COMPOSITIO MATHEMATICA

R. CAUTY

Convexité topologique et prolongement des fonctions continues

Compositio Mathematica, tome 27, nº 3 (1973), p. 233-271

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__27_3_233_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 27, Fasc. 3, 1973, pag. 233–271
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

CONVEXITÉ TOPOLOGIQUE ET PROLONGEMENT DES FONCTIONS CONTINUES

R. Cauty

Introduction

Nous nous proposons de démontrer dans ce papier un certain nombre de théorèmes de prolongement. Notre principal outil est une généralisation de la méthode par laquelle Dugundji [4] a prouvé que les espaces vectoriels topologiques localement convexes ont la propriété d'extension par rapport aux espaces métriques, et que Borges étendit ensuite aux espaces stratifiables [1] (Voir le paragraphe 1 pour la définition des termes utilisés dans cette introduction). Pour pouvoir appliquer cette démonstration à un espace X, il n'est pas nécessaire que X soit un e.v.t.; il suffit qu'il existe une fonction continue $\varphi : X \times X \times I \to X$ jouissant de propriétés convenables. Ceci mène à la notion d'espace topologiquement convexe (T.C.) et, plus généralement, à celle d'espace topologiquement localement convexe (T.L.C.). Nous donnerons divers exemples d'espaces TLC ainsi que des théorèmes de stabilité concernant ces espaces; nous utiliserons ces résultats, en les combinant avec des théorèmes de plongement, pour démontrer, entre autres, que tout CW-complexe est un R.A.V. (stratifiable) et que le produit symétrique n-ième d'un R.A.V. (métrique) est un R.A.V. (métrique). Les espaces TLC peuvent également être utilisés pour démontrer d'autres types de résultats, par example que, si X et Y ont le type d'homotopie de CW-complexes, il en est de même de leur joint $X * Y$. Il est intéressant de remarquer que de nombreux théorèmes sur les rétractes absolus de voisinage se généralisent aux rétractes de voisinage des espaces TLC. Nous n'étudions pas ce phénomène dans ce papier car les modifications à apporter aux démonstrations sont en général évidentes, cependant cela explique certaines similitudes entre la théorie des R.A.V. (métrique) et celle des CW-complexes.

Au paragraphe 1, nous donnons quelques théorèmes et exemples concernant les espaces TLC. Au paragraphe 2, nous montrons que, si L est un complexe simplicial, alors le cône K de base L est TC; pour cela, nous construisons une structure convexe très particulière qui nous permet également d'obtenir quelques résultats intéressants sur la topologie des complexes simpliciaux. Au paragraphe 3, nous étudions le cas des A-espaces (espaces dans lesquels toute intersection d'ouverts est ouverte), ce qui nous permet d'obtenir un théorème concernant la comparaison des homomorphismes induits sur les groupes d'homotopie et d'homologie singulière par deux applications d'un espace X dans un autre espace Y. Au paragraphe 4, nous étudions les limites inductives de suites de RAV (compact). Au paragraphe 5, nous démontrons que le produit symétrique n-ième d'un RAV (métrique) est un RAV (métrique). Au paragraphe 6, nous étudions le joint de deux espaces topologiques X et Y; en particulier, nous montrons que si X et Y ont le type d'homotopie de CW-complexes, il en est de même de leur joint.

1. Premières propriétés des espaces topologiquement convexes

1.1. DÉFINITION: Soit Q une classe d'espaces topologiques. Nous dirons qu'un espace X a la propriété d'extension (locale) par rapport à Q si, pour tout espace Y appartenant à Q et tout fermé A de Y, toute fonction continue de A dans X peut se prolonger à Y (resp. à un voisinage de A dans Y). Nous dirons que X est un R.A. (Q) (resp. R.A.V. (Q)) si X appartient à Q et si, pour tout espace Y appartenant à Q, tout fermé de Y homéomorphe à X est un rétracte (resp. rétracte de voisinage) de Y.

1.2. DÉFINITION: Un espace topologique X sera dit ULC s'il existe un voisinage ouvert U de la diagonale Δ de $X \times X$ et une application φ : $U \times I \to X (I = [0, 1])$ continue et vérifiant les conditions suivantes:
(i) $\varphi(x, y, 0) = x$ et $\varphi(x, y, 1) = y$ quel que soit (x, y) appartenant à U.
(ii) $\varphi(x, x, t) = x$ quels que soient x appartenant à X et t appartenant à I.
Si, en outre, φ vérifie la condition
(iii) Tout point x de X a une base de voisinages V tels que $V \times V$ soit contenu dans U et que $\varphi(V \times V \times I)$ soit contenu dans V, nous dirons que X est un espace (topologiquement) localement convexe, ou TLC. Si $U = X \times X$, nous dirons, selon le cas, que X est UC ou que X est (topologiquement) convexe (TC).

Les sous-ensembles V de X tels que $V \times V$ soit contenu dans U et que $\varphi(V \times V \times I)$ soit contenu dans V seront dits convexes. Lorsque cette précision s'avèrera nécessaire, nous parlerons de l'espace TLC (X, φ) ainsi que d'ensembles φ-convexes.

1.3. DÉFINITION: Un espace topologique X sera dit stratifiable s'il est séparé et si l'on peut associer à tout ouvert U de X une suite $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts de X de façon à avoir

(a) $\overline{U}_n \subset U$ quel que soit n
(b) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$
(c) $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$ quel que soit n.

Une telle correspondance est appelée une stratification de X; elle est dite croissante si $U_n \subset U_{n+1}$ quels que soient U et n. Pour les propriétés des espaces stratifiables, le lecteur est renvoyé à [1]. En particulier, nous utiliserons souvent implicitement le fait qu'un espace stratifiable est un R.A. (stratifiable) (resp. RAV (stratifiable)) si, et seulement si, il a la propriété d'extension (locale) par rapport aux espaces stratifiables.

Le théorème suivant, qui est une version renforcée du théorème de prolongement de Dugundji [4], indique le lien qui existe entre les notions précédentes et joue un rôle fondamental dans ce papier.

1.4. THÉORÈME: *Soient X un espace TC, Y un espace stratifiable et A un sous-ensemble fermé de Y. Notons X^A (resp. X^Y) l'espace des fonctions continues de A (resp. Y) dans X. Alors, il y a une fonction $\vartheta : X^A \to X^Y$ vérifiant*
(i) *$\vartheta(f)$ est un prolongement de f à Y, quel que soit f appartenant à X^A.*
(ii) *Si X^A et X^Y sont tous deux munis de la topologie compacte-ouverte ou de la topologie de la convergence simple, alors ϑ est continue.*

Ce résultat est démontré par Borges [1] dans le cas ou X est un e.v.t. localement convexe. Des modifications simples (laissées au lecteur) permettent d'appliquer cette démonstration au cas présent.

1.5. COROLLAIRE: *Tout espace TLC a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces stratifiables.*

DÉMONSTRATION: Il résulte du théorème 1.4. que tout point d'un espace TLC a un voisinage possédant la propriété d'extension par rapport aux espaces stratifiables. Puisque les espaces stratifiables sont paracompacts, le corollaire découle d'un résultat de Hanner ([8], théorème 19.2.).

Les exemples les plus évidents d'espaces TC sont les sous-ensembles convexes d'e.v.t. localement convexes. Cependant, il existe des espaces TC, tels que le suivant, ne ressemblant guère à des sous-ensembles convexes d'e.v.t.

1.6. EXEMPLE: Nous allons construire un espace topologiquement convexe (X, φ) vérifiant
(i) X est stratifiable.
(ii) X est un groupe dont l'inverse est continu et la multiplication continue par rapport à la deuxième variable, donc X est homogène.
(iii) Le complémentaire de chaque point de X a quatre composantes connexes; chacune d'elles est φ-convexe, donc contractile.

(iv) Tout sous-ensemble de X homéomorphe à un ouvert de X est ouvert dans X.

Soient $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de $\boldsymbol{R}^2$. Soit X l'ensemble des chemins f: $[0, a] \to \boldsymbol{R}^2 (0 \leqq a < \infty)$ vérifiant
α) $f(0) = 0$
β) Il existe une subdivision finie $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = a$ de $[0, a]$ telle que, pour $t_i \leqq t \leqq t_{i+1}$, on ait:

$$f(t) = f(t_i) + (t - t_i)v_i$$

où v_i est l'un des quatre vecteurs e_1, $-e_1$, e_2, $-e_2$, et qu'en outre $v_{i+1} \neq -v_i$ quel que soit i.

Si a est un réel et $i = 1, 2$, nous noterons ae_i le chemin f: $[0, |a|] \to \boldsymbol{R}^2$ défini par

$$f(t) = t \frac{a}{|a|} e_i.$$

Ce chemin appartient à X. Le chemin $0e_1 = 0e_2$ sera noté 0. Si f: $[0, a] \to \boldsymbol{R}^2$ et g : $[0, b] \to \boldsymbol{R}^2$ sont deux éléments de X, nous noterons $f+g$ le chemin défini comme suit. Soit c le plus grand nombre $\leqq a, b$ tel que

$$f(a)+g(t) = f(a-t) \text{ quel que soit } t \leqq c.$$

Alors, $f+g$: $[0, a+b-2c] \to \boldsymbol{R}^2$ est défini par

$$(f+g)(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leqq t \leqq a-c \\ f(a)+g(t+2c-a) & a-c \leqq t \leqq a+b-2c \end{cases}$$

On vérifie facilement que $+$ est une loi de groupe (non commutatif) sur X, l'inverse de f: $[0, a] \to \boldsymbol{R}^2$ étant le chemin $-f$: $[0, a] \to \boldsymbol{R}^2$ défini par

$$(-f)(t) = f(a-t) - f(a).$$

Nous définissons une topologie sur X en convenant qu'un sous-ensemble U de X est ouvert si, et seulement si, quel que soit f appartenant à U, il y a un $\varepsilon > 0$ tel que $f+ae_i$ appartienne à U pour $|a| < \varepsilon$ et $i = 1,2$. Il est clair que, pour cette topologie, le passage à l'inverse est continu et que la multiplication est continue par rapport à la deuxième variable (mais pas par rapport à la première).

Si f est un élément non nul de X, nous noterons D_f l'ensemble des chemins de X de la forme $f+ae_f$ où a est un réel et e_f celui des vecteurs e_1, e_2 qui est orthogonal au dernier segment composant f. Pour $i = 1, 2$, nous noterons D_i l'ensemble des chemins de la forme $ae_i (a \in \boldsymbol{R})$. L'application $\vartheta_f : a \rightsquigarrow f+ae_f (\vartheta_i : a \rightsquigarrow ae_i)$ est un homéomorphisme de $\boldsymbol{R}$ sur D_f (resp. D_i) envoyant 0 sur f (resp. 0). Il est clair que X est réunion de D_1, D_2 et des D_f. Plus précisément, chaque élément de X appartient à exactement deux des droites D_1, D_2 et D_f; nous les appellerons les droites passant par f. Alors, un sous-ensemble U de X est ouvert si, et seulement si, pour tout point f de U et toute droite D passant par f, $D \cap U$ est un voisinage de f dans D. Dans les démonstrations qui suivent, nous conviendrons, pour abréger, que si $f = 0$, alors D_f est l'une quelconque des deux droites D_1, D_2 et ϑ_f l'un quelconque des homéomorphismes ϑ_1, ϑ_2. Les $D_f (f \in X)$ seront appelées les droites de X.

Soit $f\colon [0, a] \to \boldsymbol{R}^2$ un élément de X. Nous noterons $l(f)$ le plus petit entier n pour lequel il y a une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = a$ de $[0, a]$ vérifiant (β)(la subdivision correspondante est la seule pour laquelle on a aussi $v_{i+1} \neq v_i$). Alors, $l(f) = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Nous allons définir une stratification $U \rightsquigarrow \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X. Pour définir U_n, nous définirons $U_n \cap D_f$ par récurrence sur $l(f)$. Pour ce faire, posons d'abord, pour tout ouvert U de $\boldsymbol{R}$ et tout entier $n \geqq 1$:

$$U_n = \left\{x \in \boldsymbol{R}/d(x, \boldsymbol{R}\backslash U) > \frac{1}{n}\right\}$$

$$U_n' = U_n \cup \left\{x \in \boldsymbol{R}/d(x, 0) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) d(0, \boldsymbol{R}\backslash U)\right\}$$

$$U_n'' = U_n \backslash \left\{x \in \boldsymbol{R}/d(0, x) \leqq \frac{1}{n}\right\}.$$

Alors, U_n, U_n' et U_n'' sont ouverts et l'on a:

$$\begin{gathered} U_n'' \subset U_n \subset U_n' \subset \overline{U}_n' \subset U \\ U_n \subset U_{n+1},\ U_n' \subset U_{n+1}',\ U_n'' \subset U_{n+1}'' \\ U = \bigcup_n U_n' \end{gathered} \tag{1}$$

et $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$, $U_n' \subset V_n'$ et $U_n'' \subset V_n''$.
Alors, si U est un ouvert de X et si $l(f) = 0$, nous posons

$$U_n \cap D_f = \vartheta_f((\vartheta_f^{-1}(U))_n').$$

Si $l(f) = p+1$ et si $U_n \cap D_f$ est défini pour $l(f) \leqq p$, nous posons

$$U_n \cap D_f = \vartheta_f((\vartheta_f^{-1}(U))_n')$$

si, g étant l'unique élément de X tel que $l(g) = p$ et que f appartienne à D_g, f appartient à $U_n \cap D_g$, et

$$U_n \cap D_f = \vartheta_f((\vartheta_f^{-1}(U))_n'')$$

dans le cas contraire.

D'après ces définitions, si f appartient à U_n et si D est une droite passant par f, alors $D \cap U_n$ est un voisinage de f dans D, donc U_n est ouvert dans X. Il est facile de vérifier que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ et que $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$. Pour montrer que $\overline{U}_n$ est contenu dans U, il suffit de remarquer, en raisonnant par récurrence sur $l(f)$, que, d'après la construction de U_n, si f appartient à $0_n = X \backslash (\bigcup_{g \in X} (\overline{U_n \cap D_g})) = \bigcup_{g \in X} (D_g \backslash (\overline{D_g \cap U_n}))$ et si D est une droite passant par f, alors $0_n \cap D$ est un voisinage de f dans D. Il en résulte facilement que $\overline{U}_n = X \backslash 0_n$. D'après les relations (1), $X \backslash 0_n$ est contenu dans U. Ceci montre que $U \rightsquigarrow \{U_n\}$ est une stratification de X.

Définissons $\varphi : X \times X \times I \to X$ comme suit. Soient $f : [0, a] \to \boldsymbol{R}^2$ et $g : [0, b] \to \boldsymbol{R}^2$ deux éléments de X; soit $c = c(f, g)$ le plus grand nombre $\leqq a, b$ tel que $f(t) = g(t)$ quel que soit $t \leqq c$. Alors, pour $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$, $\varphi(f, g, t) : [0, (1-2t)a + 2tc] \to \boldsymbol{R}^2$ est donné par

$$\varphi(f, g, t)(s) = f(s) \quad 0 \leqq s \leqq (1-2t)a + 2tc,$$

et, pour $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$, $\varphi(f, g, t) : [0, (2-2t)c + (2t-1)b] \to \boldsymbol{R}^2$ est donné par

$$\varphi(f, g, t)(s) = g(s) \quad 0 \leqq s \leqq (2-2t)c + (2t-1)b.$$

Il est clair que φ vérifie $\varphi\ (f, g, 0) = f$, $\varphi(f, g, 1) = g$ et $\varphi(f, f, t) = f$ quel que soit t.

Pour montrer que φ est une structure convexe sur X, nous allons construire une base particulière de voisinages de chaque point f de X, les voisinages distingués de f. Notons que la structure de groupe permet d'écrire chaque droite D_h de X sous la forme $f + D_g (g = (-f) + h)$; $f + D_g$ est une droite passant par f si, et seulement si, $l(g) = 0$. Pour définir un voisinage distingué V, nous définirons $V \cap (f + D_g)$ par récurrence sur $l(g)$. Si $l(g) = 0$, $V \cap (f + D_g)$ sera un intervalle ouvert contenant f. Soit $l(g) = p + 1$ et supposons $V \cap (f + D_{g'})$ défini pour $l(g') \leqq p$. Alors, il y a un chemin g' unique tel que $l(g') = p$ et que $D_{g'}$ contienne g. Nous poserons $V \cap (f + D_g) = \emptyset$ si $f + g$ n'appartient pas à $V \cap (f + D_{g'})$, et nous prendrons pour $V \cap (f + D_g)$ un intervalle ouvert contenant $f + g$ dans le cas contraire. Il est clair que les voisinages distingués de f forment une base de voisinages de f. Soit V un voisinage distingué de f; notant $[0, a(g)]$ le domaine de définition d'un élément g de V, posons $L(V) = \sup_{g \in V} |a(f) - a(g)|$. Il est clair qu'en prenant des intervalles suffisamment petits pour construire V, on peut rendre $L(V)$ arbitrairement petit.

On montre facilement que, si V est un voisinage distingué de f, alors $\varphi(V \times V \times I)$ est contenu dans V. Il est également facile de vérifier que si $f = \varphi(f, g, \frac{1}{2}) \neq g$ et si V, V' sont des voisinages distingués de f

et g respectivement tels que $V \cap V' = \emptyset$, alors $\varphi(V \times V' \times [0, \frac{1}{2}]) \subset V$. Il en résulte que $\varphi | X \times X \times [0, \frac{1}{2}]$ est continue en tout point (f, g, t) tel que $f = \varphi(f, g, \frac{1}{2})$. Soit maintenant $f \neq \varphi(f, g, \frac{1}{2})$. Soit d'abord $0 < t_0 \leqq \frac{1}{2}$; alors, $\varphi(f, g, t_0) \neq f$. Soit U un voisinage de $\varphi(f, g, t_0)$ et soient V, V', V'' des voisinages distingués de $\varphi(f, g, t_0)$, f et g resp. tels que $V \subset U$ et $V \cap V' = V' \cap V'' = \emptyset$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que, si $0 \leqq a' \leqq a$ et si $|a' - ((1-2t_0)a + t_0 c)| < \varepsilon$, alors $f | [0, a']$ appartient à V. Quitte à restreindre V' et V'', nous pouvons supposer que $L(V') < \varepsilon/2$ et $L(V'') < \varepsilon/2$. On vérifie alors que, si $f' \in V'$, $g' \in V''$, et si $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ vérifie $2|t_0 - t|(a+c) < \varepsilon/2$, on a $|c(f', g') - c(f, g)| < \varepsilon/2$ et que $\varphi(f', g', t)$ est de la forme $f | [0, a']$ où $|a' - ((1-2t_0)a + 2t_0 c)| < \varepsilon$, donc appartient à V; ceci prouve la continuité de $\varphi | X \times X \times [0, \frac{1}{2}]$ au point (f, g, t_0). Soit maintenant $t_0 = 0$ et soit V un voisinage distingué de $f = \varphi(f, g, 0)$ ne contenant pas $\varphi(f, g, \frac{1}{2})$. Puisque $f \neq \varphi(f, g, \frac{1}{2})$, on a $f \neq 0$, donc il existe un unique élément h distinct de f tel que f appartienne à D_h. Soient V' et V'' des voisinages distingués de f et g respectivement tels que $V' \cap V'' = \emptyset$, $V' \subset V$, $L(V') < \varepsilon/4$ et $L(V'') < \varepsilon/4$, où ε est tel que l'intervalle ouvert de D_h de centre f et de longueur 2ε soit contenu dans V. Alors, si $f' \in V'$ et $g' \in V'$, on a $|c(f', g') - c(f, g)| < \varepsilon/4$ et, si $[0, a']$ est le domaine de définition de f', on voit que, pour $|t| < \varepsilon/4(a-c)$, $\varphi(f', g', t)$ est de la forme $f' | [0, a_1]$, avec $|a_1 - a| = |((1-2t)a' + 2tc(f', g')) - a| < \varepsilon$. Puisque f' appartient à V', il appartient à V ainsi que $f' | [0, a-\varepsilon] = f | [0, a-\varepsilon]$; mais ceci implique que, pour $a - \varepsilon \leqq b \leqq a'$, $f' | [0, b]$ appartient à V. Par suite, $\varphi(V' \times V'' \times [0, \varepsilon/4(a-c)])$ est contenu dans V, donc $\varphi | X \times X \times [0, \frac{1}{2}]$ est continue au point $(f, g, 0)$. Ceci montre que $\varphi | X \times X \times [0, \frac{1}{2}]$ est continue. On montre de même que $\varphi | X \times X \times [\frac{1}{2}, 1]$ est continue. Par conséquent, φ est une structure convexe sur X.

Les autres propriétés de X se vérifient facilement.

Dans la proposition suivante, comme dans tout le reste de ce papier, si X et Y sont des espaces topologiques, nous noterons Y^X l'espace des fonctions continues de X dans Y muni de la topologie compacte-ouverte.

1.7. PROPOSITION: *Si Y est un espace TLC et X un espace compact, alors Y^X est un espace TLC.*

DÉMONSTRATION: Soit $\varphi : U \times I \to Y$ comme dans la définition 1.2. Posons

$$V = \{(f, g) \in Y^X \times Y^X / (f(x), g(x)) \in U \text{ quel que soit } x \in X\}.$$

V contient évidemment la diagonale de $Y^X \times Y^X$. Soit (f_0, g_0) appartenant à V. Alors, si x est un point arbitraire de X, $(f_0(x), g_0(x))$ appartient à U ce qui permet de trouver des voisinages ouverts U_x et V_x de $f_0(x)$

et $g_0(x)$ respectivement dans Y tels que $U_x \times V_x$ soit contenu dans U. Soit W_x un voisinage de x dans X tel que $f_0(\overline{W}_x)$ soit contenu dans U_x et $g_0(\overline{W}_x)$ contenu dans V_x. Recouvrons X par un nombre fini de W_x, soit $W_{x_1}, \cdots, W_{x_n}$ et posons

$$O = \bigcap_{i=1}^{n} M(\overline{W}_{x_i}, U_{x_i}) \text{ et } O' = \bigcap_{i=1}^{n} M(\overline{W}_{x_i}, V_{x_i})$$

où $M(A, B) = \{f \in Y^X / f(A) \subset B\}$ pour $A \subset X$ et $B \subset Y$. Alors $O \times O'$ est un voisinage de (f_0, g_0) dans $Y^X \times Y^X$. Soit (f, g) appartenant à $O \times O'$. Si x est un point de X, x appartient à l'un des W_{x_i}, donc $f(x)$ appartient à U_{x_i} et $g(x)$ appartient à V_{x_i}; par suite, $(f(x), g(x))$ appartient à $U_{x_i} \times V_{x_i} \subset U$. Il en résulte que $O \times O'$ est contenu dans V, ce qui montre que V est ouvert dans $Y^X \times Y^X$.

Définissons alors $\psi : V \times I \to Y^X$ par

$$\psi(f, g, t)(x) = \varphi(f(x), g(x), t).$$

Il est clair que ψ est continue et vérifie $\psi(f, g, 0) = f$, $\psi(f, g, 1) = g$ et $\psi(f, f, t) = f$ pour f, g dans Y^X et t dans I. Il reste à montrer que toute fonction f appartenant a Y^X a un système fondamental de voisinages convexes. Tout voisinage de f contient un voisinage de la forme

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} M(C_i, U_i)$$

où C_i est un compact de X et U_i un ouvert de Y. Pour tout point x de C_i, on peut trouver un voisinage convexe V_x^i de $f(x)$ contenu dans U_i. Soit W_x^i un voisinage de x dans X tel que $f(\overline{W_x^i})$ soit contenu dans l'intérieur de V_x^i. Recouvrons C_i par un nombre fini d'ensembles W_x^i, soit $W_1^i, \cdots, W_{n_i}^i$(on écrit W_j^i au lieu de $W_{x_j}^i$ et V_j^i au lieu de $V_{x_j}^i$). Alors

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n_i} M(\overline{W}_j^i, V_j^i)$$

est un voisinage de f contenu dans A. Soit en outre, pour tout x appartenant à X, O_x un voisinage convexe de $f(x)$ dans Y et soit R_x un voisinage de x dans X tel que $f(\overline{R_x}) \subset O_x$. Recouvrons X par un nombre fini d'ensembles R_x, soit $R_1, \cdots, R_m$(nous écrivons R_k et O_k au lieu de R_{x_j} et O_{x_j} resp.). Alors

$$C = \bigcap_{k=1}^{m} M(R_k, O_k)$$

est un voisinage de f. Montrons que $B \cap C$ est convexe. Si g, h appartiennent à $B \cap C$ et si x est un point de X, alors il y a un k tel que x appartienne à $\overline{R_k}$; par suite, $(g(x), h(x))$ appartient à $O_k \times O_k$, qui est contenu dans U d'après la convexité de O_x. Ceci montre que (g, h) appartient à V; en outre, la convexité de O_k implique que, si x appartient à $\overline{R_k}$, alors $\psi(g, h, t)\ (x) = \varphi(g(x), h(x), t)$ appartient à O_k pour tout t. De même, $\psi(g, h, t)$ appartient à $M(\overline{W}_j^i, V_j^i)$ pour $i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n_i$, ce qui montre que $B \cap C$ est convexe.

1.8. PROPOSITION: *Si Y est un espace TC et X un espace localement compact, alors Y^X est un espace TC.*

DÉMONSTRATION: Il suffit de vérifier que la fonction $\psi : Y^X \times Y^X \times I \to Y^X$ définie par

$$\psi(f, g, t)(x) = \varphi(f(x), g(x), t)$$

remplit les conditions de la définition 1.2., ce qui se démontre comme la proposition précédente.
Si X est un espace pointé, nous noterons $*$ son point base, et si $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'espaces pointés, nous noterons $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ la somme de cette famille dans la catégorie des espaces pointés.

1.9. THÉORÈME: *Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces TC pointés. Supposons que, pour chaque α appartenant à A, il existe une fonction continue $u_\alpha : X_\alpha \to I$ vérifiant $u_\alpha^{-1}(0) = *$. Alors, $X = \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ est TC.*

DÉMONSTRATION: Notons φ_α la structure convexe de $X_\alpha (\alpha \in A)$. Définissons une fonction $\lambda : X \times X \to X$ par

$$(1) \quad \lambda(x, y) = \begin{cases} \varphi_\alpha\left(x, y, \dfrac{u_\alpha(x)}{u_\alpha(x)+u_\alpha(y)}\right) & \text{si } x \text{ et } y \text{ appartiennent à un même } X_\alpha \text{ et si } (x, y) \neq (*, *) \\ * & \text{sinon} \end{cases}$$

Si x, y appartiennent à X_α, X_β respectivement, alors $\lambda(x, y)$ appartient à $X_\alpha \cap X_\beta$, donc on peut définir $\varphi : X \times X \times I \to X$ par

$$(2) \quad \varphi(x, y, t) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x, \lambda(x, y), 2t) & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ \varphi_\beta(\lambda(x, y), y, 2t-1) & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases} \quad x \in X_\alpha,\ y \in X_\beta$$

Il est clair que $\varphi(x, y, 0) = x$ et $\varphi(x, y, 1) = y$. Comme $\lambda(x, x) = x$, on a $\varphi(x, x, t) = x$ pour tout point x de X et tout t dans I. Il n'y a donc plus qu'à vérifier la continuité de φ et la convexité locale.

Notons que si x, y sont deux points de X_α, alors $\lambda(x, y)$ appartient à $\varphi_\alpha(x \times y \times I)$, donc, si V est un sous-ensemble de X_α convexe par rapport à φ_α, on en déduit que V est φ-convexe. Tout point de $X_\alpha \setminus \{*\}$ a un système fondamental de voisinages contenus dans $X_\alpha \setminus \{*\}$ et φ_α-convexes; d'après ce qui précède, un tel voisinage est φ-convexe. Soit U un voisinage de $*$

dans X. Alors, quel que soit α, $U \cap X_\alpha$ contient un voisinage V_α de $*$ dans X_α qui est φ_α-convexe. L'ensemble $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ est un voisinage de $*$ dans X contenu dans U. En outre, si (x, y) appartient à $V_\alpha \times V_\beta$, alors $\lambda(x, y)$ appartient à $V_\alpha \cap V_\beta$, donc, d'après (2) et la convexité de V_α et V_β, $\varphi(x, y, t)$ appartient à $V_\alpha \cup V_\beta \subset V$ quel que soit t. Ceci montre que V est φ-convexe.

Nous avons donc prouvé que tout point de X a un système fondamental de voisinages φ-convexes; ceci implique la continuité de φ en tout point de $X \times X \times I$ de la forme (x, x, t).

Nous allons montrer que $\varphi | X \times X \times [0, \frac{1}{2}]$ est continue; la continuité de $\varphi | X \times X \times [\frac{1}{2}, 1]$ se démontrerait de façon analogue. D'après la remarque précédente, il suffit de vérifier la continuité aux points de la forme (x, y, t) où $x \neq y$. Notons d'abord, ce qui est évident d'après (1), que $\lambda | X_\alpha \times (X_\alpha \backslash \{*\})$ et $\lambda | (X_\alpha \backslash \{*\}) \times X_\alpha$ est continue pour tout α, donc $\varphi | (X_\alpha \backslash \{*\}) \times X_\alpha \times I$ est continue. Distinguons deux cas.

1er cas : x appartient à $X_\alpha \backslash \{*\}$. Alors $(X_\alpha \backslash \{*\}) \times X$ est un voisinage de (x, y) dans $X \times X$ et $\varphi((X_\alpha \backslash \{*\}) \times X \times [0, \frac{1}{2}])$ est contenu dans X_α; on vérifie facilement que

$$\varphi | (X_\alpha \backslash \{*\}) \times X \times [0, \tfrac{1}{2}] = (\varphi | (X_\alpha \backslash \{*\}) \times X_\alpha \times [0, \tfrac{1}{2}]) \circ (id \times r_\alpha \times id)$$

où r_α est la rétraction canonique de X sur X_α. Ceci montre la continuité en tout point (x, y, t) tel que $x \neq *$ et $x \neq y$.

2ème cas : $x = *$ et $y \in X_\alpha \backslash \{*\}$. Alors, $\lambda(x, y) = x$, donc $\varphi(x, y, t) = x$ pour $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$. Soit U un voisinage de $*$ dans X; alors quel que soit β, $U \cap X_\beta$ contient un voisinage U_β de $*$ dans X_β qui est φ_β-convexe. La continuité de $\lambda | X_\alpha \times (X_\alpha \backslash \{*\})$ permet de trouver un voisinage φ_α-convexe, V_α, de $*$ dans X_α et un voisinage W de y dans $X_\alpha \backslash \{*\}$ tels que $\lambda(V_\alpha \times W)$ soit contenu dans U_α. Alors $V = V_\alpha \cup \bigcup_{\beta \neq \alpha} U_\beta$ est un voisinage de $*$ dans X et W est un voisinage de y dans X. Soient x', y' des points de V et W respectivement. Si x' appartient à U_β, alors $\lambda(x', y') = *$ appartient à U_β, donc $\varphi(x', y', t)$ appartient à U_β pour $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ d'après (2) et la convexité de U_β par rapport à φ_β. Si x' appartient à V_α, alors $\lambda(x', y')$ appartient à U_α, donc $\varphi(x', y', t)$ appartient à U_α d'après la convexité de U_α. On voit donc que $\varphi(V \times W \times [0, \frac{1}{2}])$ est contenu dans U, d'où la continuité en $(*, y, t)$.

1.10. Corollaire: *Soient K un espace compact, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces pointés et soit $X = \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$. Si les X_α sont des RAV (métrique), alors X^K a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces stratifiables.*

Démonstration: Chaque X_α peut être plongé comme fermé dans un sous-ensemble convexe Y_α d'un espace normé. Alors, X_α est un rétracte d'un de ses voisinages ouverts, O_α dans Y_α. D'après le théorème 1.9., $Y = \bigvee_{\alpha\in A} Y_\alpha$ est TC. Puisque X est un rétracte de l'ouvert $O = \bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha$ de Y, X^K est un rétracte de O^K. Mais O^K est ouvert dans Y^K, qui est TC d'après la proposition 1.8. D'après le théorème 1.4., le corollaire en résulte.

Il est connu que si chaque point d'un espace paracompact X a un voisinage ULC, alors X est ULC. Il serait intéressant de savoir si la propriété analogue est vraie pour les espaces TLC. Nous allons montrer que ces résultats sont faux pour les espaces collectivement normaux.

1.11. Exemple: La demi-droite d'Alexandroff n'est pas ULC. (Rappelons la construction de la demi-droite d'Alexandroff L. Soit S l'ensemble des ordinaux dénombrables. Alors L est le produit $S\times[0, 1[$, privé du point $(0, 0)$, muni de l'ordre lexicographique et de la topologie à lui associée. Il est connu que L est une variété de dimension un). Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il y ait un voisinage U de la diagonale de $L\times L$ et une fonction continue $\varphi : U\times I \to L$ vérifiant $\varphi(x, y, 0) = x$, $\varphi(x, y, 1) = y$ et $\varphi(x, x, t) = x$ pour $(x, y)\in U$ et $0 \leqq t \leqq 1$. Montrons d'abord que, quel que soit x appartenant à L, il y a un $y \geqq x$ tel que (x, y) n'appartienne pas à U. En effet, dans le cas contraire, on pourrait déformer L en $J = \{z\in L/z \leqq x\}$ par l'homotopie

$$\psi(y, t) = \begin{cases}\varphi(x, y, 1-t) & y \geqq x \\ y & y \leqq x\end{cases} \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Comme J est homéomorphe à un intervalle semi-ouvert. il est contractile. On en déduirait donc que L est contractile, mais il est connu que ceci est faux.

On peut donc trouver une suite $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ de points de L telle que $x_i \leqq x_{i+1}$ et que (x_i, x_{i+1}) n'appartienne pas à U quel que soit i. Cette suite a une limite x dans L. Puisque U est un voisinage de la diagonale, il y a un voisinage V de x tel que $V\times V$ soit contenu dans U. Pour tout i assez grand, x_i appartient à V, donc (x_i, x_{i+1}) appartient à $V\times V \subset U$ contrairement à la définition de la suite $\{x_i\}$. L n'est donc pas ULC.

Soit Q une classe d'espaces collectivement normaux. O. Hanner [8] a montré que si chaque point d'un espace paracompact X a un voisinage qui a la propriété d'extension locale par rapport à Q, alors X a aussi cette propriété. Il est facile de vérifier que L et $L\times L\times I$ sont héréditairement collectivement normaux et dénombrablement paracompacts. Ce qui précède montre donc que l'on ne peut guère affaiblir les hypothèses du théorème de O. Hanner.

2. Le cas des complexes simpliciaux

Le théorème suivant, et sa démonstration, sont la clef de nos résultats sur les complexes simpliciaux. Par un complexe plein, nous entendons un complexe simplicial K tel que tout ensemble fini de sommets de K détermine un simplexe.

2.1. THÉORÈME: *Tout complexe plein est T.C.*

DÉMONSTRATION: Tout complexe plein K peut être considéré comme un cône $K = L*\omega$ où L est un complexe plein de sommets $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ et ω un sommet n'appartenant pas à L. Chaque point x de K s'écrit alors de façon unique

$$x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha p_\alpha + (1 - \sum_{\alpha \in A} x_\alpha)\omega$$

où $0 \leqq x_\alpha \leqq 1$, $\sum_{\alpha\varepsilon A} x_\alpha \leqq 1$ et où les x_α sont tous nuls sauf un nombre fini. Nous écrirons alors simplement

$$x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}.$$

Définissons une application $\lambda : K \times K \to K$ par

$$\lambda(x, y)_\alpha = \inf(x_\alpha, y_\alpha) \quad \alpha \in A, \tag{1}$$

puis une application $\varphi : K \times K \times I \to K$ par

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2t\lambda(x, y) & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ (2-2t)\lambda(x, y) + (2t-1)y & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Il est clair que $\varphi(x, y, 0) = x$, $\varphi(x, y, 1) = y$ et $\varphi(x. x, t) = x$ pour x, y dans K et t dans I. Nous allons montrer que φ est continue et que chaque point de K a une base de voisinages convexes.

Nous noterons $(p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n})$ le simplexe fermé de sommets $\omega, p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}$. Soit x un point de K et soit O un voisinage ouvert de x dans K. Soit $\sigma_x = (p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n})$ le plus petit simplexe fermé de K contenant à la fois x et ω (éventuellement $\sigma_x = \{\omega\}$). Alors x a, dans σ_x, un voisinage fermé V_{σ_x} contenu dans $O \cap \sigma_x$ de la forme suivante:

$$V_{\sigma_x} = \{y \in \sigma_x / a_{\alpha_i} \leqq y_{\alpha_i} \leqq b_{\alpha_i} \text{ pour } i = 1, \cdots, n\}, \tag{3}$$

où les a_{α_i}. b_{α_i} sont des réels vérifiant $0 \leqq a_{\alpha_i} < b_{\alpha_i} \leqq 1$ $(i = 1, \cdots, n)$. Nous allons définir, pour tout sous-ensemble fini $u = \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ de $A \backslash \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, un nombre $\varepsilon_u > 0$ et un voisinage fermé V_u de x dans $\sigma_u = (p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}, p_{\beta_1}, \cdots, p_{\beta_m})$, contenu dans $O \cap \sigma_u$, de façon que l'on ait, pour tout sous-ensemble v de u:

$$V_u \cap \sigma_v = V_v \tag{4}$$

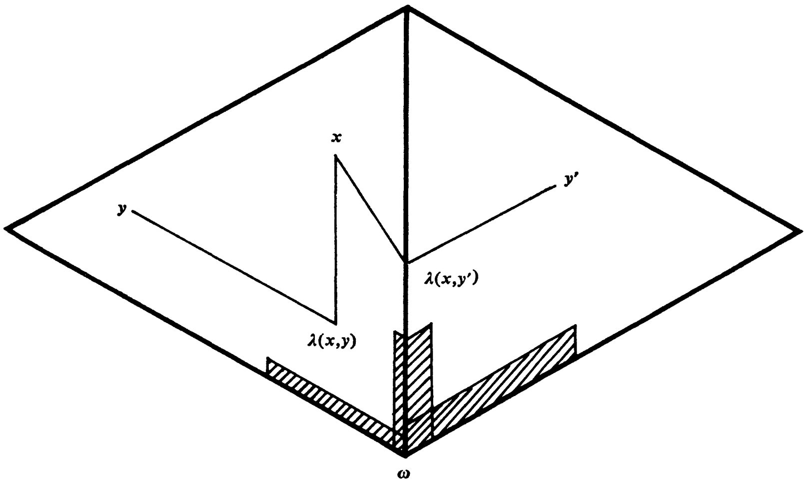

Figure 1 La partie hachurée représente un voisinage distingué de ω.

(5) L'intérieur de V_v dans σ_v est l'intersection de σ_v et de l'intérieur de V_u dans σ_u.

(6) $$\varepsilon_u \leqq \varepsilon_v.$$

Si $\{\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_k}\}$ est un sous-ensemble de u, nous noterons $u_{i_1}, \cdots, {}_{i_k}$ l'ensemble $u \backslash \{\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_k}\}$. Si $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un point de K, nous noterons y^{β_j} le point de K défini par $y_\alpha^{\beta_j} = y_\alpha$ si $\alpha \neq \beta_j$ et $y_{\beta_j}^{\beta_j} = 0$; si y appartient à σ_u, alors y^{β_j} appartient à σ_{u_j}. Posons, pour $0 < \varepsilon < 1$,

(7) $$A_u^{\beta_j}(\varepsilon) = \{y \in \sigma_u / y^{\beta_j} \in V_{u_j} \text{ et } 0 \leqq y_{\beta_j} \leqq \varepsilon\}.$$

Alors, $A_u^{\beta_j}(\varepsilon) \cap \sigma_{u_j} = V_{u_j}$ et nous ajouterons aux hypothèses de récurrence la condition

(8) $$A_u^{\beta_j}(\varepsilon_u) \subset V_u \text{ pour } j = 1, \cdots, m.$$

Pour construire ε_u et V_u, nous raisonnerons par récurrence sur le nombre $n(u)$ d'éléments de u. Si $n(u) = 0$, nous posons $V_u = V_{\sigma_x}$ et $\varepsilon_u = 1$. Supposons la construction faite pour $n(u) = m$ et soit $u = \{\beta_1, \cdots, \beta_{m+1}\}$ avec $n(u) = m+1$.

Alors, pour tout $j = 1, \cdots, m+1$, la compacité de V_{u_j} permet d'affirmer l'existence d'un $\varepsilon_j < 1$ tel que $A_u^{\beta_j}(\varepsilon)$ soit contenu dans $O \cap \sigma_u$ pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_j$. Soit $0 < \varepsilon_u < 1$ tel que $\varepsilon_u \leqq \varepsilon_j$ pour $j = 1, \cdots, m+1$ et $\varepsilon_u \leqq \varepsilon_v$ pour tout sous-ensemble v de u.

Alors, si $j \neq k$ et si y appartient à $A_u^{\beta_j}(\varepsilon_u) \cap \sigma_{u_k}$, y^{β_j} appartient à $V_{u_j} \cap \sigma_{u_k} = V_{u_j} \cap \sigma_{u_j} \cap \sigma_{u_k} = V_{u_j} \cap \sigma_{u_{jk}} = V_{u_k} \cap \sigma_{u_{jk}}$ (d'après (4));

puisqu'en outre $y_{\beta_j} \leqq \varepsilon_u \leqq \varepsilon_{u_k}$, le point y appartient à $A_{u_k}^{\beta_j}(\varepsilon_{u_k})$ qui est contenu dans V_{u_k} (d'après (8)). Par suite, si l'on pose:

$$V_u = \bigcup_{j=1}^{m+1} A_u^{\beta_j}(\varepsilon_u), \tag{9}$$

on a

$$V_u \cap \sigma_{u_j} = (A_u^{\beta_j}(\varepsilon_u) \cap \sigma_{u_j}) \cup (\bigcup_{k \neq j} A_u^{\beta_k}(\varepsilon_u) \cap \sigma_{u_j}) = V_{u_j}.$$

Or, si v est un sous-ensemble propre de u, v est contenu dans l'un des u_j, d'où

$$V_u \cap \sigma_v = V_u \cap \sigma_{u_j} \cap \sigma_v = V_{u_j} \cap \sigma_v = V_v,$$

ce qui vérifie la condition (4).
Comme $V_u \cap \sigma_{u_j} = V_{u_j}$, l'intérieur de V_{u_j} dans σ_{u_j} contient l'intersection de σ_{u_j} avec l'intérieur de V_u dans σ_u; si l'on remarque que l'intérieur de $A_u^{\beta_j}(\varepsilon_u)$ dans σ_u contient l'intérieur de V_{u_j} dans σ_{u_j} (cela résulte du fait que la topologie de σ_u est la moins fine rendant continue la coordonnée d'indice β_j et la rétraction simpliciale de σ_u sur σ_{u_j} qui envoie p_{β_j} sur ω), on voit que l'intérieur de V_{u_j} dans σ_{u_j} est égal à l'intersection de σ_{u_j} avec l'intérieur de V_u dans σ_u; on en déduit immédiatement que V_u vérifie la condition (5).

Ceci achève de construire par récurrence V_u et ε_u. Posons $V = \bigcup_u V_u$ (u parcourant les sous-ensembles finis de $A \setminus \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$). Alors V est contenu dans O et la condition (5) permet d'affirmer que V est un voisinage de x dans K. Tout voisinage de x construit par le procédé précédent sera appelé un 'voisinage distingué' de x. Un voisinage distingué est déterminé par V_{σ_x} et les ε_u, donc nous le noterons $(V_{\sigma_x}, \varepsilon_u)$.

Nous venons de voir que les voisinages distingués forment une base de voisinages de chaque point de K. Nous allons montrer qu'ils sont φ-convexes, i.e. que si y, z appartiennent à $V = (V_{\sigma_x}, \varepsilon_u)$, alors $\varphi(y \times z \times I)$ est contenu dans V. Pour cela, il faut montrer que si y, z sont deux points de V, alors les segments $[y, \lambda(y, z)]$ et $[\lambda(y, z), z]$ sont contenus dans V (nous notons $[a, b]$ le segment d'extrémités a et b, i.e. l'ensemble des points de la forme $(1-t)a+tb$ où $0 \leqq t \leqq 1$). Soit $u(y)$ le plus petit sous-ensemble de $A \setminus \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ tel que $V_{u(y)}$ contienne y (l'existence de $u(y)$ résulte de (4)) et soit $n(y) = n(u(y))$. Nous allons montrer par récurrence sur $n(y)+n(z)$ que $[y, \lambda(y, z)]$ est contenu dans $V_{u(y)}$ et $[\lambda(y, z), z]$ contenu dans $V_{u(z)}$. Si $n(y)+n(z) = 0$, alors y et z appartiennent à $V_{\sigma_x} = V_{u(y)} = V_{u(z)}$ et il en est de même de $\lambda(y, z)$ d'après la définition de λ et (3); comme V_{σ_x} est convexe au sens usuel, $[y, \lambda(y, z)]$ et $[\lambda(y, z), z]$ sont contenus dans V_{σ_x}. Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour $n(y)+n(z) \leqq m$ et soient y, z avec $n(y)+n(z) =$

$m+1$. Si $u(y)$ est vide, i.e. si y appartient à V_{σ_x}, alors $\lambda(y, z)$ appartient à V_{σ_x} (car, en utilisant (3) et (7), on voit par récurrence sur $n(u)$ que les coordonnées de tout point y de V_u vérifient $a_{\alpha_i} \leqq y_{\alpha_i} \leqq b_{\alpha_i}$ pour $i = 1, \cdots, n$), donc le segment $[y, \lambda(y, z)]$ est contenu dans V_{σ_x}. Si $u(y) = \{\beta_1, \cdots, \beta_q\}(q \geqq 1)$, alors il existe $1 \leqq j \leqq q$ tel que y appartienne à $A^{\beta_j}_{u(y)}(\varepsilon_{u(y)})$, i.e. y^{β_j} appartient à $V_{u(y)_j}$ et $y_{\beta_j} \leqq \varepsilon_{u(y)}$. Alors $n(y^{\beta_j}) < n(y)$, donc $n(y^{\beta_j})+n(z) \leqq m$; par suite, $[y^{\beta_j}, \lambda(y^{\beta_j}, z)]$ est contenu dans $V_{u(y)_j}$. D'après la définition de λ, $\lambda(y, z)$ appartient à $\sigma_{u(y)}$ et

$$\lambda(y, z)^{\beta_j} = \lambda(y^{\beta_j}, z) \text{ et } \lambda(y, z)_{\beta_j} \leqq y_{\beta_j} \leqq \varepsilon_{u(y)},$$

donc $\lambda(y, z)$ appartient à $A^{\beta_j}_{u(y)}(\varepsilon_{u(y)})$. Pour voir que $[y, \lambda(y, z)]$ est contenu dans $V_{u(y)}$, il suffit de remarquer que si y, y' sont deux points de $A^{\beta_j}_u(\varepsilon_u)$ et si $[y^{\beta_j}, y'^{\beta_j}]$ est contenu dans V_{u_j}, alors $[y, y']$ est contenu dans $A^{\beta_j}_u(\varepsilon_u)$. On démontrerait de même que $[\lambda(y, z), z]$ est contenu dans $V_{u(z)}$. Par récurrence, ceci achève de démontrer que le voisinage distingué V est convexe.

Il ne reste plus qu'à démontrer la continuité de φ. Nous allons montrer que $\varphi|K\times K\times [0, \frac{1}{2}]$ est continue; la continuité de $\varphi|K\times K\times [\frac{1}{2}, 1]$ résultera alors du fait que $\varphi(x, y, t) = \varphi(y, x, 1-t)$ pour $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$.

Soit (x, y, t) un point de $K\times K\times [0, \frac{1}{2}]$ et soit $z = \varphi(x, y, t)$. Ecrivons

$$\sigma_x = (p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}, p_{\beta_1}, \cdots, p_{\beta_m})$$
$$\sigma_y = (p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}, p_{\gamma_1}, \cdots, p_{\gamma_l})$$

où $\alpha_i \neq \beta_j$, $\alpha_i \neq \gamma_k$ et $\beta_j \neq \gamma_k$ pour $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$ et $k = 1, \cdots, l$. Alors $\sigma_z = (p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n})$ si $t = \frac{1}{2}$ et $\sigma_z = (p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}, p_{\beta_1}, \cdots, p_{\beta_m})$ si $t < \frac{1}{2}$. Soit $W = (W_{\sigma_z}, \varepsilon_u)$ un voisinage distingué de z. Soit $\sigma = (p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n}, p_{\beta_1}, \cdots, p_{\beta_m}, p_{\gamma_1}, \cdots, p_{\gamma_l})$. Comme les coordonnées de φ sont des fonctions continues sur $\sigma_x\times\sigma\times [0, \frac{1}{2}]$, $\varphi|\sigma_x\times\sigma\times [0, \frac{1}{2}]$ est continue; puisqu'en outre $\varphi(\sigma_x\times\sigma\times [0, \frac{1}{2}])$ est contenu dans σ_x, il existe un voisinage U^1 de x dans σ_x, un voisinage U^2 de y dans σ et un voisinage J de t dans $[0, \frac{1}{2}]$ tels que $\varphi(U^1\times U^2\times J)$ soit contenu dans $W\bigcap\sigma_x$. On peut construire des voisinages distingués $V^1 = (V^1_{\sigma_x}, \delta_v)$ et $V^2 = (V^2_{\sigma_y}, \eta_w)$ de x et y respectivement vérifiant

$$(10) \qquad V^1_{\sigma_x} \subset U^1;\ V^2 \cap \sigma \subset U^2$$

(11) $\delta_v < \varepsilon_{v'}$ pour tout sous-ensemble fini v de $A\backslash\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$ où $v' = v$ si $\sigma_z = \sigma_x$ et $v' = v \cap \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ si $\sigma_z \neq \sigma_x$.

(12) Si $w \cap \{\beta_1, \cdots, \beta_m\} \neq \emptyset$, alors $\eta_w \leqq \eta_{w'}$ pour tout sous-ensemble fini w' de $\{\beta_1,, \cdots, \beta_m\}$.

Nous allons montrer que $\varphi(V^1\times V^2\times J)$ est contenu dans W. Si x' appartient à V^1, soit $u(x')$ le plus petit sous-ensemble fini de $A\backslash\{\alpha_1, \cdots,$

$\alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$ tel que x' appartienne à $V^1_{u(x')}$ et soit $n(x') = n(u(x'))$. Nous allons montrer, par récurrence sur $n(x')$, que si y' appartient à V^2 et t' appartient à J, alors $\varphi(x', y', t)$ appartient à $W_{u'(x')}$ où $u'(x') = u(x')$ si $\sigma_z = \sigma_x$ et $u'(x') = u(x') \cup \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ si $\sigma_z \neq \sigma_x$. Pour traiter le cas $n(x') = 0$, nous utiliserons le fait suivant.

2.2. LEMME: *Soit $y' = (y'_\alpha)_{\alpha\in A}$ un point de V^2 et soit $\tilde{y}' = (\tilde{y}'_\alpha)_{\alpha\in A}$ le point défini par $\tilde{y}'_\alpha = y'_\alpha$ si $\alpha \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_l\}$ et $\tilde{y}'_\alpha = 0$ sinon. Alors $\tilde{y}'$ appartient à $V^2 \cap \sigma$.*

DÉMONSTRATION: Il est clair que $\tilde{y}'$ appartient à σ. Pour montrer que $\tilde{y}'$ appartient à V^2, nous allons raisonner par récurrence sur le nombre $m(y')$ d'éléments du plus petit sous-ensemble $v(y')$ de $A\backslash\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_l\}$ tel que y' appartienne à $V^2_{v(y')}$. Si $m(y') = 0$, alors $\tilde{y}' = y'$ appartient à V^2. Supposons le lemme vérifié pour $m(y') \leqq q$ et soit y' avec $m(y') = q+1$. Alors, si $v(y') = \{\delta_1, \cdots, \delta_{q+1}\}$, il existe un $1 \leqq j \leqq q+1$ avec $y' \in A^{\delta_j}_{v(y')}(\varepsilon_{v(y')})$, i.e. y'^{δ_j} appartient à $V^2_{v(y')_j}$ et $y'_{\delta_j} \leqq \eta_{v(y')}$. Si $\delta_j \neq \beta_k$ pour $k = 1, \cdots, m$, alors $\tilde{y}' = \widetilde{y'^{\delta_j}}$ appartient à V^2 d'après l'hypothèse de récurrence; si $\delta_j = \beta_k$, alors $\tilde{y}'_{\tilde{\delta}_j}$ appartient à V^2 et $(\tilde{y}'_{\tilde{\delta}_j})_{\delta_j} = (y'^{\delta_j})_{\delta_j} = 0$, donc, si $v_k = \{\beta_1, \cdots, \hat{\beta}_k, \cdots, \beta_m\}$(le chapeau indiquant que β_k est enlevé), le point $\tilde{y}'_{\delta_j}$ appartient à $V^2 \cap \sigma_{v_k} = V^2_{v_k}$ (d'après (4)). En outre, $\tilde{y}'_{\delta_j} = y'_{\delta_j} \leqq \eta_{v'(y)} \leqq \eta_v$, où $v = \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$, d'après (12); comme $(\tilde{y}')^{\delta_j} = \tilde{y}'_{\tilde{\delta}_j}$, on déduit de ce qui précède que $\tilde{y}'$ appartient à $A^{\delta_j}_v(\eta_v) \subset V^2_v \subset V^2$. Le lemme est démontré

Cela étant, soit x' un point de V^1 avec $n(x') = 0$ et soit y un point de V^2. Puisque x' appartient à σ_x, on a $\lambda(x', y') = \lambda(x', \tilde{y}')$ donc, pour t' dans J on a $\varphi(x', y', t') = \varphi(x', \tilde{y}', t')$. D'après le lemme, $\tilde{y}'$ appartient à $V^2 \cap \sigma \subset U^2$ et, par suite, $\varphi(x', y', t')$ appartient à $\varphi(U^1 \times U^2 \times J) \subset W \cap \sigma_x = W_{u'(x')}$.

Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour $n(x') \leqq q$ et soit x' avec $n(x') = q+1$; si $u(x') = \{\delta_1, \cdots, \delta_{q+1}\}$, il existe un $1 \leqq j \leqq q+1$ tel que x' appartienne à $A^{\delta_j}_{u(x')}(\delta_{u(x')})$, i.e. x'^{δ_j} appartient à $V^1_{u(x')_j}$ et $x'_{\delta_j} \leqq \delta_{u(x')}$. Alors

$$\lambda(x', y')_\alpha = \lambda(x'^{\delta_j}, y')_\alpha \text{ pour } \alpha \neq \delta_j$$
$$\lambda(x', y')_{\delta_j} \leqq x'_{\delta_j} \leqq \delta_{u(x')},$$

donc, d'après la définition de φ,

$$\varphi(x', y', t')_\alpha = \varphi(x'^{\delta_j}, y', t')_\alpha \text{ pour } \alpha \neq \delta_j \tag{13}$$

d'où l'on déduit que

$$\varphi(x', y', t')^{\delta_j} = \varphi(x'^{\delta_j}, y', t'). \tag{14}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, si t' appartient à J, $\varphi(x', y', t')^{\delta_j}$ appartient à

$$W_{u'(x'^{\delta j})} \subset W_{u'(x')_j}.$$

Mais en outre,

$$\varphi(x', y', t')_{\delta_j} = (1-2t')x'_{\delta_j}+2t'\lambda(x', y')_{\delta_j} \leqq \delta_{u(x')} \leqq \varepsilon_{u'(x')}$$

(d'après (11)) donc $\varphi(x', y', t')$ appartient à $A^{\delta_j}_{u'(x')}(\varepsilon_{u'(x')}) \subset W_{u'(x')}$. Ceci achève la récurrence, donc la démonstration du théorème.

Notons que si L' est un sous-complexe de L et si $K' = L' * \omega$ est le cône de base L', il est clair que $\varphi(K' \times K' \times I)$ est contenu dans K', donc nous avons en fait démontré le résultat suivant.

2.3. Théorème: *Si L est un complexe simplicial, le cone de base L est TC.*

On vérifie aussi immédiatement que, si L est un complexe simplicial et A un sous-ensemble quelconque de L, alors le sous-ensemble $B = (L * \omega \backslash L) \cup A$ du cône de base L est convexe. On peut ainsi construire des exemples pathologiques d'espaces TC.

2.4. Corollaire: *Soit K un CW-complexe et soit X un espace compact. Alors K^X a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces stratifiables.*

Démonstration: On peut supposer que K est un rétracte d'un ouvert O d'un complexe simplicial plein L (voir [2]). Alors O^X est un ouvert de L^X. D'après le théorème 2.1 et la proposition 1.8., O^X est TLC, donc a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces stratifiables d'après le corollaire 1.5. Comme K^X est un rétracte de O^X, le corollaire en résulte.

2.5. Théorème: *Soient K, L deux complexes simpliciaux et soient $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ deux familles de sous-complexes de K et L respectivement indexées par le même ensemble d'indices. Alors $A = \bigcup_\lambda K_\lambda \times L_\lambda$ est un* RAV (*stratifiable*).

Démonstration: A est un sous-espace de l'espace stratifiable $K \times L$, donc est stratifiable (voir [1]). Soient K', L' les cônes de base K, L et de sommets ω_1 et ω_2 respectivement. Nous identifions K et L à des sous-espaces de K' et L' respectivement; nous identifions le cône K'_λ (resp. L'_λ) de base K_λ (resp. L_λ) et de sommet ω_1 (resp. ω_2) à un sous-espace de K' (resp. L').

Soit $B = \bigcup_\lambda K'_\lambda \times L'_\lambda \subset K' \times L'$. Alors A est un rétracte de $B \backslash (\omega_1 \times L') \cup (K' \times \omega_2)$ qui est ouvert dans B, donc il suffit de prouver que B est un RAV (stratifiable). Soient $\varphi : K' \times K' \times I \to K'$ et $\psi : L' \times L' \times I$

$\to L'$ les structures convexes définies dans la démonstration du théorème 2.1. Définissons $\chi : (K' \times L') \times (K \times L') \times I \to K' \times L'$ par

$$\chi((x, y), (x', y'), t) = (\varphi(x, x', t), \psi(y, y', t)).$$

Alors χ est une structure convexe sur $K' \times L'$. On a remarqué après la démonstration du théorème 2.1. que, si x, x' appartiennent à K'_λ et si y, y' appartiennent à L'_λ, alors $\varphi(x, x', t)$ appartient à K'_λ et $\psi(y, y', t)$ appartient à L'_λ quel que soit t, d'où l'on déduit que $\chi(B \times B \times I)$ est contenu dans B, ce qui implique que B est TC, donc est un RAV (stratifiable) c.q.f.d.

La fonction φ construite dans la démonstration du théorème 2.1. permet de généraliser aux complexes simpliciaux arbitraires des résultats que l'on ne savait démontrer jusqu'à présent que pour des complexes dénombrables en utilisant des plongements dans des espaces vectoriels munis de la topologie finie. Il en est ainsi du théorème suivant qui a été démontré par J. Dugundji [6] dans deux cas particuliers: (a) X est un k-espace, (b) f et g sont localement finies. (On dit qu'une fonction continue f d'un espace topologique X dans un complexe simplicial K est localement finie si chaque point de X a un voisinage dont l'image par f est contenue dans un sous-complexe fini de K).

2.6. THÉORÈME: *Soit L un complexe simplicial et soient f et g des applications d'un espace topologique X dans L telles que, pour tout point x de X, $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à une même étoile ouverte de L. Alors f et g sont homotopes par une homotopie h vérifiant*

(i) *h est constante sur l'ensemble des points où f et g coïncident.*

(ii) *Pour tout point x de X, $h(x \times I)$ est contenu dans une étoile ouverte de L.*

DÉMONSTRATION: Soient $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ les sommets de L; nous noterons Stp_α l'étoile ouverte de p_α dans L. Soit K le cône de base L et de sommet ω. Soit $\varphi : K \times K \times I \to K$ la structure convexe décrite au théorème 2.1.; nous conservons les notations de la démonstration de ce théorème. Soit r la rétraction naturelle de $K \backslash \{\omega\}$ sur L donnée par

$$r(tx + (1-t)\omega) = x, \quad x \in L, \ 0 < t \leqq 1.$$

Si les points x, y de L appartiennent à Stp_α, alors $\lambda(x, y)_\alpha > 0$, donc $\varphi(x, y, t)_\alpha > 0$ quel que soit t. Par suite, $\varphi(x, y, t)$ est contenu dans $K \backslash \{\omega\}$ et si l'on définit la fonction continue $\psi : (\bigcup_\alpha Stp_\alpha \times Stp_\alpha) \times I \to L$ par

$$\psi(x, y, t) = r(\varphi(x, y, t)),$$

alors $\psi(x, y, t)$ appartient à Stp_α, quels que soient x et y dans Stp_α.

D'autre part, r étant une rétraction, il résulte des propriétés de φ que ψ vérifie

$$\begin{matrix} \psi(x, y, 0) = x, \psi(x, y, 1) = y \\ \psi(x, x, t) = x \end{matrix} \quad (x, y) \in \bigcup_\alpha Stp_\alpha \times Stp_\alpha,\ t \in I.$$

L'homotopie h cherchée peut alors être définie par

$$h(x, t) = \psi(f(x), g(x), t) \quad x \in X,\ t \in I.$$

Soient X, Y deux espaces topologiques et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de Y. On dit que deux applications f, g de X dans Y sont proches d'ordre $\mathscr{U}$ si, quel que soit x appartenant à X, il y a un élément de $\mathscr{U}$ contenant à la fois $f(x)$ et $g(x)$. On dit que f et g sont $\mathscr{U}$-homotopes s'il existe une homotopie $h : X \times I \to Y$ entre f et g telle que, pour tout point x de X, il y ait un élément U de $\mathscr{U}$ contenant $h(x \times I)$.

2.7. Théorème: *Soient X un espace topologique, L un complexe simplicial et f une application de X dans L. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert de L, il existe une application localement finie $g : X \to L$ qui est $\mathscr{U}$-homotope à f.*

Démonstration: Soit L' une subdivision de L plus fine que $\mathscr{U}$, soient $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ les sommets de L' et soit $\psi : (\bigcup_\alpha Stp_\alpha \times Stp_\alpha) \times I \to L'$ l'application définie dans la démonstration du théorème 2.6. Soit $\mathscr{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert localement fini de L' tel que V_α soit contenu dans Stp_α pour tout α. Alors $\mathscr{W} = f^{-1}(\mathscr{V})$ est un recouvrement ouvert localement fini de X admettant des partitions de l'unité, donc il existe une application canonique localement finie h de X dans le nerf $N(\mathscr{W})$ de $\mathscr{W}$; le nerf de $\mathscr{W}$ s'identifie canoniquement à un sous-complexe du nerf $N(\mathscr{V})$ de $\mathscr{V}$, donc nous considérerons h comme une application de X dans $N(\mathscr{V})$. Soit $v : N(\mathscr{V}) \to L'$ l'application simpliciale définie par $v(V_\alpha) = p_\alpha$ et soit $g = v \circ h$. Puisque h est localement finie et v simpliciale, g est localement finie (dans L', donc aussi dans L). Soit x un point de X et soit V_α un élément de $\mathscr{V}$ tel que $h(x)$ appartienne à l'étoile de V_α dans $N(\mathscr{V})$. Alors, h étant canonique, x appartient à $f^{-1}(V_\alpha)$, donc $f(x)$ appartient à $V_\alpha \subset Stp_\alpha$; puisque v est simpliciale, $g(x) = v(h(x))$ appartient à $St\,(v(V_\alpha)) = Stp_\alpha$, donc $f(x)$ et $g(x)$ sont dans une même étoile ouverte de L', ce qui implique que f et g sont homotopes par l'homotopie

$$H(x, t) = \psi(f(x), g(x), t) \quad x \in X,\ t \in I.$$

Puisque $\psi(Stp_\alpha \times Stp_\alpha \times I)$ est contenu dans Stp_α et que L' est plus fine que $\mathscr{U}$, il en résulte que $H(x \times I)$ est contenu dans un élément de $\mathscr{U}$, d'où le théorème.

Il découle de ce théorème et des résultats de [3] que si X est un espace paracompact et A un fermé de X, alors toute fonction $f: A \to L$ est homotope à une fonction $g: A \to L$ qui peut se prolonger à un voisinage de A dans X. Nous allons maintenant démontrer un théorème d'extension des homotopies pour les fonctions localement finies.

2.8. THÉORÈME: *Soit A un fermé d'un espace paracompact X et soit f une fonction localement finie de A dans un complexe simplicial K. Si f est homotope à une fonction de A dans K qui peut être prolongée à X, alors il y a une fonction localement finie $F: X \to K$ qui prolonge f.*

DÉMONSTRATION: Si f est homotope à une fonction de A dans K qui peut se prolonger à X, alors il y a une fonction continue h de $Y = X \times 0 \cup A \times I$ dans K telle que $h(a, 1) = f(a)$ pour tout point a de A. D'après le théorème 2.7., il y a une fonction localement finie h' de Y dans K telle que, quel que soit y appartenant à Y, les points $h(y)$ et $h'(y)$ appartiennent à une même étoile ouverte de K. D'après le théorème 2.6., h et h' sont homotopes et, puisque $h|A \times 1$ et $h'|A \times 1$ sont localement finies, l'homotopie k entre h et h' construite dans la démonstration du théorème 2.6 est telle que $k|A \times 1 \times I$ soit localement finie. Soit $G: Y \to K$ la fonction définie par

$$G(x, 0) = h'(x, 0) \quad x \in X$$

$$G(a, t) = \begin{cases} h'(a, 2t) & a \in A, 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ k(a, 1, 2-2t) & a \in A, \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

Alors G est une fonction localement finie telle que $G(a, 1) = f(a)$. Puisque $X \times I$ est paracompact, G se prolonge en une fonction localement finie G' d'un voisinage 0 de Y dans $X \times I$ (voir [3]). Ce voisinage contient un ensemble de la forme $U \times I$, où U est un voisinage ouvert de A dans X. Soit V un voisinage fermé de A contenu dans U et soit $u: X \to I$ une fonction vérifiant $u(A) = 1$ et $u(X \backslash V) = 0$. Alors la fonction $F: X \to K$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} G'(x, u(x)) & x \in U \\ G(x, 0) & x \in X \backslash V \end{cases}$$

a toutes les propriétés souhaitées.

3. Le cas des A-espaces

Un A-espace est un espace topologique X dans lequel toute intersection d'ouverts est un ouvert; alors, tout point x de X est contenu dans un ouvert minimal U_x et la relation $x \leqq y$ si, et seulement si, x appartient à U_y est une relation de préordre sur X. Inversement, si $\leqq$ est un préordre sur un ensemble X, on fait de X un A-espace en prenant pour base de la topologie de X les ensembles $U_x = \{y \in X | y \leqq x\}$ $(x \in X)$.

3.1. Théorème: *Supposons que le A-espace X vérifie la condition suivante.* (*) *Quels que soient les points x, y de X, s'il y a un élément z de X plus grand que x et y alors $\{x, y\}$ a une borne supérieure $x \vee y$. Alors X est* TLC.

Démonstration: Si le préordre de X n'est pas un ordre, nous conviendrons de choisir, pour tout couple (x, y) de points de X, une borne supérieure fixée de $\{x, y\}$ (s'il en existe), que nous noterons $x \vee y$, et ce, de façon que $x \vee x = x$ quel que soit x.

Soit $U = \bigcup_{x \in X} U_x \times U_x$; alors U est un voisinage ouvert de la diagonale de $X \times X$. Définissons $\chi : U \times I \to X$ par

$$\chi(x, y, t) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leqq t < \frac{1}{2} \\ x \vee y & \text{pour } t = \frac{1}{2} \\ y & \text{pour } \frac{1}{2} < t \leqq 1 \end{cases} \qquad (x, y) \in U$$

Soit $t < \frac{1}{2}$. D'après la définition de χ, il est clair que $\chi(U_x \times U_y \times [0, \frac{1}{2}[)$ est contenu dans $U_x = U_{\chi(x, y, t)}$, ce qui montre la continuité de χ en un point (x, y, t) tel que $t < \frac{1}{2}$. De même, χ est continue en tout point (x, y, t) tel que $t > \frac{1}{2}$. Enfin, notons que si x', y' sont des points de U_x et U_y respectivement, alors $x' \leqq x$ et $y' \leqq y$, donc $x' \vee y' \leqq x \vee y$, d'où l'on déduit aisément que $\chi(U_x \times U_y \times I)$ est contenu dans $U_{x \vee y} = U_{\chi(x, y, \frac{1}{2})}$, ce qui montre la continuité de χ aux points de la forme $(x, y, \frac{1}{2})$. Il est clair que $\chi(x, y, 0) = x$, $\chi(x, y, 1) = y$ et $\chi(x, x, t) = x$ pour tout t. Enfin, on vérifie que $\chi(U_x \times U_x \times I)$ est contenu dans U_x; comme les U_x forment une base de la topologie de X, il en résulte que X est TLC.

3.2. Corollaire: *Soit X un A-espace vérifiant la condition* (*) *du théorème* 3.1., *et soient f et g deux applications continues d'un espace topologique Y dans X telles que, pour tout point y de Y, il y ait un élément x de X vérifiant $f(y) \leqq x$ et $g(y) \leqq x$. Alors f et g sont homotopes par une homotopie qui est constante sur l'ensemble des points où f et g coïncident.*

Démonstration: Dire que $f(y) \leqq x$ et $g(y) \leqq x$, c'est dire que $f(y)$ et $g(y)$ appartiennent à U_x. On peut donc définir l'homotopie h cherchée par $h(y, t) = \chi(f(y)\ g(y), t)(y \in Y, t \in I)$.

Remarques:

1) Un A-espace n'est pas nécessairement ULC. Considérons par exemple l'espace fini E formé des quatre points a, b, c, d, dont la topologie est définie par la relation d'ordre $c \leqq a$, $d \leqq a$, $c \leqq b$, $d \leqq b$. Notons que si X est un A-espace, U un voisinage de la diagonale de $X \times X$ et φ : $U \times I \to X$ une fonction vérifiant $\varphi(x, y, 0) = x$, $\varphi(x, y, 1) = y$ et

$\varphi(x, x, t) = x$, alors, pour tout point x de X, $U_x \times U_x$ est contenu dans U et, d'après la continuité de φ, $\varphi(U_x \times U_x \times I)$ est contenu dans U_x. Dans le cas présent, si E était ULC, on en déduirait, puisque $\{c. d\} = U_a \cap U_b$, que $\varphi(c \times d \times I)$ serait contenu dans $\{c, d\}$, ce qui est impossible puisque le sous-espace $\{c, d\}$ est discret. E n'est donc pas ULC. Notons cependant que le voisinage minimal de chaque point de E est TC.

2) Il est intéressant de noter les relations qui existent entre nos constructions pour les complexes simpliciaux et celles pour les A-espaces. Soit K un complexe simplicial et soit ρ la relation d'équivalence sur K dont les classes sont les simplexes ouverts de K; soit p la projection de K sur $B = K/\rho$. Si nous notons $\sigma = (p_0, \cdots, p_n)$ le simplexe ouvert de sommets $p_0, \cdots, p_n$ et $\bar{\sigma}$ le simplexe fermé correspondant, il est facile de voir que B est un A-espace et que l'ouvert minimal contenant σ est l'ensemble des simplexes ouverts τ de B tels que $\bar{\sigma}$ soit une face de $\bar{\tau}$, donc $p^{-1}(U_\sigma)$ est l'étoile ouverte $St\,\sigma$ de σ dans K. La relation d'ordre correspondante est $\sigma \leqq \tau$ si, et seulement, si $\bar{\tau}$ est une face de $\bar{\sigma}$. Deux éléments σ, τ de B ont un majorant commun si et seulement si $\bar{\sigma} \cap \bar{\tau}$ n'est pas vide, et alors $\sigma \vee \tau$ est le simplexe ouvert correspondant à $\bar{\sigma} \cap \bar{\tau}$. B vérifie donc la condition $(*)$ du théorème 3.1. Soit χ la fonction définie dans la démonstration de ce théorème et soit $\psi : (\bigcup_\alpha Stp_\alpha \times Stp_\alpha) \times I \to K$ la fonction définie dans la démonstration du théorème 2.6. La fonction p possède les propriétés remarquables suivantes:

(i) p est une équivalence homotopique faible (ceci résulte du théorème 6 de [10]).

(ii) p est un fibré de Serre si et seulement si K est localement fini (la suffisance a été démontrée par Godbillon [7]; la nécessité est facile).

(iii) Quels que soient les points x, y de K, (x, y) appartient à $\bigcup_\alpha Stp_\alpha \times Stp_\alpha$ si et seulement si $(p(x), p(y))$ appartient à U, et alors

$$\chi(p(x), p(y), t) = p(\psi(x, y, t)).$$

(iv) Pour tout point σ de B, $p^{-1}(\sigma) = \sigma$ est un sous-ensemble contractile de K qui est convexe par rapport à ψ.

Le corollaire 3.2. est le point de départ d'une méthode permettant de comparer les homomorphismes induits sur les groupes d'homotopie et d'homologie par deux applications d'un espace Y dans un espace X.

3.3. THÉORÈME: *Soient X, Y des espaces pointés et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X vérifiant les conditions suivantes*:

(i) *$\mathcal{U}$ est ponctuellement fini.*

(ii) *Quels que soient les éléments U et V de $\mathcal{U}$, $U \cap V$ appartient à $\mathcal{U}$.*

(iii) *Quel que soit U appartenant à $\mathcal{U}$, $\pi_i(U) = 0$ pour tout entier $i \geqq 0$.*

Alors, si f, $g : (Y, *) \to (X, *)$ sont proches d'ordre $\mathcal{U}$, elles induisent *les mêmes homomorphismes sur les groupes d'homotopie, d'homologie et de cohomologie singulière.*

DÉMONSTRATION: Nous faisons de $\mathscr{U}$ un espace topologique en prenant pour base de la topologie les ensembles $[U] = \{V \in \mathscr{U} / V \subset U\}$. Ceci fait de $\mathscr{U}$ un A-espace dont la relation d'ordre est définie par $V \leqq U$ si et seulement si $V \subset U$. Définissons $p : X \to \mathscr{U}$ en prenant pour $p(x)$ le plus petit élément de $\mathscr{U}$ contenant x (qui existe d'après (i) et (ii)). D'après M. C. Mc Cord ([11], démonstration du théorème 1), p est une équivalence homotopique faible, donc induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie, d'homologie et de cohomologie singulière.

Si U, V sont deux éléments de $\mathscr{U}$, la condition (i) implique qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{U}$ contenant à la fois U et V, et la condition (ii) implique que, parmi ces éléments, il y en a un minimal. On en déduit que $\mathscr{U}$ vérifie la condition $(*)$ du théorème 3.1. D'après nos hypothèses, on peut appliquer le corollaire 3.2. pour conclure que $p \circ f$ et $p \circ g$ sont homotopes, donc induisent les mêmes homomorphismes sur les groupes d'homotopie, d'homologie et de cohomologie singulière. Le théorème résulte alors du fait que les homomorphismes induits vérifient

$$f_* = p_*^{-1} \circ (p \circ f)_* \text{ et } g_* = p_*^{-1} \circ (p \circ g)_*$$

REMARQUE: Comme le montre l'exemple suivant, on ne peut remplacer la condition (ii) du théorème 3.3. par l'hypothèse plus faible, qui suffit pour garantir que p est une équivalence homotopique faible, que, si U, V sont deux éléments de $\mathscr{U}$, alors $U \cap V$ est réunion d'éléments de $\mathscr{U}$. Soit $X = Y = S^1$. $\mathscr{U}$ est formé de quatre éléments : $U_1 = \{z \in S^1 / Im\, z > -\frac{1}{2}\}$, $U^2 = \{z \in S^1 / Im\, z < \frac{1}{2}\}$, U_3 et U_4 sont les deux composantes connexes de $U_1 \cap U_2$. Si f est l'identité et si g est l'application constante $g(S^1) = 1$, alors f et g vérifient les hypothèses du théorème, mais évidemment pas la conclusion. Notons que, pour la topologie définie ci-dessus, l'espace $\mathscr{U}$ est, dans ce cas, homéomorphe à l'espace E de la remarque 1 suivant le théorème 3.1.

3.4. THÉORÈME: *Soient X, Y des espaces topologiques, et soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de X vérifiant les conditions suivantes:*
(i) *$\mathscr{U}$ est ponctuellement fini.*
(ii) *Quels que soient les éléments U, V de $\mathscr{U}$, $U \cap V$ appartient à $\mathscr{U}$.*
(iii) *Chaque élément de $\mathscr{U}$ est acyclique pour l'homologie singulière.*

Alors, si f, $g : Y \to X$ sont proches d'ordre $\mathscr{U}$, elles induisent les mêmes homomorphismes sur les groupes d'homologie singulière.

DÉMONSTRATION: Nous allons montıer que la fonction $p : X \to \mathscr{U}$, définie dans la démonstration du théorème 3.3., induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie singulière. La démonstration s'achèveia alors comme celle du théorème 3.3. Pour cela. montrons d'abord par récurrence que, quels que soient $U_1, \cdots, U_n$ appartenant à $\mathscr{U}$, la fonction $p|U_1 \cup \cdots \cup U_n : U_1 \cup \cdots \cup U_n \to [U_1] \cup \cdots \cup [U_n]$ induit un isomorphisme sur l'homologie singulière. Pour $n = 1$, cela est trivial car U_1 est acyclique et $[U_1]$ contractile. Pour $n > 1$, considérons le diagramme

$$
\begin{array}{l}
H_q((U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}) \cap U_n) \to \\
\qquad\qquad p_1 \downarrow \\
H_q(([U_1] \cup \cdots \cup [U_{n-1}]) \cap [U_n]) \to \\
\qquad H_q(U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}) \oplus H_q(U_n) \quad \to H_q(U_1 \cup \cdots \cup U_n) \to \\
\qquad\qquad\qquad p_2 \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad p_3 \downarrow \\
H_q([U_1] \cup \cdots \cup [U_{n-1}]) \oplus H_q([U_n]) \to H_q([U_1] \cup \cdots \cup [U_n]) \to \\
H_{q-1}((U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}) \cap U_n) \to \\
\qquad\qquad p_4 \downarrow \\
H_{q-1}(([U_1] \cup \cdots \cup [U_{n-1}]) \cap [U_n]) \to \\
H_{q-1}(U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}) \oplus H_{q-1}(U_n) \\
\qquad\qquad\qquad p_5 \downarrow \\
H_{q-1}([U_1] \cup \cdots \cup [U_{n-1}]) \oplus H_{q-1}([U_n])
\end{array}
$$

où les lignes sont des portions des suites de Mayer-Viétoris des couples $\{U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}, U_n\}$ et $\{[U_1] \cup \cdots \cup [U_{n-1}], [U_n]\}$ et où p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 sont induites par p. Par récurrence, p_1, p_2, p_4 et p_5 sont des isomorphismes (car $(U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}) \cap U_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} U_k \cap U_n$ est réunion de $n-1$ éléments de $\mathscr{U}$ et $([U_1] \cup \cdots \cup [U_{n-1}]) \cap [U_n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [U_k \cap U_n]$), donc p_3 est un isomorphisme.

Enfin, puisque $\mathscr{U}$ recouvre X, $H_q(X)$ est la limite inductive des $H_q(U_1 \cup \cdots \cup U_n)(n > 0;\ U_1, \cdots, U_n \in \mathscr{U})$ et de même $H_q(\mathscr{U})$ est la limite inductive des $H_q([U_1] \cup \cdots \cup [U_n])$. Il est facile de déduire de tout ce qui précède que $p*: H_q(X) \to H_q(\mathscr{U})$ est un isomorphisme quel que soit q, d'où le théorème.

3.5. Théorème: *Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert ponctuellement fini d'un espace pointé X vérifiant les conditions suivantes*:

(i) *Chaque élément de $\mathscr{U}$ est connexe par arcs.*

(ii) *Si U_1, U_2 sont deux éléments de $\mathscr{U}$ (pas nécessairement distincts) et si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, alors $U_1 \cup U_2$ est contenu dans un sous-ensemble simplement connexe de X.*

Alors, si $f, g : (Y, *) \to (X, *)$ sont deux applications continues proches d'ordre $\mathscr{U}$, elles induisent le même homomorphisme sur les groupes fondamentaux.

Démonstration: Nous allons nous ramener au cas où X est localement connexe par arcs. Pour cela, il est utile de remarquer que l'on peut affaiblir la condition (ii) en la suivante:
(ii') Si U_1, U_2 sont deux éléments de $\mathcal{U}$ tels que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et si ω et ω' sont deux chemins de $U_1 \cup U_2$ ayant mêmes extrémités, alors ω et ω' sont homotopes avec extrémités fixes dans X.

Si Y est un espace topologique, nous noterons $\tilde{Y}$ l'espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est le même que celui sous-jacent à Y et dont la topologie a pour base les composantes connexes par arcs des ouverts de Y. Il est connu, et facile de vérifier, que $\tilde{Y}$ est localement connexe par arcs, que l'inclusion $j_Y : \tilde{Y} \to Y$ est continue et que, si $f : Y \to Z$ est continue, l'application $\tilde{f} : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ définie par $j_Z \circ \tilde{f} = f \circ j_Y$ est continue. En outre, si T est localement connexe par arcs, $\tilde{T}$ est égal à T et une fonction $\tilde{f} : T \to \tilde{Y}$ est continue si, et seulement si, $j_Y \circ f : T \to Y$ est continue. Il est facile d'en déduire que, si Y est un espace pointé, j_Y induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie, donc, si $f:(Y, *) \to (Z, *)$, alors les homomorphismes induits sur les groupes d'homotopie vérifient

$$f_* = j_{Z*} \circ \tilde{f}_* \circ (j_{Y*})^{-1}.$$

En outre, si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X vérifiant les conditions (i) et (ii'), il est immédiat que $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de $\tilde{X}$ vérifiant encore les conditions (i) et (ii'). Compte tenu de ce qui précède, nous sommes ainsi ramenés à démontrer le théorème dans le cas où X est localement connexe par arcs.

Supposons désormais X localement connexe par arcs. Alors les composantes connexes par arcs des intersections finies d'éléments de $\mathcal{U}$ sont ouvertes et, puisque $\mathcal{U}$ est ponctuellement fini, la famille de ces composantes est encore ponctuellement finie (et vérifie (i) et (ii')). Nous pouvons donc supposer que si U_1, U_2 sont deux éléments de $\mathcal{U}$, alors toute composante connexe par arcs de l'intersection $U_1 \cap U_2$ appartient encore à $\mathcal{U}$. Ceci implique que, si l'on fait de $\mathcal{U}$ un A-espace comme dans la démonstration du théorème 3.3., alors $\mathcal{U}$ vérifie la condition $(*)$ du théorème 3.1. et que tout point de X est contenu dans un plus petit élément de $\mathcal{U}$, ce qui permet de définir l'application continue $p : X \to \mathcal{U}$ Par suite, il suffit encore, d'après le corollaire 3.2, de prouver que (sous les hypothèses supplémentaires que nous venons d'indiquer), l'application $p : X \to \mathcal{U}$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux (le point base de $\mathcal{U}$ étant le plus petit élément de $\mathcal{U}$ contenant $*$, que nous noterons U_0).

(A) Soient ω, ω' deux lacets de X basés au point $*$. Supposons qu'il y ait une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0, 1]$ et, pour $i = 0, \cdots, n-1$, un élément U_i de $\mathcal{U}$, avec $U_{n-1} = U_0$ (point base de $\mathcal{U}$), tels que $\omega([t_i, t_{i+1}])$ et $\omega'([t_i, t_{i+1}])$ soient contenus dans U_i pour $i = 0, \cdots, n-1$. Alors, ω et ω' sont homotopes.

En effet, nos hypothèses permettent d'écrire

$$\omega \simeq \omega_0 \omega_1 \cdots \omega_{n-1}$$
$$\omega' \simeq \omega'_0 \omega'_1 \cdots \omega'_{n-1}$$

où, quel que soit i, ω_i et ω'_i sont des chemins contenus dans U_i. Par suite, U_i étant connexe par arcs, on peut trouvei un chemin c_i reliant l'extrémité de ω'_i à celle de ω_i et contenu dans U_i. Alors

$$\omega' \simeq \omega'_0 c_0 c_0^{-1} \omega'_1 c_1 c_1^{-1} \cdots c_{n-2}^{-1} \omega'_{n-1}.$$

$\omega'_0 c_0$ et ω_0 (resp. $c_{n-2}^{-1} \omega'_{n-1}$ et ω_{n-1}) sont des chemins ayant mêmes extiémités contenus dans U_0 (resp. $U_{n-2} \cup U_{n-1}$). D'après (ii′), ils sont homotopes avec extrémités fixes. Pour $i = 1, \cdots, n-2$, les chemins $c_{i-1}^{-1} \omega'_i c_i$ et ω_i ont mêmes extrémités et sont contenus dans $U_{i-1} \cup U_i$. Puisque $U_{i-1} \cap U_i$ n'est pas vide, ils sont homotopes avec extrémités fixes d'après (ii′). En combinant ces homotopies, on voit que ω est homotope à ω'.

Soit maintenant ω un lacet de $\mathscr{U}$ basé en U_0. On peut trouver une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de I et, pour $i = 0, \cdots, n-1$, un ouvert $[U_i]$ de $\mathscr{U}$, avec $U_{n-1} = U_0$, tel que $\omega([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans $[U_i]$. Pour $i = 1, \cdots, n-1$, soit x_i un point de $U_{i-1} \cap U_i$ ($U_{i-1} \cap U_i$ n'est pas vide car $[U_{i-1}] \cap [U_i]$ n'est pas vide) et soit $x_0 = x_n = *$. Soit c_i un chemin reliant x_i à x_{i+1} dans $U_i (i = 0, \cdots, n-1)$. Alors

$$c = c_0 c_1 \cdots c_{n-1}$$

est un lacet de X basé en $*$; nous dirons que c'est un relèvement de ω.

(B) Si c est un relèvement de ω, alors $\mathrm{p} \circ \mathrm{c}$ est homotope à ω. En effet, d'après la construction de c, si $t_i \leqq t \leqq t_{i+1}$, alors $c(t)$ appartient à U_i donc $\mathrm{p} \circ \mathrm{c}\,(t)$, comme $\omega(t)$, appartient à $[U_i]$. c'est-à-dire $\mathrm{p} \circ \mathrm{c}\,(t) \leqq U_i$ et $\omega(t) \leqq U_i$. La conclusion résulte donc du corollaire 3.2.

(C) Si c et c' sont deux relèvements de ω, ils sont homotopes. Supposons c (resp. c') construit à partir de la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ (resp. $0 = t'_0 < t'_1 < \cdots < t''_n = 1$) de I, des ouverts $[U_i]$ (resp. $[U'_j]$), des points x_i (resp. x'_j) et des chemins c_i (resp. c'_j). Il est facile de voir que, quitte à introduire des points supplémentaires dans les subdivisions et à décomposer les chemins c_i, c'_j en produits, nous pouvons supposer que $n = n'$ et $t_i = t'_i$ quel que soit i. Alors, quel que soit t, $\omega(t)$ est un ouvert contenu dans U_i et U'_i. On peut recouvrir $\omega(I)$ par un nombre fini des ouverts $[\omega(t)]$, donc, quitte à subdiviser à nouveau, on peut supposer que, quel que soit $i = 0, \cdots, n-1$, il y a un ouvert U''_i contenu dans U_i et dans U'_i tel que $\omega([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans

U_i''. Si c'' est un relèvement de ω construit à l'aide des ouverts U_i'', alors $c''([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i'' \subset U_i \cap U_i'$ pour $i = 0, \cdots, n-1$, et il suffit de remarquer que c et c' sont homotopes à c'' d'après (A).

(D) Si α est un lacet de X basé en $*$ et c un relèvement de $p o \alpha$, alors α et c sont homotopes.

D'après (C), il suffit de le montrer pour un relèvement particulier de $p o \alpha$. Choisissons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de I et des ouverts $U_0, U_1, \cdots, U_{n-1} = U_0$ appartenant à $\mathscr{U}$ tels que $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans U_i pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Alors, $p o \alpha([t_i, t_{i+1}])$ est contenu dans $[U_i]$ et l'on peut prendre, pour construire un relèvement de $p o \alpha$, $x_i = \alpha(t_i)$ et $c_i = \alpha|[t_i, t_{i+1}]$. Mais alors le relèvement obtenu n'est autre que α.

Il résulte de (B) que l'application induite $p_* : \pi_1(X, *) \to \pi_1(\mathscr{U}, U_0)$ est surjective. Pour montrer qu'elle est injective, soit α tel que $p_*(\alpha) = 0$ et soit h une homotopie entre α et le lacet constant. La compacité de I permet de trouver un entier k et des ouverts $U_{a,b}$ ($a, b = 0, 1, \cdots, k-1$) tels que

$$h\left(\left[\frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}\right] \times \left[\frac{b}{k}, \frac{b+1}{k}\right]\right) \subset [U_{a,b}]$$

quels que soient a, b.
Soit ω_b le chemin défini par $\omega_b(t) = h(t, b/k)$ $(0 \leqq b \leqq k)$. Alors

$$^v\omega_b\left(\left[\frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}\right]\right) \subset [U_{a,b}] \text{ et } \omega_{b+1}\left(\left[\frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}\right]\right) \subset [U_{a,b}]$$

pour $b < k$. Ceci implique qu'il y a un relèvement commun à ω_b et ω_{b+1}. D'après (C), tout relèvement de ω_b est homotope à tout relèvement de ω_{b+1}; on en déduit que tout ıelèvement de ω_0 est homotope à tout relèvement de ω_k. Mais, puisque $\omega_0 = p o \alpha$, tout relèvement de ω_0 est homotope à α d'après (D) et, puisque ω_k est constant, le chemin constant en $*$ est un relèvement de ω_k. Il en résulte que α est homotope à zéro, donc p_* est aussi injective. c.q.f.d.

4. Convexité topologique des limites inductives

Par un cube, nous entendrons un produit (pas nécessairement fini) d'intervalles,

$$X = \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$$

où $I_\alpha = [0, 1]$ quel que soit α appartenant à A. Si $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont deux points de X, nous noterons inf (x, y) le point de coordonnées

$$\inf (x, y)_\alpha = \inf (x_\alpha, y_\alpha),\ \alpha \in A.$$

Soit $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ une suite de cubes,

$$X_n = \prod_{\alpha \in A_n} I_{n,\alpha},$$

et, pour $n \geqq 1$, soit

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Identifions Y_n au sous-espace $X_1 \times \cdots \times X_n \times 0 \times 0 \cdots$ du produit $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Alors, pour $p > 0$, Y_n est un sous-espace fermé de Y_{n+p}. Soit Y la réunion des Y_n. Munissons Y de la topologie limite inductive des topologies des sous-espaces Y_n.

4.1. Théorème: *Y est TC.*

Démonstration: Tout point x de Y peut s'écrire $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 0$ pour n assez grand et x_n appartient à X_n quel que soit n. Définissons $\lambda : Y \times Y \to Y$ par

$$\lambda(x, y)_n = \inf (x_n, y_n).$$

Il est clair que $\lambda(x, y)$ est un point de Y. On peut alors définir $\varphi : Y \times Y \times I \to Y$ par

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2t\lambda(x, y) & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ (2-2t)\lambda(x, y) + (2t-1)y & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

Comme dans la démonstration du théorème 2.1., on vérifie que φ est une structure convexe sur Y (si x est un point de Y, une base de voisinages convexes de x est formée par les ensembles de la forme $Y \cap \prod_{i=1}^{\infty} X'_n$, où

$$X'_n = \prod_{\alpha \in A_n} J_{n,\alpha},$$

$J_{n,\alpha}$ étant un sous-intervalle compact de $[0, 1]$ dont l'intérieur dans $[0, 1]$ contient $x_{n,\alpha}$, les $J_{n,\alpha}$ étant égaux à $I_{n,\alpha}$ sauf pour un nombre fini de α appartenant à A_n).

4.2. Corollaire: *Soit $Z = \varinjlim Z_n$ un espace topologique qui est la limite inductive d'une suite croissante de fermés $Z_n (n \geqq 1)$. Supposons que chaque Z_n soit un RAV (compact). Alors Z a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces stratifiables.*

Démonstration: Posons $Z_0 = \emptyset$. Il existe une fonction continue φ_n de Z_n dans un cube

$$X_n = \prod_{\alpha \in A_n} I_\alpha$$

telle que

(1) Si x, y sont deux points distincts de $Z_n \backslash Z_{n-1}$, alors il y a un α appartenant à A_n tel que $\varphi_n(x)_\alpha \neq 0 = \varphi_n(y)_\alpha$.

(2) Si x appartient à Z_{n-1}, alors $\varphi_n(x)_\alpha = 0$ quel que soit α appartenant à A_n.

(Pour construire φ_n, il suffit de prendre, pour tout couple de points distincts x, y de $Z_n \backslash Z_{n-1}$, une fonction $\varphi_{x,y} : Z_n \to I$ telle que $\varphi_{x,y}(x) \neq 0 = \varphi_{x,y}(y)$ et $\varphi_{x,y}(Z_{n-1}) = 0$ si Z_{n-1} est non vide, puis de poser

$$X_n = \prod_{\substack{x,\, y \in Z_n \backslash Z_{n-1} \\ x \neq y}} I_{x,y}$$

et $\varphi_n = (\varphi_{x,y}))$. Soit $\psi_n : Z \to X_n$ un prolongement continu de φ_n à Z.

Définissons $Y_n (n \geqq 1)$ et Y comme ci-dessus, puis définissons la fonction continue $\psi : Z \to Y$ par

$$\psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z), \cdots). \tag{3}$$

Si z appartient à Z_n, alors $\psi_p(z) = \varphi_p(z) = 0$ pour $p > n$, donc $\psi(z)$ appartient à Y_n. En fait, d'après (1), on a

$$\psi(Z_n) = \psi(Z) \cap Y_n. \tag{4}$$

Montrons que ψ est un plongement. Soient z, z' deux points de Z. Si $z \in Z_n$ et $z' \in Z_{k+1} \backslash Z_k$ avec $k \geqq n$, alors $\psi_{k+1}(z) = 0 \neq \psi_{k+1}(z')$, donc $\psi(z) \neq \psi(z')$. Si z, z' appartiennent à $Z_n \backslash Z_{n-1} (n \geqq 1)$, alors $\psi_n(z) \neq \psi_n(z')$ d'après (1), donc $\psi(z) \neq \psi(z')$. Ceci montre que ψ est injective. Puisque Z_n est compact, $\psi^{-1} | \psi(Z_n)$ est continue. Mais il résulte de (4) et de la compacité de Z_n que $\psi(Z)$ est fermé dans Y; donc $\psi(Z)$ est limite inductive des $\psi(Z) \cap Y_n = \psi(Z_n)$. Par suite, ψ^{-1} est continue et ψ est un plongement.

D'après les théorèmes 4.1 et 1.4., Y a la propriété d'extension par rapport aux espaces stratifiables, donc, pour achever la démonstration, il suffit de démontrer que $\psi(Z)$ est un rétracte de voisinage de Y. Puisque Z_1 est un RAV (compact), il y a un ouvert O_1 de Y_1 contenant $\psi(Z_1)$ et une rétraction $r_1 : \bar{O}_1 \to \psi(Z_1)$. Procédons par récurrence: supposons construit un voisinage ouvert O_n de $\psi(Z_n)$ dans Y_n et une rétraction $r_n : \bar{O}_n \to \psi(Z_n)$. Soit $h_n : \bar{O}_n \cup \psi(Z_{n+1}) \to \psi(Z_{n+1})$ la fonction définie par

$$h_n(y) = \begin{cases} r_n(y) & \text{si } y \in \bar{O}_n \\ y & \text{si } y \in \psi(Z_{n+1}). \end{cases}$$

h_n est continue, donc, puisque $\psi(Z_{n+1})$ est un RAV (compact) et Y_{n+1} compact, il y a un ouvert O_{n+1} de Y_{n+1} contenant $\bar{O}_n \cup \psi(Z_{n+1})$ et un prolongement r_{n+1} de h_n à $\bar{O}_{n+1}$; évidemment, r_{n+1} est une rétraction de $\bar{O}_{n+1}$ sur $\psi(Z_{n+1})$. Posons

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n.$$

Puisque O_n est contenu dans O_{n+1} quel que soit n, on a

$$Y_n \cap O = Y_n \cap \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} O_k\right),$$

et, O_k étant ouvert dans Y_k, qui contient Y_n, on voit que $Y_n \cap O$ est ouvert dans Y_n. Donc O est ouvert dans Y. Evidemment, O contient $\psi(Z)$. On peut alors définir $r : O \to \psi(Z)$ par

$$r|O_n = r_n|O_n \text{ quel que soit } n.$$

Puisque Y est limite inductive des Y_n et que O est ouvert dans Y, O est limite inductive des $O \cap Y_n$; il suffit donc de montrer que $r|O \cap Y_n$ est continue. Puisque

$$Y_n \cap O = \bigcup_{k=n}^{\infty} Y_n \cap O_k,$$

que $r|Y_n \cap O_k = r_k|Y_n \cap O_k$ est continue et que $Y_n \cap O_k$ est ouvert dans Y_n, il est clair que r est continue. Donc r est une rétraction de O sur $\psi(Z)$.
c.q.f.d.

En particulier, si $Z = \varinjlim Z_n$ et si chaque Z_n est un espace métrique compact, alors Z est stratifiable (voir [1]), donc est un RAV (stratifiable).

5. Produits symétriques

Pour commencer, nous allons étudier les quotients des espaces TLC par certaines actions de groupes d'homéomorphismes.

5.1. Théorème: *Soit (X, φ) un espace métrisable TLC et soit G un groupe fini opérant à gauche sur X de façon que*

$$\varphi(g \cdot x, g \cdot y, t) = g \cdot \varphi(x, y, t) \tag{1}$$

chaque fois que les deux membres de cette égalité sont définis. Alors, l'espace des orbites X/G est un RAV (métrique).

Démonstration: Puisque X est métrisable et G fini, l'espace quotient X/G est métrisable. Pour tout élement x de X, notons $n(x)$ le nombre d'éléments de G laissant x invariant et posons

$$n(X) = \sup_{x \in X} n(x).$$

Alors, $n(X) \geqq 1$. Nous raisonnerons par récurrence sur $n(X)$. Si $n(X) = 1$, la projection naturelle $p : X \to X/G$ est un revêtement, donc tout point y de X/G a un voisinage V qui est homéomorphe à un ouvert de X. Puisque X est TLC, il résulte du corollaire 1.5 que V est un RAV (métrisable). Par suite, X/G est aussi un RAV (métrisable) d'après un théorème de Hanner [8].

Supposons maintenant que $n(X) = n+1$ et que le théorème est vrai pour $n(X) \leqq n$. Si H est un sous-groupe de G, nous noterons $|H|$ l'ordre de H. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des sous-groupes de G d'ordre $n+1$ et, pour H appartenant à $\mathscr{H}$, soit X_H l'ensemble des points de X dont le stabilisateur est H. Alors $O = X \backslash (\bigcup_{H \in \mathscr{H}} X_H)$ est un ouvert de X invariant par G et, pour l'opération induite, on a $n(O) \leqq n$, donc O/G est un RAV (métrisable) d'après l'hypothèse de récurrence. Or, O/G est homéomorphe à l'ouvert $p(O)$ de X/G. Si nous montrons que, quel que soit H appartenant à $\mathscr{H}$, $p(X_H)$ a un voisinage ouvert qui est un RAV (métrisable), tout point de X/G aura un voisinage qui est un RAV (métrisable), ce qui montrera que X/G est un RAV (métrisable).

Si H, H' sont deux éléments distincts de $\mathscr{H}$, alors $X_H \cap X_{H'}$ est vide. G étant fini, $\mathscr{H}$ est fini, donc on peut trouver des ouverts U_H, $H \in \mathscr{H}$, deux à deux disjoints tels que U_H contienne X_H quel que soit H. Si x appartient à X_H, le stabilisateur de gx est gHg^{-1}, d'où $g \cdot X_H = X_{gHg^{-1}}$. Par suite, G étant fini, on peut trouver un ouvert V_H tel que $X_H \subset V_H \subset U_H$ et que $gV_H \subset U_{gHg^{-1}}$ quel que soit g appartenant à G. Quitte à remplacer V_H par $\bigcap_{h \in H} h \cdot V_H$, on peut supposer que $h \cdot V_H = V_H$ quel que soit h appartenant à H; alors H opère à gauche sur V_H et, pour cette opération, $n(V_H) = n+1 = |H|$. En outre, V_H/H est homéomorphe à l'ouvert $p(V_H)$ de X/G qui contient $p(X_H)$ donc, d'après ce que nous avons remarqué plus haut, il suffit de démontrer que V_H/H est un RAV (métrisable). En d'autres termes, il suffit de démontrer l'hypothèse de récurrence dans le cas où $|G| = n+1 = n(X)$. Dans ce qui suit, nous nous placerons dans ce dernier cas et nous noterons A l'ensemble (non vide) des points de X dont le stabilisateur est G. Nous utiliserons le résultat connu suivant (cf. D. Hyman [9]).

(A) Soit B un fermé d'un espace métrisable Y tel que B et $Y \backslash B$ soient des RAV (métrisable). Supposons qu'il y ait un voisinage N de B dans Y et une homotopie $h : N \times I \to Y$ telle que h_0 soit l'inclusion de N dans Y, que h_1 soit une rétraction de N sur B et que $h(b, t) = b$ quels que soient b appartenant à B et t appartenant à I. Alors Y est un RAV (métrisable).

Nous allons montrer que le couple $(X/G, p(A))$ vérifie l'hypothèse de (A), ce qui achèvera la récurrence. $X \backslash A$ est stable par G et $n(X \backslash A) \leqq n$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(X \backslash A)/G$, qui est homéomorphe à $X/G \backslash p(A)$, est un RAV (métrisable). D'après la condition (1), φ induit sur A une structure d'espace TLC, donc, d'après le corollaire 1.5., A est un RAV (métrisable). La restriction $p|A : A \to p(A)$ est un homéomorphisme, donc $p(A)$ est un RAV (métrisable).

Puisque $p(A)$ est un RAV (métrisable), il y a un voisinage ouvert U de $p(A)$ dans X/G et une rétraction $r : U \to p(A)$. Alors, $O = p^{-1}(U)$ est un ouvert de X invariant par G et $\tilde{r} = (p|A)^{-1} \circ r \circ (p|O)$ est une rétraction de O sur A telle que, pour tout point x de O et tout élément g de G, on ait $\tilde{r}(g \cdot x) = \tilde{r}(x) = g \cdot \tilde{r}(x)$. Il est facile de construire un voisinage ouvert M de A contenu dans O, invariant par G, et tel que $\varphi(x, \tilde{r}(x), t)$ soit défini quel que soit x appartenant à M; alors $N = p(M)$ est un voisinage ouvert de $p(A)$ dans X/G. Définissons une homotopie $k = M \times I \to X$ par

$$k(x, t) = \varphi(x, \tilde{r}(x), t).$$

Alors $\varphi(x, 0) = x$, $\varphi(x, 1) = \tilde{r}(x)$ et $\varphi(a, t) = a$ quel que soit t si a appartient à A. En outre, si g est un élément de G, on a

$$k(g \cdot x, t) = \varphi(g \cdot x, \tilde{r}(g \cdot x), t) = \varphi(g \cdot x, g \cdot \tilde{r}(x), t) = g \cdot \varphi(x, \tilde{r}(x), t),$$

i.e. k est compatible avec l'action de G, donc définit, par passage au quotient, une homotopie $h : N \times I \to X/G$ vérifiant les conditions de (A). La récurrence est achevée. c.q.f.d.

Remarque: Supposons que X soit TC et que l'ensemble A des points de X dont le stabilisateur est G soit non vide. Alors X/G est un RA (métrisable). En effet, A est alors TC, donc est un RA (métrisable) et, dans la démonstration de la récurrence, on peut prendre $U = X/G$, puis $M = X$ et enfin $N = X/G$. Alors X/G a le type d'homotopie de $p(A) = A$, donc est contractile; puisque c'est un RAV (métrisable) contractile, c'est un RA (métrisable).

5.2. Corollaire: *Soit (X, φ) un espace métrisable TLC et soit G un groupe opérant à gauche sur X de façon que*
(1) *$\varphi(g \cdot x, g \cdot y, t) = g \cdot \varphi(x, y, t)$ chaque fois que les deux membres de cette égalité sont définis.*
(2) *Le stabilisateur H_x de chaque point de X est fini.*
(3) *Chaque point x de X a un voisinage ouvert U_x tel que, pour tout élément g de G n'appartenant pas à H_x, on ait $g \cdot U_x \cap U_x = \emptyset$.*

Alors, X/G a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces métrisables.

Démonstration: Quitte à remplacer U_x par $\bigcap_{h \in H_x} h \cdot U_x$, on peut supposer U_x stable par H_x. Alors, H_x opère sur U_x et, $p : X \to X/G$ étant la projection canonique, U_x/H_x est homéomorphe au voisinage ouvert $p(U_x)$ de $p(x)$. D'après le théorème 5.1., U_x/H_x est un RAV (métrisable). Par suite, chaque point de X/G a un voisinage possédant la propriété d'extension locale par rapport aux espaces métrisables, donc X/G a cette propriété.

Nous allons maintenant appliquer le théorème 5.1. à l'étude des produits symétriques. Si X est un espace topologique, le produit symétrique n-ième, $X^{[n]}$, de X est le quotient de X^n par l'opération du groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ sur X^n définie par

$$\sigma \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}).$$

5.3. COROLLAIRE: *Si X est un RAV (métrisable) (resp. RA (métrisable)), alors $X^{[n]}$ est un RAV (métrisable) (resp. RA (métrisable)).*

DÉMONSTRATION: Nous pouvons supposer que X est un sous-ensemble fermé d'un ensemble convexe Z d'un espace de Banach. Puisque X est un RAV (métrisable) (resp. RA (métrisable)), X est un rétracte d'un ouvert O de Z (resp. un rétracte de Z). Alors $X^{[n]}$ est un rétracte de $O^{[n]}$ (resp. $Z^{[n]}$). L'opération de $\mathscr{S}_n$ sur O^n (resp. Z^n) est évidemment compatible, au sens de la relation (1) du théorème 5.1, avec la structure convexe usuelle de O^n (resp. Z^n), donc, d'après ce théorème et la remarque qui le suit, $O^{[n]}$ est un RAV (métrisable) et $Z^{[n]}$ un RA (métrisable). Le résultat en découle.

6. Joints

Si X et Y sont des espaces topologiques, nous noterons $X * Y$ le joint des espaces X et Y muni de la topologie usuelle, c'est-à-dire le quotient de $X \times Y \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie les points $(x, y, 0)$ et $(x, y', 0)$ ainsi que les points $(x, y, 1)$ et $(x', y, 1)$ quels que soient x, x' appartenant à X et y, y' appartenant à Y, muni de la topologie quotient de celle de $X \times Y \times I$. Nous noterons $X \,\tilde{*}\, Y$ le joint de X et Y muni de la topologie de Milnor [12]; c'est-à-dire la topologie ayant pour base les ensembles $p(U \times V \times]\alpha, \beta[)$, $p(U \times Y \times [0, \beta[)$ et $p(X \times V \times]\alpha, 1])$, où U est un ouvert de X, V un ouvert de Y, $0 \leqq \alpha < 1$, $0 < \beta \leqq 1$, et p est la projection canonique de $X \times Y \times I$ sur $X * Y$.

Si (x, y, t) est un point de $X \times Y \times I$, nous noterons $[x, y, t]$ son image dans $X * Y$. X et Y sont homéomorphes aux sous-espaces $p(X \times Y \times 0)$ et $p(X \times Y \times 1)$ resp. de $X * Y$ ou $X \,\tilde{*}\, Y$. Nous les identifierons à ces sous-espaces.

6.1. THÉORÈME: *Soient (X_1, φ_1) et (X_2, φ_2) des espaces TLC (resp. ULC). Supposons que, pour $i = 1, 2$, il existe une fonction continue α_i : $X_i \times X_i \to I$ vérifiant*

(i) $\alpha_i(x, x) = 1$ *quel que soit x appartenant à X_i.*

(ii) $\alpha_i(x, y) = 0$ *si (x, y) n'appartient pas au domaine de définition U_i de φ_i.*

Alors $X_1 \tilde{*} X_2$ *est TLC (resp. ULC).*

DÉMONSTRATION: Soit $h : \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ \to I$ la fonction définie par

$$h(s,t) = \begin{cases} \inf\left(1, \dfrac{2}{1+|\log s/t|}\right) & \text{si } (s,t) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (s,t) = (0,0), \end{cases}$$

où l'on convient, comme d'habitude, que $1/\infty = 0$, $\log 0 = -\infty$ et $\log \infty = \infty$. La fonction $h(s, t)$ est continue, sauf au point $(0, 0)$, et vérifie $h(s, t) = h(t, s)$ et $h(s, t) = 0$ si $s \cdot t = 0$.

Soit $\vartheta : I \to I$ une fonction croissante continue telle que $\vartheta([0, \frac{1}{3}]) = 0$ et $\vartheta([\frac{2}{3}, 1]) = 1$. Posons $\beta_i = \vartheta \circ \alpha_i$.

Pour $i = 1, 2$, soit $\mathscr{V}_i$ la famille des ouverts V de X_i tels que $V \times V$ soit contenu dans U_i. Posons

$$A = \left\{([x,y,t],[x',y',t'])/\alpha_1(x,x') > \tfrac{2}{3}, \alpha_2(y,y') > \tfrac{2}{3}, 0 < t, t' < 1, \right.$$
$$\left. \frac{2}{1+|\log t/t'|} > 1 \text{ et } \frac{2}{1+|\log(1-t)/(1-t')|} > 1\right\}$$
$$B_1 = \cup\, \{p(V \times X_2 \times [0, \tfrac{1}{3}[) \times p(V \times X_2 \times [0, \tfrac{1}{3}[)/V \in \mathscr{V}_1\}$$
$$B_2 = \cup\, \{p(X_1 \times V \times]\tfrac{2}{3}, 1]) \times p(X_1 \times V \times]\tfrac{2}{3}, 1])/V \in \mathscr{V}_2\}$$

Les ensembles A, B_1 et B_2 sont ouverts dans $(X_1 \tilde{*} X_2) \times (X_1 \tilde{*} X_2)$ et l'ensemble $U = A \cup B_1 \cup B_2$ est un voisinage de la diagonale de $(X_1 \tilde{*} X_2) \times (X_1 \tilde{*} X_2)$. Définissons une fonction $\gamma : U \to I$ comme suit: si $z = [x, y, t]$ et $z' = [x', y', t']$, nous posons

$$\begin{aligned} \gamma(z,z') &= t && \text{si } (z,z') \in A \\ \gamma(z,z') &= \beta_2(y,y')h(t,t') \cdot t && \text{si } (z,z') \in B_1 \\ \gamma(z,z') &= 1-\beta_1(x,x')h(1-t,1-t')(1-t) && \text{si } (z,z') \in B_2. \end{aligned}$$

Si (z, z') appartient à $A \cap B_1$, alors $h(t\ t') = 1$ et $\alpha_2(y, y') > \frac{2}{3}$, donc $\beta_2(y, y') = 1$. Par suite, les deux définitions de $\gamma(z, z')$ coïncident. De même, si (z, z') appartient à $A \cap B_2$, les deux définitions de $\gamma(z, z')$ coincident. Comme en outre $B_1 \cap B_2$ est vide, γ est bien définie. Puisque la fonction $h(s, t)s$ est continue sur $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+$, la fonction γ est continue.

Si (x, x') n'appartient pas à $U_i (i = 1, 2)$, nous appellerons $\varphi_i(x, x', t)$ un point quelconque de X_i. Puisque, si $(z, z') \in B_1$ et $(y, y') \notin U_2$, on a $\gamma(z, z') = 0 = \gamma(z', z)$ et que, si $(z, z') \in B_2$ et si $(x, x') \notin U_1$, on a $\gamma(z, z') = 1$, on définit sans ambiguïté une fonction $\varphi : U \times I \to X_1 \tilde{*} X_2$ par

$$\varphi(z, z', s) = \begin{cases} [x, y, (1-3s)t+3s\gamma(z, z')] & 0 \leqq s \leqq \frac{1}{3} \\ [\varphi_1(x, x', 3s-1), \varphi_2(y, y', 3s-1), (2-3s)\gamma(z, z') \\ \qquad +(3s-1)\gamma(z', z)] & \frac{1}{3} \leqq s \leqq \frac{2}{3} \\ [x', y', (3-3s)\gamma(z', z)+(3s-2)t'] & \frac{2}{3} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

La continuïté de φ est une conséquence faucile du fait que la topologie de $X_1 \tilde{*} X_2$ est la moins fine rendant les applications coordonnées dans X_1, X_2 et I continues sur leurs domaines de définition. Ceci montre que $X_1 \tilde{*} X_2$ est ULC.

Supposons X_1 et X_2 TLC; alors si $z_0 = [x_0, y_0, t_0]$ est un point de $X_1 \tilde{*} X_2 \backslash X_1 \cup X_2$, on peut trouver des voisinages convexes arbitrairement petits V_1 et V_2 de x_0 et y_0 resp. tels que $\alpha_1(x, x') > \frac{2}{3}$ pour $(x, x') \in V_1 \times V_1$ et $\alpha_2(y, y') > \frac{2}{3}$ pour $(y, y') \in V_2 \times V_2$; en outre, si ε est assez petit, on a

$$\frac{2}{1+|\log t/t'|} > 1 \text{ et } \frac{2}{1+|\log(1-t)/(1-t')|} > 1$$

pour $|t-t_0| < \varepsilon$ et $|t'-t_0| < \varepsilon$. Alors, si $W = p(V_1 \times V_2 \times]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[)$, on a $W \times W \subset A$ et $\varphi(W \times W \times I) \subset W$, donc tout point de $X_1 \tilde{*} X_2 \backslash X_1 \cup X_2$ a une base de voisinages φ-convexes.

Si $z = [x, y, 0]$ appartient à X_1 et si V est un voisinage convexe de x, on a, pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$,

$$\varphi(p(V \times X_2 \times [0, \varepsilon[) \times p(V \times X_2 \times [0, \varepsilon[) \times I) \subset p(V \times X_2 \times [0, \varepsilon[),$$

d'où il résulte que z a une base de voisinages convexes.

On montre de la même façon que tout point de X_2 a une base de voisinages φ-convexes.

φ fait donc bien de $X_1 \tilde{*} X_2$ un espace TLC.

6.2. Corollaire: *Si X_1 et X_2 sont des RAV (métrisable) ou des CW-complexes, alors $X_1 \tilde{*} X_2$ est un RAV (stratifiable).*

Démonstration: L'hypothèse implique que X_i est un rétracte d'un espace TLC stratifiable Y_i vérifiant l'hypothèse du théorème 6.1. (Si X_i est un RAV (métrisable), on peut prendre pour Y_i un ouvert d'un sous-ensemble convexe d'un espace normé; si X_i est un CW-complexe, on peut prendre pour Y_i un ouvert d'un complexe simplicial plein contenant X_i comme fermé, d'après [2] et le théorème 2.1). Alors $X_1 \tilde{*} X_2$ est homéomorphe à un rétracte de $Y_1 \tilde{*} Y_2$ donc, d'après le théorème 6.1. et le corollaire 1.5., a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces stratifiables. D'après le lemme suivant, $X_1 \tilde{*} X_2$ est donc un RAV (stratifiable).

6.3. Lemme: *Si X_1 et X_2 sont stratifiables, alors $X_1 \tilde{*} X_2$ est stratifiable.*

DÉMONSTRATION: Si X_1 et X_2 sont stratifiables, il en est de même de $X_1 \times X_2 \times]0, 1[$, donc de $p(X_1 \times X_2 \times]0, 1[)$. Si U est un ouvert de $X_1 \tilde{*} X_2$ et n un entier > 0, nous poserons

$$U'(n) = \left\{x \in X_1/p\left(x \times X_2 \times \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \subset U\right\}$$

$$U''(n) = \left\{x \in X_2/p\left(X_1 \times x \times \left[1-\frac{1}{n}, 1\right] \subset U\right\}.$$

Alors on a:

$$U \cap X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{U}'(n);\ U'(n) \subset U'(n+1)$$

$$U \cap X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{U}''(n);\ U''(n) \subset U''(n+1).$$

Posons alors:

$$\begin{aligned} U_n = \Bigg[&(U \cap p(X_1 \times X_2 \times]0, 1[))_n \\ &\cap p\left(X_1 \times X_2 \times \left]\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}\right[\right)\Bigg] \\ &\cup p\left(\mathring{U}'(n)_n \times X_2 \times \left[0, \frac{1}{n+1}\right[\right) \\ &\cup p\left(X_1 \times \mathring{U}''(n)_n \times \left]1-\frac{1}{n+1}, 1\right]\right), \end{aligned}$$

où, dans le terme de droite de cette formule, l'indice inférieur n réfère, selon le cas, à des stratifications croissantes de $p(X_1 \times X_2 \times]0, 1[)$, X_1 et X_2 resp.

Il est facile de voir que $\overline{U}_n$ est contenu dans U et que $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$. Donc, pour montrer que $U \rightsquigarrow \{U_n\}$ est une stratification de $X_1 \tilde{*} X_2$, il suffit de montrer que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Il est clair que $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ contient $U \cap p(X_1 \times X_2 \times]0, 1[)$. Soit z un point de $U \cap X_1$ et soit n_0 tel que z appartienne à $\mathring{U}'(n_0)$; soit m tel que $z \in \mathring{U}'(n_0)_m$. Alors, si $N \geqq \sup(n_0, m)$, on a $U'(n_0) \subset U'(N)$ et, puisque la stratification donnée de X_1 est supposée croissante, on a $\mathring{U}'(n_0)_m \subset \mathring{U}'(N)_m \subset \mathring{U}'(N)_N \subset U_N$, donc z appartient à $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. De même, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ contient $U \cap X_2$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$.

Le corollaire suivant est évident si l'un des CW-complexes est localement fini ou bien s'ils sont dénombrables.

6.4. COROLLAIRE: *Si X_1 et X_2 ont le type d'homotopie de CW-complexes, alors $X_1 * X_2$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe.*

Démonstration: Puisque tout CW-complexe a le type d'homotopie d'un complexe simplicial et que tout complexe simplicial K a le type d'homotopie d'un complexe simplicial TLC (le cône épointé de base K; voir § 2), il suffit de démontrer le corollaire lorsque X_1 et X_2 sont des complexes simpliciaux TLC. Puisque tout espace stratifiable est paracompact, le corollaire résulte du théorème 6.1. et des deux faits suivants:
(A) Quels que soient X_1 et X_2, l'identité $i : X_1 * X_2 \to X_1 \tilde{*} X_2$ est une équivalence d'homotopie.
(B) Tout espace TLC paracompact a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

Pour vérifier (A), il suffit de remarquer que l'application $j : X_1 \tilde{*} X_2 \to X_1 * X_2$ définie par

$$j([x, y, t]) = \begin{cases} [x, y, 0] & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{3} \\ [x, y, 3t-1] & \frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3} \\ [x, y, 1] & \frac{2}{3} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

est un inverse homotopique de i.
(B) est une version modifiée d'un théorème de Milnor [13].

Remarquons que le corollaire 6.4. reste vrai pour le joint de deux espaces pointés $(X_1, *)$ et $(X_2, *)$. Dans la catégorie des espaces pointés, le joint de X_1 et X_2 est $X_1 \circ X_2 = X_1 * X_2/p(* \times * \times I)$.

Ici encore, il suffit de considérer le cas où X_1 et X_2 sont des complexes simpliciaux TLC. Il est facile de voir que i définit, par passage au quotient, une application $i' : X_1 \circ X_2 \to X_1 \tilde{*} X_2/p(* \times * \times I)$. Puisque $X_1 \tilde{*} X_2$ et $A = p(* \times * \times I)$ sont des RAV (stratifiable), l'inclusion de A dans $X_1 \tilde{*} X_2$ est une cofibration, donc, puisque A est contractile, $X_1 \tilde{*} X_2/A$ a le type d'homotopie de $X_1 \tilde{*} X_2$. Donc $X_1 * X_2$ et $X_1 \circ X_2$ ont le même type d'homotopie.

La méthode utilisée pour démontrer le théorème 6.1. permet aussi d'obtenir le résultat suivant, qui a été prouvé par J. Dugundji [5] pour les espaces métriques.

6.5. Théorème: *Soit X un espace tel que $X \times X$ soit normal*
(i) *Si X est TLC et contractile, il est TC.*
(ii) *Si X est ULC et contractile, il est UC.*

Démonstration: Soient U un voisinage de la diagonale de $X \times X$ et φ une fonction de $U \times I$ dans X vérifiant les conditions de la définition d'un espace TLC (resp. ULC). Puisque $X \times X$ est normal, il y a une fonction $\alpha : X \times X \to I$ telle que $\alpha(x, x) = 1$ pour tout x et $\alpha(x, y) = 0$ si (x, y) n'appartient pas à U. (C'est le seul point où la normalité de $X \times X$ intervient). Définissons les fonctions h, ϑ et β comme dans la démonstration du théorème 6.1.

Soit $\tilde{C}(X) = X \times I/X \times 0$ le cône de base X muni de la topologie dont une base est formée des ensembles $p(U \times J)$ et $p(X \times [0, \alpha[)$, où $p : X \to \tilde{C}(X)$ est la projection canonique, U un ouvert de X, J un intervalle ouvert dans $]0, 1]$ et $0 < \alpha \leqq 1$. Nous identifierons X au sous-espace $p(X \times 1)$ de $\tilde{C}(X)$ et nous noterons $[x, t]$ l'image par p du point (x, t) dans $\tilde{C}(X)$.

Si (x, x') n'appartient pas à U, nous noterons $\varphi(x, x', t)$ un point quelconque de X. Définissons une fonction $\gamma : \tilde{C}(X) \times \tilde{C}(X) \to I$ par

$$\gamma(z, z') = \beta(x, x')h(t, t') \cdot t \text{ pour } z = [x, t], z' = [x', t'],$$

puis définissons $\tilde{\varphi} : \tilde{C}(X) \times \tilde{C}(X) \times I \to \tilde{C}(X)$ par

$$\tilde{\varphi}(z, z', s) = \begin{cases} [x, (1-3s)t + 3s\gamma(z, z')] & 0 \leqq s \leqq \frac{1}{3} \\ [\varphi(x, x', 3s-1), (2-3s)\gamma(z, z') + (3s-1)\gamma(z', z)] & \\ & \frac{1}{3} \leqq s \leqq \frac{2}{3} \\ [x', (3-3s)\gamma(z', z) + (3s-2)t'] & \frac{2}{3} \leqq s \leqq 1. \end{cases}$$

Comme dans le théorème 6.1., $\tilde{\varphi}$ fait de $\tilde{C}(X)$ un espace TC (resp. UC).

Soit $F : X \times I \to X$ une homotopie telle que $F_0 = \text{id}$ et $F(X \times [\frac{1}{2}, 1]) = x_0$, où x_0 est un point de X. Associons-lui une rétraction r de $\tilde{C}(X)$ sur X par la formule

$$r([x, t]) = F(x, 1-t).$$

Définissons $\psi : X \times X \times I \to X$ par

$$\psi(x, x', s) = r(\tilde{\varphi}(x, x', s)).$$

Alors $\psi(x\ x', 0) = r(\tilde{\varphi}(x, x', 0)) = r(x) = x$, $\psi(x, x', 1) = r(\tilde{\varphi}(x, x', 1)) = r(x') = x'$ et $\psi(x, x, s) = r(\tilde{\varphi}(x, x, s)) = r(x) = x$, donc ψ fait de X un espace UC. En outre, si x est un point de X et V un voisinage de x tel que $\alpha(x, x') > \frac{2}{3}$ pour $(x, x') \in V \times V$, on a $\tilde{\varphi}(x, x', s) = \varphi(x, x', \tilde{s})$ pour un s convenable, d'où $\psi(x, x', s) = \varphi(x, x', \tilde{s})$; on en déduit que, si (X, φ) est un espace TLC, alors ψ fait de X un espace TC.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. J. R. Borges: On stratifiable spaces. *Pacific Jour. Math. 17* (1966) 1–16.

[2] R. Cauty: Sur les sous-espaces des complexes simpliciaux. *Bull. Soc. Math. France 100* (1972).

[3] R. Cauty: Une méthode de construction squelette par squelette dans les espaces paracompacts. *Ann. Inst. Fourier. 23* (1) (1973) 1–18.

[4] J. Dugundji: An extension of Tietze 's Theorem. *Pacific Jour. Math. 1* (1951) 353–367.

[5] J. Dugundji: Locally equiconnected spaces and ANR. *Fund. Math. 57* (1965) 187–193.

[6] J. Dugundji: A duality property for nerves. *Fund. Math. 59* (1966) 213–219.

[7] C. GODBILLON: Fibration de Serre associée à une triangulation. *C. R. Acad. Sc.* Paris 264 (1967) 176–178.
[8] O. HANNER: Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces. *Ark. Math. 2* (1952) 315–360.
[9] D. HYMAN: A generalization of the Borsuk-Whitehead-Hanner theorem. *Pacific Jour. Math. 23* (1967) 263–271
[10] M. C. MC CORD: Singular homology and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math. Jour. 33* (1966) 465–474.
[11] M. C. MC CORD: Homotopy type comparison of a space with complexes associated with its open covers. *Proc. Amer. Math. Soc. 18* (1967) 705–708
[12] J. MILNOR: Construction of universal bundles II. *Ann. Math. (2) 63* (1956) 430–436
[13] J. MILNOR: On spaces having the homotopy type of a CW-complex. *Trans. Amer. Math. Soc. 90* (1959) 272–280.

(Oblatum 8–VI–1972 & 30–VII–1973)

88 Rue de Clichy
Paris, 9ème