ALAIN DURAND

Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance

Compositio Mathematica, tome 35, nº 3 (1977), p. 259-267

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1977__35_3_259_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 35, Fasc. 3, 1977, pag. 259–267
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

INDEPENDANCE ALGEBRIQUE DE NOMBRES COMPLEXES ET CRITERE DE TRANSCENDANCE

Alain Durand

0. Introduction

Dans un de ses articles, Schmidt [4] énonça une condition suffisante d'indépendance algébrique de n nombres réels en considérant leurs approximations par des nombres rationnels. Dans le cas $n = 1$, il obtenait ainsi la condition suffisante de transcendance de Liouville. Notre but ici est de généraliser le résultat de Schmidt d'une part en considérant des approximations algébriques, et non plus uniquement rationnelles, de n nombres complexes, et d'autre part en affaiblissant les hypothèses proprement dites du théorème de Schmidt. Dans le cas $n = 1$, cette amélioration permet ainsi d'obtenir un critère de transcendance déjà énoncé dans Durand [3].

1. Rappels et définitions

Etant donné un polynôme non nul P de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_p]$, on note $H(P)$ le maximum des valeurs absolues de ses coefficients, $L(P)$ la somme des valeurs absolues de ses coefficients et $\partial_{X_i}(P)$ le degré de P par rapport à X_i. On pose en outre

$$\partial(P) = \sum_{1 \le i \le p} \partial_{X_i}(P) \quad \text{et} \quad \Lambda(P) = 2^{\partial(P)} L(P).$$

Si θ est un nombre algébrique et P son polynôme minimal sur $\boldsymbol{Q}$, on note $\partial(\theta)$, $L(\theta)$, $H(\theta)$ et $\Lambda(\theta)$ les quantités $\partial(P)$, $L(P)$, $H(P)$ et $\Lambda(P)$.

A tout p-uple complexe $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$, on associe la fonction ordre $O(u|\theta_1, \ldots, \theta_p)$ de la variable entière $u \ge 1$ définie par

$$O(u|\theta_1, \ldots, \theta_p) = \text{Sup Log}\left\{\frac{1}{|P(\theta_1, \ldots, \theta_p)|}\right\},$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble fini des polynômes P non nuls de l'anneau $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_p]$ tels que

$$P(\theta_1, \ldots, \theta_p) \neq 0 \quad \text{et} \quad \Lambda(P) \leq u.$$

On vérifie facilement que pour tout p-uple complexe $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ on a

(1) $O(u|\theta_1, \ldots, \theta_p) \leq O(u|\theta_1, \ldots, \theta_p, \theta)$, $\forall u \geq 1$ et $\forall \theta \in \mathbf{C}$.

(2) $O(uv|\theta_1, \ldots, \theta_p) \geq O(u|\theta_1, \ldots, \theta_p) + O(v|\theta_1, \ldots, \theta_p)$, $\forall u, v \geq 1$.

Si $\theta_1, \ldots, \theta_p$ sont des nombres algébriques, on obtient

(3) $O(u|\theta_1, \ldots, \theta_p) \leq \dfrac{\text{Log } u}{\text{Log } 2} \cdot \text{Log}\left(\prod_{i=1}^{p} \Lambda(\theta_i)^{\delta/\delta_i}\right)$,

où $\delta = [\mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_p) : \mathbf{Q}]$ et $\delta_i = [\mathbf{Q}(\theta_i) : \mathbf{Q}]$.

Cette dernière relation s'obtient par exemple en utilisant le lemme 4-4 de Cijsouw [2].

2. Enoncé des résultats

THEOREME 1: *Soit θ un nombre complexe. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *θ est transcendant.*

(ii) *Il existe une suite (θ_n) de nombres algébriques telle que*

$$0 < |\theta - \theta_n| \leq \exp\{-n \text{ Log } \Lambda(\theta_n)\} \quad \textit{pour } n \geq 1.$$

(iii) *θ est la limite d'une suite (θ_n) de nombres complexes telle que*

$$0 < |\theta - \theta_n| \leq \exp\{-O(n|\theta_n)\} \quad \textit{pour } n \geq 1.$$

THEOREME 2: *Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres complexes. On suppose que $\theta_1, \ldots, \theta_p$ sont limites de suites $(\theta_1^{(n)}), \ldots, (\theta_p^{(n)})$ de nombres complexes telles que*

(i) $0 < |\theta_{k+1} - \theta_{k+1}^{(n)}| \leq 1/n|\theta_k - \theta_k^{(n)}|$ *pour* $k = 1, \ldots, p-1, n \geq 1$.

(ii) $0 < |\theta_1 - \theta_1^{(n)}| \leq \exp\{-O(n|\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)})\}$ *pour* $n \geq 1$.

Alors les nombres $\theta_1, \ldots, \theta_p$ sont algébriquement indépendants.

En particulier, si l'on considère des approximations algébriques, on obtient alors, compte-tenu de la relation (3):

COROLLAIRE: *Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres complexes. On suppose que pour tout $n \geq 1$, il existe des nombres algébriques $\theta_1^{(n)} := \alpha_1, \ldots, \theta_p^{(n)} := \alpha_p$ tels que*

(i) $0 < |\theta_{k+1} - \alpha_{k+1}| \leq 1/n |\theta_k - \alpha_k|$ *pour* $k = 1, \ldots, p-1$,

(ii) $0 < |\theta_1 - \alpha_1| \leq \left(\prod_{i=1}^{p} \Lambda(\alpha_i)^{\delta/\delta_i}\right)^{-n}$

où $\delta_i = [\boldsymbol{Q}(\alpha_i) : \boldsymbol{Q}]$ $(i = 1, \ldots, p)$ *et* $\delta = [\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) : \boldsymbol{Q}]$.
Alors les nombres $\theta_1, \ldots, \theta_p$ sont algébriquement indépendants.

3. Preuve du théorème 1.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 1. *Soit θ un nombre transcendant et soit $n \geq 1$. Il existe alors une infinité de nombres algébriques β de degré $\leq n$ tels que*

$$0 < |\theta - \beta| \leq \Lambda(\beta)^{-n/4}.$$

PREUVE DU LEMME 1: Soit θ un nombre complexe quelconque; on définit $\omega_n^*(\theta)$ comme étant la borne supérieure des nombres réels ω^* pour lesquels il existe une infinité de nombres algébriques β de degré $\leq n$ tels que

$$|\theta - \beta| \leq H(\beta)^{-1-\omega^*}.$$

Wirsing [5] montra que si θ est transcendant, on a alors

$$\omega_n^*(\theta) \geq n/4 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Compte-tenu de la définition de $\omega_n^*(\theta)$, il existe une infinité de nombres algébriques β de degré $\leq n$ tels que

$$|\theta - \beta| \leq H(\beta)^{-(n/4+1/2)}.$$

Or pour $H(\beta)$ assez grand, on a

$$(n/4 + 1/2) \operatorname{Log} H(\beta) \geq n/4 \operatorname{Log} \Lambda(\beta),$$

d'où la conclusion.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). On considère pour tout $n \geq 1$ un nombre algébrique θ_n tel que

$$0 < |\theta - \theta_n| \leq \Lambda(\theta_n)^{-n}.$$

On a donc $\theta = \lim_{n\to+\infty} \theta_n$ et, d'après la relation (3),

$$0 < |\theta - \theta_n| \leq \exp\{-O(n|\theta_n)\} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). On raisonne par l'absurde en supposant θ algébrique. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$, $P \not\equiv 0$ tel que $P(\theta) = 0$. On en déduit l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$|P(\theta_n)| \leq c|\theta - \theta_n| \quad \text{pour } n \geq 1,$$

d'où

$$|P(\theta_n)| \leq c \exp\{-O(n|\theta_n)\} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Montrons alors que $P(\theta_n) = 0$ pour n assez grand. En effet, soit $u = \Lambda(P)$. Si $P(\theta_n) \neq 0$, on obtient, compte-tenu de la relation (2),

$$2O(u|\theta_n) \leq O(n|\theta_n) \leq \operatorname{Log} c + O(u|\theta_n) \quad \text{pour } n \geq u^2,$$

d'où

$$O(u|\theta_n) \leq \operatorname{Log} c,$$

et par suite

$$|P(\theta_n)| \geq 1/c \quad \text{pour } n \geq u^2.$$

A la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $|P(\theta)| \geq 1/c$, ce qui contredit $P(\theta) = 0$. Donc $P(\theta_n) = 0$ pour n assez grand. On en déduit alors que la suite (θ_n) est constante pour n assez grand, ce qui contredit $|\theta - \theta_n| > 0$ pour $n \geq 1$.

4. Preuve du théorème 2.

Pour démontrer le théorème 2, nous aurons besoin des lemmes suivants.

LEMME 2: *Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres complexes algébriquement dépendants. On suppose que $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ (resp. $\theta_2, \ldots, \theta_p$) sont algébriquement indépendants. Il existe alors un polynôme P de $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_p]$ tel que*

$$P(\theta_1, \ldots, \theta_p) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial X_1}(\theta_1, \ldots, \theta_p) \neq 0 \quad et \quad \frac{\partial P}{\partial X_p}(\theta_1, \ldots, \theta_p) \neq 0.$$

PREUVE: Soit $K = \boldsymbol{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1})$. Par hypothèse θ_p est algébrique sur K. Notons m le degré de θ_p sur K. Il existe donc un polynôme R de $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_p]$, $\partial_{X_p} R = m$, tel que $R(\theta_1, \ldots, \theta_p) = 0$. Le polynôme $R(X, \theta_2, \ldots, \theta_p)$ n'est pas identiquement nul puisque $R \not\equiv 0$ et que $\theta_2, \ldots, \theta_p$ sont algébriquement indépendants. Il existe donc un entier $j \geq 1$ tel que

$$\frac{\partial^j}{\partial X_1^j} R(\theta_1, \ldots, \theta_p) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial X_1^{j-1}} R(\theta_1, \ldots, \theta_p) = 0.$$

Le polynôme

$$P(X_1, \ldots, X_p) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial X_1^{j-1}} R(X_1, \ldots, X_p)$$

vérifie alors les conditions du lemme.

LEMME 3: *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ et soit $f: U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On considère un point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de U tel que*

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial z_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0.$$

Il existe alors un voisinage ouvert V de $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ contenu dans U, un voisinage ouvert $W \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ de $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ et une fonction holomorphe

$$g: W \to \mathbf{C},$$

tels que la relation

$$(z_1, \ldots, z_n) \in V \quad et \quad f(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

soit équivalente à

$$(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in W \quad et \quad z_n = g(z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

PREUVE: Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites. (Pour ce théorème, voir par exemple Cartan [1], p. 61).

LEMME 4: *Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert V d'un point $a \in \mathbf{C}$. On suppose que $f'(a) \neq 0$. Il existe alors deux constantes $c > 0$ et $\epsilon > 0$ telles que*

$$|z-a| \leq \epsilon \Rightarrow |f(z)-f(a)| \geq c|z-a|.$$

PREUVE: La fonction

$$g(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

est en effet holomorphe dans V et $g(a) = f'(a) \neq 0$. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$|z-a| \leq \epsilon \Rightarrow |g(z)-g(a)| \leq (1/2) \cdot |g(a)|,$$

d'où

$$|g(z)| \geq (1/2) \cdot |g(a)|.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2. On procède par récurrence sur p, le cas $p = 1$ étant donné par la théorème 1.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\theta_1, \ldots, \theta_p$ sont algébriquement dépendants ($p \geq 2$). L'hypothèse de récurrence, compte-tenu de la relation (1), montre en particulier que $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ (resp. $\theta_2, \ldots, \theta_p$) sont algébriquement indépendants. D'après le lemme 2, il existe alors un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_p]$ tel que

$$P(\theta_1, \ldots, \theta_p) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial X_1}(\theta_1, \ldots, \theta_p) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial X_p}(\theta_1, \ldots, \theta_p) \neq 0.$$

On en déduit, en utilisant le lemme 3, l'existence d'un voisinage ouvert $V \subset \mathbf{C}^p$ de $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$, d'un voisinage ouvert $W \subset \mathbf{C}^{p-1}$ de $(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1})$ et d'une fonction holomorphe $g: W \to \mathbf{C}$ tels que la relation

$$(z_1, \ldots, z_p) \in V \quad \text{et} \quad P(z_1, \ldots, z_p) = 0$$

soit équivalente à

$$(z_1, \ldots, z_{p-1}) \in W \quad \text{et} \quad z_p = g(z_1, \ldots, z_{p-1}).$$

On a donc

$$P(z_1, \ldots, z_{p-1}, g(z_1, \ldots, z_{p-1})) \equiv 0 \quad \text{sur } W.$$

Il vient par suite, en dérivant par rapport à z_1,

$$\frac{\partial P}{\partial X_1}(\theta_1, \ldots, \theta_p) + \frac{\partial P}{\partial X_p}(\theta_1, \ldots, \theta_p). \ \frac{\partial g}{\partial z_1}(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) = 0.$$

Compte-tenu de l'hypothèse faite sur P, on a donc

$$\frac{\partial g}{\partial z_1}(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) \neq 0.$$

D'après le lemme 4, il existe alors deux constantes $c > 0$ et $\epsilon > 0$ telles que

(4) $\quad |z_1 - \theta_1| \leq \epsilon \Rightarrow |g(z_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}) - g(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1})| \geq c|z_1 - \theta_1|.$

Montrons que pour n assez grand, on a $P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)}) = 0$. En effet, on écrit

$$\begin{aligned}-P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)}) = \{&P(\theta_1, \ldots, \theta_p) - P(\theta_1^{(n)}, \theta_2, \ldots, \theta_p)\} \\ &+ \cdots + \{P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_{p-1}^{(n)}, \theta_p) - P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)})\}.\end{aligned}$$

Il existe parconséquent une constante $c_1 > 0$ telle que, en utilisant (i),

$$|P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)})| \leq c_1|\theta_1 - \theta_1^{(n)}| \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

d'où, en utilisant (ii),

$$|P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)})| \leq c_1 \exp\{-O(n|\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)})\}.$$

Soit $u = \Lambda(P)$. Si $P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)}) \neq 0$ pour $n \geq u^2$, on obtient,

$$2O(u|\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)}) \leq O(n|\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)}) \leq O(u|\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)}) + \operatorname{Log} c_1,$$

d'où

$$|P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)})| \geq 1/c_1 \quad \text{pour } n \geq u^2.$$

A la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $|P(\theta_1, \ldots, \theta_p)| \geq 1/c_1$, ce qui contredit $P(\theta_1, \ldots, \theta_p) = 0$. Donc $P(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_p^{(n)}) = 0$ pour n assez grand et par suite

$$\theta_p^{(n)} = g(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_{p-1}^{(n)}).$$

D'un autre côté, d'après la relation (4),

$$|g(\theta_1^{(n)}, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}) - g(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1})| \geqq c|\theta_1 - \theta_1^{(n)}|. \tag{5}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\theta_p - \theta_p^{(n)} &= g(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) - g(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_{p-1}^{(n)})\\ &= \{g(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) - g(\theta_1^{(n)}, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\}\\ &\qquad + \cdots + \{g(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_{p-2}^{(n)}, \theta_{p-1}) - g(\theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_{p-1}^{(n)}\}.\end{aligned}$$

Là encore, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que, en utilisant (5) et (i), on ait, pour n assez grand,

$$c|\theta_1 - \theta_1^{(n)}| \leq |g(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) - g(\theta_1^{(n)}, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})| \leq \frac{c_2}{n}|\theta_1 - \theta_1^{(n)}|.$$

Comme $c > 0$ et $|\theta_1 - \theta_1^{(n)}| > 0$, cette dernière relation est impossible pour n assez grand. Ceci termine la démonstration du théorème 2.

5. Application

Soient E un ensemble non vide de nombres réels et $(\sigma_\tau)_{\tau \in E}$ une famille de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes pour $n \geq n(\tau)$. On fait l'hypothèse suivante:

($*$) Pour toute partie finie J de E, $J = \{\tau_1, \ldots, \tau_p\}$ et pour tout réel $d \geq 0$, il existe des entiers positifs $n_1, \ldots, n_p$ tels que

$$\sigma_{\tau_k}(n_k + 1) + d \leq \sigma_{\tau_{k+1}}(n_{k+1} + 1) \quad k = 1, \ldots, p-1. \tag{1}$$

$$d \cdot \sum_{1 \leq k \leq p} \sigma_{\tau_k}(n_k) \leq \sigma_{\tau_1}(n_1 + 1). \tag{2}$$

Un exemple de fonctions σ_τ vérifiant ($*$) est donné par

$$\sigma_\tau(n) = [\tau \sigma_n], \quad \tau > 0,$$

où (σ_n) est une suite croissante de nombres réels positifs telle que

$\lim_{n\to+\infty}(\sigma_{n+1}/\sigma_n)=+\infty$ et où $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x.

A une telle famille $(\sigma_\tau)_{\tau\in E}$ on associe les séries entières

$$f_\tau(z)=\sum_{n\geq 0} z^{\sigma_\tau(n)}.$$

Le corollaire du théorème 2 permet alors de montrer que pour tout réel α algébrique tel que $0<\alpha<1$, les nombres $f_\tau(\alpha)$ sont algébriquement indépendants. Par exemple, si pour tout $\tau>0$ on définit

$$\beta_\tau=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^{[\tau n!]},$$

alors les nombres β_τ sont algébriquement indépendants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan: *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967.

[2] P.L. Cijsouw: *Transcendence measures*, Akademisch Proefschrift, Amsterdam, 1972.

[3] A. Durand: *Un critère de transcendance*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 15e année, 1973/1974, n° G 11, 9p.

[4] W.M. Schmidt: Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *68* (1962) 475–478.

[5] E. Wirsing: Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, *J. für reine und angew. Math. 206* (1961) 67–77.

(Oblatum 14–V–1976)

U.E.R. des Sciences de Limoges
Département de Mathématiques
123, rue Albert Thomas
87100 Limoges