PATRICK DEHORNOY

Opérateurs différentiels et courbes elliptiques

Compositio Mathematica, tome 43, n° 1 (1981), p. 71-99
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1981__43_1_71_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 43, Fasc. 1, 1981, pag. 71–99

OPERATEURS DIFFERENTIELS ET COURBES ELLIPTIQUES

Patrick Dehornoy

On étudie le lien entre certaines sous-algèbres commutatives de l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires et des faisceaux sur une courbe elliptique.

Poursuivant les travaux effectués par Burchnall et Chaundy en rang un, Krichever a établi l'équivalence de la construction de certains types de déformations de faisceau munies d'une connexion et de celle d'ensembles d'opérateurs différentiels commutant, tout en laissant ouverte la question de l'existence de telles constructions en rang supérieur à un. En partant de la détermination directe des couples commutatifs d'opérateurs (L, M) d'ordres 4 et 6, ou 6 et 9, liés par une relation du type $M^2 = p(L)$, avec p polynôme de degré 3, on montre ici que ces constructions sont possibles dans le cas des faisceaux de rang 2 ou 3 sur une courbe elliptique, et on en donne une description explicite, exhaustive de plus en dimension 2. On établit en particulier que l'écriture des correspondances se fait uniquement à l'aide de fonctions rationnelles en dimension 2, alors qu'elle nécessite l'usage des fonctions elliptiques en dimension 1.

On trouve l'exposé précis des résultats dans la première partie, les paragraphes suivants indiquent les étapes des démonstrations.

Certaines vérifications demandent des calculs importants, et j'avais espéré que des moyens mécaniques permettraient d'augmenter la taille de ceux-ci et d'éviter des hypothèses restrictives. Ce n'a été que partiellement le cas, la complexité augmentant de toute façon trop rapidement même pour un ordinateur. Je tiens néanmoins à remercier vivement M. Vallino qui a mis à ma disposition les ressources du centre de calcul de l'E.N.S.

0010-437X/8104071-29$00.20/0

1. Résultats

1.1. Opérateurs Différentiels

Dans toute la suite D désigne l'opérateur d/dt et $\mathcal{M}$ le corps des fonctions méromorphes à l'origine d'une variable complexe t. On note $\mathcal{D}$ l'algèbre $\mathcal{M}[D]$ des opérateurs différentiels linéaires en la variable t. Cette algèbre n'est pas commutative. Si deux opérateurs L, M commutent, il existe entre eux une relation algébrique $f(L, M) = 0$, où $f \in \mathbb{C}[t_1, t_2]$.

Le cas non trivial le plus simple est celui où la courbe d'équation $f = 0$ est elliptique. On fixe donc une courbe elliptique Γ, qu'on se donne comme l'ensemble des points $\mathfrak{m}$ du plan complexe tels que $(\mathfrak{m})_2^2 = p((\mathfrak{m})_1)$ complété d'un point à l'infini ∞, où $p(t) = t^3 + \alpha t + \beta$ est un polynôme du troisième degré sans zéro double, et où $(\mathfrak{m})_1, (\mathfrak{m})_2$ désignent les coordonnées du point générique $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$. On munit Γ de sa structure de groupe admettant ∞ comme élément neutre, et la loi est notée multiplicativement. On notera $\wp$ la fonction de Weierstrass associée à Γ.

Soient à étudier les couples (L, M) d'opérateurs tels que $[L, M] = 0$ et $M^2 = p(L)$: on sait que la seconde égalité entraîne la première, et détermine (au signe près) M en fonction de L; de plus L, nécessairement de degré pair, soit 2ρ, s'écrit de façon unique (au signe près) $L = A^2 - 2R$, où A est de degré ρ et R de degré au plus $\rho - 1$ donc, en termes d'opérateurs, le problème est:

$$\begin{cases} \text{trouver les couples } (A, R),\ A \text{ de degré } \rho,\ R \text{ de degré } < \rho \text{ tels que} \\ p(A^2 - 2R) \text{ soit un carré dans } \mathcal{D}. \end{cases}$$

Un tel couple sera dit solution, et qualifié d'elliptique si A l'est, c'est à dire si le coefficient dominant de A n'a ni zéro ni pôle à l'origine.

LEMME: *Les automorphismes de $\mathcal{D}$ sont de la forme $\phi_{h,k} : t \mapsto h$, $D \mapsto h'^{-1}D + k$, avec h, k dans $\mathcal{M}$, $h(0) = 0$ et $h'(0) \neq 0$.*

Ainsi Aut$\mathcal{D}$ préserve l'ellipticité, et on définit $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{2\rho,3\rho}$ comme l'espace des solutions elliptiques de degré ρ à automorphisme près, soit, en notant $\sim$ l'équivalence modulo Aut $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}(A, R)$ la classe de (A, R) pour $\sim$, comme l'ensemble des $\mathcal{C}(A, R)$ avec (A, R) solution elliptique et A de degré ρ. A l'identification de $\mathcal{C}(A, R)$ et de $\mathcal{C}(-A, R)$ près, $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{2\rho,3\rho}$ est l'espace des sous-algèbres commutatives elliptiques de $\mathcal{D}$ modulo changements de variable et de fonction associées à Γ et ρ.

1.2. Le fibre de Bloch

Le passage des sous-algèbres commutatives de $\mathcal{D}$ du type $\mathbb{C}[L, M]$ avec $M^2 = p(L)$ aux faisceaux sur Γ est fourni par la propriété suivante, démontrée dans [1]:

PROPOSITION: *Il y a équivalence entre*:

(i) $[L, M] = 0$ *et* $M^2 = p(L)$, L *de degré* 2ρ;

(ii) *pour tout point* $\mathfrak{m}$ *de* $\Gamma - \{\infty\}$ *il existe une fonction non nulle* f *telle que*:

$$\begin{cases} Lf = (\mathfrak{m})_1 f \\ Mf = (\mathfrak{m})_2 f; \end{cases}$$

(iii) *pour presque tout point* $\mathfrak{m}$ *de* Γ *il existe* ρ *fonctions* f *linéairement indépendantes telle que*:

$$\begin{cases} Lf = (\mathfrak{m})_1 f \\ Mf = (\mathfrak{m})_2 f. \end{cases}$$

Lorsque la condition (ii) est remplie on notera $F_{\mathfrak{m}}$ l'opérateur annulé exactement par les fonctions propres communes f et précisé par la condition que son coefficient dominant est 1.

Ainsi quand (L, M) vérifie la condition (i) les zéros de l'opérateur $F_{\mathfrak{m}}$ associé à chaque point de $\Gamma - \{\infty\}$ forment un fibré vectoriel de rang générique ρ sur $\Gamma - \{\infty\}$, dit fibré de Bloch. Notant δ_i, $i = 0, \ldots, \rho - 1$, l'application de ce fibré dans $\mathbb{C}$ définie par $\delta_i(f) = D^i f(0)$, on introduit un faisceau $\mathcal{F}_0$ sur Γ défini hors de ∞ comme le dual du fibré de Bloch et précisé en posant que les sections de $\mathcal{F}_0$ induites par les δ_i se prolongent en ∞.

De la même façon, on obtient $\mathcal{F}_{t_0}$ associé à la donnée de conditions initiales en t_0, et on notera $s_i^{t_0}$ les sections correspondantes. Si $\mathcal{U}$ est un voisinage de l'origine sur lequel les coefficients de L et M sont méromorphes, l'application:

$$\mathcal{F} : t \mapsto \mathcal{F}_t$$

est une déformation à un paramètre de $\mathcal{F}_0$ sur $\mathcal{U}$.

1.3. Théorie de Krichever

La filtration du degré sur $\mathscr{D}$ fournit sur $\mathscr{F}_0$ une structure parabolique, drapeau de sous-faisceaux

$$0 \subset \mathscr{F}_0^1 \subset \ldots \subset \mathscr{F}_0^\rho = \mathscr{F}_0,$$

et D induit $\mathscr{F}$ une connexion ∇ compatible avec cette structure et augmentant d'une unité le degré. Krichever montre qu'inversement, partant d'un faisceau cohérent F_0 sur Γ de rang ρ, sans H^0 ni H^1, si $\mathscr{F}_0$ admet une déformation munie d'une connexion ∇ appropriée, alors on peut lui associer un élément de $\mathfrak{E}^\Gamma_{2\rho,3\rho}$.

Décrivant les déformations de $\mathscr{F}_0$ comme courbes d'une variété Def $\mathscr{F}_0$, on constate que les déformations admettant la connexion voulue sont associées à des courbes intégrales d'un champ de directions $\mathfrak{L}_{\mathscr{F}_0}$ dans Def $\mathscr{F}_0$; par conséquent la description (exhaustive ou non) des éléments de $\mathfrak{E}^\Gamma_{2\rho,3\rho}$ fournit celle (exhaustive ou non) des courbes intégrales de $\mathfrak{L}_{\mathscr{F}_0}$ et des déformations de faisceaux de rang ρ sur Γ munies d'une connexion (cf. [8]).

1.4. Dimension un

Dans ce cas les solutions étaient connues. La présence de fonctions elliptiques traduit le passage de Γ à sa jacobienne dans la description de la déformation.

PROPOSITION 1: *Il exist une bijection*:

$$\mathscr{A}_1 : \Gamma \to \mathfrak{E}^\Gamma_{2,3}$$

définie par: $m_1 \mapsto \mathscr{C}(D,(m_1)_1)$, *où la fonction* $m_1 : \mathbb{C} \to \Gamma$ *est telle que* $m_1(0) = \mathfrak{m}_1$ *et* $m_1(t)$ *est obtenu en ajoutant* $-t$ *au paramètre de* $\mathfrak{m}_1$ *dans la représentation de* Γ *par* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'/2$. *Explicitement* $(m_1)_1 = \mathfrak{p}(t-\sigma_1)$ *où* σ_1 *est le paramètre de* $\mathfrak{m}_1$.

Le faisceau associé $\mathscr{A}_1(\mathfrak{m}_1)$ *est* $\mathscr{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$.

On verra en outre au paragraphe 3 que l'inversion: $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_1^{-1}$ et les translations: $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ sur Γ induisent via $\mathscr{A}_1$ des opérations sur $\mathfrak{E}^\Gamma_{2,3}$ ayant une description simple en termes d'opérateurs.

La version géométrique de ce qui précède est le résultat suivant, aisé à montrer directement:

Proposition 1′: *Soit* $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$ *un faisceau de rang* 1 *sur* Γ *tel que* $H^0(\mathcal{F}_0) = H^1(\mathcal{F}_0) = 0$, *et*:

$$\mathcal{F}: t \mapsto \mathcal{O}_\Gamma(-m_1(t))$$

une déformation à un paramètre de $\mathcal{F}_0$. *Alors il existe une connexion* ∇ *sur* $\mathcal{F}$, *unique à isomorphisme près, définie pour* s *section locale de* $\mathcal{F}$ *par*:

$$\nabla \mathrm{s}(\mathfrak{m}, t) = -\,\delta(m_1(t), \mathfrak{m}^{-1})\mathrm{s}(\mathfrak{m}, t),$$

où $\delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$ *est la pente de la droite* $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2$ (*ou de la tangente à* Γ *en* $\mathfrak{m}_1$ *si* $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ *est sur* Γ).

1.5. Dimension deux

On prouve ici qu'il existe des solutions, et on peut donner la description exhaustive de toutes celles-ci: il n'y figure que des fonctions polynomiales (outre une fonction arbitraire représentant la donnée supplémentaire de la déformation de la structure parabolique à l'infini), ce qui correspond au fait que les courbes intégrales de $\mathfrak{L}$ sont situées dans des sous-variétés rationelles de Def $\mathcal{F}_0$ d'équation $\wedge\, \mathcal{F}_t = \wedge\, \mathcal{F}_0$ (traduit ici par la constance du produit, selon la loi de Γ, de deux points caractéristiques).

Proposition 2: *Soit* $\mathcal{O}$ *l'ensemble des fonctions holomorphes à l'origine de la variable* t, *et* $\Gamma^{(2)}$ *l'ensemble des paires de points de* Γ.

Alors il existe une bijection:

$$\mathcal{A}_2: \Gamma^{(2)} \times \mathcal{O} \to \mathfrak{E}^{\Gamma}_{4,6}$$

définie par: $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathrm{r}) \mapsto \mathscr{C}(A, R)$, *où*

$$\begin{cases} A = qD^2 + q'D - uq^{-1} \\ R = wqD + (wq)'/2 + v, \end{cases}$$

avec, en désignant par ν *l'ordre de multiplicité de l'origine en tant que zéro de* r:

(i) *si* $\nu = 0$, $q = r$, *et*:

(i$_1$) *si de plus* $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ *et* $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ *sont différents de* ∞:

$$u = ((m_1)_1 - (m_2)_1)^2/4, \ v = u''/6, \ w = v'',$$

où les fonctions $m_1, m_2: \mathbb{C} \to \Gamma$ *sont définies par*: $m_i(0) = \mathfrak{m}_i$, *et la droite* $m_1(t)\ m_2(t)$ *est obtenue en faisant tourner la droite* $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2$ *autout du point où elle recoupe* Γ *de façon à diminuer de* t *sa pente*; *explicitement on a*:

$$u = t^4/4 - \sigma_1 t^3 + 3\sigma_2 t^2 - \sigma_3 t + \sigma_4$$

avec:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2), \text{ pente de la droite } \mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2 \\ \sigma_2 = ((\mathfrak{m}_1)_1 + (\mathfrak{m}_2)_1)/2 \\ \sigma_3 = (\mathfrak{m}_1)_2 + (\mathfrak{m}_2)_2 \\ \sigma_4 = ((\mathfrak{m}_1)_1 - (\mathfrak{m}_2)_1)^2/4; \end{cases}$$

(i_2) *si de plus* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \neq \infty$ *et* $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 = \infty$:

$$u = (m_1)_2^2 = (m_2)_2^2,\ v = u''/6,\ w = v'',$$

où les fonctions $m_1, m_2: \mathbb{C} \to \Gamma$ *sont définies par*: $m_i(0) = \mathfrak{m}_i$, *et la droite* $m_1(t)\ m_2(t)$ *est obtenue en translatant la droite* $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2$ *de façon à accroître de* t *son abscisse*; *explicitement on a*:

$$u = p(t + (\mathfrak{m}_1)_1);$$

(i_3) *si de plus* $\mathfrak{m}_1 = \infty$:

$$u = t^4 u^*(t^{-1}) + 2t^{-2}q^2 - t^{-1}qq',\ v = v^*(t^{-1}),\ w = -t^{-2}w^*,$$

où u^*, v^*, w^* *est le triplet calculé suivant* (i_1) *ou* (i_2) *à partir de deux points* $\mathfrak{m}_1^*, \mathfrak{m}_2^*$ *quelconques tels que le droite* $\mathfrak{m}_1^*\mathfrak{m}_2^*$ *passe par* $\mathfrak{m}_2^{-1}$;

(ii) *si* $\nu \geq 1$, $q = t^{-\nu} r$, *et*:

$$\begin{cases} u = t^{-2\nu}u^*(t^{\nu+1})/(\nu+1)^2 + \nu(\nu-2)t^{-2}q^2/4 + \nu t^{-1}qq'/2 \\ v = v^*(t^{\nu+1}) \\ w = (\nu+1)t^{\nu}w^*(t^{\nu+1}) \end{cases}$$

oú u^*, v^*, w^* *est le triplet calculé suivant* (i) *à partir de* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$.

Soit $\mathscr{E}$ *une extension non triviale de* $\mathcal{O}_\Gamma$ *par lui-même*: *le faisceau associé à* $\mathscr{A}_2(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, q)$ *est* $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2)$ *si* $\mathfrak{m}_1$ *et* $\mathfrak{m}_2$ *sont distincts, et* $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \otimes \mathscr{E}$ *sinon.*

A ceci répond pour les faisceaux:

PROPOSITION 2′: *Les faisceaux de rang 2 sur Γ ayant une déformation munie d'une structure parabolique et d'une connexion augmentant le degré d'une unité sont à isomorphisme près les suivants*:

(i) *faisceau*: $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2)$, *avec* $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ *distincts, ou bien* $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \otimes \mathcal{E}$, *avec* $\mathcal{E}$ *extension non triviale de* $\mathcal{O}_\Gamma$ *par lui-même.*

(ii) *déformation*: *laisser* $\wedge^2\mathcal{F}_0$ *fixe, soit*:

$$\mathcal{F} : t \mapsto \mathcal{O}_\Gamma(-m_1(t)) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-m_2(t)),$$

où la droite $m_1(t)m_2(t)$ *est obtenue en faisant tourner la droite* $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ *autour du point où elle recoupe* Γ;

(iii) *structure parabolique*: *soit* Γ_2 *la rénunion des images de* m_1 *et* m_2 *(avec* $\mathfrak{m}_1$ *compté deux fois si* $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$*), et soit* n *la fonction définie par*:

$$n(t) = \begin{cases} ((m_1(t))_1 - (m_2(t))_1)/2 & \textit{si } m_1(t)m_2(t) \neq \infty \\ ((m_1(t))_2 - (m_2(t))_2)/2 & \textit{sinon}; \end{cases}$$

soit alors q *holomorphe quelconque*: *on choisit* $\mathbf{s}_0$ *et* $\mathbf{s}_1$ *sections continues de* $\mathcal{F}(\Gamma_2)$ *telles que dans le repère* $(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)$ *les pentes des axes de* $\mathcal{F}(t)$ *provenant de* $\mathcal{O}_\Gamma(-m_1(t))$ *et de* $\mathcal{O}_\Gamma(-m_2(t))$ *soient* n/q *et* $-n/q$;

(iv) *connexion*: *on pose*:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{s}_0(\mathfrak{m}, t) = \mathbf{s}_1(\mathfrak{m}, t) \\ \nabla \mathbf{s}_1(\mathfrak{m}, t) = ((t - \xi(\mathfrak{m}))^{-1} - q'q^{-1})\mathbf{s}_1(\mathfrak{m}, t) \end{cases}$$
$$+ (\eta(\mathfrak{m})(t - \xi(\mathfrak{m}))^{-1})q^{-1} + uq^{-1} + (t - \xi(\mathfrak{m}))u^{\mathrm{IV}}q^{-1}/12)\mathbf{s}_0(\mathfrak{m}, t)$$

$$\textit{où } u = n^2 \textit{ et } \begin{cases} \xi(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m})_1 - (\mathfrak{m}_1)_1,\ \eta(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m})_2 \ \textit{si } \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 = \infty \\ \xi(\mathfrak{m}) = \delta(\mathfrak{m}^{-1}, \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) + \delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2), \\ \qquad 2\eta(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2)_1 - (\mathfrak{m})_1 \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

1.6. Dimension trois

Le cube $\wedge^3\mathcal{F}_t$ devant être constant, on a la conservation du produit de trois points caractéristiques. Ceci ne suffit plus à déterminer la déformation: dans le cas présent – qui n'est pas le seul car la taille des calculs oblige à prendre des hypothèses supplémentaires – celle-ci est précisée par le fait que la parabole passant par les trois points et par ∞ n'est pas déformée. A nouveau il n'y a que des fonctions rationnelles dans la description, et une fonction arbitraire et non pas deux qui serait le maximum possible: ceci illustre le fait que les hypothèses prises imposent une liaison à la déformation de la structure parabolique.

Proposition 3: *Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des fonctions holomorphes à l'origine, et $\Gamma^{(3-)}$ l'ensemble des triplets de points de Γ dont deux quelconques sont pas inverses si le troisième n'est pas ∞; soit $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{6,9-}$ l'ensemble des éléments $C(A, R)$ de $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{6,9}$ tels que R est de degré au plus un.*

Alors is existe une bijection:

$$\mathcal{A}_3 : \Gamma^{(3-)} \times \mathcal{O} \to \mathfrak{E}^{\Gamma}_{6,9-}$$

définie par: $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, r) \mapsto \mathscr{C}(A, R)$ *où*

$$\begin{cases} A = qD^3 + 3q'/2D^2 + (q''/2 + u)D + u'/2 + (v - q'w'/4)r^{-1} \\ R = rD + r'/2 + w, \end{cases}$$

avec, en désignant par ν l'ordre de multiplicité de l'origine comme zéro de r:

(i) *si $\nu = 0$, et si $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ sont distincts de ∞:*

$$\begin{cases} q = r^2 \\ u = n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_1 \\ v = -\, n_1n_2n_3 \\ w = ((m_1)_1 + (m_2)_1 + (m_3)_1)/3 \end{cases}$$

où on a posé: $n_i = (m_i)_1 - w$, et où les fonctions m_1, m_2, m_3: $\mathbb{C} \to \Gamma$ sont définies par: $m_i(0) = \mathfrak{m}_i$, et:

(i_1) *si $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 \neq \infty$, la parabole d'axe vertical passant par $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ est obtenue en faisant glisser la parabole d'axe vertical passant par $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ sur le point où elle recoupe Γ de façon à diminuer de t/θ la somme des abscisses des trois points, où θ est le paramètre de la parabole;*

(i_2) *si $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 = \infty$, les points $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ sont alignés sur une droite obtenue en translatant la droite $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3$ de façon à diminuer de t son ordonnée.*

Explicitement on a: $$\begin{cases} u = -\sigma_0^2 t^2/12 + 2\sigma_4 t + \sigma_2 \\ v = -\sigma_0^3 t^3/108 + (\sigma_0\sigma_4/3 - 1)t^2 + (2\sigma_5 - \sigma_0\sigma_2/3)t - \sigma_3 \\ w = -\sigma_0 t/3 + \sigma_1, \end{cases}$$

avec, en posant $\nu_i = (\mathfrak{m}_i)_1 - \sigma_1$:

$$\begin{cases} \sigma_0 = \theta^{-1} (\textit{resp. } 0) \textit{ si } \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 \neq \infty \ (\textit{resp.} = \infty), \\ \sigma_1 = \sum (\mathfrak{m}_i)_1/3, \ \sigma_2 = \sum \nu_j \nu_k, \ \sigma_3 = \nu_1\nu_2\nu_3, \\ \sigma_4 = \sum \delta(\mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_k)/3, \ 3\sigma_5 = \sum (\mathfrak{m}_i)_2 + \sigma_0\sigma_2; \end{cases}$$

(ii) *si* $\nu = 0$ *et si* $\mathfrak{m}_1 = \infty$:

$$\begin{cases} q = -t^2 r^2 \\ u = -t^2 u^*(t^{-1}) - 3t^{-2} q + t^{-1} q' \\ v = -t^2 v^*(t^{-1}) + 3t^{-5} q w^{*\prime}(t^{-1})/2 \\ w = w^*(t^{-1}), \end{cases}$$

où u^*, v^*, w^* *est le triplet calculé suivant* (i) *à partir de* $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$, $\mathfrak{m}_3^*$ *tels que*:

(ii$_1$) *si* $\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 \neq \infty$, $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$, $\mathfrak{m}_3^*$ *sont trois points de* Γ *tels que la parabole d'axe vertical passant par* $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$, $\mathfrak{m}_3^*$ *recoupe* Γ *en* $\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3$ *et ait pour paramètre la pente* $\delta(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3)$;

(ii$_2$) *si* $\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 = \infty$, $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$, $\mathfrak{m}_3^*$ *sont trois points alignés sur* Γ *tels que la pente de la droite* $\mathfrak{m}_1^*\mathfrak{m}_2^*\mathfrak{m}_3^*$ *soit égale à l'abscisse* $(\mathfrak{m}_2)_1$;

(iii) *si* ν *est supérieur ou égal à* 1:

$$\begin{cases} q = t^{-2\nu} r^2/(2\nu + 1) \\ u = t^{-2\nu} u^*(t^{2\nu+1})/(2\nu + 1) + \nu(-\nu + 2)t^{-2} q - \nu t^{-1} q' \\ v = t^{-2\nu} v^*(t^{2\nu+1})/(2\nu + 1) - 3\nu t^{4\nu-1} q w^{*\prime}(t^{2\nu+1})/2 \\ w = w^*(t^{2\nu+1}) \end{cases}$$

où u^*, v^*, w^* *est le triplet calculé* (i) *ou* (ii) *à partir de* $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$.

Le faisceau associé à $\mathcal{A}_3(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, r)$ *est* $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_3)$ *si* $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ *sont distincts*, $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \otimes \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_3)$ *si* $\mathfrak{m}_1$ *et* $\mathfrak{m}_2$ *sont confondus et distincts de* $\mathfrak{m}_3$, *en notant* $\mathcal{E}$ *une extension non triviale de* $\mathcal{O}_\Gamma$ *par lui-même, et*

$\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)\otimes\mathcal{E}_2$ *si* $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ *sont confondus en prenant pour* $\mathcal{E}_2$ *une extension triviale de* $\mathcal{E}$ *par* $\mathcal{O}_\Gamma$.

A ceci correspond:

PROPOSITION 3′: *Soit* $\mathcal{F}_0$ *un faisceau de rang* 3 *sur* Γ *d'un des types ci-dessus. Alors ce faisceau admet une déformation munie d'une structure parabolique et d'une connexion compatible avec celle-ci et augmentant le degré d'une unité*:

(i) *déformation*: *laisser fixes* $\wedge^3\mathcal{F}_0$ *et le paramètre* θ *de la parabole d'axe vertical passant par les trois points caractéristiques.*

(ii) *structure parabolique*: *soit* Γ_3 *la rénunion des images des applications* m_i, *et* r *un complexe quelconque (conjecturalement une fonction quelconque)*: *on choisit* s_0, s_1, s_2 *sections continues de* $\mathcal{F}(\Gamma_3)$ *telles que les pentes des projections sur* $(\mathrm{s}_0,\mathrm{s}_1)$ *et sur* $(\mathrm{s}_0,\mathrm{s}_2)$ *des axes provenant des* $\mathcal{O}_\Gamma(-m_i(t))$ *soient respectivement* n_i/r *et* $(n_i/r)^2-\theta^{-1}r^{-1}/6$, *en posant*:

$$a(\mathfrak{m})=(\mathfrak{m})_1-\sum_i(m_i)_1/3 \quad et \quad n_i=a(m_i);$$

(iii) *connexion*: *on pose*:

$$\nabla\mathrm{s}_0(\mathfrak{m},t)=\mathrm{s}_1(\mathfrak{m},t)$$

$$\nabla\mathrm{s}_1(\mathfrak{m},t)=\mathrm{s}_2(\mathfrak{m},t)$$

$$\begin{aligned}\nabla\mathrm{s}_2(\mathfrak{m},t)=\,&(t-\xi(\mathfrak{m}))^{-1}\mathrm{s}_2(\mathfrak{m},t)\\&-(ur^{-1}+\theta^{-1}/2+a(\mathfrak{m})(t-\xi(\mathfrak{m}))^{-1})r^{-1}\mathrm{s}_1(\mathfrak{m},t)+((a^2(\mathfrak{m})\\&+u+\theta^{-1}r/6)(t-\xi(\mathfrak{m}))^{-1}-\theta^{-1}a(\mathfrak{m})/2-u'-vr^{-1})r^{-2}\mathrm{s}_0(\mathfrak{m},t)\end{aligned}$$

où $u=n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1$, $v=-n_1n_2n_3$, *et où* $\xi(\mathfrak{m})/\theta=\Sigma^i(\mathfrak{m}_i)_1-(\mathfrak{m}^+)_1-(\mathfrak{m}^{++})_1$ *en notant* $\mathfrak{m}^+$, $\mathfrak{m}^{++}$ *les points où la parabole d'axe vertical et de paramètre* θ *passant par* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3$ *recoupe* Γ.

On indiquera au §5.3. comment obtenir des solutions d'un autre type telles que le mouvement de trois points associés soit caractérisé par l'invariance de leur produit et par le fait qu'une hyperbole d'asymptote verticale passant par ceux-ci est translatée sans déformation (et non plus une parabole).

1.7. Dimensions supérieures

On ne peut espérer des résultats complets. Néanmoins on peut montrer:

PROPOSITION 4: *Pour tout* $\rho \geqslant 2$ *il existe dans* $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{2\rho,3\rho}$ *des éléments à coefficients polynomiaux.*

d'où:

PROPOSITION 4′: *Pour tout* $\rho \geqslant 1$ *il existe un faisceau de rang* ρ *sur* Γ *admettant une déformation munie d'une structure parabolique et d'une connexion compatible avec celle-ci et augmentant le degré d'une unité, le champ de directions* $\mathfrak{L}_{\mathscr{F}_0}$ *associé possède donc des courbes intégrales.*

2. Methodes de calcul

2.1. Solutions

L'obtention des solutions est conditionnée dès que ρ est supérieur à 1 par celle d'un système différentiel équivalent au système initial:

$$M^2 = p(L)$$

et d'un ordre moins élevé en les fonctions inconnues. On part du résultat indiqué au §1.2.:

PROPOSITION 1: *Le couple* (A, R), A, R *de degrés respectifs* ρ *et* $<\rho$, *est une solution si il existe* A_1, R_0 *de degrés respectifs* $\leq 2\rho - 1$ *et* $\leq 2\rho - 2$ *tels que*:

$$\begin{cases} AA_1 + A_1A + 2RA^2 - 4R^2 + R_0 = \alpha \\ A_1^2 - R_0A^2 + 2R_0R = \beta. \end{cases}$$

(on convient, comme dans toute la suite, que "operateur de degré <0" désigne l'opérateur nul).

PREUVE: Supposons que $L = A^2 - 2R$ est tel que $p(L)$ est le carré de M dans $\mathscr{D}$. On coupe Γ par une droite verticale en ∞, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}^{-1}$: soit $\lambda = (\mathfrak{m})_1$. D'après 1.2. pour presque toute valeur de λ il existe 2ρ fonctions indépendantes $f_0, \ldots, f_{2\rho-1}$ annulant $F_{\mathfrak{m}}$ pour les ρ premières et $F_{\mathfrak{m}^{-1}}$ pour les suivantes. Ces 2ρ fonctions annulent $L-\lambda$, et on a $Mf_i = \epsilon_i(\mathfrak{m})_2 f_i$, avec $\epsilon_i = +1$ si $i < \rho$ et $\epsilon_i = -1$ sinon. Soit $M = A_0L + A_1$ la division euclidienne de M par L; on a donc:

$$M - \epsilon(\mathfrak{m})_2 = A_0(L-\lambda) + A_1 + \lambda A_0 - \epsilon(\mathfrak{m})_2.$$

Puisque $A_1 + \lambda A_0 - (\mathfrak{m})_2$ et $A_1 + \lambda A_0 + (\mathfrak{m})_2$ commutent, on a que pour tout i la fonction f_i, annulant $A_1 + \lambda A_0 - \epsilon_i(\mathfrak{m})_2$, annulle le produit $(A_1 + \lambda A_0 - (\mathfrak{m})_2)(A_1 + \lambda A_0 + (\mathfrak{m})_2)$. Il existe donc pour presque tout λ un opérateur $Q(\lambda)$ de degré au plus $2\rho - 2$ tel que:

$$(1) \qquad (A_1 + \lambda A_0)^2 - (\mathfrak{m})_2^2 = Q(\lambda)(L-\lambda)$$

Puisque $(\mathfrak{m})_2^2 = p(\lambda)$, et que (1) est vérifiée pour une infinité de valeurs de λ, $Q(\lambda)$ est polynomial de degré ≤ 2 en λ, soit $Q(\lambda) = \lambda^2 R_2 - 2\lambda R_1 + R_0$, où R_0, R_1, R_2 sont des opérateurs de degré $\leq 2\rho - 2$ indépendants de λ, puis en développant (1) suivant les puissances de λ, on a:

$$\begin{cases} R_2 = 1 \\ R_2L + 2R_1 = A_0^2 \\ 2R_1L + R_0 = -A_0A_1 - A_1A_0 + \alpha \\ R_0L = A_1^2 - \beta. \end{cases}$$

La troisième équation montre que R_1 est de degré $\leq \rho - 1$, d'où par unicité $A_0 = A$ et $R_1 = R$, et on a le résultat annoncé.

Réciproquement si A_1 et R_0 existent tels que le système soit vérifié, on a pour tout point $\mathfrak{m}$ de $\Gamma - \{\infty\}$, en posant $L = A^2 - 2R$ et $\lambda = (\mathfrak{m})_1$:

$$(A_1 + \lambda A + (\mathfrak{m})_2)(A_1 + \lambda A - (\mathfrak{m})_2) = (\lambda^2 - 2\lambda R + R_0)(L-\lambda)$$

Soit ρ' le degré de A_1; on a $\rho' < 2\rho$, et l'espace des zéros de $(\lambda^2 - 2\lambda R + R_0)(L-\lambda)$ est de dimension $2\rho'$. Donc le sous-espace de celui-ci formé par les zéros de $L-\lambda$, de dimension 2ρ, recontre certainement en un point non trivial le sous-espace formé par les zéros de $A_1 + \lambda A - (\mathfrak{m})_2$, de dimension ρ'. Donc $L-\lambda$ et $M - (\mathfrak{m})_2 = AL + A_1 - (\mathfrak{m})_2$ ont des zéros communs, et par le cas (ii) du résultat de 1.2 on a $M^2 = p(L)$, et (A, R) est une solution.

Pour les calculs effectifs, on utilise une forme modifiée obtenue en résolvant les termes de plus haut degré:

PROPOSITION 2: *Le couple* (A, R), A, R *de degrés respectifs* ρ *et* $<\rho$, *est une solution ssi il existe* S, T *de degrés respectifs* $\leq 2\rho - 3$ *et* $\leq 2\rho - 4$ *tels que, en posant* $U = [A, R]/2 + S$, *on ait*:

$$(I)\begin{cases}[A,[A,R]]/2 + AS + SA - T = p'(R)\\ [R, U]A + TA^2 + U^2 - RT - 2TR = p(R).\end{cases}$$

2.2. Determination du faisceau

Avec les notations du paragraphe précédent, $F_{\mathfrak{m}}$ est un pgcd de $L - \lambda$ et de $A_1 + \lambda A - (\mathfrak{m})_2$, qu'on calcule par l'algorithme d'Euclide. Partant donc de la solution (A, R), on écrit pour $\mathfrak{m}$ sur $\Gamma - \{\infty\}$ l'opérateur associé sous la forme:

$$F_{\mathfrak{m}} = D^{\rho} + \sum_{0}^{\rho-1} a_j D^j, \text{ avec } a_j = \sum_{-\infty \ll k} \alpha_{jk} t^k.$$

Partout où les fonctions a_j sont holomorphes et où les coefficients α_{jk} sont fonctions continues du point $\mathfrak{m}$, il existe ρ zéros f_i de $F_{\mathfrak{m}}$ définis par les conditions initiales $D^j f_i(0) = \delta_i^j$, et les f_i induisent les ρ sections s_i qui sont alors des isomorphismes locaux de $\mathcal{O}_\Gamma$ sur des sous-faisceaux de rang 1 de $\mathcal{F}_0$. La question est celle du prolongement de ces isomorphismes locaux aux points isolés de Γ où un coefficient α_{jk} au moins est discontinu, ce qui se présente ici aux points où une fonction a_j a un pôle à l'origine.

Si $\mathfrak{m}_0$ est un tel point, et que $F_{\mathfrak{m}_0}$ a une famille de ρ zéros holomorphes g_i, supposons que $\tau : \Gamma \to \mathbb{C}$ est telle que $\tau(\mathfrak{m}_0) = 0$ et que, si $F^*_{\mathfrak{m}}$ est l'image de $F_{\mathfrak{m}}$ par la translation de vecteur $\tau(\mathfrak{m})$, alors

$$F^*_{\mathfrak{m}} = D^{\rho} + \Sigma b_j D^j, \text{ avec } b_j = \Sigma \beta_{jk} t^k,$$

et les coefficients β_{jk} sont continus en $\mathfrak{m}_0$. Des fonctions g_i on déduit au voisinage de $\mathfrak{m}_0$ des zéros $g_i^{*\mathfrak{m}}$ de $F^*_{\mathfrak{m}}$, et de là une famille de ρ zéros $g_i^{\mathfrak{m}}$ de $F_{\mathfrak{m}}$ en posant: $g_i^{\mathfrak{m}}(t) = g_i^{*\mathfrak{m}}(t - \tau(\mathfrak{m}))$, dont les coefficients des développements en série entière sont continus en $\mathfrak{m}_0$. Cette famille induit donc des isomorphes locaux de $\mathcal{O}_\Gamma$ dans des sous-faisceaux de $\mathcal{F}_0$, et il reste à étudier le recollement de ces sections avec les s_i hors de $\mathfrak{m}_0$, soit à calculer les parties polaires des développements en fonction d'une coordonnée locale en $\mathfrak{m}_0$ des coefficients de la matrice de passage des $g_i^{\mathfrak{m}}$ aux f_j, inverse de la matrice de passage des f_j aux $g_i^{\mathfrak{m}}$ de terme générique $D^j g_i(0)$.

3. Dimension un

3.1. Solutions

Si A de degré 1 est elliptique, $A \sim D$, donc il suffit de chercher les solutions du système (I) du type (D, r): celui-ci se réduit à l'équation:

$$r'^2/4 = p(r),$$

dont les solutions sont: $r = \mathfrak{p}(t - \sigma_1)$, avec $\sigma_1 \in \mathbb{C}$. Ensuite on a:

$$(D, \mathfrak{p}(t - \sigma_1)) \sim (D, \mathfrak{p}(t - \sigma_1')) \text{ ssi } \sigma_1' - \sigma_1 \in \Lambda,$$

Λ résau des périodes de $\mathfrak{p}$, d'où en introduisant le point $\mathfrak{m}_1$ de coordonnées $\mathfrak{p}\sigma_1$, $\mathfrak{p}'\sigma_1/2$ la bijection $\mathscr{A}_1$ de Γ sur $\mathfrak{S}^{\Gamma}_{2,3}$.

Remarque: Autres solutions méomorphes.

Si (A, R) est une solution, il existe un ouvert $\mathscr{U}$ tel que l'origine soit adhérente à $\mathscr{U}$, et sur $\mathscr{U}$ les coefficients de A et R n'ont pas de zéro. Il existe donc h, k mémorphes sur $\mathscr{U}$ tels que $(A, R) = \phi_{h,k}(D, \mathfrak{p}(t - \sigma_1))$, soit $A = h'^{-1}D + k$ et $R = \mathfrak{p}(h(t) - \sigma_1)$. Si h' avait un pôle en zéro. $\mathfrak{p}(h(t) - \sigma_1)$ ne pourrait se prolonger en une fonction méomorphe à l'origine. Les solutions méromorphes sont donc les solutions elliptiques et celles qui s'en déduisent par un changement de variable $t \mapsto t^\nu$, ν entier.

3.2. Détermination de $\mathscr{F}_0$

Partant de $(D, \mathfrak{p}(t - \sigma_1))$ et de $\mathfrak{m} \in \Gamma - \{\infty\}$, le calcul du pgcd montre que:

$$F_{\mathfrak{m}} = D - \frac{\mathfrak{p}'(t - \sigma_1)/2 - (\mathfrak{m})_2}{\mathfrak{p}(t - \sigma_1) - (\mathfrak{m})_1}$$

soit $F_{\mathfrak{m}} = D + a_0$, avec en introduisant le point $\mathfrak{m}_1$:

$$a_0 = \begin{cases} \delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}^{-1}) + \sum_1^\infty \alpha_k(\mathfrak{m}) t^k \text{ si } \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_1 \\ -t^{-1} + \sum_0^\infty \alpha_k(\mathfrak{m}_1) t^k \text{ si } \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \end{cases}$$

Si $\mathfrak{m}$ est distinct de $\mathfrak{m}_1$, les coefficients $\alpha_k(\mathfrak{m})$ sont continus, et δ_0 induit un isomorphisme local de $\mathscr{O}_\Gamma$ dans $\mathscr{F}_0$.

On cherche les zéros de $F_{\mathfrak{m}_1}$ sous la forme $\Sigma_0^\infty \gamma_k t^{k+\nu}$ avec $\nu \in \mathbb{R}$. Il vient $\nu = 1$, et comme $\alpha_0(\mathfrak{m}_1) = 0$, on obtient une solution holomorphe $g = t + \Sigma_2^\infty \gamma_k t^k$. Ensuite si τ: $\Gamma \to \mathbb{C}$ est définie comme l'application qui à $\mathfrak{m}$ associe la différence du paramètre de $\mathfrak{m}$ et de celui de $\mathfrak{m}_1$ (dans la représentation par $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'/2$) la translation: $t \to t + \tau$, notée $\Phi_{t+\tau}$, transforme la solution de départ en un élément de $\mathscr{A}_1(\mathfrak{m})$. On en déduit au voisinage de $\mathfrak{m}_1$ un zéro holomorphe de $F_{\mathfrak{m}}$:

$$g^{\mathfrak{m}} = t - \tau(\mathfrak{m}) + \sum_2^\infty \gamma_k(\mathfrak{m})(t - \tau(\mathfrak{m}))^k$$

et les coefficients $\gamma_k(\mathfrak{m})$ sont continus en $\mathfrak{m}_1$. On a alors $g^{\mathfrak{m}}(0) = -\tau(\mathfrak{m}) + 0(\tau^2)$, d'où $f_0^{\mathfrak{m}} = -\tau^{-1} g^{\mathfrak{m}} + 0(1)$, et, comme τ est une coordonnée locale de Γ en $\mathfrak{m}_1$, ceci montre que $\mathscr{f}_0$ induit un homorphisme (global) de $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$ dans $\mathscr{F}_0$, qui est un isomorphisme parce que $\mathscr{F}_0$ est localement libre de rang 1 et de degré -1.

3.3. Operations sur $\mathfrak{S}_{2,3}^\Gamma$

(i) *Translations*: Les translations $\phi_{t+\tau}$ ne sont pas des endomorphismes de $\mathscr{D}$, mais pour toute solution (A, R) il existe un voisinage de l'origine sur lequel les coefficients de A et de R sont méromorphes: par conséquent pour τ assez petit la translation $\Phi_{t+\tau}$ transforme (A, R) en une nouvelle solution.

Dans le cas de $\mathfrak{S}_{2,3}^\Gamma$, $\Phi_{t+\tau}$ transforme l'élément canonique de $\mathscr{A}_1(\mathfrak{m}_1)$ en l'élément canonique de $\mathscr{A}_1(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m})$ où $\mathfrak{m}$ est le point de paramètre τ. Ceci permet de décrire la déformation de $\mathscr{F}_0$.

(ii) *Adjonction*: L'application $\Phi^\dagger$: $t \mapsto t$, $D \mapsto -D$ s'étend en un antiautomorphisme de $\mathscr{D}$, compatible avec Aut $\mathscr{D}$, et induit donc une involution de $\mathfrak{S}_{2\rho,3\rho}^\Gamma$. Le calcul montre que cette adjonction correspond via $\mathscr{A}_1$ à l'inversion sur Γ, c'est à dire que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "-1"] \arrow[d, "\mathscr{A}_1"'] & \Gamma \arrow[d, "\mathscr{A}_1"] \\
\mathfrak{S}_{2,3}^\Gamma \arrow[r, "\dagger"] & \mathfrak{S}_{2,3}^\Gamma
\end{tikzcd}$$

iii) *Permutation des facteurs*: Soit (A, R) une solution quelconque, $L = A^2 - 2R$, $M = (p(L))^{1/2}$. Pour tout point $\mathfrak{m}$ de $\Gamma - \{\infty\}$, $F_{\mathfrak{m}}$ est annulé par les zéros communs à $L - (\mathfrak{m})_1$ et à $M - (\mathfrak{m})_2$, donc il existe

$F_{\mathfrak{m}}^{\#}$ et $F_{\mathfrak{m}}^{\times}$ tels que

$$\begin{cases} L-(\mathfrak{m})_1 = F_m^{\#} F_m \\ M-(\mathfrak{m})_2 = F_m^{\times} F_m \end{cases}$$

Posons alors:

$$\begin{cases} L^{\#} = (\mathfrak{m})_1 + F_{\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m}}^{\#} \\ M^{\#} = (\mathfrak{m})_2 + F_{\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m}}^{\times}. \end{cases}$$

LEMME: *On a* $[L^{\#}, M^{\#}] = 0$ *et* $M^{\#2} = p(L^{\#})$.

PREUVE: On a $[L^{\#}-(\mathfrak{m})_1, M^{\#}-(\mathfrak{m})_2] = 0$, car $[L^{\#}-(\mathfrak{m})_1, M^{\#}-(\mathfrak{m})_2]F_{\mathfrak{m}} = F_{\mathfrak{m}}[L-(\mathfrak{m})_1, M-(\mathfrak{m})_2]$. Si $M^2 - p(L) = \Sigma\, \gamma_{ij}(L-(\mathfrak{m})_1)^i (M-(\mathfrak{m})_2)^j$, on a $M^{\#2} - p(L^{\#}) = \Sigma\, \gamma_{ij}(L^{\#}-(\mathfrak{m})_1)^i(M^{\#}-(\mathfrak{m})_2)^j$ car $[L^{\#}, M^{\#}] = 0$, d'où $(M^{\#2} - p(L^{\#}))F_{\mathfrak{m}} = F_{\mathfrak{m}}(M^2 - p(L)) = 0$.

On en déduit une application $(A, R) \mapsto (A^{\#}, R^{\#})$ de l'ensemble des solutions dans lui-même, et en vérifiant la compatibilité, une opération $\mathscr{P}_{\mathfrak{m}}$ de $\Gamma - \{\infty\}$ sur $\mathfrak{S}_{2p,3p}^{\Gamma}$; $\mathscr{P}_{\mathfrak{m}}$ ne dépend pas du choix d'un pgcd $F_{\mathfrak{m}}$.

Dans le cas de $\mathfrak{S}_{2,3}^{\Gamma}$, partant de la valeur calculée de $F_{\mathfrak{m}}$ et de

$$F_{\mathfrak{m}}^{\#} = D + \frac{\mathfrak{p}'(t-\sigma_1)/2 - (\mathfrak{m})_2}{\mathfrak{p}(t-\sigma_1) - (\mathfrak{m})_1},$$

on obtient $L^{\#} = D^2 - 2r^{\#}$, avec

$$r^{\#} + (\mathfrak{m})_1 + \mathfrak{p}(t-\sigma_1) = \left[\frac{\mathfrak{p}'(t-\sigma_1)/2 - (\mathfrak{m})_2}{\mathfrak{p}(t-\sigma_1) - (\mathfrak{m})_1}\right]^2,$$

ce qui montre que $r^{\#} = \mathfrak{p}(t - \sigma_1^{\#})$, où $\sigma_1^{\#}$ est le paramètre de $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}_1$.

Ainsi $\mathscr{P}_{\mathfrak{m}}$ correspond via $\mathscr{A}_1$ à la translation de vecteur $\mathfrak{m}^{-1}$ sur Γ, c'est à dire que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\times\mathfrak{m}^{-1}"] \arrow[d, "\mathscr{A}_1"'] & \Gamma \arrow[d, "\mathscr{A}_1"] \\ \mathfrak{S}_{2,3}^{\Gamma} \arrow[r, "\mathscr{P}_{\mathfrak{m}}"] & \mathfrak{S}_{2,3}^{\Gamma} \end{tikzcd}$$

4. Dimension deux

4.1. Solutions

Les étapes du calcul sont les suivantes:

(i) Tout couple (A, R), A de degré 2 et R de degré ≤ 1 est équivalent à un couple de la forme

$$\begin{cases} A = qD^2 + q'D - uq^{-1} \\ R = wqD + (wq)'/2 + v, \end{cases}$$

où u, v, w, q sont dans $\mathcal{M}$.

(ii) Parmi ceux-ci, les couples pour lesquels w n'a ni zéro ni pôle à l'origine ou bien $w = 0$ et v' n'a ni zéro ni pôle à l'origine, sont équivalents à des couples de même forme pour lesquels w est constante non nulle, ou bien $w = 0$ et v' est constante non nulle.

(iii) Pour ces derniers, le système (I) équivaut au système:

$$\text{(II)} \begin{cases} v'' = w^2 \\ 6v = u'' \\ p'(v) = u'v' - uw^2 \\ p(v) = uv'^2 + \frac{1}{4}u'^2w^2 - 3uvw^2. \end{cases}$$

(on développe d'abord des expressions comme:

$$S = -\tfrac{1}{2}qq''wD - qv'' - \tfrac{1}{2}q'v' - \tfrac{1}{4}qq'''w - \tfrac{1}{4}q'q''w + \tfrac{3}{2}qw^2$$

puis on utilise des combinaisons linéaires. On remarque que la fonction q est absente du système obtenu).

(iv) Les solutions du système (I) sont des polynômes

$$\begin{cases} u = u(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_0^2t^4 - \sigma_1t^3 + 3\sigma_2t^2 - \sigma_3t + \sigma_4 \\ v = v(\boldsymbol{\sigma}) = 2\sigma_0^2t^2 - \sigma_1t + \sigma_2 \\ w = w(\boldsymbol{\sigma}) = 2\sigma_0 \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_4)$ est un point de la variété Σ_2 de $\mathbb{C}^5$ d'équations:

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_0^2\sigma_4 = p'(\sigma_2) \\ \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_0^2\sigma_3^2 - 12\sigma_0^2\sigma_2\sigma_4 = p(\sigma_2). \end{cases}$$

On obtient une famille non redondante pour $\sim$ en se restreignant à l'ensemble Σ_2^* des $\boldsymbol{\sigma}$ de Σ_2 tels que $\sigma_0 = 1/2$ ou $\sigma_0 = 0$ et $\sigma_1 = -1$.

(v) Il ne peut exister de solution du type de (i) telle que w (ou bien v' si w est nul) ait un pôle simple à l'origine (argument du genre de celui de la fin de 3.1).

(vi) Pour toute solution (A, R) du type de (i) telle que w (ou bien v' si w est nul) ait soit un zéro d'ordre $\nu(\nu \geq 1)$, soit un pôle d'ordre $-\nu(\nu \leq -2)$ il existe q_1 dans $\mathcal{M}$ et une solution (u^*, v^*, w^*) du système (II) tels que (A, R) soit équivalente au couple du type de (i) construit sur les fonctions:

$$\begin{cases} q_1 \\ u_1 = t^{-2\nu}u^*(t^{\nu+1})/(\nu+1)^2 + \nu(\nu-2)t^{-2}q_1^2/4 + \nu t^{-1}q_1q_1'/2 \\ v_1 = v^*(t^{\nu+1}) \\ w_1 = (\nu+1)t^\nu w^*. \end{cases}$$

(viii) Toutes les solutions sont ainsi connues. Il reste à étudier la variété Σ_2 de $\mathbb{C}^5$. Pour cela on calcule l'opérateur $F_{\mathfrak{m}}$ et on introduit les points où les coefficients de $F_{\mathfrak{m}}$ ont un pôle. Partant de la solution construite comme en (i) et (iv) sur $q \in \mathcal{M}$ et $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_2^*$, et d'un point $\mathfrak{m} \in \Gamma - \{\infty\}$, il vient:

$$qF_{\mathfrak{m}} = A + B,$$

avec $B = qsD - s_0$, où on a posé:

$$\begin{cases} a = v - (\mathfrak{m})_1 \\ b = a^2 - uw^2 \\ s = -(b'/2 + (\mathfrak{m})_2 w)b^{-1} \\ s_0 = \begin{cases} as + a' \text{ si } \sigma_0 = 1/2 \\ (\mathfrak{m})_2 s \text{ si } \sigma_0 {*} 0. \end{cases} \end{cases}$$

En calculant $F_{\mathfrak{m}}^{\#}$ et en développant le produit $F_{\mathfrak{m}}^{\#}F_{\mathfrak{m}}$, on montre que $s' = s^2$, donc ou bien $s = 0$, ou bien il existe ξ tel que $s = (\xi - t)^{-1}$. Les points où un coefficient de $F_{\mathfrak{m}}$ au moins a un pôle sont donc exactement les points où ξ s'annule. En outre b doit être un polynôme du second degré, et, si on pose $b = \Sigma_0^2 \beta_i t^i$, le complexe $\xi(\mathfrak{m})$ est déterminé par le système:

$$\begin{cases} \beta_2\xi = (\mathfrak{m})_2 w - \beta_1/2 \\ ((\mathfrak{m})_2 w + \beta_1/2)\xi = -\beta_0. \end{cases}$$

En calculant les β_i on montre que les zéros de ξ sont les points $\mathfrak{m}$ de Γ dont les coordonnées vérifient le système:

$$(*)\begin{cases} ((\mathfrak{m})_1 - \sigma_2)^2 = 4\sigma_0^2\sigma_4 \\ 2\sigma_0(\mathfrak{m})_2 = \sigma_1((\mathfrak{m})_1 - \sigma_2) + 2\sigma_0^2\sigma_3 \end{cases}$$

Il existe donc en général deux points qu'on dira caractéristiques, et qu'on considérera comme confondus si $\sigma_0 = 1/2$ et $\sigma_4 = 0$.

Il est alors aisé de déduire de $(*)$ un paramétrage de Σ_2^* au moyen des fonctions symétriques des coordonnées des points caractéristiques:

$$(\Gamma - \{\infty\})^{(2)} \to \Sigma_2^*,$$

d'où la partie de la bijection:

$$\mathcal{A}_2 : \Gamma^{(2)} \times \mathcal{O} \to \mathfrak{E}_{4,6}^{\Gamma}$$

correspondant aux cas (i_1) et (i_2) de 1.5. Prop. 2. On note enfin que $s = 0$ ssi $\mathfrak{m}$ est $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$.

4.2. Determination de $\mathcal{F}_0$

(i) On part de la solution associée comme ci-dessus aux points $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ de $\Gamma - \{\infty\}$ et à q holomorphe telle que $q(0) \neq 0$.

En exprimant les diverses fonctions au moyen des coordonnées de $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$, on obtient que:

$$F_{\mathfrak{m}} = D^2 + a_1 D + a_0,$$

où, si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, on a:

$$\begin{cases} a_1 = (\xi(\mathfrak{m}) - t)^{-1} + q'q^{-1} \\ a_0 = \eta(\mathfrak{m})(\xi(\mathfrak{m}) - t)^{-1}q^{-1} - uq^{-2} + \sigma_0(\xi(\mathfrak{m}) - t)q^{-1} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \xi(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m})_1 - (\mathfrak{m}_1)_1, \ \eta(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m})_2 \text{ si } \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 = \infty \\ \xi(\mathfrak{m}) = \delta(\mathfrak{m}^{-1}, \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) + \delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2), \ 2\eta(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2)_1 - (\mathfrak{m})_1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si $\mathfrak{m}$ est distinct de $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$, les coefficients des développements de a_0 et a_1 sont continus, et les sections σ_0, σ_1 induisent des homorphismes locaux de $\mathcal{O}_\Gamma$ dans $\mathcal{F}_0$.

(ii) Au point $\mathfrak{m}_1$, on a:

$$\begin{cases} a_1 = -t^{-1} + \sum_0^\infty \alpha_{1k} t^k \\ a_0 = \sum_{-1}^\infty \alpha_{0k} t^k \end{cases}$$

Cherchant les zéros de $F_{\mathfrak{m}_1}$ sous la forme $\Sigma\, \gamma_k t^{k+\nu}$, il vient $\nu(\nu-2)=0$, et comme on montre que: $\alpha_{00} + \alpha_{0-1}\alpha_{10} + \alpha_{0-1}^2 = 0$, on obtient deux zéros holomorphes indépendants.

(iii) Le complexe $\xi(\mathfrak{m})$ mesure la translation qui amène en $\mathfrak{m}$ l'un des points caractéristiques. Pour $\mathfrak{m}$ voisin de $\mathfrak{m}_1$, il remplit les conditions du §2.2. pour la fonction τ. On en déduit au voisinage de $\mathfrak{m}_1$ deux zéros holomorphes de $F_\mathfrak{m}$:

$$\begin{cases} g_0^\mathfrak{m} = 1 + \alpha_{0-1}(\mathfrak{m})(t - \xi(\mathfrak{m})) + \sum_3^\infty \gamma_{0k}(\mathfrak{m})(t-\xi(\mathfrak{m}))^k \\ g_1^\mathfrak{m} = (t-\xi(\mathfrak{m}))^2 + \sum_3^\infty \gamma_{1k}(\mathfrak{m})(t-\xi(\mathfrak{m}))^k \end{cases}$$

tels que les $\gamma_{ik}(\mathfrak{m})$ soient continus en $\mathfrak{m}_1$. La matrice de passage des $g_i^\mathfrak{m}$ aux f_j est alors, à des termes d'ordre supérieur en ξ près:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{0-1}(\mathfrak{m})\xi^{-1}/2 \\ \xi/2 & -\xi^{-1}/2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{0-1}(\mathfrak{m}) = -\eta(\mathfrak{m})/q(\xi(\mathfrak{m}))$.

(iv) Si $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sont distincts, la droite passant par $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_1^{-1}\mathfrak{m}_2^{-1}$ n'est pas tangente à Γ en $\mathfrak{m}_1$, donc ξ est coordonnée locale en $\mathfrak{m}_1$. Par conséquent σ_0, σ_1 induisent des homorphismes locaux de $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$ dans $\mathcal{F}_0$, et $\chi_0\sigma_0 + \chi_1\sigma_1$ induit un homorphisme local de $\mathcal{O}_\Gamma$ dans $\mathcal{F}_0$ ssi $\eta(\mathfrak{m}_1)\chi_0 + q(0)\chi_1 = 0$. Comme $\eta(\mathfrak{m}_1) \neq 0$ et $\eta(\mathfrak{m}_1) = -\eta(\mathfrak{m}_2)$, on a $\eta(\mathfrak{m}_1) \neq \eta(\mathfrak{m}_2)$, et donc en passant à Γ entier, on a:

$$\dim \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_i), \mathcal{F}_0) = 1.$$

Ecrivons une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0:$$

en appliquant $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2),.)$, en calculant le degré de $\mathcal{Q}$ et en utilisant la nullité de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2), \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1))$, on voit que $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2)$ et que la suite est scindée, soit

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2).$$

(v) Si $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sont confondus, on a $\eta(\mathfrak{m}_1) = 0$, η est une coordonnée locale en $\mathfrak{m}_1$, et ξ est de l'ordre de η^2. Alors $\alpha_{0-1}(\mathfrak{m})\xi^{-1}$ est de l'ordre de η^{-1}, et ξ^{-1} de l'ordre de η^{-2}. Ceci montre que $\mathfrak{s}_0$ et $\mathfrak{s}_1$ induisent respectivement des homorphismes globaux de $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$ et de $\mathcal{O}_\Gamma(-2\mathfrak{m}_1)$ dans $\mathcal{F}_0$. Ecrivant une suite exacte comme en (iv), on montre $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$ et que la suite n'est pas scindée car sinon on aurait

$$\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1), \mathcal{F}_0) > 1.$$

On a donc $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \otimes \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est extension non triviale de $\mathcal{O}_\Gamma$ par lui-même.

(vi) Chaque fibre de $\mathcal{F}_0$, et, de la même façon, de $\mathcal{F}_t$, possède deux directions intrinsèquement définies, à savoir celles qui proviennent des images des homomorphismes provenant de $\mathcal{O}_\Gamma(-m_i(t))$: on les notera Δ_i^t. La structure parabolique de $\mathcal{F}_t$ consiste en la donnée supplémentaire de la direction associée à la section particulière $\mathfrak{s}_0^t$. La pente de cette derniére par rapport aux Δ_i^t dépend du choix du repère, mais on décrira la variation de la structure en calculant les pentes des droites Δ_i^t dans le repère $(\mathfrak{s}_0^t, \mathfrak{s}_1^t)$. On a vu (iv) que les pentes des Δ_i^0 sont $\eta(\mathfrak{m}_i)/q(0)$, et de même on montre que les pentes des Δ_i^t sont les zéros de l'équation:

$$\delta^2 - u(t)/q^2(t) = 0$$

la fonction arbitraire q décrit donc la variation de la structure parabolique hors des points $m_i(t)$.

4.3. Opérations sur $\mathfrak{S}_{4,6}^\Gamma$

(I) *Translations*: Avec les notations de 4.1. (iv) la translation $\phi_{t+\tau}$ fait passer de la solution construite sur q et $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_{\Gamma}^{*}$ à celle construite sur $q(t+\tau)$ et $\boldsymbol{\sigma}^*$ tel que:

$$\sigma_0^* = \sigma_0,\ \sigma_1^* = v'_\sigma(\tau),\ \sigma_2^* = v_\sigma(\tau),\ \sigma_3^* = -u'_\sigma(\tau),\ \sigma_4^* = u_\sigma(\tau)$$

On en déduit que les combinaisons suivantes sont laissées invariantes:

$$\begin{cases} \sigma_0 \\ \sigma_0(\sigma_1^2 - 2\sigma_0) \\ \sigma_0(\sigma_1 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3/2) \end{cases}$$

Soient $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$ les points de Γ paramètres de $\boldsymbol{\sigma}^*$, et $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ ceux de $\boldsymbol{\sigma}$; alors si $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 = \infty$, on a $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 = \infty$ et $(\mathfrak{m}_1^*)_1 = (\mathfrak{m}_1)_1 + \tau$, et sinon on a $\mathfrak{m}_1^*\mathfrak{m}_2^* = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, c'est à dire que les droites $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ et $\mathfrak{m}_1^*\mathfrak{m}_2^*$ recoupent Γ au même troisième point, et de plus:

$$\delta(\mathfrak{m}_1^*, \mathfrak{m}_2^*) = \delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) - \tau.$$

On déduit de ceci la description des solutions donnée au §1.5. et celle de la déformation de $\mathscr{F}_0$. Enfin on réobtient la valeur de $\xi(\mathfrak{m})$: la translation $\phi_{t+\xi(\mathfrak{m})}$ fait passer à une solution ayant $\mathfrak{m}$ comme point caractéristique. L'autre point doit donc être $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, et donc

$$\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) = \delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) - \xi(\mathfrak{m}).$$

(ii) *Inversion*: On considère l'inversion $\Phi_{t^{-1}}$ comme point à l'infini de la droite des translations, car pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ il existe $\Phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{D}$ tel que $\phi_{t^{-1}}\phi_{t+\tau} = \phi\phi_{t^{-1}}$. On associe alors naturellement aux solutions obtenues par inversion de celles correspondant à $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ les points ∞ et $\mathfrak{m}_1^{-1}\mathfrak{m}_2^{-1}$; les résultats sur $F_\mathfrak{m}$ subsistent.

(iii) *Adjonction*: Si pour $q \in \mathscr{O}$, on pose $q^\dagger(t) = q(-t)$, on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{(2)} \times \mathscr{O} \arrow[r, "(.^{-1}, .^{-1}, \dagger)"] \arrow[d, "\mathscr{A}_2"'] & \Gamma^{(2)} \times \mathscr{O} \arrow[d, "\mathscr{A}_2"] \\
\mathfrak{E}^{\Gamma}_{4,6} \arrow[r, "\dagger"] & \mathfrak{E}^{\Gamma}_{4,6}
\end{tikzcd}$$

(iv) *Permutation des facteurs*: Le problème est, après avoir obtenu la solution (A^*, R^*), d'en reconnaître les caractéristiques, c'est à dire de trouver q^*, $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$ tels que $(A^*, R^*) \in \mathscr{A}_2(\mathfrak{m}_1^*, \mathfrak{m}_2^*, q^*)$; on montre par de longs calculs de géométrie analytique qu'il existe pour tout $\mathfrak{m}$

de $\Gamma - \{\infty\}$ une application

$$\#_m : \mathcal{O} \to \mathcal{O},$$

telle que si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ et $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, on ait:

$$\#_\mathfrak{m}(q)(t) = (t - 2\eta\xi^{-1})^4 q(\xi t(t - 2\eta\xi^{-1})^{-1})/4\eta^2$$

et rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{(2)} \times \mathcal{O} \arrow[r, "{(.\times\mathfrak{m}^{-1}, .\times\mathfrak{m}^{-1}, \#_\mathfrak{m})}"] \arrow[d, "\mathscr{A}_2"'] & \Gamma^{(2)} \times \mathcal{O} \arrow[d, "\mathscr{A}_2"] \\
\mathfrak{S}^\Gamma_{4,6} \arrow[r, "\mathscr{P}_m"] & \mathfrak{S}^\Gamma_{4,6}
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\mathscr{P}_\mathfrak{m}$ calque $\mathfrak{S}^\Gamma_{4,6}$ la translation par $\mathfrak{m}^{-1}$ sur Γ.

(v) *Endomorphismes de* $\mathbb{C}[t, D]$: On a trouvé des solutions à coefficients polynomiaux: à celles-ci on peut appliquer les éléments de End $\mathbb{C}[t, D]$, qui diffère de End $\mathscr{D}$.

LEMME 1: *L'application* $t \mapsto H$, $D \mapsto K$ *se prolonge en un endomorphisme de* $\mathbb{C}[t, D]$ *ssi* $[H, K] = -1$.

PREUVE: La condition est nécessaire puisque $[t, D] = -1$. Inversement si $[H, K] = -1$, on définit Φ linéaire sur $\mathbb{C}[t, D]$ tel que $\phi(t^iD^j) = H^iK^j$. Pour montrer que $\Phi \in \text{End}\, \mathbb{C}[t, D]$, il faut vérifier que pour tous, i, j, k, l, on a: $\phi(t^iD^jt^kD^l) = H^iK^jH^kK^l$, ce que revient en développant à montrer que

$$[K^j, H^k] = \sum_{n=1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)j(j-1)\dots(j-n+1)/n!H^{k-n}K^{j-n}.$$

On le fait par récurrence sur k en utilisant que

$$\sum_{i=0}^{k} (k-i)\dots(k-i-n+2) = (k+1)k\dots(k-n+2)/n.$$

COROLLAIRE: *Les endomorphismes de* $\mathbb{C}[t, D]$ *qui n'augmentent* *pas le degré total en t et D sont de la forme:*

$$\begin{pmatrix} t \\ D \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{A}\begin{pmatrix} t \\ D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

où $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{A} \in SL_2(\mathbb{C})$.

Parmi ceux-ci on trouve en particulier $\phi^b : t \mapsto D,\ D \mapsto -t$. Ces opérations permettent d'associer à des solutions de degré petit en D et grand en t des solutions de degrés inversés.

Preuve de 1.7. Prop. 4:

Supposons que $\rho = 2\rho'$: partant de la solution $A = D^2 - p$, $R = t$, on applique $\phi_{id,t^{\rho'}}$ (cf. 1.1.) puis ϕ^b, et on obtient une nouvelle solution:

$$\begin{cases} A^b = D^{2\rho'} - 2tD^{\rho'} + \rho' D^{\rho'-1} - D^3 - \alpha D - \beta + t^2 \\ R^b = D. \end{cases}$$

De même si $\rho = 2\rho' + 1$, soient $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ les zéros de p: on part de la solution

$$A = (t - \epsilon_1)D^2 + D - (t - \epsilon_2)(t - \epsilon_3),\ R = t,$$

on applique $\phi_{t+\epsilon_1}$, $\phi_{id,t^{\rho'}}$ puis ϕ^b, et on obtient une nouvelle solution:

$$\begin{cases} A^b = D^{2\rho'+1} - 2tD^{\rho'+1} + (\rho'+1)D^{\rho'} - D^2 + (t^2 - 3\epsilon_1)D - t - p'(\epsilon_1) \\ R^b = D + \epsilon_1. \end{cases}$$

On a ainsi exhibé des éléments de $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{2\rho,3\rho}$ dans tous les cas.

5. Dimensions trois

5.1. Solutions

(i) La taille des calculs est énorme. Ainsi pour expliciter le système (I) dans la forme des solutions donnée au §1.6., la simple écriture de l'opérateur auxiliaire S demande plusieurs centaines de termes.

Pratiquement, on ne peut partir que de la forme $A = D^3 - a_1 D - a_0$, $R = r_1 D + r_0$, et trois des équations du système obtenu s'intègrent exactement. On vérifie par substitution que les solutions obtenues vérifient les équations restantes du système. Ceci a été fait partiellement avec un ordinateur. Un automorphisme convenable amème à la forme souhaitée (qui est la seule séparant une partie polynomiale et une partie arbitraire).

On obtient le résultat suivant:
Soit Σ_3 la variété de $\mathbb{C}^6$ d'équations:

$$\begin{cases} \sigma_4^2 + \sigma_0\sigma_5 - \sigma_0^2\sigma_2/4 = 3\sigma_1 \\ \sigma_2 - \sigma_0\sigma_2\sigma_4 + 2\sigma_4\sigma_5 + \sigma_0^3\sigma_3/4 = p'(\sigma_1) \\ \sigma_5^2 + \sigma_0\sigma_3\sigma_4 - \sigma_3 = p(\sigma_1) \end{cases}$$

et soit $r \in \mathcal{O}$ telle que $r(0) \neq 0$; alors si on pose

$$\begin{cases} u = -\sigma_0^2 t^2/12 + 2\sigma_4 t + \sigma_2 \\ v = -\sigma_0^3 t^3/108 + (\sigma_0\sigma_4/3 - 1)t^2 + (2\sigma_5 - \sigma_0\sigma_2/3)t - \sigma_3 \\ w = -\sigma_0 t/3 + \sigma_1 \end{cases}$$

le couple (A, R) est une solution, où

$$\begin{cases} A = r^2D^3 + 3rr'D^2 + (r'^2 + rr'' + u)D + u'/2 - r'w'/2 + vr^{-1} \\ R = rD + r'/2 + w. \end{cases}$$

De plus toute solution (A, R) telle que R soit de degré 1 au plus s'obtient par changement de variable à partir d'une des précédentes.

(ii) Soit à étudier la variété Σ_3 de $\mathbb{C}^6$. A nouveau on va la paramétrer à l'aide des points où les coefficients de l'opérateur $F_{\mathfrak{m}}$ associé ont un pôle.

Partant de la solution construite comme en (i) sur r qu'on suppose constante (taille des calculs) et $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_3$, et d'un point $\mathfrak{m}$ de $\Gamma - \{\infty\}$, il vient:

$$rF_{\mathfrak{m}} = A + B,$$

avec $B = r^2sD^2 + r(as + \sigma_0/2)D + (a^2 + u + \sigma_0 r/6)s + \sigma_0 a/2 + u'/2$ où on a posé:

$$\begin{cases} a = (\mathfrak{m})_1 - w \\ b = a^3 + au + v \\ s = -(b'/2 + (\mathfrak{m})_2)b^{-1} \end{cases}$$

A nouveau on a $s' = s^2$, d'où $s = 0$, ou bien il existe ξ tel que $s =$

$(\xi - t)^{-1}$; b est un polynôme du second degré, et en calculant ses coefficients on montre que les zéros de ξ sont les points dont les coordonnées vérifient le système:

$$(**)\begin{cases} ((\mathfrak{m})_1 - \sigma_1)^3 + \sigma_2((\mathfrak{m})_1 - \sigma_1) - \sigma_3 = 0 \\ (\mathfrak{m})_2 = \sigma_0((\mathfrak{m})_1 - \sigma_1)^2/2 + \sigma_4((\mathfrak{m})_1 - \sigma_1) + \sigma_5. \end{cases}$$

Il existe donc cette fois trois points caractéristiques, et on déduit de (**) un paramètrage de Σ_3 au moyen de fonctions symétriques des coordonnées de ceux-ci:

$$(\Gamma - \{\infty\})^{(3)} \to \Sigma_3,$$

d'où la partie de la bijection

$$\mathscr{A}_3 : \Gamma^{(3-)} \times \mathscr{O} \to \mathfrak{S}^{\Gamma}_{6,9-}$$

correspondant aux cas (i_1) et (i_2) de 1.6. Prop. 3. On montre aussi que $s = 0$ **ssi** $\mathfrak{m}$ est $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3$.

5.2. Determination de $\mathscr{F}^0$

(i) Partant de la solution associée aux points $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ de $\Gamma - \{\infty\}$ et à r constante non nulle, on a: $F_{\mathfrak{m}} = D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0$, et si $\mathfrak{m}$ est distinct de $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$, les a_i sont holomorphes et les coefficients de leurs développements continus.

(ii) Au point $\mathfrak{m}_1$, on a:

$$\begin{cases} a_2 = -t^{-1} \\ a_1 = \sum_{-1}^{2} \alpha_{1k} t^k \\ a_0 = \sum_{-1}^{3} \alpha_{0k} t^k. \end{cases}$$

Pour des zéros de $F_{\mathfrak{m}_1}$ de la forme $\Sigma\, \gamma_k\, t^{k+\nu}$, il vient $\nu(\nu-1)(\nu-3) = 0$, et comme on a:

$$\begin{cases} \alpha_{1-1}^2 + \alpha_{10} + \alpha_{0-1} = 0 \\ \alpha_{1-1}\alpha_{0-1} + \alpha_{00} = 0, \end{cases}$$

on obtient trois zéros holomorphes indépendants.

(iii) Le complexe $\xi(\mathfrak{m})$ satisfait à nouveau la condition requise, ce qui permet d'obtenir une famille de zéros de $F_{\mathfrak{m}}$, soit $g_0^{\mathfrak{m}}$, $g_1^{\mathfrak{m}}$, $g_2^{\mathfrak{m}}$, dont les coefficients des developpements soient continus en $\mathfrak{m}_1$. La matrice de passage des $g_i^{\mathfrak{m}}$ aux f_j est alors (à des termes supérieurs près):

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{0-1}\xi/2 & \alpha_{0-1}\xi^{-1}/6 \\ \xi & 1 & \alpha_{1-1}\xi^{-1}/6 \\ \xi^2/3 & \xi/2 & -\xi^{-1}/6 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_{1-1}(\mathfrak{m}) = (\sigma_1 - (\mathfrak{m})_1)r^{-1} \\ \alpha_{0-1}(\mathfrak{m}) = -\alpha_{1-1}^2 - \sigma_0 r^{-1}/6 - \sigma_2 r^{-2}. \end{cases}$$

(iii) Si $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ sont distincts, $\xi(\mathfrak{m})$ est une coordonnée locale en $\mathfrak{m}_1$, $\mathscr{s}_0$, $\mathscr{s}_1$, $\mathscr{s}_2$ induisent des homomorphismes locaux de $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$ dans $\mathscr{F}_0$ au voisinage de $\mathfrak{m}_1$, et $\chi_0\mathscr{s}_0 + \chi_1\mathscr{s}_1 + \chi_2\mathscr{s}_2$ envoie $\mathcal{O}_\Gamma$ dans $\mathscr{F}_0$ ssi

$$\alpha_{0-1}(\mathfrak{m}_1)\chi_0 + \alpha_{1-1}(\mathfrak{m}_1)\chi_1 - \chi_2 = 0$$

On en déduit comme en 4.2. que

$$\dim \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_i), \mathscr{F}_0) = 1,$$

et

$$\mathscr{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_2) \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_3).$$

(iv) Si $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sont confondus et $\mathfrak{m}_3$ distinct de $\mathfrak{m}_1$, $\xi(\mathfrak{m})$ est le carré d'une coordonnée locale, et $\alpha_{1-1}(\mathfrak{m}_1)$ est non nul: il en résulte que près de $\mathfrak{m}_1$ les combinaisons linéaires de $\mathscr{s}_0$, $\mathscr{s}_1$, $\mathscr{s}_2$ induisant un homomorphisme de $\mathcal{O}_\Gamma$, $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$, $\mathcal{O}_\Gamma(-2\mathfrak{m}_1)$ respectivement dans $\mathscr{F}_0$ forment des espaces vectoriels de dimensions respectives 1, 2, 3. Alors $\mathscr{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \otimes \mathscr{E} \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_3)$.

(v) Si $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ sont confondus, $\alpha_{1-1}(\mathfrak{m})$ est une coordonnée locale et $\xi(\mathfrak{m})$ de l'ordre de son cube. Près de $\mathfrak{m}_1$ les combinaisons linéaires de $\mathscr{s}_0$, $\mathscr{s}_1$, $\mathscr{s}_2$ induisant un homomorphisme de $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$, $\mathcal{O}_\Gamma(-2\mathfrak{m}_1)$, $\mathcal{O}_\Gamma(-3\mathfrak{m})$ respectivement dans $\mathscr{F}_0$ forment des espaces vectoriels de dimensions respectives 1, 2, 3.

Alors $\mathscr{F}_0 = \mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1) \otimes \mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_2$ extension non triviale de $\mathscr{E}$ par $\mathcal{O}_\Gamma$.

(vi) La structure parabolique de $\mathscr{F}_t$ est la donnée des directions de s_0^t, s_1^t, s_2^t par rapport aux directions Δ_i^t provenant des $\mathcal{O}_\Gamma(-m_i(t))$. Sa déformation est décrite par la valeur des pentes des projections des Δ_i^t

dans les repères $(\mathfrak{s}_0^t, \mathfrak{s}_1^t)$ et $(\mathfrak{s}_0^t, \mathfrak{s}_2^t)$. Le calcul de (iii) montre que si $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ sont distincts, alors $\chi_0\vartheta_0 + \chi_1\vartheta_1 + \chi_2\vartheta_2$ correspond à l'homomorphisme de $\mathcal{O}_\Gamma(-\mathfrak{m}_1)$ dans $\mathcal{F}_0$ ssi:

$$\begin{cases} \chi_1/\chi_0 = ((\mathfrak{m}_1)_1 - \sigma_1)r^{-1} \\ (\chi_2/\chi_0) = (\chi_1/\chi_0)^2 - \sigma_0 r^{-1}/6. \end{cases}$$

A nouveau r est liée à la variation de la structure parabolique, et on peut naturellement conjecturer que les formules ci-dessus restent valables même si r n'est pas constante. La seconde égalité traduit une liaison dûe aux hypothèses restrictives.

5.3. Operations sur $\mathfrak{E}_{6,9}^\Gamma$

(i) *Translations*: Avec les notations de 5.1., on montre que toute translation laisse invariantes les combinaisons suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_0 \\ \sigma_4 - \sigma_0\sigma_1/4 \\ \sigma_0^2\sigma_5/4 + \sigma_0\sigma_4^2 - 3\sigma_4, \end{cases}$$

Soient $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ associés à la solution de départ, et $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$, $\mathfrak{m}_3^*$ associés à la solution translatée: les invariants ci-dessus montrent que si $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ sont alignés, alors $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$, $\mathfrak{m}_3^*$ sont alignés sur une droite parallèle, et sinon la parabole d'axe vertical passant par $\mathfrak{m}_1^*$, $\mathfrak{m}_2^*$, $\mathfrak{m}_3^*$ a même paramètre σ_0^{-1} et recoupe Γ au même quatrième point que la parabole d'axe vertical passant par $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$.

On en déduit la description des solutions données au §1.6. et celle de la déformation de $\mathcal{F}_0$; on obtient aussi l'interprétation de $\xi(\mathfrak{m})$.

(ii) *Permutation des facteurs*: Partant d'une solution du type décrit en 5.1., on obtient pour chaque point $\mathfrak{m}$ de $\Gamma - \{\infty\}$ une solution $(A^\#, R^\#)$ d'un type nouveau, avec $R^\#$ de degré 2. En particulier pour $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3$ on trouve $A^\# = A$, et

$$R^\# = \sigma_0^2 r^2/4D^2 + (\sigma_0^3 t/12 - \sigma_0\sigma_4 + 1)rD + \sigma_0^4 t^2/144 + 2\sigma_0(1 - \sigma_0\sigma_4/4)t/3 \\ + \sigma_1 - \sigma_0\sigma_5 + \sigma_0^2\sigma_2/4 + \sigma_0^3 r/24.$$

Ceci montre que pour toute solution polynomiale (A, R) dans $\mathfrak{E}_{6,9-}^\Gamma$, il existe au moins un autre opérateur $R^\# \neq R$ tel que $(A, R^\#)$ soit solution, et suggère la possibilité d'une seconde fonction arbitraire dans la solution générale du système (I).

(iii) *Endomorphismes de* $\mathbb{C}[t, D]$: Partant des solutions polynomiales dans $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{4,6}$ telles que A soit de degré 3 en t, on obtient par ϕ^b des éléments dans $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{6,9}$ qui sont encore nouveaux.

Il semble difficile d'obtenir des résultats complets pour $\mathfrak{E}^{\Gamma}_{6,9}$, de même que pour une étude en genre supérieur à un.

REFERENCES

[1] J.L. BURCHNALL and I.W. CHAUNDY: *Commutative ordinary differential operators*, Proceedings London Math. Society, Ser. 2, Vol. 21, p. 420 (1922).

[2] J.L. BURCHNALL and I.W. CHAUNDY: *Commutative ordinary differential operators*, Proceedings Royal Society, Ser. A, Vol. 118, p. 557 (1928).

[3] J.L. BURCHNALL and I.W. CHAUNDY: *Commutative ordinary differential operators*, Proceedings Royal Society, Ser. A, Vol. 134, p. 471 (1931).

[4] V.G. DRINFELD: *Commutative subrings of certain noncommutative rings*, Fonct. Anal. and its application, Vol. 11, no. 1, p. 11 (1977).

[5] I.M. KRICHEVER: *Algebraic-geometric construction of the Zakharov-Shabat equations and their periodic solutions*, Translation Soviet Math. Dokt, Vol. 17, no. 2, p. 394 (1976).

[6] I.M. KRICHEVER: *Algebraic curves and commuting matricial differential operators*, Fonct. Anal. and its application, Vol. 10, no. 2 (1976).

[7] I.M. KRICHEVER: *Commutative rings of ordinary linear differential operators*, Fonct. Anal. and its application, Vol. 13, no. 3, p. 20 (1978).

[8] D. MUMFORD: *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related non linear equations*, Proceedings of the Kyoto conference on algebraic-geometry (1977), ed. by Tokyo, Kinokuniya Book-Store (1978).

[9] J.L. VERDIER: *Equations differentielles algébriques*, Séminaire Bourbaki, no. 512 (1977).

(Oblatum 21-XI-1979 & 27-VI-1980)

UER Mathématiques
Université de Paris VII
2 Place Jussieu
75221 Paris Cedex 05, France