COMPOSITIO MATHEMATICA

MAURICE MIGNOTTE

MICHEL WALDSCHMIDT

Approximation simultanée de valeurs de la fonction exponentielle

Compositio Mathematica, tome 34, nº 2 (1977), p. 127-139

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1977__34_2_127_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 34, Fasc. 2, 1977, pag. 127–139
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

APPROXIMATION SIMULTANÉE DE VALEURS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Maurice Mignotte et Michel Waldschmidt

Résumé

D'après un théorème classique de transcendance, si $\{x_1, x_2\}$ et $\{y_1, y_2, y_3\}$ sont des ensembles de nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, l'un dex six nombres $\exp(x_iy_j)$, $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$ est transcendant. Nous montrons que ces nombres $\exp(x_iy_j)$ ne peuvent être simultanément très bien approchés par des nombres algébriques.

I. Introduction

On sait que la méthode de Gel'fond, qui utilise des équations différentielles, permet d'étudier l'approximation simultanée de nombres complexes par des nombres algébriques (mentionnons les travaux de Franklin et Schneider [6] sur α, β, α^{β}).

Poursuivant une étude de Shorey [7], nous utilisons la méthode de Schneider (dans laquelle il n'y a pas de dérivées) pour étudier l'approximation simultanée des nombres

$$\exp(x_iy_j), (1 \le i \le d, 1 \le j \le \ell),$$

quand $\{x_1, \ldots, x_d\}$ et $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$ sont des ensembles de nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, avec $\ell d > \ell + d$.

II. Enoncé du théorème et conséquences

Quand α est un nombre algébrique de dénominateur $d(\alpha)$ ($d(\alpha)$ est le plus petit entier $d > 0$ tel que $d.\ \alpha$ soit entier algébrique), nous notons $\overline{|\alpha|}$ le maximum des valeurs absolues des conjugués de α, et nous appelons taille de α le nombre

$$t(\alpha) = \operatorname{Log}\{\tau\overline{|\alpha|} + d(\alpha)\}.$$

THEOREME: *Soient $\{x_1, \ldots, x_d\}$ et $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$ deux ensembles de nombres complexes linéairement indépendants sur le corps des nombres rationnels; soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ des nombres réels vérifiant*

$$\sigma_1 + \cdots + \sigma_d = (d-1)\ell,\ 1 < \sigma_i \leq \ell \text{ pour } i = 1, \ldots, d.$$

On suppose que, pour tout d-uple non nul $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ d'entiers, et pour tout ℓ-uple non nul $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_\ell)$ d'entiers, on a

(i) $$-\operatorname{Log}|\underline{\lambda} \cdot \underline{x}| \ll |\underline{\lambda}|^{\ell-\sigma^*/\ell-\sigma_*} \operatorname{Log}|\underline{\lambda}|,$$

et

(ii) $$-\operatorname{Log}|\underline{k} \cdot \underline{y}| \ll |\underline{k}| \cdot \operatorname{Log}|\underline{k}|,$$

où nous avons noté

$$\underline{\lambda} \cdot \underline{x} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_d x_d,\ |\underline{\lambda}| = \max|\lambda_i|,$$
$$\underline{k} \cdot \underline{y} = k_1 y_1 + \cdots + k_\ell y_\ell,\ |\underline{k}| = \max|k_j|,$$
$$\sigma^* = \max \sigma_i,\ \sigma_* = \min \sigma_i.$$

Alors il existe une constante positive C (effectivement calculable) telle que, si les α_{ij} $(1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell)$ sont des nombres algébriques, et N un entier vérifiant

(iii) $$D \cdot \max_{1 \leq j \leq \ell} t(\alpha_{ij}) \leq N^{\sigma_i - 1} \operatorname{Log} N, \text{ pour } 1 \leq i \leq d,$$

et

$$D \leq N^{\ell - \sigma^* + 1},$$

où

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{d\ell}) : \mathbb{Q}],$$

on ait

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{\ell} |e^{x_i y_j} - \alpha_{ij}| > \exp(-CN^\ell \operatorname{Log} N).$$

REMARQUE: Les hypothèses (i) et (ii) constituent des mesures d'indépendance linéaire de $x_1, \ldots, x_d$ et $y_1, \ldots, y_\ell$ respectivement. Si $t_1, \ldots, t_m$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur

$\mathbb{Q}$, qui sont des logarithmes de nombres algébriques, ou bien des exponentielles de nombres algébriques, ou encore des puissances d'un même nombre transcendant du type $\operatorname{Log}\alpha$, α algébrique, on a (cf. [1], [6], [3]):

$$-\operatorname{Log}|\underline{h}\cdot\underline{t}| \ll \operatorname{Log}|\underline{h}| \text{ pour } \underline{h}\in\mathbb{Z}^m,\ |\underline{h}|\to\infty.$$

Si $t_1,\ldots,t_m$ sont des puissances d'un même nombre transcendant de la forme α^β, ou $\operatorname{Log}\alpha/\operatorname{Log}\beta$, α et β algébriques, on a [2]:

$$-\operatorname{Log}|\underline{h}\cdot\underline{t}| \ll (\operatorname{Log}|\underline{h}|)^2.$$

NOTATIONS: Pour énoncer les corollaires, nous utiliserons la notation suivante. Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ sont des nombres algébriques, nous poserons:

$$D(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu) = [\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu):\mathbb{Q}],$$

$$S(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu) = \max t(\alpha_j).$$

COROLLAIRE 1: *Soient x_1, x_2 d'une part, et y_1, y_2, y_3 d'autre part des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On suppose que, pour λ entier non nul, on a*

$$-\operatorname{Log}\left\|\lambda\cdot\frac{x_1}{x_2}\right\| \ll |\lambda|\cdot\operatorname{Log}|\lambda|,$$

(où $\|x\|$ est la distance de x à l'entier le plus proche), et que, pour $\underline{k}\in Z^3$, $\underline{k}\neq\underline{0}$, on a

$$-\operatorname{Log}|\underline{k}\cdot\underline{y}| \ll |\underline{k}|\operatorname{Log}|\underline{k}|.$$

Alors il existe une constante C (calculable) telle que, si $\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{2,3}$ sont six nombres algébriques, avec

$$D(\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{2,3}) = D,\ S(\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{2,3}) = S,\ DS\geq 2,$$

on ait

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}|e^{x_iy_j}-\alpha_{i,j}| \geq \exp\left(-C\frac{D^6S^6}{(\operatorname{Log}DS)^5}\right).$$

Dans le cas particulier $x_1 = \operatorname{Log}2$, $x_2 = \pi\operatorname{Log}2$, $y_j = \pi^{j-1}$, ce resúltat améliore légérement celui de Shorey [7].

Pour démontrer le corollaire 1, il suffit d'appliquer le théorème avec $d = 2$, $\ell = 3$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 3/2$, $N = [DS/\operatorname{Log}DS]^2+1$.

COROLLAIRE 2: *Soient u_1 et u_2 deux nombres complexes, tels que* 1, u_1, u_2 *soient linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$, *et tels que*

$$-\operatorname{Log}|\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3| \ll |\underline{\lambda}|^{1/2} \operatorname{Log}|\underline{\lambda}| \textit{ pour } \underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^3, |\underline{\lambda}| \to \infty.$$

Soient β_1, β_2 deux nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Pour tout ϵ positif, il existe une constante C positive telle que, si $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{2,2}$ sont quatre nombres algébriques, on ait

$$|\beta_1^{u_1} - \alpha_{1,1}| + \beta_2^{u_1} - \alpha_{1,2}| + |\beta_1^{u_2} - \alpha_{2,1}| + |\beta_2^{u_2} - \alpha_{2,2}| \geq \exp(-CD^6 S^{4+\epsilon}),$$

où $D = D(\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{2,2})$, et $S = S(\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{2,2})$.

Démonstration du corollaire 2:

Prenons $d = 3$, $\ell = 2$, $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, $x_3 = 1$, $y_j = \operatorname{Log}\beta_j$. Nous sommes amenés à distinguer deux cas, selon que D est, ou non, grand par rapport à S.

(a) Si $D \leq S^{\epsilon/8}$, on choisit $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3}{2} - \epsilon/32$, $\sigma_3 = 1 + \epsilon/16$, et $N = [S^2 + \epsilon/2/\operatorname{Log} S]$; (il n'y a pas de restriction à supposer $\epsilon < 4$).

(b) Dans le cas contraire, on définit N par la relation $[N(\operatorname{Log} N)^3] = C_0[D^3 S^3]$, avec une constante $C_0 > 2$ bien choisie.

Alors $N^2 \operatorname{Log} N \leq C_0^2 D^6 S^4 (\operatorname{Log} DS)^{-5}$. On pose ensuite

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 1 + (\operatorname{Log} N)^{-1} \cdot \operatorname{Log}(DS/\operatorname{Log} N), \sigma_3 = 4 - 2\sigma_1.$$

Ainsi $DS \leq N^{\sigma_i - 1} \operatorname{Log} N$ pour $i = 1, 2$, et $D \cdot \max\{t(\beta_1), t(\beta_2)\} \leq N^{\sigma_3 - 1} \operatorname{Log} N$. L'hypothèse $S^{\epsilon/8} \leq D$ entraîne $\sigma_3 \geq 1 + \epsilon/32$. Les σ_i appartiennent donc à l'intervalle $[1 + \epsilon/32, \frac{3}{2}]$. La constante C du théorème est une fonction continue des σ_i; elle est donc bornée sur le compact considéré. On obtient par conséquent dans ce cas

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |\beta_j^{u_j} - \alpha_{i,j}| \geq \exp(-CD^6 S^4 (\operatorname{Log} DS)^{-5}).$$

Notons que, pour démontrer le corollaire 2 dans le cas (b), on peut éviter l'argument de compacité en découpant l'intervalle $[1 + \epsilon/32, \frac{3}{2}]$ en intervalles de longueur $\leq \epsilon/32$.

COROLLAIRE 3: *Soit v un nombre complexe irrationnel satisfaisant*

$$-\operatorname{Log}\|\lambda \cdot v\| \ll |\lambda|^{1/2} \textit{ pour } \lambda \in \mathbb{Z}, |\lambda| \to \infty.$$

Soient γ_1, γ_2, γ_3 trois nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C = C(\epsilon) > 0$ tel que, si α_1, α_2, α_3 sont des nombres algébriques de taille au plus S et de degré commun $D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq D$, on ait

$$|\gamma_1^v - \alpha_1| + |\gamma_2^v - \alpha_2| + |\gamma_3^v - \alpha_3| \geq \exp(-CD^6S^{3+\epsilon}).$$

Ainsi, si a, b, c, d sont des nombres algébriques tels que $\operatorname{Log} a$, $\operatorname{Log} b$, $\operatorname{Log} c$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants et $\operatorname{Log} d/\operatorname{Log} c$ soit irrationnel, pour tout ϵ positif, il existe $C > 0$ possédant la propriété suivante: si α, β sont des nombres algébriques de taille $\leq S$, on a

$$\left|\exp\left(\frac{\operatorname{Log} a \operatorname{Log} d}{\operatorname{Log} c}\right) - \alpha\right| + \left|\exp\left(\frac{\operatorname{Log} b \operatorname{Log} d}{\operatorname{Log} c}\right) - \beta\right| \geq \exp(-CD^6S^{3+\epsilon}),$$

où $D = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) \colon \mathbb{Q}]$. Ce genre de résultat avait été annoncé par Shorey [7].

Démonstration du corollaire 3:

On choisit d'abord $d = 2$, $\ell = 3$; $x_1 = v$, $x_2 = 1$; $y_j = \operatorname{Log} \gamma_j$. Puis, comme plus haut, on distingue les cas $D \leq S^{\epsilon/8}$ et $D > S^{\epsilon/8}$. Dans le deuxième cas, on obtient la borne

$$\exp(-CD^6S^3(\operatorname{Log} DS)^{-5}).$$

Les détails sont laissés au lecteur.

COROLLAIRE 4: *Soient t_1, t_2 deux nombres complexes dont les logarithmes sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe un nombre réel η positif et un corps de nombres K tels que, pour entier S suffisamment grand, il existe deux éléments α_1, α_2 de K, de taille majorée par S, tels que*

$$|t_i - \alpha_i| < \exp(-S^{2+\eta}), (i = 1, 2). \tag{1}$$

Alors, si β_1, β_2 sont deux nombres algébriques tels que $\operatorname{Log} t_1$, $\operatorname{Log} \beta_1$, $\operatorname{Log} \beta_2$ *soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, l'un des nombres*

$$\exp\left(\operatorname{Log} \beta_1 \cdot \frac{\operatorname{Log} t_2}{\operatorname{Log} t_1}\right), \exp\left(\operatorname{Log} \beta_2 \cdot \frac{\operatorname{Log} t_2}{\operatorname{Log} t_1}\right)$$

est transcendant.

On utilise le théorème avec $d=3$, $\ell=2$, $\sigma_1=2-\eta/3$, $\sigma_2=\delta_3=1+\eta/6$, avec $\eta<1$. Il reste à vérifier les conditions (i) et (ii). On a en fait beaucoup mieux. L'hypothèse (1) implique

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Log}|\lambda_1 \operatorname{Log} t_1 + \lambda_2 \operatorname{Log} \beta_1 + \lambda_3 \operatorname{Log} \beta_2| \gg -\exp((\operatorname{Log}|\underline{\lambda}|)^{1/2})$$

et

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Log}|k_1 \operatorname{Log} t_1 + k_2 \operatorname{Log} t_2| \gg -\exp((\operatorname{Log}|\underline{k}|)^{1/2}).$$

Pour démontrer (2), on choisit pour S la partie entière du nombre $\exp((\operatorname{Log}|\underline{\lambda}|)^{1/2}/2)$. On a alors, pour une détermination convenable de $\operatorname{Log}\alpha_1$,

$$\operatorname{Log}|\operatorname{Log} t_1 - \operatorname{Log}\alpha_1| \ll -S^{2+\eta}.$$

Par ailleurs, l'application des résultats de [8] fournit:

$$\operatorname{Log}|\lambda_1 \operatorname{Log}\alpha_1 + \lambda_2 \operatorname{Log}\beta_1 + \lambda_3 \operatorname{Log}\beta_2| \gg -S^2.$$

D'où la relation (2). On démontre (3) de manière analogue.

III. Quelques lemmes

a. Construction d'une fonction auxiliaire

LEMME 1: *Soient ρ, $\mu_1, \ldots, \mu_d$, μ, ξ, C_0, ϵ des nombres réels, avec $\mu>0$, $0<\epsilon<\xi$, $C_0 = 6\max(2/\epsilon, \mu+\xi)$ et $d \geq 2$, vérifiant*

$$\mu_1 + \cdots + \mu_d = 0, 0 \leq \mu/d + \mu_h \leq \mu - \xi\rho, (1 \leq h \leq d).$$

Soient $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions entières, d'ordre au plus égal à ρ. Soient enfin des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de module $\leq A$. Alors il existe une suite de polynômes $(P_N(X_1, \ldots, X_d))_{N \geq N_0}$, dont les coefficients sont de la forme $p_1\alpha_1 + \cdots + p_k\alpha_k$, où les p sont des entiers non tous nuls de valeur absolue $\leq H$, le degré de P_N par rapport à X_h étant au plus égal à L_h, avec

$$\operatorname{Log} H = \frac{1}{C_0 k} N^{\mu} \operatorname{Log} N, L_h = [C_0^{2/d} \cdot N^{(\mu/d)+\mu_h}], (1 \leq h \leq d),$$

qui possède la propriété suivante. Pour tout nombre complexe z vérifiant $1 \leq |z| \leq N^{\xi}$, on a la majoration

$$\operatorname{Log}|P_N(f_1(z),\ldots,f_d(z))| \le N^\mu \operatorname{Log}|z| - (\xi-\epsilon)N^\mu \operatorname{Log} N + k \operatorname{Log} A.$$

C'est une variante de la proposition 1 de [5].

b. Sur les polynômes exponentiels

LEMME 2: *Soit une fonction de la forme*

$$E(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu \exp(\alpha_\nu z).$$

Posons

$$a = \max_{0\le\nu<n}(|\alpha_\nu|, 1);\ a_1 = \min_{0\le\nu'<n} \prod_{\substack{0\le\nu<n\\ \nu\ne\nu'}} |\alpha_\nu - \alpha_{\nu'}|^{1/n},$$

$$a_2 = \min_{0\le\nu<\nu'<n}(|\alpha_\nu - \alpha_{\nu'}|^{1/n}, 1).$$

Alors on a la majoration

$$\max|A_\nu| \le 2\cdot n!\cdot\left(\frac{6a}{a_1a_2}\right)^n |E|_1,\ où\ |E|_1 = \sup_{|z|=1}|E(z)|.$$

La démonstration de ce résultat est essentiellement contenue dans [4].

c. Une forme effective du théorème de l'élément primitif

LEMME 3: *Soit $K = \mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ un corps de nombres de degré d. Alors il existe des entiers $a_2,\ldots,a_k$, avec $0\le a_i\le d(d-1)/2$ pour $i=2,\ldots,k$, tels que le nombre $\alpha = \alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k$ engendre K (i.e. $K=\mathbb{Q}(\alpha)$).*

Nous ne traiterons que le cas $k=2$, le résultat général s'en déduit par récurrence. Soit donc $K=\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2)$. Le corps K admet d plongements distincts dans $\mathbb{C}$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_d$. Un élément η de K engendre K si les $\sigma_i(\eta)$ sont deux à deux distincts. Considérons les éléments $\beta_n = \alpha_1 + n\alpha_2$, pour $0\le n\le d(d-1)/2$. Nous allons montrer que l'un des β_n est tel que $\sigma_i(\beta_n)\ne\sigma_j(\beta_n)$ si $i\ne j$. Remarquons d'abord que, pour $i\ne j$, on a $\sigma_i(\alpha_h)\ne\sigma_j(\alpha_h)$ pour $h=1$ ou $h=2$; en effet, dans le cas contraire, on aurait $\sigma_i=\sigma_j$. Considérons maintenant le polynôme

$$P(X) = \prod_{i<j}(\sigma_i(\alpha_1+X\alpha_2) - \sigma_j(\alpha_1+X\alpha_2)).$$

D'après ce qui précède, P n'est pas nul; il admet donc au plus $d(d-1)/2$ racines. D'où l'existence de n tel que $0 \leq n \leq d(d-1)/2$, et $P(n) \neq 0$. L'élément $\alpha = \beta_n$ est un générateur de K.

COROLLAIRE: *Avec les notations ci-dessus, si les α_i sont de taille inférieure ou égale à T et admettent ∂ comme dénominateur commun, alors l'élément α admet ∂ comme dénominateur, et sa taille est majorée par*

$$T + \operatorname{Log}(kd^2\partial).$$

d. Minorations de produits

LEMME 4: *Soient b un nombre réel, et $N \geq 2$ un entier. Alors*

$$\prod_{j=1}^{N} |j+b| \geq \frac{\|b\|}{2}\left(\left[\frac{N-2}{2}\right]!\right)^2,$$

où $\|x\|$ est la distance de x à l'entier le plus proche.

Démonstration:

Soit p l'entier tel que $|p+b| \leq 1$ et $|p+1+b| \leq 1$. Alors

$$|p+b|\,|p+1+b| \geq \tfrac{1}{2}\|b\|.$$

De plus, pour tout entier p' différent de p et de $p+1$, on a

$$|p'+b| \geq |p-p'| - 1.$$

D'où la minoration

$$\prod_{j=1}^{N} |j+b| \geq \tfrac{1}{2}\|b\| \cdot \min_{0 \leq m \leq N-2} (m!(N-2-m)!) = \frac{\|b\|}{2} \frac{(N-2)!}{\binom{N-2}{\left[\frac{N-2}{2}\right]}}.$$

COROLLAIRE 1: *Soient b un nombre réel et N un entier ≥ 2. Alors on a*

$$\prod_{1 \leq i,j \leq N} |i+jb| \geq \|b\|\|2b\| \cdots \|Nb\| \frac{\left(\left[\frac{N-2}{2}\right]!\right)^{2N}}{2^N}.$$

COROLLAIRE 2: *Soient b un nombre algébrique irrationnel, et N un entier ≥ 2. Alors il existe une constante $c = c(b)$, effective, telle que*

$$\operatorname{Log}\Bigl(\prod_{1\le i,j\le N}|i+jb|\Bigr)\ge N^2\operatorname{Log}N-cN^2.$$

Il suffit, dans la minoration du corollaire 1, d'utiliser le théorème de Liouville: $\|kb\|\ge c_0/k^{\deg b}$.

IV. Démonstration du thèorème

Quitte à diviser tous les y_j et à multiplier tous les x_i par $\max_{1\leqslant j\leqslant \ell}|y_j|$, on peut supposer $|y_j|\leqslant 1$ pour $1\leqslant j\leqslant \ell$.

Soit N_0 un entier suffisamment grand. On notera γ, $c_1,\ldots,c_5$ des constantes $\geqslant 1$, indépendantes de N_0, la constante γ étant suffisamment grande. Soient $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{dl}$ des nombres algébriques appartenant à un corps de nombres K de degré D sur $\mathbb{Q}$, et soit α (dont l'existence résulte du lemme 3 et de son corollaire) tel que $K=\mathbb{Q}(\alpha)$, et $t(\alpha)\le \operatorname{Log}(\ell dD^2)+(\ell d+1)\max_{i,j}t(\alpha_{ij})$. Soit N le plus petit entier vérifiant

$$\gamma\cdot D\cdot\max_{1\le j\le\ell}t(\alpha_{ij})\le N^{\sigma_i-1}\cdot\operatorname{Log}N \text{ pour } 1\le i\le d,$$

et

$$\gamma\cdot D\le N^{\ell-\sigma^*+1}.$$

Etant donné que l'hypothèse (iii) implique $N\ge 2$ et que, pour tout réel T positif, les nombres algébriques de taille et de degré majorés par T constituent un ensemble fini, il n'y a pas de restriction à supposer $N\ge N_0$.

Commençons par construire une fonction auxiliaire F_N en utilisant le lemme 1 avec le choix suivant des paramètres:

$$\rho=1;\ \mu_i=\frac{d-1}{d}\ell-\sigma_i,\ (1\le i\le d);\ \mu=\ell;\ \xi=\min\sigma_i;$$

$$\epsilon=\tfrac14\min(1,\xi-1);\ k=D;\ \alpha_j=\alpha^{j-1},\ (1\le j\le D);$$

$$\operatorname{Log}A=Dt(\alpha);\ f_i(z)=\exp(x_iz),\ (1\le i\le d).$$

La fonction

$$F_N(z)=P_N(f_1(z),\ldots,f_d(z))=\sum_{\underline{\lambda}}\sum_{h=1}^{D}p(\underline{\lambda},h)\alpha_h\exp\{(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_dx_d)z\}$$

construite au lemme 1 vérifie alors, pour $|z|\le N$,

$$\operatorname{Log}|F_N(z)|\le-(\xi-1-\epsilon)N^\ell\operatorname{Log}N+D^2t(\alpha)\le-\epsilon N^\ell\operatorname{Log}N,$$

avec

$$\max |p(\underline{\lambda}, h)| \leq H, \text{où } \operatorname{Log} H = \frac{1}{C \cdot D} N^{\ell} \operatorname{Log} N.$$

Comme $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, la fonction F_N n'est pas identiquement nulle, donc il existe un plus grand entier $M \geq N$ vérifiant

$$\operatorname{Log} |F_N|_M \leq -\epsilon M^{\ell} \operatorname{Log} M.$$

Nous allons d'abord montrer l'existence d'une constante c_1 telle que

$$M \leq c_1 N.$$

On utilise pour cela le lemme 2, avec

$$F_N(z) = E(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu \exp(\alpha_\nu z),$$

où

$$n = (L_1 + 1) \ldots (L_d + 1), L_h = [C_0^{2/d} \cdot N^{\ell - \sigma_h}], (1 \leq h \leq d),$$

$$\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\} = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_d x_d ; 0 \leq \lambda_i \leq L_i\},$$

et, pour $\alpha_\nu = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_d x_d$,

$$A_\nu = \sum_{h=1}^{D} p(\lambda_1, \ldots, \lambda_d, h) \alpha_h, p(\underline{\lambda}, h) \in \mathbb{Z}.$$

Les A_ν sont des nombres algébriques non tous nuls, de degré $\leq D$, tels que

$$D \cdot t(A_\nu) \leq D^2 t(\alpha) + D \operatorname{Log}(DH) \leq 3\epsilon N^{\ell} \operatorname{Log} N.$$

D'après l'inégalité de la taille, on a

$$\operatorname{Log}(\max_{0 \leq \nu < n} |A_\nu|) \geq -6\epsilon N^{\ell} \operatorname{Log} N.$$

Le lemme 2 donne:

$$-6\epsilon N^{\ell} \operatorname{Log} N \leq 2n \operatorname{Log} n - n \operatorname{Log}(a_1 a_2) + \operatorname{Log} |F_N|_1 + 0(n),$$

(on a majoré $\operatorname{Log}(n! a^n)$ par $n \operatorname{Log} n + n \operatorname{Log}(\Sigma |x_i| L) \leq 2n \operatorname{Log} n$), où

$$a_2 = \min(1, \min_{\lambda \neq \lambda'} |(\underline{\lambda} - \underline{\lambda}') \cdot \underline{x}|^{1/n}), a_1 = \min_{\underline{\lambda}} \left(\prod_{\underline{\lambda}' \neq \lambda} |(\underline{\lambda} - \underline{\lambda}') \cdot \underline{x}|^{1/n} \right).$$

On vérifie facilement l'inégalité (voir lemme 4):

$$\operatorname{Log} a_1 \geq c_2 \left(\frac{n}{L_*} \operatorname{Log} a_2 - \operatorname{Log} n\right),$$

où

$$L_* = \min L_i = C_0^{2/d} \cdot N^{\ell - \sigma^*}.$$

Comme $n \leq 2C_0^2 N^\ell$, et que l'hypothèse (i) entraîne

$$-n \operatorname{Log} a_2 \ll N^{\ell-\sigma^*} \operatorname{Log} N,$$

on obtient

$$\operatorname{Log} |F_N|_1 \geq -c_3 N^\ell \operatorname{Log} N.$$

On en déduit l'existence de la constante c_1 (prendre $c_1 = (c_3/\epsilon)^{1/\ell}$). On remarquera que c_1 est indépendante de γ et de N.

D'après l'hypothèse (ii) faite sur les nombres $\underline{k} \cdot \underline{y}$, il existe une constante c_4 telle que

$$\min_{\underline{k}} \prod_{\underline{k}' \neq \underline{k}} |(\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{y}| \geq \exp(-c_4 N^\ell \operatorname{Log} N),$$

pour $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$, $\max |k_i| \leq M$, et $\underline{k}' \in \mathbb{Z}^\ell$, $\max |k_i'| \leq M$.

Supposons que la relation

$$\sum |\exp(x_i y_j) - \alpha_{ij}| \leq \exp(-c_5 N^\ell \operatorname{Log} N)$$

ait lieu, avec

$$c_5 \geq (c_4 + \tfrac{3}{2}) c_1^\ell + 6 d c_1^\ell C_0^{2/d}.$$

Nous voulons obtenir une contradiction.

Soit z un élément de l'ensemble

$$S_M = \{\underline{k} \cdot \underline{y};\ \underline{k} \in \mathbb{Z}^\ell, \max |k_j| \leq M\}.$$

Montrons déjà que le nombre

$$\phi(z) = \sum_{\underline{\lambda}} \sum_{h=1}^{D} p(\underline{\lambda}, h) \alpha_h \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{ij}^{\lambda_i k_j}$$

est nul. On remarque que $\phi(z)$ est un élément de K dont la taille vérifie

$$\begin{aligned} Dt(\phi(z)) &\leq D \operatorname{Log} H + D^2(t(\alpha)+1) + c_1^\ell \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{\gamma} L_i N^{\sigma_i} \operatorname{Log} N + D \operatorname{Log} L_i\right) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} 2 d c_1^\ell C_0^{2/d} N^\ell \operatorname{Log} N; \end{aligned}$$

d'autre part, l'hypothèse faite conduit à la majoration

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}|F_N(z)-\phi(z)| &\leq D\operatorname{Log} H+\operatorname{Log}(HA)\\ &\quad + c_1^{\ell}\sum_{i=1}^{d}(L_iN^{\sigma_i}\operatorname{Log} N+2D\operatorname{Log} L_i)-c_5N^{\ell}\operatorname{Log} N\\ &\leq (2dc_1^{\ell}C_0^{2/d}-c_5)N^{\ell}\operatorname{Log} N\\ &< -4dc_1^{\ell}C_0^{2/d}N^{\ell}\operatorname{Log} N.\end{aligned}$$

On choisit $\gamma > (4/\epsilon)dc_1^{\ell}C_0^{2/d}$. Alors le nombre $\phi(z)$ ne vérifie pas l'inégalité de la taille; donc il est nul. De plus, on obtient

$$\operatorname{Log}|F_N(z)| \leq -(c_4+\tfrac{3}{2})M^{\ell}\operatorname{Log} M.$$

On utilise alors une formule d'interpolation pour majorer F_N sur le disque de rayon $M+1$. Les calculs sont identiques à ceux de [5], fin du paragraphe 4 (avec $q_M = c_4\operatorname{Log} M$). On obtient

$$\operatorname{Log}|F_N|_{M+1} \leq -\epsilon(M+1)^{\ell}\operatorname{Log}(M+1),$$

ce qui contredit le choix de M. D'où le théorème.

RÉFÉRENCES

[1] A. BAKER: A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms; I. *Acta Arith. 21* (1972) 117–129; II, *Acta Arith. 24* (1973) 33–36; III. *Acta Arith.* (à paraître).

[2] P. L. CIJSOUW: *Transcendence measures*, Academisch Proefschrift. Amsterdam, 1972; 107 p.

[3] P. L. CIJSOUW: Transcendence measures of exponentials and logarithms of algebraic numbers; *Compositio Math. 28* (1974) 163–178.

[4] K. MAHLER: On a class of entire functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18* (1967) 83–96.

[5] M. MIGNOTTE et M. WALDSCHMIDT: Approximation des valeurs de fonctions transcendantes. *Proc. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A 78* (1975) 213–223. (= Indag. Math., 37, fasc. 3).

[6] TH. SCHNEIDER: *Introduction aux nombres transcendants.* Springer, Berlin, 1957, et Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[7] T. N. SHOREY: On the sum $\Sigma_{k=1}^{3}|2^{\pi^k}-\alpha_k|$, α_k algebraic numbers. *J. Number Theory 6* (1974) 248–260.

[8] H. M. STARK: *Further advances in the theory of linear forms in logarithms*, Diophantine approximation and its applications (edited by Charles F. Osgood). Academic Press, 1973, 255–293.

(Oblatum 4-VIII-1975)

Maurice Mignotte
Université Louis Pasteur
Centre de Calcul
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Mathématiques, T. 45–46
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05

Added in proof

Our theorem implies, for every integer $p \geq 3$, that if $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ are algebraic numbers of size at most 5 and $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) : \mathbb{Q}]$ then

$$\sum_{k=1}^{p} |2^{\pi^k} - \alpha_k| > \exp(-c(Ds)^t(\operatorname{Log} Ds)^{1-t})$$

where c is a constant depending only on p and $t = t(p) =$ if p is odd then $(p+1)(p+3)(p^2-5)^{-1}$ else $(p+2)^2(p^2-4)^{-1}$. This improves slightly a result of S. Srinivasan (*Indian J. Pure Appl. Math.*, *5* (1974) p. 513–523).