COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS GRAUERT

Kantenkohomologie

Compositio Mathematica, tome 44, nº 1-3 (1981), p. 79-101

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1981__44_1-3_79_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 44, Fasc. 1–3, 1981, pag. 79–101

KANTENKOHOMOLOGIE

Hans Grauert

To the memory of Aldo Andreotti

Einleitung

Es seien $B \subset G \subset \mathbb{C}^n$ Bereiche d. s. nicht leere offene Mengen, und φ eine reelle zweimal stetig differenzierbare Funktion in G mit $B = \{\mathfrak{z} \in G : \varphi(\mathfrak{z}) > 0\}$, wobei $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$. Die Leviform

$$L(\varphi) := \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \varphi_{z_\nu \bar{z}_\mu}(\mathfrak{z})\, dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$$

habe für jedes $\mathfrak{z} \in G$ mindestens $n - q + 1$ positive Eigenwerte. Der Rand $\partial B \cap G$ sei also q-konkav. Es kann $q = 1, \ldots, n$ sein. Im Falle $q = 1$ heißt $\partial B \cap G$ auch streng pseudo-konkav.

Es sei nun $\mathfrak{z}_0 \in \partial B \cap G$ und S eine kohärente analytische Garbe auf G. Es sei $\mathrm{hd}_{\mathfrak{z}}(S) \geq 0$ die homologische Dimension des Halmes $S_{\mathfrak{z}}$ und $\mathrm{hd}(S) = \sup_{\mathfrak{z} \in G} \mathrm{hd}_{\mathfrak{z}}(S)$ die homologische Dimension von S. Bekanntlich ist nach dem Syzygiensatz stets $\mathrm{hd}(S) \leq n$ und S genau dann lokalfrei, wenn $\mathrm{hd}(S) = 0$. Nach [TFE], théorèmes 9 et 10, gibt es beliebig kleine Steinsche Umgebungen $U = U(\mathfrak{z}_0) \subset G$, so daß für $V = \{\mathfrak{z} \in U : \varphi(\mathfrak{z}) > 0\}$ folgendes gilt:
Ist $\nu < n - q - \mathrm{hd}(S)$, so ist

(a) $H^\nu(V, S) = 0$ für $\nu > 0$ und

(b) $H^\nu(U, S) \to H^\nu(V, S)$ bijektiv, wenn $\nu = 0$.

0010-437X/81/07079-23$00.20/0

In der vorl. Arbeit werden diese Aussagen für den Fall untersucht, wo B nicht mehr durch eine Funktion φ, sondern durch endlich viele beschrieben wird. Dann treten im allgemeinen komplizierte Kanten auf. Das kommt bei Untersuchungen in der komplexen Analysis häufig vor. Ist etwa $\mathbb{P}_n$ der n-dimensionale komplex-projektive Raum, $A \subset \mathbb{P}_n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, rein von der Codimension q, und bezeichnet $d(x)$ in $X := \mathbb{P}\backslash A$ den Abstand von A in bezug auf die Fubinimetrik, so ist d in der Nähe von A reell-analytisch und $B_\epsilon := \{x \in X : d(x) < \epsilon\}$ für kleines $\epsilon > 0$ stets q-konkav. Für größeres ϵ ist ∂B_ϵ im allgemeinen nicht mehr glatt, es treten Kanten auf, da der Abstand von $x \in \partial B_\epsilon$ zu A in mehr als einem Punkt von A angenommen werden kann. Außerhalb der Knicke bleibt die q-Konkavität jedoch erhalten.

Im §1 werden die théorèmes 9 et 10 auf Bereiche B mit Kanten übertragen. Dabei wird ein neuer Beweis konstruiert, der einige Unschönheiten (z. B. die Fourierreihen) aus [TFE] vermeidet. Leider gelingt es nicht, Aussagen für alle Kanten, die bei $d(x)$ auftreten, zu gewinnen. Es wird deshalb in §2 die Mittag–Leffler–Kohomologie eingeführt, die i. a. einen echten Untervektorraum der gewöhnlichen Kohomologie darstellt. Für diese Mittag–Leffler–Kohomologie werden befriedigende Aussagen erhalten (Satz 2.4). Ferner wird gezeigt, daß man bei gewissen glatten Rändern $\partial B \cap G$ durch Integration von Mittag–Leffler–Kohomologieklassen in B Kohomologieklassen ξ konstruieren kann, die in jedem Punkt $\mathfrak{z} \in \partial B$ singulär werden: im Falle $\nu = \dim \xi > 0$ gibt es keine Umgebung $U = U(\mathfrak{z}) \subset G$ mit $\xi \mid U \cap B = 0$. Die Existenz von solchen ξ ist bereits in den sechziger Jahren von A. Andreotti und F. Norguet bewiesen worden. Vgl. [AN]. Ist $\mathfrak{z}_0 \in \partial B \cap G$, so gibt es beliebig kleine Umgebungen $U(\mathfrak{z}_0) \subset G$, so daß für freie Garben S die Kohomologie von $U \cap B$ mit Koeffizienten in S stets durch Integration über die Mittag–Leffler–Kohomologie erhalten wird.

Bei $d(x)$ treten häufig Singularitäten auf, die topologisch isomorph zu Morsesingularitäten sind, aber außerdem eine "innere" q-Konkavität aufweisen. Das Verhalten der Kohomologie mit Koeffizienten in kohärenten Garben in der Nähe dieser komplexen Morsesingularitäten wird in §3 untersucht.

§1. Gebiete mit Kanten

1. Im folgenden heißt ein Bereich $B \subset G \subset \mathbb{C}^n$ *q-konkav relativ zu* G, wenn es um jeden Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \partial B \cap G$ eine (offene) Umgebung

$W = W(\mathfrak{z}_0) \subset G$ mit endlich vielen zweimal stetig differenzierbaren reellen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_e$ und eine $(n-q+1)$-dimensionale komplexe Ebene E durch $\mathfrak{z}_0$ gibt, so daß gilt:

(1) $B \cap W \overset{\bullet}{=} \bigcup_{\lambda=1}^{e} \{\mathfrak{z} \in W : \varphi_\lambda(\mathfrak{z}) > 0\}$

(2) bezeichnet $E(\mathfrak{z})$ die zu E parallele Ebene durch $\mathfrak{z}$, so ist stets die Leviform von $\varphi_\lambda \mid E(\mathfrak{z}) \cap W$ positiv definit.

Die Verallgemeinerung der théorèmes 9 et 10 aus [TFE] lautet nun so:

Satz 1: *Es sei $B \subset G$ q-konkav relativ zu G und S eine kohärente analytische Garbe auf G. Dann gibt es um jeden Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \partial B \cap G$ beliebig kleine Steinsche Umgebungen $U(\mathfrak{z}_0) \subset G$, so daß für $\nu < n - q - \mathrm{hd}(S)$ gilt*:

(a) $H^\nu(U \cap B, S) = 0$ *falls* $\nu > 0$,

(b) $H^\nu(U, S) \to H^\nu(U \cap B, S)$ *bijektiv falls* $\nu = 0$.

Zur Herleitung dieses Satzes sind einige Hilfssätze nötig. Zunächst sind einige einfache Begriffe und verallgemeinerte Hartogsfiguren einzuführen.

2. Unter einer holomorphen Funktion auf einer beliebigen Menge $M \subset \mathbb{C}^n$, $M \neq \emptyset$ verstehen wir den Keim einer in einer (offenen) Umgebung $U(M)$ holomorphen Funktion. Eine biholomorphe Einbettung $M \to N \subset \mathbb{C}^m$ ist dementsprechend der Keim einer biholomorphen Einbettung. Er wird repräsentiert durch eine biholomorphe Einbettung von Umgebungen: $U(M) \to V(M)$.

Ein *Produktbereich* ist die abgeschlossene Hülle eines kartesischen Produkts von komplex eindimensionalen Bereichen oder auch die leere Menge. Ein Produktbereich ist stets ein Steinsches Kompaktum im Sinne von [TSR]. Eine Zackenfunktion auf einem Bereich $G \subset \mathbb{C}^n$ ist eine reelle Funktion, die auf einem Produktbereich $\hat{Z} \subset G$ identisch gleich ρ mit $0 < \rho < 1$ und in $G \backslash \hat{Z}$ gleich 1 ist.

Es seien nun $1 \leq q \leq n < m$, $\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_m)$, $\mathfrak{w}' = (w_1, \ldots, w_{q-1})$, $\mathfrak{w}'' = (w_{q+1}, \ldots, w_m)$ und $\rho_q, \ldots, \rho_{n+1} \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ und $\rho_{n+2}(\mathfrak{w}'), \ldots, \rho_m(\mathfrak{w}')$ Zackenfunktionen auf dem Einheitspolyzylinder

$$Z' = \{\mathfrak{w}' : |\mathfrak{w}'| := \max_{\nu=1,\ldots,q-1} |w_\nu| \leq 1\}.$$

Wir nennen die Menge

$$H = H_{\underline{\rho}} = \{\mathfrak{w} : |\mathfrak{w}'| \leq 1, |w_q| \leq \rho_q, |\mathfrak{w}''| \leq 1\} \cup \bigcup_{\nu=q+1,\dots,m} \{\mathfrak{w} : |\mathfrak{w}| \leq 1, \rho_\nu(\mathfrak{w}') \leq |w_\nu| \leq 1\}$$

mit $\underline{\rho} = (\rho_q, \dots, \rho_m)$ eine *verallgemeinerte Hartogsfigur.* Jede einzelne Teilmenge dieser Vereinigung und damit H selbst hat eine endliche Überdeckung mit Produktbereichen. Gilt etwa $\rho_\nu(\mathfrak{w}') = \rho < 1$ genau auf dem Produktbereich $\hat{Z} = \bar{Z}_1^{(0)} \times \cdots \times \bar{Z}_{q-1}^{(0)} \subset Z'$ und bezeichnet $\bar{Z}_\nu^{(1)}$ die abgeschlossene Hülle des Komplements von $\bar{Z}_\nu^{(0)}$ im Einheitskreis, so wird $\{\mathfrak{w} : |\mathfrak{w}| \leq 1, \rho_\nu(\mathfrak{w}') \leq |w_\nu| \leq 1\}$ überdeckt von den Produktbereichen

$$Z' \times \{|w_q| \leq 1\} \times \cdots \times \{|w_{\nu-1}| \leq 1\} \times \{\rho \leq |w_\nu| \leq 1\} \times \{|w_{\nu+1}| \leq 1\} \times \cdots \times \{|w_m| \leq 1\}$$

und

$$\bar{Z}_1^{(i_1)} \times \cdots \times \bar{Z}_{q-1}^{(i_{q-1})} \times \{|w_q| \leq 1\} \times \cdots \times \{|w_{\mu-1}| \leq 1\} \times \{|w_\mu| \geq 1\} \times \{|w_{\mu+1}| \leq 1\} \times \cdots \times \{|w_m| \leq 1\}$$

mit $(i_1, \dots, i_{q-1}) \neq 0$, $i_\nu = 0$ oder $= 1$ und $\mu = q+1, \dots, m$.

3. Zum Beweis des Satzes 1 darf man ferner folgendes voraussetzen:

(a) Es sind zweimal stetig differenzierbare reelle Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_e$ in G gegeben, so daß $B = \cup_{\lambda=1}^{e} \{\mathfrak{z} \in G : \varphi_\lambda(\mathfrak{z}) > 0\}$.

(b) Es gilt $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{O}$ und $\varphi_\lambda(\mathfrak{O}) = 0$ für $\lambda = 1, \dots, e$.

(c) Ist $E = \{\mathfrak{z} : z_1 = \cdots z_{q-1} = 0\}$, so ist die Leviform von $\varphi_\lambda \mid E(\mathfrak{z}) \cap G$ überall positiv definit.

In $\mathfrak{z}_1 \in G$ kann φ_λ in der folgenden Form entwickelt werden:

$$\varphi_\lambda(\mathfrak{z}) = Q_\lambda(z_q, \dots, z_n; \mathfrak{z}_1) + \bar{Q}_\lambda(z_q, \dots, z_n; \mathfrak{z}_1) + L_\lambda(z_q, \dots, z_n; \mathfrak{z}_1) + h_\lambda(z_q, \mathfrak{z}''; \mathfrak{z}_1),$$

wobei die Q_λ quadratische Polynome in den $z_q, \dots, z_n$ mit $Q_\lambda(z_q^{(1)}, \mathfrak{z}_1''; \mathfrak{z}_1) = \frac{1}{2}\varphi_\lambda(\mathfrak{z}_1)$, die

$$L_\lambda = \sum_{\nu,\mu=q}^{n} a_{\nu\mu}^{(\lambda)} \cdot (z - z_\nu^{(1)})(\bar{z}_\mu - \bar{z}_\mu^{(1)})$$

mit $((a_{\nu\mu}^{(\lambda)}))$ = positiv definite Hermitesche Matrizen und die h_λ auf

$E(\mathfrak{z}_1) \cap G$ zweimal stetig differenzierbare reelle Funktionen sind, deren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in $(z_q^{(1)}, \mathfrak{z}_1'')$ verschwinden. Alle Funktionen sind in allen Veränderlichen einschließlich $\mathfrak{z}_1$ stetig.

Die Funktion $\tilde{f}(\mathfrak{z}) := e^{-2Q_1(z_q, \ldots, z_n, \mathfrak{z}_0)}$ ist überall holomorph und es gilt $\tilde{f}(\mathfrak{z}_0) = 1$. Wir wählen einen abgeschlossenen Polyzylinder $\mathfrak{z}_0' \times Z'' \subset G$ um $\mathfrak{z}_0$ mit $Z'' \subset \{(z_q, \mathfrak{z}'')\}$ so klein, daß $L_1(z_q, \ldots, z_n; \mathfrak{z}_0) + h_1(z_q, \mathfrak{z}''; \mathfrak{z}_0) > 0$ ist in $Z'' \backslash \{(z_q^0, \mathfrak{z}_0'')\}$. Die Koordinaten des $\mathbb{C}^n$ werden dann umkehrbar linear so abgeändert, daß Z'' der Einheitspolyzylinder um $(z_q^0, \mathfrak{z}_0)$ ist. Es seien $\rho_{q+1} < 1, \ldots, \rho_{n+1} < 1$ positive Zahlen und $\tilde{Z}$ der offene Polyzylinder $\{(z_q, \mathfrak{z}'') \in Z'' : |z_\nu| < \rho_{\nu+1};\ \nu = q, \ldots, n\}$. Dann gilt $|\tilde{f}(\mathfrak{z})| > 1$ in $(\mathfrak{z}_0' \times (Z'' \backslash \tilde{Z})) \cap \{\varphi_1 \leq 0\}$. Wir wählen einen abgeschlossenen Polyzylinder $Z' \subset \{\mathfrak{z}'\} = \mathbb{C}^{q-1}$ um $\mathfrak{z}_0'$ so, daß $Z = Z' \times Z'' \subset G$ und $|\tilde{f}(\mathfrak{z})| > 1$ in ganz $(Z' \times (Z'' \backslash \tilde{Z})) \cap \{\varphi_1 \leq 0\}$. Die Zahl $\rho_q < 1$ werde nun so groß bestimmt, daß dort auch $|f| > 1$ ist, wenn $f = \sqrt{\rho_q} \cdot \tilde{f}$ gesetzt wird. Man hat $|f| \geq \sqrt{\rho_q}$ in $(\mathfrak{z}_0' \times Z'') \cap \{\varphi_1 \leq 0\}$ und Z' sei nun sogar so klein, daß $|f(\mathfrak{z})| > \rho_q$ in ganz $Z' \times Z'' \cap \{\varphi_1 \leq 0\}$. Wir wählen die Koordinaten des $\mathbb{C}^n$ nun so, daß auch Z' und mithin Z Einheitspolyzylinder sind. Es ist also $\{\mathfrak{z} \in Z : |f(\mathfrak{z})| \leq \rho_q\} \subset \{\varphi_1 > 0\}$, $\mathfrak{z}_0 \in \{\mathfrak{z} \in Z : |f(\mathfrak{z})| < 1\}$ und $\{\mathfrak{z} \in Z : |f(\mathfrak{z})| \leq 1\} \cap \{\varphi_1 \leq 0\} \subset Z' \times \tilde{Z}$. Die offene Menge $U = \{\mathfrak{z} \in \mathring{Z} : |f(\mathfrak{z})| < 1\}$ ist eine Steinsche Umgebung von $\mathfrak{z}_0$. Auf diese Weise können beliebig kleine U erhalten werden.

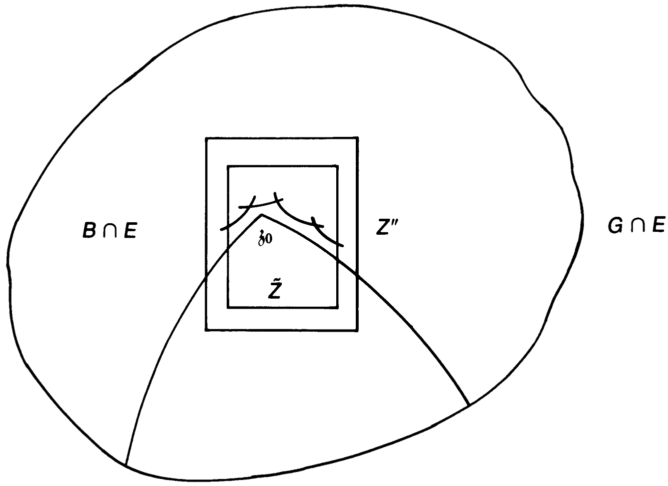
Wir können Z' sogar so klein wählen, daß alle $L_\lambda(z_q, \ldots, z_n; \mathfrak{z}_1) + h_\lambda(z_q, \mathfrak{z}''; \mathfrak{z}_1) > 0$ in $(\mathfrak{z}_1' \times Z'') \backslash \{\mathfrak{z}_1\}$ für $\mathfrak{z}_1 \in Z$ sind.

Definition 2: *Es seien $B \subset G \subset \mathbb{C}^n$ Bereiche; $\mathfrak{z}_0 \in \partial B \cap G$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_e$ zweimal stetig differenzierbare reelle Funktionen in G mit $B = \bigcup_{\lambda=1}^{e} \{\mathfrak{z} \in G : \varphi_\lambda(\mathfrak{z}) > 0\}$ und $\varphi_\lambda(\mathfrak{z}_0) = 0$ und $Z = Z' \times Z'' \subset G$ der abgeschlossene Einheitspolyzylinder um $\mathfrak{z}_0$. Es sei $L_\lambda + h_\lambda > 0$ in $(\mathfrak{z}_1' \times Z'') \backslash (\mathfrak{z}_1)$ für $\mathfrak{z}_1 \in Z$; $0 < \rho_q < 1, \ldots, 0 < \rho_{n+1} < 1$; $\tilde{Z} = \{(z_q, \mathfrak{z}'') \in Z'' : |z_\lambda| < \rho_{\lambda+1}, \lambda = q, \ldots, n$; f holomorph in Z mit $\mathfrak{z}_0 \in \{|f(\mathfrak{z})| < 1\}$, $\{|f(\mathfrak{z})| \leq \rho_q\} \subset B$ und $\{|f(\mathfrak{z})| \leq 1\} \cap (G \backslash B) \subset Z' \times \tilde{Z}$. Dann heißt $(Z, \rho_q, \ldots, \rho_{n+1}, f)$ eine Hartogsfigur zu $(\varphi_1, \ldots, \varphi_e, \mathfrak{z}_0)$.*

Anmerkung: Die Zerlegung von φ_λ braucht nicht unbedingt die in Abschnitt 3 angegebenen Eigenschaften zu haben, d. h. h_λ braucht nicht so stark in $\mathfrak{z}_1$ zu verschwinden.

4. Hilfssatz 3: *Es sei $(Z, \rho_q, \ldots, \rho_{n+1}, f)$ eine Hartogsfigur zu $(\varphi_1, \ldots, \varphi_e, \mathfrak{z}_0)$. Dann gibt es eine biholomorphe Einbettung $\mathfrak{f} = (z_1, \ldots, z_{q-1}, f, z_q, \ldots, z_n, f_{n+2}, \ldots, f_m)$ von $Z \cap \{|f(\mathfrak{z})| \leq 1\}$ in einen m-dimensionalen Einheitspolyzylinder W und eine Verallgemeinerte Hartogsfigur $H_{\underline{\rho}}$, wobei die ersten Komponenten von $\underline{\rho}$ die vorgege-*

benen $\rho_q, \ldots, \rho_{n+1}$ *sind, so daß* $f^{-1}(H_{\underline{\rho}}) \subset B$. *Die Menge* $Z \cap B \cap \{|f| \leq 1\}$ *ist durch solche* $f^{-1}(\mathring{H}_{\underline{\rho}})$ *ausschöpfbar, wobei* $\mathring{H}_{\underline{\rho}}$ *den offenen Kern bzgl. der Relativtopologie von W bezeichnet.*



Ausschöpfung

Beweis: Die hier auftretenden offenen Kerne seien stets relativ zu Z', $Z' \times \bar{\bar{Z}}$ gebildet. Wir haben $f_{n+2}, \ldots, f_m$ und $\rho_{n+2}(\mathfrak{z}'), \ldots, \rho_m(\mathfrak{z}')$ zu konstruieren. Es sei $\mathfrak{z}_1 \in (Z' \times \bar{\bar{Z}}) \cap B$. Es gibt dann ein λ mit $\varphi_\lambda(\mathfrak{z}_1) > 0$. Es ist

$$\sup_{(\mathfrak{z}' \times Z'') \times \{\varphi_\lambda \leq 0\}} (Q_\lambda(z_q, \mathfrak{z}''; \mathfrak{z}_1) + \bar{Q}_\lambda(z_q, \mathfrak{z}''; \mathfrak{z}_1)) = F(\mathfrak{z}')$$

halbstetig nach oben auf Z' und in $\mathfrak{z}_1'$ nicht positiv. Man kann deshalb einen Produktbereich $\hat{Z} \subset Z'$ mit $\mathfrak{z}_1' \in \mathring{\hat{Z}}$ finden, so daß für $\mathfrak{z}' \in \hat{Z}$ gilt: $2 \cdot \operatorname{Re} Q_\lambda(z_q^{(1)}, \mathfrak{z}_1''; \mathfrak{z}_1) > r > F(\mathfrak{z}')$. Wir setzen in $\hat{Z}$ die Funktion $\rho_{\lambda \mathfrak{z}_1}(\mathfrak{z}') = ae^r < 1$ und in $Z' \backslash \hat{Z}$ gleich 1 und haben damit eine Zackenfunktion auf Z' erhalten. Es sei $f_{\lambda \mathfrak{z}_1}(\mathfrak{z}) := ae^{2Q_\lambda(z_q, \mathfrak{z}'' \mathfrak{z}_1)}$ und $a > 0$ so klein, daß in $\underline{Z}$ gilt: $|f_{\lambda \mathfrak{z}_1}(\mathfrak{z})| < 1$. Es ist dann $K_{\lambda \mathfrak{z}_1} = \{\mathfrak{z} \in Z' \times \bar{\bar{Z}} : |f_{\lambda \mathfrak{z}_1}(\mathfrak{z})| \geq \rho_{\lambda \mathfrak{z}_1}(\mathfrak{z}')\} \subset (\hat{Z} \times Z'') \cap (\varphi_{\underline{\lambda}} > 0\}$ und kompakt und eine Umgebung von $\mathfrak{z}_1$ (auch relativ zu $Z' \times \bar{\bar{Z}}$). Durch eine Folge von endlichen Vereinigungen von solchen $\mathring{K}_{\lambda \mathfrak{z}_1}$ läßt sich also $(Z' \times \bar{\bar{Z}}) \cap B$ ausschöpfen.

Wir numerieren eine solche endliche Vereinigung durch und erhalten $f_{n+2}(\mathfrak{z}), \ldots, f_m(\mathfrak{z})$ und $\rho_{n+2}(\mathfrak{z}'), \ldots, \rho_m(\mathfrak{z}')$ dazu gehörend. Die endliche Vereinigung ist gleich

$$K = \bigcup_{\lambda=n+2}^{m} \{\mathfrak{z} \in Z' \times \bar{\bar{Z}} : \rho_\lambda(\mathfrak{z}') \leq |f_\lambda(\mathfrak{z})|\}.$$

Damit haben wir eine biholomorphe Einbettung von $Z \cap \{\mathfrak{z} \in Z : |f(\mathfrak{z})| \leq 1\}$ in den m-dimensionalen Einheitspolyzylinder erhalten. Es ist

$$f^{-1}(H_\rho) = \{\mathfrak{z} \in Z : |f(\mathfrak{z})| \leq \rho_q\} \cup \bigcup_{\nu=q+1}^{n+1} \{\mathfrak{z} \in Z : |z_{\nu-1}| \geq \rho_\nu,$$

$$|f(\mathfrak{z})| \leq 1\} \cup \bigcup_{\nu=n+2}^{m} \{\mathfrak{z} \in Z : |f_\nu(\mathfrak{z})| \geq \rho_\nu(\mathfrak{z}'), |f(\mathfrak{z})| \leq 1\}$$
$$\subset B \cap \{|f(\mathfrak{z})| \leq 1\}$$

und umfaßt $((Z' \times (Z'' - \tilde{Z}) \cup K) \cap \{|f(\mathfrak{z})| \leq 1\}$. Damit ist alles gezeigt.

5. Hilfssatz 4: *Es sei H_ρ eine verallgemeinerte Hartogsfigur, W der zugehörige Einheitspolyzylinder, S eine kohärente Garbe auf (einer Umgebung) von W und $\nu < m - q - \mathrm{hd}(S)$. Dann gilt $H^\nu(H_\rho, S) = 0$ für $\nu \neq 0$ und für $\nu = 0$ läßt sich jedes Element aus $H^\nu(H_\rho, S)$ eindeutig nach W fortsetzen.*

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

(1) Es sei $S = \mathcal{O}^p$ die Garbe der Keime von p-tupeln holomorpher Funktionen und $\hat{W} \subset W' = \{\mathfrak{w}' = (w_1, \ldots, w_{q-1}) : |\mathfrak{w}'| \leq 1\}$ ein Produktbereich. Dann ist $\hat{W}$ ein Steinsches Kompaktum. Gleiches gilt für endliche Durchschnitte von Produktbereichen. Ist $0 \leq c_\lambda \leq 1$ für $\lambda = q, \ldots, m$ und $M \subset W'$ ein Steinsches Kompaktum, so folgt genau wie im Beweis von lemme 1, [TFE], p. 218 für $M^* = \{\mathfrak{w} : \mathfrak{w}' \in M,\ c_\lambda \leq |w_\lambda| \leq 1 \text{ mit } \lambda = q, \ldots, m\}$ und $W'' = \{\mathfrak{w}'' = (w_q, \ldots, w_m) : |\mathfrak{w}''| \leq 1\}$, daß sich jeder Schnitt aus $\mathcal{O}^p(M^*)$ eindeutig bestimmt nach $M \times W''$ forsetzen läßt und daß für $0 < \nu < m - q$ gilt $H^\nu(M^*, \mathcal{O}^p) = 0$.

(2) Es sei nun S beliebig kohärent. Dann gibt es über W eine exakte Sequenz $0 \to J \to \mathcal{O}^p \to S \to 0$. Es folgt $\mathrm{hd}(J) = \mathrm{hd}(S) - 1$. Durch vollständige Induktion über hd ergibt sich deshalb die Aussage von (1) m. m. auch für S.

(3) Den Beweis des Hilfssatzes erhält man nunmehr mittels der Leray'schen Spektralsequenzen bzgl. der Produktprojektion $H_\rho \to W'$. Da $\rho_{n+2}, \ldots, \rho_m$ Zackenfunktionen sind, kann man W' mit endlich vielen Produktbereichen W_ι überdecken, so daß die ρ_λ auf den zugehörigen offenen Bereichen gleich $c_\lambda^{(\iota)}$ sind. Mit $W_{\iota_0 \ldots \iota_r}$ werde stets die abgeschlossene Hülle der Durchschnitte der zu den W_ι gehören-

den Bereiche bezeichnet. Wir definieren

$$W^*_{\iota_0\dots\iota_r} = \bigcup_{\lambda=q}^{n} \{\mathfrak{w} : \mathfrak{w}' \in W_{\iota_0\dots\iota_r}, \max(c_\lambda^{(\iota_0)}, \dots, c_\lambda^{(\iota_r)}) \leq |w_\lambda| \leq 1\}$$

und eine Steinsche Überdeckung $\mathfrak{U}_{\iota_0\dots\iota_r}$ von $W^*_{\iota_0\dots\iota_r}$, wobei die Elemente von $\mathfrak{U}_{\iota_0\dots\iota_r}$ von den Elementen dieser Vereinigung gebildet werden. Man hat Restriktionsabbildungen $C^{\cdot}(\mathfrak{U}_{\iota_0\dots\hat{\iota}_\nu\dots\iota_r}) \to C^{\cdot}(\mathfrak{U}_{\iota_0\dots\iota_r})$. Es ist $\cup_\iota W^*_\iota = H_\rho$. Deshalb erhält man eine Spektralsequenz mit $E_2^{rs} = H^r(\{W_\iota\}, H^s(\mathfrak{U}_{\iota_0\dots\iota_r}, S))$ und Endzweck (= abutment) gleich $H^k(H_\rho, S)$. Es ist aber $H^s(\mathfrak{U}_{\iota_0\dots\iota_r}, S) = 0$ für $0 < s < m - q - \text{hd}(S)$ und $H^0(\mathfrak{U}_{\iota_0\dots\iota_r}, S) = H^0(W_{\iota_0\dots\iota_r} \times W'', S)$. Man hat deshalb nach den Sätzen der Steintheorie: $E_2^{r,s} = 0$ für $0 < s < m - q - \text{hd}(S)$ und $r > 0$, $s = 0$ und damit $H^k(H_\rho, S) = 0$ für $0 < k < m - q - \text{hd}(S)$ und $H^0(\mathfrak{U}, S) = E_2^{0,0} = H^0(W, S)$.

6. Der Satz 1 ist nun in der Aussage des folgenden Hilfssatzes enthalten

HILFSSATZ 5: *Es sei* $(Z, \rho_q, \dots, \rho_{n+1}, f)$ *eine Hartogsfigur zu* $(\varphi_1, \dots, \varphi_e, \mathfrak{z}_0)$ *und* S *eine kohärente Garbe auf* G. *Dann gilt für* $\nu < n - q - \text{hd}(S)$.

(a) $H^\nu(Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B, S) = 0$ *falls* $\nu > 0$

(b) $H^\nu(Z \cap \{|f| \leq 1\}, S) \xrightarrow{\approx} H^\nu(Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B, S)$ *falls* $\nu = 0$.

BEWEIS: Es sei f nach Hilfssatz 3 eine biholomorphe Einbettung von $Z \cap \{|f| \leq 1\}$ in den m-dimensionalen abgeschlossenen Einheitspolyzylinder $W \subset \mathbb{C}^m$ und $H_\rho \subset W$ eine verallgemeinerte Hartogsfigur mit $f^{-1}(H_\rho) \subset Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B$. Das direkte Bild $f_*(S)$ ist kohärent in (einer Umbegung von) W und es gilt $\text{hd}(f_*(S)) = \text{hd}(S) + (m - n)$. Es ist also $\nu < n - q - \text{hd}(S)$ genau dann, wenn $\nu < m - q - \text{hd}(f, (S))$. Man hat also $H^\nu(f^{-1}(H_\rho), S) = H^\nu(H_\rho, f_*(S)) = 0$ für $0 < \nu < n - q - \text{hd}(S)$ und im Falle $\nu = 0$ ist $S(Z \cap \{|f| \leq 1\}) \to S(Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap f^{-1}(H_\rho))$ bijektiv.

Man kann nun $Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B$ durch eine Folge $\overset{*}{Z}_\nu = f_\nu^{-1}(\mathring{H}_{\rho_\nu}^{(\nu)})$ mit $Z_\nu = f_\nu^{-1}(H_{\rho_\nu}^{(\nu)}) \subset\subset \overset{*}{Z}_{\nu+1}$ ausschöpfen. Daraus folgt zunächst unmittelbar, daß $S(Z \cap \{f\} \leq 1\} \to S(Z \cap \{f \leq 1\} \cap B)$ bijektiv ist. Um das Verschwinden der Kohomologie über $Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B$ zu zeigen, gehen wir folgendermaßen vor. Es sei $0 \to S \to T_0 \xrightarrow{d} T_1 \to \cdots$ eine welke Auflösung von S über G, und es sei $0 < \nu < n - q - \text{hd}(S)$ und

$\xi \in T_\nu(Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B)$. Wir konstruieren eine Folge $\eta_\mu \in T_{\nu-1}(Z_\mu)$ mit $d\eta_\mu = \xi \mid Z_\mu$ induktiv. Ist η_μ bereits konstruiert, so gibt es ein $\tilde{\eta}_{\mu+1} \in T_{\nu-1}(Z_{\mu+1})$ mit $d\tilde{\eta}_{\mu+1} = \xi \mid Z_{\mu+1}$. Die Differenz $\eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}$ ist auf Z_μ definiert, es gilt $d(\eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}) = 0$. Im Falle $\nu = 1$ ist sie eine Schnittfläche in S und als solche nach $Z \cap \{|f| \leq 1\}$ fortsetzbar. Im Falle $\nu > 1$ gibt es in Z_μ ein $\gamma_\mu \in T_{\nu-2}(Z_\mu)$ mit $d\gamma_\mu = \eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}$. Man darf γ_μ als in einer Umgebung von Z_μ definiert annehmen. Man kann es aus einer solchen Umgebung nach $Z \cap \{|f| \leq 1\}$ fortsetzen und erhält damit eine Fortsetzung von $\eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}$ zu einem $\hat{\eta}_{\mu+1} \in T_{\nu-1}(Z \cap \{f \leq 1\})$ mit $d\hat{\eta}_{\mu+1} = 0$. Es sei nun $\eta_{\mu+1} = \tilde{\eta}_{\mu+1} + \hat{\eta}_{\mu+1}$ in $Z_{\mu+1}$. Dann ist $d\eta_{\mu+1} = \xi$ und $\eta_{\mu+1} \mid Z_\mu = \eta_\mu$. Setzen wir noch $\eta = \lim \eta_\mu$, so folgt $d\eta = \xi$, $\eta \in T_{\nu-1}(Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B)$. Also gilt $H^\nu(Z \cap \{|f| \leq 1\} \cap B, S) = 0$.

§2. Mittag–Leffler Kohomologie

1. Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Bereich und $G = Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_n$ eine Folge von komplexen Unterräumen. Zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in Y_\nu$ mit $\nu < n$ gebe as eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0) \subset Y_\nu$ und eine aktive holomorphe Funktion g in U, so daß $Y_{\nu+1} \cap U$ gleich $\{g = 0\}$ und die Idealgarbe $J_{\nu+1}$ von $Y_{\nu+1}$ durch g aufgespannt wird. Die Beschränkung von g auf die Reduktion von Y_ν verschwindet also nirgends identisch. Wir definieren analytische Garben $\mathscr{D}_\nu$ und $\mathscr{M}_\nu$ auf Y_ν induktiv. Es sei $D_0 = \mathcal{O}_G$. Ist $\mathscr{D}_\nu$ bereits definiert, so sei $\mathscr{M}_\nu$ die Garbe der Brüche a/g mit $a \in \mathscr{D}_{\nu\mathfrak{z}}$ und $g \in J_{\nu+1,\mathfrak{z}} \subset \mathcal{O}_{Y_\nu\mathfrak{z}}$ erzeugendes Element. Brucherweiterung mit $f_\mathfrak{z} \in \mathcal{O}_{Y_\nu\mathfrak{z}}$ ist erlaubt, wenn $f_\mathfrak{z}(\mathfrak{z}) \neq 0$. Wir setzen $\mathscr{D}_{\nu+1} = \mathscr{M}_\nu/\mathscr{D}_\nu \mid Y_{\nu+1}$. Die so gewonnenen Garben $\mathscr{D}_\nu \subset \mathscr{M}_\nu$ sind kohärent. Ihre homologische Dimension ist gleich ν. Diese Eigenschaft ist wesentlich für die Fortsetzung von Kohomologieklassen. Anders als bei der Grothendieckschen Aufflösung mit verallgemeinerten Hauptteilen sind unsere Garben jedoch nicht injektiv.

Es sei $U \subset G$ offen und es seien $g_1, \ldots, g_\nu \in \mathcal{O}(U)$ holomorphe Funktionen, so daß die $g_{\mu+1} \mid Y_\mu \cap U$ die Idealgarbe von $Y_{\mu+1}$ über $\mathcal{O}$ erzeugen. Ein Schnitt $f \in \mathscr{D}_\nu(U \cap Y_\nu)$ wird dann eindeutig bestimmt durch einen Ausdruck

$$f = \frac{a}{g_1 \cdot \ldots \cdot g_\nu} d\bar{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{g}_\nu \text{ mit } a \in \mathcal{O}_{Y_\nu}(U \cap Y_\nu)$$

repräsentiert. Hierbei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge der $g_1, \ldots, g_\nu$ an.

Wir denken uns nun alle Garben trivial nach G fortgesetzt. Durch eine Zusammensetzung der Homomorphismen $\mathcal{M}_\nu \to \mathcal{D}_{\nu+1}$, $\mathcal{D}_{\nu+1} \to \mathcal{M}_{\nu+1}$ erhält man Garbenhomomorphismen $\mathcal{M}_\nu \to \mathcal{M}_{\nu+1}$ und eine Auflösung von $\mathcal{O} = \mathcal{O}_G$:

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{d} \mathcal{M}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{M}_1 \to \cdots \to \mathcal{M}_n \to 0$$

Es gilt $d(\mathcal{M}_{\nu-1}) = \ker(d : \mathcal{M}_\nu \to \mathcal{M}_{\nu+1}) = \mathcal{D}_\nu$ für $\nu = 0, \ldots, n$ wobei $\mathcal{M}_{-1} = \mathcal{O}$ und $\mathcal{M}_{n+1} = 0$ zu setzen ist.

2. Ist V eine lokalfreie Garbe auf G so ist $0 \to V \to \mathcal{M}_0 \otimes V \to \mathcal{M}_1 \otimes V \to \cdots$ eine Auflösung von V. In ähnlicher Weise kann man auch beliebige kohärente Garben S auflösen. Ferner überträgt sich alles unmittelbar auf beliebige komplexe Mannigfaltigkeiten und sogar auf komplexe Räume.

Es sei etwa X ein projektiv algebraischer komplexer Raum und S eine kohärente Garbe auf X. Es sei $F \to X$ eine positives Geradenbündel. Wir konstruieren eine Folge von kohärenten Garben $\mathcal{D}_\nu \subset \mathcal{M}_\nu$.

Wir wählen zunächst eine Tensorpotenz F^{r_0} und eine Schnittfläche $s_0 \in F^{r_0}(X)$, so daß kein Element von S Torsionselement bzgl. s_0 ist: gilt $\sigma \in S_x$ und $s_0 \cdot \sigma \in F^{r_0} \otimes S$ gleich 0, so folgt stets $\sigma = 0$. Wir setzen dann $\mathcal{D}_0 = S$ und $\mathcal{M}_0 = \{a/s : a \in S \otimes F^{r_0}\}$ und $\mathcal{D}_1 = \mathcal{M}_0/\mathcal{D}_0$. Im nächsten Schritt wählen wir ein $s_1 \in F^{r_1}(X)$, so daß kein Element von $\mathcal{D}_1$ Torsionselement bzgl. s_1 ist und definieren dann $\mathcal{M}_1$ und fahren so fort. Man erhält eine Auflösung $0 \to S \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1 \to \cdots$. Die Dimension des Trägers von $\mathcal{M}_\nu$ wird dabei stets kleiner. Es ist $\mathcal{M}_\nu \simeq \mathcal{D}_\nu \otimes F^{r_\nu}$. Die Zahlen r_ν seien nun so groß gewählt, daß $H^\mu(X, \mathcal{M}_\nu) = 0$ für $\mu \geq 1$. Dann ist unsere Auflösung azyklisch und es gilt

$$H^\nu(X, S) = \ker(d : \mathcal{M}_\nu \to \mathcal{M}_{\nu+1})/\mathrm{d}\mathcal{M}_{\nu-1}.$$

Ist X eine Mannigfaltigkeit und S lokal frei, so folgt auch $\mathrm{hd}(\mathcal{M}_\nu) = \mathrm{hd}(\mathcal{D}_\nu) = \nu$.

Wir nennen die so konstruierten Auflösungen Mittag–Leffler Auflösungen. Ist X eine Mannigfaltigkeit und ist S lokal frei und sind die Träger der Garben $\mathcal{D}_\nu$, $\mathcal{M}_\nu$ Mannigfaltigkeiten, so sprechen wir von regulären Mittag–Leffler Auflösungen.

3. Es sei $0 \to S \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1 \to \cdots$ eine Mittag–Leffler Auflösung von S über X. Aus der kanonischen Spektralsequenz ergibt sich dann für offene Teilmengen $G \subset X$ ein Homomorphismus

$$\ker(d:\mathcal{M}_\nu(G)\to\mathcal{M}_{\nu+1}(G))/d\mathcal{M}_{\nu-1}(G)\to H^\nu(G,S)$$

Wir bezeichnen nun das Bild unter diesem Homomorphismus mit $H^\nu_{\mathcal{M}}\cdot(G,S)$ und nennen es Mittag–Leffler–Kohomologie. Im allgemeinen ist die Mittag–Leffler–Kohomologie sehr viel kleiner als die gewöhliche. Es gilt aber:

SATZ 1: *Es sei* $H^\mu(X,\mathcal{M}_{\nu-\mu-1})=0$ *für* $\mu=1,\dots,\nu-1$. *Dann ist* $\ker/d\mathcal{M}_{\nu-1}\to H^\nu(X,S)$ *injektiv.*

Der Beweis folgt aus der kanonischen Spektralsequenz. Der Satz gibt eine Möglichkeit, nicht-triviale Kohomologie zu konstruieren. Um die ν-te Mittag–Leffler Kohomologie zu gewinnen, braucht man die Auflösung $\mathcal{M}^{\cdot}$ nur bis zur Garbe $\mathcal{M}_\nu$ zu haben.

4. Es sei wieder zu dem Fall von Gebieten $G\subset\mathbb{C}^n$ zurückgekehrt. Die Garbe S sei wieder $\mathcal{O}$. Wir wollen die Mittag–Leffler Kohomologie benutzen, um allgemeine Kohomologieklassen zu konstruieren.

Es seien $f_1,\dots,f_d$ mit $d\le n$ holomorphe Funktionen in G. Der Rang der Funktionalmatrix von $f_1,\dots,f_d$ sei überall gleich d. Wir erhalten eine Folge von komplexen Untermannigfaltigkeiten $Y_\nu=\{\mathfrak{z}\in G:f_1(\mathfrak{z})=\cdots=f_\nu(\mathfrak{z})=0\}$ mit $G=Y_0\supset Y_1\supset\cdots\supset Y_d$. Ist $U\subset Y_d$ eine offene Menge, so läßt sich jede Schnittfläche $f\in\mathcal{D}_d(U)$ eindeutig bestimmt in der Form $f=\dfrac{a}{f_1\cdot\ldots\cdot f_d}\,d\bar f_1\wedge\cdots\wedge d\bar f_d$ schreiben, wobei $a\in\mathcal{O}_{Y_d}(U)$ eine holomorphe Funktion ist. Es sei fortan $U=Y_d$. Dann repräsentiert f eine d-dimensionale Kohomologie-klasse der regulären Mittag–Leffler Kohomologie von G. Wir wollen sie durch eine Distributionsform (current) vom Typ $(0,d)$ angeben. Es sei $\overset{*}{\Lambda}{}^{n,n-\nu}=f_{\nu+1}\cdot\Lambda^{n,n-\nu}$, die Garbe der beliebig oft differenzierbaren $(n,n-\nu)$-Formen, die auf $\{f_{\nu+1}=0\}$ verschwinden ($\nu=0,\dots,d$), wobei $f_{d+1}=1$ gesetzt wird. Wir haben dann $\overset{*}{\Lambda}{}^{n,n-d}=\Lambda^{n,n-d}$, gleich der Garbe der beliebig oft differenzierbaren $(n,n-d)$-Formen. Es sei $\varphi=f_{\nu+1}\cdot df_1\wedge\cdots\wedge df_\nu\wedge\varphi_0$ eine Schnittfläche in $\overset{*}{\Lambda}{}^{n,n-\nu}$ mit kompaktem Träger. Wir setzen für $b=\dfrac{a}{f_{\nu+1}}$ mit $a\in\mathcal{O}_{Y_\nu}(Y_\nu)$, wenn $\nu\le d$, den Ausdruck

$$T(\varphi)=\int_G\frac{b}{f_1\cdot\ldots\cdot f_\nu}\,d\bar f_1\wedge\cdots\wedge d\bar f_\nu\wedge\varphi:=(2\pi i)^\nu\int_{Y_\nu}a\cdot\varphi_0$$

und erhalten eine Distributionsform

$$T=t\left(\frac{b}{f_1\cdot\ldots\cdot f_\nu}\,d\bar f_1\wedge\cdots\wedge d\bar f_\nu\right)$$

vom Typ$(0, \nu)$. Es sei $d''T(\psi^{n,n-\nu-1}) = -(-1)^\nu T(d\psi)$ die totale Ableitung und δ der Homomorphismus $\mathcal{M}_\nu \to \mathcal{M}_{\nu+1}$, wenn $\nu < d$ ist, wobei man $\mathcal{M}_d = \mathcal{D}_d$ nehmen muß. Es folgt dann:

$$d''t\left(\frac{a}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_\nu \cdot f_{\nu+1}} d\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_\nu\right)(f_{\nu+2} \cdot df_1 \wedge \cdots \wedge df_{\nu+1} \cdot \psi_0^{n-\nu-1, n-\nu-1})$$
$$= (2\pi i)^\nu \int_{Y_\nu} a \cdot f_{\nu+2} \cdot \frac{df_{\nu+1}}{f_{\nu+1}} d''\psi_0 = -(2\pi i)^\nu.$$

$$\int_{Y_\nu \setminus Y_{\nu+1}} d\left(af_{\nu+2}\frac{df_{\nu+1}}{f_{\nu+1}} \wedge \psi_0\right) = (2\pi i)^{\nu+1} \int_{Y_{\nu+1}} a \cdot f_{\nu+2} \cdot \psi_0$$
$$= t\left(\frac{a}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_{\nu+1}} d\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_{\nu+1}\right)(\psi).$$

Man hat also

$$d''t\left(\frac{b}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_\nu} d\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_\nu\right) = t\left(\delta \frac{b}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_\nu} d\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_\nu\right)$$

Damit ist t ein Homomorphismus unserer Mittag–Leffler–Auflösung in die Auflösung durch die Distributionsformen. Es wird $\mathcal{D}_d(Y_d)$ auf eine Menge von geschlosseneen $(0, d)$-Formen abgebildet. Aus der Theorie der Spektralsequenzen folgt, daß

$$\frac{a}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_\nu} d\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_\nu \quad \text{und} \quad t\left(\frac{a}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_\nu} d\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{f}_\nu\right)$$

die gleiche Kohomogieklasse aus $H^\nu(G, \mathcal{O})$ repräsentieren.

5. Es seien $f_1 = z_1, \ldots, f_d = z_d$ und $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_d)$, $\mathfrak{z}'' = (z_{d+1}, \ldots, z_n)$ und $\psi = a(\mathfrak{z})\, d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_d$ eine $(0, d)$ Form in G. Die Funktion a sei in $\mathfrak{z}''$ holomorph, es gelte also $d''\psi = 0$. Jede Differentialform ist auch eine Distribution. Wir setzen für die Schnittflächen $\varphi \in \Lambda^{n,n-d}(G)$ mit kompaktem Träger:

$$\psi(\varphi) = (-1)^{d(d-1)/2}\pi^d \int_G \psi \wedge \varphi$$

und zeigen

$$\psi = \int_{\mathfrak{z}'} t\left(\frac{a(\mathfrak{z}', \mathfrak{z}'')}{z_1 \cdot \ldots \cdot z_d} d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_d\right) dx_1\, dy_1 \ldots dx_d\, dy_d.$$

BEWEIS: Es ist nach Definition des Integrals von Distributionen:

$$\left(\int_{\mathfrak{z}'} t\left(\frac{a}{z_1\cdot\ldots\cdot z_d}\,d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_d\right)dx_1\ldots dy_d\right)(\varphi)$$

$$=\int_{\mathfrak{z}'}\left(t\left(\frac{a}{z_1\cdot\ldots\cdot z_d}\,d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_d\right)(\varphi)\right)dx_1\ldots dy_d.$$

Dieses ist gleich $(2\pi i)^d\int_{\mathfrak{z}'}dx_1\ldots dy_d\int_{\mathfrak{z}''}a\cdot\varphi_0$. Andererseits hat man

$$\int_G \psi\wedge\varphi=\int_G a(\mathfrak{z})\,d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_d\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_d\wedge\varphi_0$$

$$=(-1)^{d(d-1)/2}\cdot 2^d\cdot i^d\int_{\mathfrak{z}'}dx_1\wedge\cdots\wedge dy_d\int_{\mathfrak{z}''}a\cdot\varphi_0.$$

Damit ist die Gleichung bewiesen.

6. Es seien nun $B\subset G\subset\mathbb{C}^n$ Bereiche und φ eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion in G mit $B=\{\mathfrak{z}\in G:\varphi(\mathfrak{z})>0\}$ und $d\varphi\neq 0$ überall. Die Leviform $L(\varphi)$ habe in jedem $\mathfrak{z}\in G$ genau $(n-q)$-positive und $(q-1)$ negative Eigenwerte auf der komplexen Tangente

$$T^{a,\varphi}=\left\{\xi=\sum_{\nu=1}^n a_\nu\frac{\partial}{\partial z_\nu}+\sum_{\nu=1}^n \bar{a}_\nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\nu}:\xi(\varphi)=(i\xi)(\varphi)=0\right\}.$$

Dann ist also B in jedem Randpunkt q-konkav, aber nirgendwo stärker pseudokonkav. Wir zeigen den Satz von Andreotti–Norguet [AN].

SATZ 2: *Es gibt um jeden Punkt $\mathfrak{z}_0\in\partial B\cap G$ eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)\subset G$ und eine Differentialform $\psi=a(\mathfrak{z})\,d\bar{z}_{q+1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n$ in $U\cap B$ (nach geeigneter Wahl der Koordinaten), wobei a in $\mathfrak{z}'=(z_1,\ldots,z_q)$ holomorph ist, so daß ψ in jedem Punkt von $\partial B\cap U$ singulär wird.*

Dabei wird dieser Begriff wie folgt definiert. Ist $q=n$, so ist ψ eine holomorphe Funktion. Der Begriff bedeutet dann einfach das "Singulär" bei holomorphen Funktionen. Im Falle $1\leq q<n$ bedeutet er, daß es um keinen Punkt $\mathfrak{z}\in\partial B\cap U$ eine Umgebung $V(\mathfrak{z})\subset U$ mit einer Form $\alpha=\alpha^{(0,n-q-1)}$ und $d''\alpha=\psi$ gibt.

Bevor der Satz 2 betwiesen werden kann, ist es notwendig ein Kriterium für Singularitäten herzuleiten:

KRITERIUM 3: *Es sei ψ eine d''-geschlossene Differentialform vom Typ$(0, n-q)$ in B und $\mathfrak{z}_0 \in \partial B \cap G$. Es gebe eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0) \subset G$,* eine Folge $X_\nu \subset U \cap B$ von *$(n-q)$-dimensionalen komplexen Untermannigfaltigkeiten, die gleichmäßig gegen eine $(n-q)$-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit $X \subset U$ mit $X \cap \partial B = \{\mathfrak{z}_0\}$ konvergiert, und eine geschlossene Form α vom Typ$(n-q, 0)$ in U, so daß für jede Umbebung $V(\mathfrak{z}_0) \subset\subset U$ die Folge der Integrale $\int_{X_\nu \cap V} \alpha \wedge \psi$ unbeschränkt ist. Dann ist ψ in $\mathfrak{z}_0$ singulär.*

BEWEIS: Ist ψ in $\mathfrak{z}_0$ nicht singulär, so dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es eine Form β vom Typ$(0, n-q-1)$ in B mit $d''\beta = \psi$ gibt. Es sei $V(\mathfrak{z}_0) \subset\subset U$ eine Kugel um $\mathfrak{z}_0$, so daß $\partial V \cap X = \partial X$ glatt ist. Dann sind auch die $\partial X_\nu = \partial V \cap X_\nu$ für hinreichend große ν glatt, und es gilt

$$\int_{X_\nu \cap V} \alpha \wedge \psi = (-1)^{n-q} \int_{\partial X_\nu} \alpha \wedge \beta \to (-1)^{n-q} \int_{\partial X} \alpha \wedge \beta$$

und damit die Beschränktheit im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes 2. Wir dürfen annehmen, *daß* $\mathfrak{z}_0 = 0$. Nach geeigneter Wahl der Koordinaten kann $\{\varphi = 0\}$ in der Nähe von $\mathfrak{O}$ in der Form

$$\left\{y_1 = \sum_{\nu=2}^{q} h_\nu(x_1, z_2, \ldots, z_n) z_\nu \bar{z}_\nu - \sum_{\nu=q+1}^{n} h_\nu(x_1, z_2, \ldots, z_n) z_\nu \bar{z}_\nu\right\}$$

gegeben werden. Dabei sind die h_ν stetig in $\mathfrak{O}$, und es ist $h_\nu(\mathfrak{O}) = 1$.

Es gibt eine komplexe Funktion $f(\mathfrak{z}', \tilde{x}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_n)$ mit folgenden Eigenschaften

(1) f ist in $\mathfrak{z}'$ komplex linear

(2) f ist für $|\tilde{x}_1| < \epsilon$, $|\tilde{z}_\nu| < \epsilon$ definiert und in allen Veränderlichen einmal stetig differenzierbar

(3) ist $\mathfrak{z} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_n) \in \{\varphi = 0\}$, so ist

$$\{\mathfrak{z} : f = 0, z_{q+1} = \tilde{z}_{q+1}, \ldots, z_n = \tilde{z}_n\} = T(\tilde{\mathfrak{z}})$$

eine $(q-1)$-dimensionale komplexe Tangente in diesem Punkt an $\{\varphi = 0\}$. Diese liegt in $\{\mathfrak{z} : |x_1| < \epsilon, |z_\nu| < \epsilon\}$ mit Ausnahme des Punkts $\tilde{\mathfrak{z}}$ stets ganz auf der Seite $\{\varphi < 0\}$. Wir setzen

$$\psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d\bar{z}_{q+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n}{f^{n-q}(\mathfrak{z}', x_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}, \ldots, z_q^{(\nu)}, z_{q+1}, \ldots, z_n)} r_\nu$$

wobei die Punkte $(x_1^{(\nu)}, \ldots, z_q^{(\nu)})$ in $\{|x_1| < \epsilon, |z_2| < \epsilon, \ldots, |z_q| < \epsilon\}$ dicht liegen und die $r_\nu > 0$ gegen 0 konvergieren, daß auf der Seite $\{\varphi > 0\}$ lokale gleichmäßige Konvergenz einschließlich der 1. Ableitungen vorliegt, und bezeichnen mit $E(\mathfrak{z})$ die $(n-q)$-dimensionale Tangentialebene durch $\mathfrak{z}$ an $\{\varphi = 0\}$, die parallel zu einer $(n-q)$-dimensionalen Unterebene der $(z_1, z_{q+1}, \ldots, z_n)$-Achsenebene ist. $E(\mathfrak{z})$ hängt stetig differenzierbar von $\mathfrak{z} \in \{\varphi = 0\}$ ab und es ist $E(\mathfrak{O}) = \{\mathfrak{z} : z_1 = \cdots = z_q = 0\}$. Die Funktion $f^{n-q}(0, 0, 0, \ldots, 0, z_{q+1}, \ldots, z_n)$ verschwindet auf E in $\mathfrak{O}$ genau von der Ordnung $2(n-q)$ und ist sonst von 0 verschieden. Wir setzen $\alpha = dz_{q+1} \wedge \cdots \wedge dz_n$ und erhalten zunächst

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{V \cap (E(\mathfrak{O}) + 1/\mu)} \alpha \wedge \frac{d\bar{z}_{q+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n}{f^{n-q}(0, z_{q+1}, \ldots, z_n)} = \infty \in \bar{\mathbb{C}}$$

wobei $1/\mu$ den Punkt $(+i(1/\mu), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$ bezeichnet. Das Gleiche gilt nun für ψ und $E(\mathfrak{z}_\nu)$, wenn $\mathfrak{z}_\nu = (x_1^{(\nu)} + iy_1, z_2^{(\nu)}, \ldots, z_q^{(\nu)}, z_{q+1}, \ldots, z_n) \in \{\varphi = 0\}$ hinreichend klein ist und die r_ν hinreichend stark gegen 0 konvergieren:

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{V \cap (E(\mathfrak{z}_\nu) + 1/\mu)} \alpha \wedge \psi = \infty.$$

Also ist ψ in der Nähe von $\mathfrak{O}$ auf $\{\varphi = 0\}$ in jedem Punkte singulär.

Ist $U(\mathfrak{O}) \subset G$ eine Steinsche Umgebung, so kann jede Kohomologieklasse $\xi \in H^{n-q}(U \cap B, \mathcal{O})$ durch eine d''-geschlossene Form $\psi = a(\mathfrak{z})\, d\bar{z}_{q+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$ gegeben werden und damit durch ein Integral über Mittag–Leffler–Kohomologieklassen. Die abgeschlossene Hülle der Mittag–Leffler–Kohomologie ist also die volle Kohomologiegruppe.

7. Im allgemeinen ist die Mittag–Leffler–Kohomologie sehr viel kleiner als die gewöhnliche. Wir zeigen noch einen Satz für die Mittag–Leffler–Kohomologie, der vielleicht für die gewöhnliche falsch ist.

Es sei $B = \bigcup_{\lambda=1}^{\ell} \{\mathfrak{z} \in G : \varphi_\lambda(\mathfrak{z}) > 0\} \subset G \subset \mathbb{C}^n$, wobei die φ_λ in dem Bereich G reell und zweimal stetig differenzierbar sind. Die Leviform $L(\varphi_\lambda)$ have überall wenigstens $n - q + 1$ positive Eigenwerte. Ferner sei $\mathfrak{O} \in \partial B \cap G$ und $\varphi_\lambda(\mathfrak{O}) = 0$ für $\lambda = 1, \ldots, 1$. Wir zeigen:

SATZ 4: *Es sei $\xi \in H^{\nu}_{\mathcal{M}^{\cdot}}(B, \mathcal{O})$ eine Kohomologieklasse, wobei $\mathcal{M}^{\cdot}$ eine Mittag–Leffler Auflösung von $\mathcal{O}$ auf G ist. Dann gibt es eine Umgebung $U(\mathfrak{O}) \subset G$, so daß sich ξ in $B \cup U$ fortsetzen läßt, wenn $\nu \leq n - 2q$.*

BEWEIS: Wir brauchen nur folgendes zu zeigen: Es sei $Y \subset G$ ein lokaler vollständiger Durchschnitt der Kodimension ν, $\mathcal{D}$ triviale Fortsetzung einer lokal freien Garbe auf Y in G. Dann gibt es eine Umgebung $U(\mathfrak{O}) \subset G$, so daß sich jede Schnittfläche $f \in \mathcal{D}(B)$ zu einer Schnittfläche $\hat{f} \in \mathcal{D}(B \cup U)$ fortsetzen läßt. Es gilt $\mathrm{hd}(\mathcal{D}) = \nu$, also folgt aus $\nu \leq n - 2q$ die Ungleichung $0 \leq n - 2q - \mathrm{hd}(\mathcal{D}) < n - q - \mathrm{hd}(D)$. Nach Satz 1.1 gibt es zu jedem λ eine Umgebung $U_\lambda(\mathfrak{O})$ und eine Schnittfläche $\hat{f}_\lambda \in \mathcal{D}(U_\lambda)$ mit $\hat{f}_\lambda \mid U_\lambda \cap \{\varphi_\lambda > 0\} = f \mid U_\lambda \cap \{\varphi_\lambda > 0\}$. Dabei ist $\hat{f}_\lambda$ in der Nähe von $\mathfrak{O}$ eindeutig bestimmt.

Sind λ_1, λ_2 gegeben, so gibt es eine $(2q-2)$-kodimensionale komplexe Ebene durch $\mathfrak{O}$, so daß in der Nähe von $\mathfrak{O}$ sowohl $\varphi_{\lambda_1} \mid E$ als auch $\varphi_{\lambda_2} \mid E$ streng pseudokonvex ist. Man hat also für $\{\varphi_{\lambda_1} > 0\} \cup \{\varphi_{\lambda_2} > 0\}$ in $\mathfrak{O}$ die $(2q-1)$-Konvexität im Sinne von Satz 1.1. Da noch $\mathfrak{O} < n - (2q-1) - \mathrm{hd}(\mathcal{D})$, folgt, daß die Fortsetzungen von f in der Nähe von $\mathfrak{O}$ eindeutig bestimmt sind, daß also dort gilt $\hat{f}_{\lambda_1} \equiv \hat{f}_{\lambda_2}$. Wir können also eine Umgebung $U(\mathfrak{O}) \subset \bigcap_{\lambda=1}^{\ell} U_\lambda$ finden, wo $\hat{f}_1 \equiv \cdots \equiv \hat{f}_\ell$. Es gibt dann ein $\hat{f} \in \mathcal{D}(U \cup B)$, das eine Forsetzung von f ist.

8. Selbst wenn die gewöhnliche Kohomologie endlichdimensional ist, kann die Mittag–Leffler–Kohomologie sehr viel kleiner als die gewöhnliche sein. Es sei etwa $X \subset \mathbb{P}_n$ eine zusammenhängende, wenigstens 2-dimensionale und zwei-codimensionale Untermannigfaltigkeit des n-dimensionalen komplex projektiven Raumes. Bezeichnet $d_X(x)$ für $x \in \mathbb{P}_n$ den Abstand von X in Bezug auf die Fubinimetrik, so ist nach [B] für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ das Gebiet $G = G_\epsilon = \{x \in \mathbb{P}_n : d_X(x) < \epsilon\}$ ein Schlauch um X mit glattem reell analytischem Rande und ∂G ist $(n-2)$-konkav. Es gilt also $1 < n - (n-2) = 2$ und nach [TFE], daß $H^1(G, \mathcal{O})$ endlich dimensional ist. Andererseits kann die erste Bettische Zahl von X und damit die von G positiv sein. Es ist dann $H^1(X, \mathbb{C})$ und erst recht $H^1(G, \mathcal{O})$ von 0 verschieden. Kein $\xi \in H^1(G, \mathcal{O})$ läßt sich in den $\mathbb{P}_n$ fortsetzen. Man vgl. [HM] und [BT]. Es sei nun A eine analytische Menge in G, die rein von der Kodimension 1 ist. Nach Verkleinerung von ϵ hat A in G_ϵ nur endlich viele irreduzible Komponenten und ist noch $((n-1)-1)$-konkav. Nach [ADA] ist auf jeder irreduziblen Komponente A_ν von A der Körper der meromorphen Funktionen endlich algebraische

Erweiterung des von $z_2 \mid A_\nu, \ldots, z_n \mid A_\nu$ erzeugten Unterkörpers, wenn $z_1, \ldots, z_n$ inhomogene Koordinaten des $\mathbb{P}_n$ sind, deren Numerierung geeignet gewählt ist. Es folgt, daß A_ν und damit A zu einer einscodimensionalen analytischen Menge A in den $\mathbb{P}_n$ fortsetzbar ist, und daß es deshalb ein Polynom $p \not\equiv 0$ gibt, das auf A verschwindet.

Es sei nun $\xi \in H^1_{\mathcal{M}}(G, \mathcal{O})$ eine Kohomologieklasse, die durch eine Schnittfläche $f \in \mathcal{D}_1(G)$ mit Träger A gegeben wird. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es (nach Verkleinerung von ϵ) eine natürliche Zahl s mit $p^s \cdot f = 0$. Ist g der Grad des Polynoms $p^s \not\equiv 0$ und F das (positive) Hyperebenenbündel auf den $\mathbb{P}_n$, so ist das Bild von ξ unter der Abbildung $H^1(G, \mathcal{O}) \to H^1(G, F^g)$ gleich 0. Das Element ξ kann dann durch eine Schnittfläche $f \in \mathcal{D}_1(G)$ gegeben werden, bei der der Träger A Teilgebiet einer 1-codimensionalen Ebene E ist. Wie jede Schnittfläche $s \in V(A)$ in einem Vektorbündel über E läßt sich jedes $f \in \mathcal{D}_1(G)$ zu einem $\hat{f} \in \mathcal{D}_1(\mathbb{P}_n)$ fortsetzen. Das heißt, daß ξ in den $\mathbb{P}_n$ fortsetzbar ist. Wir haben also gezeigt:

Satz 5: *Eine Kohomologieklasse $\xi \in H^1(\bar{G}, \mathcal{O})$ gehört genau dann zur Mittag–Leffler-Kohomologie, wenn sie verschwindet.*

Dieses ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall.

§3. Komplexe Morse-Singularitäten

1. Es sei $\mathfrak{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_d, \ldots, z_{d+p}, \ldots, z_{d+2p}, \ldots, z_n) = (z_0, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'', \mathfrak{z}''', \mathfrak{z}'''') \in \mathbb{C}^{n+1}$. Wir betrachten zwei komplexe Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^{n+1}$ von der Dimension $d+p$:

$$X_1 = \{\mathfrak{z} : iz_0 = 1 + \epsilon z_1^2 + \cdots + \epsilon z_d^2, \mathfrak{z}''' = \mathfrak{z}'''' = 0\} \quad \text{and}$$
$$X_2 = \{\mathfrak{z} : -iz_0 = 1 + \epsilon z_1^2 + \cdots + \epsilon z_d^2, \mathfrak{z}'' = \mathfrak{z}'''' = 0\},$$

wobei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Es sei $\varphi_1(\mathfrak{z})$ der euklidische Abstand von X_1 und $\varphi_2(\mathfrak{z})$ derjenige von X_2 und $\varphi(\mathfrak{z}) = \min(\varphi_1(\mathfrak{z}), \varphi_2(\mathfrak{z}))$ der Abstand von $X_1 \cup X_2$. Ein Vektor $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z})$ mit $\mathfrak{z} \in X_1$ steht senkrecht auf X_1 genau, wenn $z_\nu - z_\nu^0 = 0$ für $\nu = d+1, \ldots, d+p$ und $2\epsilon z_\nu(\bar{z}_0 - \bar{z}_0^0) + i(\bar{z}_\nu - \bar{z}_\nu^0) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, d$. Dieses Gleichungssystem läßt sich zusammen mit $iz_0 = 1 + \epsilon z_1^2 + \cdots + \epsilon z_d^2$, $\mathfrak{z}''' = \mathfrak{z}'''' = 0$ bei gegebenem $\mathfrak{z}_0 \sim 0$ mit einem $\mathfrak{z} \sim (-i, 0, \ldots, 0)$ eindeutig auflösen, da $2\epsilon < 1$. Es gilt $z_\nu = z_\nu^0 - 2\epsilon \cdot \bar{z}_\nu^0 +$ höhere Potenzen in ϵ, $z_\mu^0, \bar{z}_\mu^0$ für $\nu = 1, \ldots, d$ und $iz_0 = 1 + \epsilon \sum_{\nu=1}^d (z_\nu^0)^2 +$ höhere Potenzen in ϵ, z_μ^0, $\bar{z}_\mu^0$ und $z_\nu = z_\nu^0$ für $\nu = d+1, \ldots, d+p$ und $z_\nu = 0$ sonst. Es ist $\varphi_1(\mathfrak{z})$ der euklidische Abstand von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_0$. Also gilt:

$$\varphi_1^2(\mathfrak{z}_0) = |1 - iz_0^0|^2 + 2\epsilon \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{d} (z_\nu^0)^2 + \sum_{\nu=d+p+1}^{n} z_\nu^0 \bar{z}_\nu^0$$
$$+ \text{höhere Glieder.}$$

Genauso erhält man

$$\varphi_2^2(\mathfrak{z}_0) = |1 + iz_0^0|^2 + 2\epsilon \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{d} (z_\nu^0)^2 + \sum_{\nu=d+1}^{d+p} z_\nu^0 \bar{z}_\nu^0$$
$$+ \sum_{\nu=d+2p+1}^{n} z_\nu^0 \bar{z}_\nu^0 + \text{höhere Glieder.}$$

Es sei E die reelle $(d+1)$-dimensionale Ebene

$$\{\mathfrak{z} : x_\nu = 0 \text{ für } \nu = 0, \ldots, n;\ y_\nu = 0 \text{ für } \nu = d+1, \ldots, n\}.$$

Auf E gilt:

$$\varphi_1^2(\mathfrak{z}) = (1 + y_0)^2 - 2\epsilon \sum_{\nu=1}^{d} y_\nu^2 + \text{höhere Glieder}$$

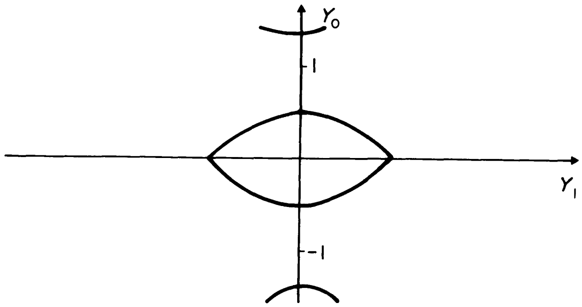
$$\varphi_2^2(\mathfrak{z}) = (1 - y_0)^2 - 2\epsilon \sum_{\nu=1}^{d} y_\nu^2 + \text{höhere Glieder.}$$

Also ist dort ungefähr in der Nähe von $\mathfrak{D}$:

$$\varphi^2(\mathfrak{z}) = \begin{cases} (1 - y_0)^2 - 2\epsilon \sum_{\nu=1}^{d} y_\nu^2 : y_0 > 0 \\ (1 + y_0)^2 - 2\epsilon \sum_{\nu=1}^{d} y_\nu^2 : y_0 < 0 \end{cases}$$

Bezeichnet B_a den Bereich $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C}^n : \varphi^2(\mathfrak{z}) < a^2\}$ für $a > 0$ so ist für $a < 1$, $a \sim 1$ der Durchschnitt $B_a \cap E$ ungefähr das Äußere von zwei Hyperbelkappen, die sich auf $\{y_0 = 0\}$ schneiden. Im Falle $a > 1$, $a \sim 1$ umfaßt $B_a \cap E$ eine ganze Umgebung von $\mathfrak{D}$. Geht man zu Parallelen $E(\mathfrak{z})$ von E über, so ist $E(\mathfrak{z}) \cap B_a$ in der Nähe von $\mathfrak{D}$ wieder das Äußere von zwei Hyperbelkappen. Die beiden Kappen sind jedoch jetzt größer geworden. Im allgemeinen hat sich ihr Schnitt auch von $\{y_0 = 0\}$ auf $\{y_0 = b\}$ verlagert. Beim Übergang von B_a mit $a < 1$, $a \sim 1$ zu B_a mit $a > 1$, $a \sim 1$ wird also homotopietheoretisch in eine d-dimensionale Sphäre eine $(d+1)$-dimensionale Kugel eingehängt.

Der Rand von $B_a \cap \{z_0 = z_{d+1} = \cdots = z_n = 0\}$ ist außerhalb der



Hyperbelkappen

Knicke bei der angegebenen Näherung Levi-flach, d. h. eine analytische Hyperfläche. Das ändert sich, wenn man von der euklidischen zur Fubinimetrik übergeht. Bei geeigneter Fubinimetrik im $\mathbb{P}_{n+1} \supset \mathbb{C}^{n+1}$ wird in $\mathfrak{O}$ der Abstand:

$$\begin{aligned}\varphi_1^2(\mathfrak{z}) &= |1 - iz_0|^2 + 2\epsilon \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{d} z_\nu^2 + \sum_{\nu=d+p+1}^{n} |z_\nu|^2 \\ &\quad - \beta \sum_{\nu=0}^{n} |z_\nu|^2 + \text{höhere Glieder} \\ \varphi_2^2(\mathfrak{z}) &= |1 + iz_0|^2 + 2\epsilon \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{d} z_\nu^2 + \sum_{\nu=d+1}^{d+p} |z_\nu|^2 \\ &\quad + \sum_{\nu=d+2p+1}^{n} |z_\nu|^2 - \beta \sum_{\nu=0}^{n} |z_\nu|^2 + \text{höhere Glieder.}\end{aligned}$$

Dabei kann $\beta > 0$ beliebig klein sein. Die Leviformen von $-\varphi_1^2(\mathfrak{z})$ und $-\varphi_2^2(\mathfrak{z})$ haben dann in $\mathfrak{O}$ auf der analytischen Tangente $\{z_0 = 0\}$ genau $d + p$ positive Eigenwerte. Die Bereiche B_a sind also außerhalb der Knicke in der Nähe von $\mathfrak{O}$ streng $(n - d - p + 1)$-konkav. Auf der $(z_0, z_1, \ldots, z_d)$-Achse sind beide Leviformen gleichzeitig in $\mathfrak{O}$ auf der analytischen Tangente positiv definit. Durch Übergang zu einem $\psi(\varphi_\nu^2)$ mit streng monoton wachsendem reellen ψ kann man sogar erreichen, daß die Leviformen auf der $(z_0, \ldots, z_d)$-Achse in $\mathfrak{O}$ positiv definit werden. Der Bereich B_a ist deshalb in der Nähe von $\mathfrak{O}$ $(n - d + 1)$-konkav.

2. Dieses gibt Anregung, allgemeine generische komplexe Morsesingularitäten zu definieren. Es sei $W = W(\mathfrak{O}) \subset \mathbb{C}^n$ eine offene umgebung, es seien $\varphi_0, \ldots, \varphi_e$ reelle zweimal stetig differenzierbare Funktionen in W mit $\varphi_0(\mathfrak{O}) = \cdots = \varphi_e(\mathfrak{O}) = 0$ und $e \leq n$. Die Differentiale $d\varphi_0(\mathfrak{O}), \ldots, d\varphi_e(\mathfrak{O})$ seien linear abhängig, eine positive Linearkombination sei gleich 0, jedoch seien e von ihnen stets linear unabhängig, die $(2n - e)$-dimensionale Ebene $K = \{d\varphi_0(\mathfrak{O}) = \cdots = d\varphi_e = 0\}$ besitze nur $(n - e)$-dimensionale komplexe Unterebenen. Wir führen die Koordinaten im $\mathbb{C}^n$ so ein, daß K die

$(y_1, \ldots, y_e, z_{e+1}, \ldots, z_n)$-Achsenebene wird. Man kann dann schreiben:

$$\begin{aligned}
&\varphi_\nu(\mathfrak{z}) = L_\nu(\mathfrak{z}) + H_\nu(\mathfrak{z}) + Q_\nu(\mathfrak{z}) \quad \text{in } W \text{ mit} \\
&L_\nu(\mathfrak{z}) = a_1^{(\nu)} \cdot x_1 + \cdots + a_e^{(\nu)} x_e,\ a_\kappa^{(\nu)} \in \mathbb{R} \\
&H_\nu(\mathfrak{z}) = \operatorname{Re} \sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} a_{\kappa\lambda}^{(\nu)}(\mathfrak{z}) z_\kappa z_\lambda \\
&Q_\nu(\mathfrak{z}) = \sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} b_{\kappa\lambda}^{(\nu)}(\mathfrak{z}) z_\kappa \bar{z}_\lambda,
\end{aligned}$$

wobei $a_{\kappa\lambda}^{(\nu)} = a_{\lambda\kappa}^{(\nu)}$, $b_{\kappa\lambda}^{(\nu)} = \bar{b}_{\lambda\kappa}^{(\nu)}$ und die $a_{\kappa\lambda}$, $b_{\kappa\lambda}$ in W stetig sind. Die Koordinaten seien ferner so gewählt, daß $\det(d\varphi_0, \ldots, d\varphi_{e-1})$

$$:= \det\begin{pmatrix} a_1^{(0)}, \ldots, a_1^{(e-1)} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_e^{(0)}, \ldots, a_e^{(e-1)} \end{pmatrix} > 0.$$

Die Hermiteschen Formen $Q_\nu(\mathfrak{z})$ mögen nun für festes $\mathfrak{z}$ stets mindestens $(n-q+1)$-negative Eigenwerte haben, die Flächen $\{\varphi_\nu = r_\nu\}$ seien also überall q-konkav von der Seite $\{\varphi_\nu < r_\nu\}$.

Es sei $e \leq d \leq n$ und die folgende quadratische Form S im Punkte $\mathfrak{z} = \mathfrak{O}$ sei auf der $(x_{e+1}, \ldots, x_d)$-Achse negativ und auf der $(y_1, \ldots, y_d, z_{d+1}, \ldots, z_n)$-Achse positiv definit:

$$S = \det\begin{pmatrix} L_0, \ldots, L_e \\ H_0 + Q_0, \ldots, H_e + Q_e \end{pmatrix} := \det\begin{pmatrix} a_1^{(0)}, \ldots, a_1^{(e)} \\ a_e^{(0)}, \ldots, a_e^{(e)} \\ H_0 + Q_0, \ldots, H_e + Q_e \end{pmatrix}.$$

Ist $\varphi = \min(\varphi_0, \ldots, \varphi_e)$, so sieht man sofort, daß bis auf Homotopieäquivalenz beim Übergang von $\{\varphi < -\epsilon\}$ zu $\{\varphi > \epsilon\}$, wobei $\epsilon > 0$, in eine $(d-1)$-dimensionale Sphäre eine d-dimensionale Kugel eingehängt wird, und daß deshalb im Nullpunkt eine Morsesingularität vom Index d vorliegt. Wir nennen die Zahl e den Typ der Morsesingularität.

Gilt $\Sigma_{\nu=0}^{e} b_\nu\, d\varphi_\nu(\mathfrak{O}) = 0$ mit $b_\nu > 0$, so folgt

$$S = \frac{1}{b_e} \det(d\varphi_0, \ldots, d\varphi_{e-1}) \cdot \sum_{\nu=0}^{e} b_\nu (H_\nu + Q_\nu).$$

Da S auf der $(y_1, \ldots, y_d, z_{d+1}, \ldots, z_n)$-Achse positiv definit ist, gilt das gleiche für $\Sigma_{\nu=0}^{e} b_\nu Q_\nu$ auf der $(z_{d+1}, \ldots, z_n)$-Achse. Dann muß aber ein Q mindestens $\dfrac{n-d}{e+1}$ positive Eigenwerte haben und damit höchstens

$n - \frac{n-d}{e+1}$ negative. Es gilt also $n - \frac{n-d}{e+1} \geq n - q + 1$ und $d \geq n - (q-1)(e+1)$ und mithin stets $d \geq \frac{n+1}{q} - 1$. Damit ist der Index der Morsesingularitäten bei kleinem q nach unten beschränkt. Ist X eine n-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit und gibt es eine q-konvexe Funktion $\varphi \geq 0$ in X von dem eben beschriebenen Typ, die genau auf Y verschwindet, so folgen für die Homotopie von Y und X entsprechende Leftschetzsätze.

Ist $A \subset \mathbb{P}_n$ eine $(n-q)$-dimensionale analytische Teilmenge, so kann man mittels des Abstandes bzgl. der Fubinimetrik und des "Generischmachens" eine solche Funktion φ konstruieren. Die so gewonnenen Lefschetzsätze sich jedoch verglichen mit denem von [L] zu schwach.

3. Es soll das Verhalten der Kohomologie mit Koeffizienten in kohärenten Garben in der Nähe von Kanten, insbesondere von Morsesingularitäten untersucht werden. Es sei wieder $W = W(\mathfrak{O}) \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung und $\varphi_0, \ldots, \varphi_e$ reelle zweimal stetig differenzierbare Funktionen in W mit $\varphi_0(\mathfrak{O}) = \cdots = \varphi_e(\mathfrak{O}) = 0$. Die Leviform der φ_ν habe überall mindestens $(n-q+1)$ negative Eigenwerte. Weitere Voraussetzungen werden zunächst nicht gestellt. Es sind dann bei jedem φ_ν höchstens $(q-1)$ Eigenwerte positiv und es gibt eine $n-(e+1)(q-1)$-dimensionale komplexe Ebene durch $\mathfrak{O}$ auf der alle φ_ν gleichzeitig negative Eigenwerte haben. Ist

$$B = \bigcup_{\nu=0}^{e} \{\mathfrak{z} \in W : \varphi_\nu(\mathfrak{z}) < 0; \nu = 0, \ldots, e\},$$

so ist B mindestens $\tilde{q}$-konkav relativ zu W mit $\tilde{q} = (e+1)(q-1)+1$. Es folgt aus Satz 1 von §1:

SATZ 1: *Es sei S kohärent in W und $0 \leq \nu < n - \tilde{q} - \mathrm{hd}(S)$. Dann gibt es beliebig kleine Steinsche Umgebungen $U(\mathfrak{O}) \subset W$, so daß gilt:*

(a) $H^\nu(U \cap B, S) = 0$ *falls* $\nu > 0$
(b) $H^\nu(U, S) \to H^\nu(U \cap B, S)$ *bijektiv falls* $\nu = 0$.

Dagegen ergibt sich aus §2, Satz 4, daß diese Aussage für die Mittag–Leffler–Kohomologie richtig bleibt, wenn $0 \leq \nu \leq n - 2q$ und die Garbe S lokal frei ist.

4. Wir spezialisieren uns auf den Fall $e = 1$ und betrachten eine komplexe Morsesingularität von diesem Typ und Index d mit $1 \leq d \leq n$. Es sei

$$\varphi_0(\mathfrak{z}) = a_0 x_1 + H_0(\mathfrak{z}) + Q_0(\mathfrak{z}),\ \varphi_1(\mathfrak{z}) = -a_1 x_1 + H_1(\mathfrak{z}) + Q_1(\mathfrak{z})$$

mit $a_0 > 0$, $a_1 > 0$. Es muß dann $S = a_0(H_1 + Q_1) + a_1(H_0 + Q_0)$ auf der $(y_1, \ldots, y_d, z_{d+1}, \ldots, z_n)$-Achse positiv definit und auf der $(x_2, \ldots, x_d)$-Achse negativ definit sein und die $Q_\nu(\mathfrak{z})$ überall mindestens $(n - q + 1)$ negative Eigenwerte haben. Ist $d \geq n - 2(q-1)$, so kann man die φ_ν so konstruieren, daß die Q_ν auf der $(z_1, \ldots, z_d)$-Achse negativ definit sind und insgesamt $d + \left[\frac{n-d}{2}\right]^-$ negative Eigenwerte haben, wobei $\left[\frac{n-d}{2}\right]^-$ die kleinste ganze Zahl $m \leq \frac{n-d}{2}$ bezeichnet. Es ist $d + \left[\frac{n-d}{2}\right]^- \geq n - q + 1$. Bei geeigneter Wahl der H_ν, Q_ν ist auch S auf der $(y_1, \ldots, y_d, z_{d+1}, \ldots, z_n)$-Achse positiv und auf der $(x_1, \ldots, x_d)$-Achse negativ definit. Es sei $\mathcal{D}$ die $(d-1)$-codimensionale komplexe Ebene $z_\nu = r_\nu$ mit $r_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 2, \ldots, d$. Ist $r \in \mathbb{R}$ nahe bei $\mathfrak{O}$, so kann man die r_ν so wählen, daß $B_r \cap D \cap G$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, die sich in genau einem Punkt $\mathfrak{z}_0$ der $(z_1, \ldots, z_d)$-Achse berühren. Dabei sei $G = G(\mathfrak{O}) \subset W$ eine kleine Kugel um $\mathfrak{O}$. Es gibt dann in der Nähe von $\mathfrak{z}_0$ holomorphe Funktionen auf $B_r \cap \mathcal{D}$, die sich nicht in $\mathfrak{z}_0$ hinein holomorph fortsetzen lassen. Da $\mathcal{D}$ zu einem System einer Mittag–Leffler–Auflösung $\mathcal{M}^\cdot$ gehört, wobei die Garben $\mathcal{M}_\nu$ als Träger $\{z_{d-\nu+1} = r_{d-\nu+1}, \ldots, z_d = r_d\}$ haben, und sich holomorphe Funktionen auf $\{z_3 = r_3, \ldots, z_d = r_d\}$ auf $\mathcal{D} \cap B_r \cap G(\mathfrak{z}_0)$ in $\mathfrak{z}_0$ hinein holomorph forsetzen lassen, ist für hinreichend kleine Umgebungen $U(\mathfrak{z}_0)$ die Mittag–Leffler–Kohomologie $H^{d-1}_{\mathcal{M}^\cdot}(G \cap B_r, G)$ unendlich dimensional. Es sei nun $d = n - 2(q-1)$. Dann gilt $d - 1 = n - 2q + 1$, es ist $H^\mu(G \cap B_r, \mathcal{M}_{d-\mu-2}) = 0$ für $0 < \mu < d - 1$ wegen $\mu < n - \tilde{q} - \operatorname{hd}(\mathcal{M}_{d-\mu-2}) = n - 2q + 1 - d + \mu + 2$ d.h. $d < n - 2q + 3$. Nach §2, Satz 1 ist die Abbildung $H^{d-1}_{\mathcal{M}^\cdot}(G \cap B_r, \mathcal{O}) \to H^{d-1}(G \cap B_r, \mathcal{O})$ injektiv, der letztere Vektorraum also auch unendlich dimensional. Die in Satz 1 angegebenen Grenzen sind also scharf, wenn $e = 1$ ist.

Die Knicke in der Nähe von Morsesingularitäten sind natürlich sehr scharf. Bei einem sehr stumpfen Knick kann man dagegen den Satz 1 aus §1 anwenden und man erhält die Aussage von Satz 1, §3 für $\nu < n - q$.

Als Vorankündigung vgl. auch [CMS].

LITERATUR

[ADA] A. ANDREOTTI: Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudoconcaves. *Bull. Soc. math. France 91*, 1–38 (1963).

[AN] A. ANDREOTTI et F. NORGUET: Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa 20*, 197–241 (1966).

[B] W. BARTH: Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-projektiven. *Raum. Math. Ann. 187*, 150–162 (1970).

[BT] W. BARTH: Transplanting cohomology classes in complex projective space. *Amer. J. 92*, 951–967 (1970).

[CMS] H. GRAUERT: *Complex Morse Singularities.* Nancy, 1980.

[HM] G. HORROCKS and D. MUMFORD: A rank two vector bundle on $\mathbb{P}_4$ with 15 000 symmetries. *Topology 12*, 63–81 (1973).

[L] M. LARSEN: On the topology of complex projective manifolds. *Invent. Math. 19*, 251–260 (1973).

[TFE] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. *Bull. Soc. math. France 90*, 193–259 (1962).

[TSR] H. GRAUERT und R. REMMERT: *Theorie der Steinschen Räume.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

(Oblatum 23–II–1981)

Mathematisches Institut
der Universität
Bunsenstrasse 3–5
3400 Göttingen
BRD