$$\begin{gathered} V^2\delta_{k-2} = \Pi V\delta_{k+n-1} = \Pi^2\delta_k = \Pi^2\tilde{\delta}_k = V^2\tilde{\delta}_{k-2} \text{ für } k \neq 0, n+1, 2, \\ \delta_j = \tilde{\delta}_j, \text{ für } j \neq -2, 0, n-1. \end{gathered}$$

Es gilt:

$$\begin{gathered} \Pi^2\delta_{n+1} = -V[u^p]\delta_n + V[u^p]\delta_n + V^2\delta_{n-1} - [\epsilon]\Pi\delta_1 = V^2\delta_{n-1}, \\ \Pi\delta_{n-1} = V\delta_{-2}. \end{gathered}$$

Aus den entsprechenden Gleichungen für $\tilde{\delta}_j$ folgt

$$\delta_j = \tilde{\delta}_j \text{ für } j \neq 0.$$

Dann gilt:

$$0 = \Pi(\delta_{n+1} - \tilde{\delta}_{n+1}) = V(\delta_0 - \tilde{\delta}_0) - [\epsilon]\delta_1.$$

Wir erhalten den gewünschten Widerspruch $[\epsilon]\delta_1 = 0 \bmod V$.

Es bleibt zu zeigen, daß die folgende Deformation nicht trivial ist.

$$\begin{aligned} \Pi\beta_0 &= \beta_n, \\ \Pi\beta_1 &= V^2\beta_{n-1}, \\ \Pi\beta_{n+1} &= \beta_1, \qquad\qquad n>2 \\ \Pi\beta_{n+2} &= -V[\epsilon]\beta_1 + V^2\beta_0, \\ \Pi\beta_j &= V\beta_{j+n-1} \text{ sonst} \end{aligned}$$

Es sei $\tilde{\beta}_j$ eine V-Basis mit den analogen Eigenschaften wie $\tilde{\delta}_j$. Es gilt:

$$\begin{gathered} V\beta_1 = V\Pi\beta_{n+1} = \Pi^2\beta_2 = \Pi^2\tilde{\beta}_2 = V\tilde{\beta}_1, \\ V\Pi\beta_{n+2} = \Pi^2\beta_3 = \Pi^2\tilde{\beta}_3 = V\Pi\tilde{\beta}_{n+2}. \end{gathered}$$

Wir erhalten den Widerspruch

$$0 = \Pi(\beta_{n+2} - \tilde{\beta}_{n+2}) = V^2(\beta_0 - \tilde{\beta}_0) - V[\epsilon]\beta_1.$$

Der Beweis von 5.18 und 5.16 ist beendet.

Wir haben bewiesen, daß 5.15.1 eine $\mathbb{P}^1$-Faserung mit der Basis $\mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}}$ definiert.

$$f: Q \to \mathcal{M}_{C,S},\ \pi: Q \underset{s}{\rightleftarrows} \mathcal{M}_{C,S'}$$

Wir beschränken uns für den Rest des Beweises wieder auf den Fall $j = i + 2k$ und $i = 0$.

Durch die Gleichung $U_{2k} = c_{0,2k+1}^p / c_{1,2k+1}$ definieren wir einen Schnitt s' von π. Dabei sei die V-Basis von X so gewählt, daß $c_{1,2k+1} \neq 0$. Da f ein universeller Homöomorphismus ist, folgt

$$f \circ s'(\mathcal{M}_{C,S'}) = \mathcal{M}_{C,S\cup\{j+1\}}.$$

$\mathcal{M}_{C,S\cup\{j+1\}}$ ist also ebenfalls eine Basis der $\mathbb{P}^1$-Faserung.

Um die Schnittmultiplizität zu berechnen, betrachten wir einen $\bar{\mathbb{F}}_p$-wertigen Punkt x von $s(\mathcal{M}_{C,S'}) \subset Q$. Es sei $Q_{\pi(x)}$ die Faser durch den Punkt x und $f(Q_{\pi(x)}) = \Gamma$ ihr Bild. Z bezeichne den universellen s.f. O_{D_p}-Modul über $\mathcal{M}_{C,S}$. Über einer genügend kleinen, offenen, affinen Umgebung Spec R' von $f(x)$ besitzt er die Strukturgleichungen

$$\Pi\epsilon_s = \sum V^m[a_{m,s}]\epsilon_{s-m+n}.$$

$\mathcal{M}_{C,S\cup\{i+n\}}$ wird durch die Gleichung $a_{0,i+n}=0$ definiert. Es sei $\varphi: R' \to R[U_{2k}]$ der Komorphismus von f. Da f^*Z isomorph zu Y ist, folgt, daß sich $\varphi(a_{0,i+n})$ und $U_0^p c_{i,n+1}^p$ um eine Einheit unterscheiden (5.13.5).

Es sei J das Ideal von R', das Γ definiert und I das Ideal von $R[U_{2k}]$, das $Q_{\pi(x)}$ definiert. Wir haben gesehen, daß die Abbildung φ einen Isomorphismus induziert.

$$O_{\Gamma,f(x)} = (R'/J)_{f(x)} \cong (R[U_{2k}]/I)_x = \bar{\mathbb{F}}_p[U_{2k}]_{(U_{2k})}$$

Folglich ist die gesuchte Schnittmultiplizität

$$\text{Länge } \bar{\mathbb{F}}_p[U_{2k}]_{(U_{2k})}/U_0^p.$$

Aus 5.13.6 sieht man, daß diese Länge gleich p^{2k+1} ist.

Genauso erhält man aus 5.13.5 für die Schnittmultiplizität von Γ mit $\mathcal{M}_{C,S\cup\{j+1\}}$:

$$\text{Länge } \bar{\mathbb{F}}_p[U_{2k}]/(c_{0,2k+1}^p - U_{2k}c_{1,2k+1}) = 1.$$

Damit ist 5.15 bewiesen.

LITERATUR

[EGA] A. GROTHENDIECK: Eléments de Géometrie Algébrique. *Publ. Math. I.H.E.S.*

[SGA 1] *Séminaire de Géométrie Algébrique* 1960/61, Springer Lecture Notes 224, Berlin 1971.

[1] P. CARTIER: Relèvements des groupes formels commutatifs, *Sém. Bourbaki 1968/69, exposé 359*, Springer Lecture Notes 179 (1971).

[2] I.W. ČEREDNIK: Uniformisierung algebraischer Kurven durch diskrete, kokompakte, arithmetische Untergruppen von $PGl_2(k_w)$, *Mat. Sbor. t.* 100: 1, 59–88 (1976).

[3] C. CHEVALLEY: Deux théorèmes d'arithmetique. *Jour. Math. Soc. Japan vol.* 3 (1951).

[4] P. DELIGNE: Travaux de Shimura, *Sém. Bourbaki* 1970/71, *exposé 389*, Springer Lecture Notes 244 (1971).

[5] M. DEMAZURE: *Lectures on p-Divisible Groups*, Springer Lect. Notes 302 (1972).

[6] W.G. DRINFELD: Überlagerungen p-adischer symmetrischer Bereiche. *Funk. Analiz t. 10* (1976) 29–40.

[7] A. GROTHENDIECK: Groupes de Barsotti–Tate et cristaux, *Actes du Cong. intern. math. 1970 t.* 1, 431–436.

[8] *Groupes de Barsotti–Tate et cristaux de Dieudonné*, Presses de l'Université de Montréal.

[9] R.P. LANGLANDS: Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum, *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.* 28 (1976).

[10] On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, *Canad. Jour. Math. Vol. 31 No. 6* (1979).

[11] Sur la mauvaise réduction d'une variété de Shimura, Journées de Géom. Alg. de Rennes 1978, *astérisque 65*, 125–154.

[12] M. LAZARD: *Commutative Formal Groups*, Springer Lecture Notes 443 (1975).
[13] B. MAZUR, W. MESSING: *Universal extensions and one-dimensional crystalline cohomology*, Springer Lect. Notes 370 (1974).
[14] W. MESSING: *The crystals associated to Barsotti–Tate groups*, Springer Lect. Notes 264 (1972).
[15] J.S. MILNE: Points on Shimura varieties mod p, *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 33 (1979) part 2.*
[16] D. MUMFORD: *Geometric invariant theory*, Berlin 1965.
[17] *Abelian Varieties*, Oxford 1970.
[18] An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Comp. Math. 24* (1972) 129–174.
[19] F. OORT: Subvarieties of moduli spaces, *Invent. Math. 24* (1974) 95–119.
[20] Which abelian surfaces are products of elliptic curves? *Math. Ann. 214* (1975) 49–60.
[21] J.-P. SERRE: Arbres, amalgames, Sl_2, *astérisque 63*, Paris 1977.
[22] G. SHIMURA: *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton 1971.
[23] J. TATE: Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, *Invent. Math. 2* (1966) 134–144.
[24] p-divisible groups, *Proc. of a Conference on local fields*, Berlin 1967.
[25] Classes, d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini, *Sém. Bourbaki 1968/69, exposé 358*, Springer Lect. Notes 179 (1971).
[26] J.-P. SERRE, J. TATE: Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math. 88* (1968) 492–517.
[27] Th. ZINK: Isogenien formaler Gruppen über einem lokal noetherschen Schema, erscheint in *Math. Nachr.*

(Oblatum 16-VII-1980 & 21-1-1981)

Thomas Zink
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Mathematik
DDR-108 Berlin, Mohrenstr. 39