

COMPOSITIO MATHEMATICA

LÊ DŨNG TRÁNG Sur les nœuds algébriques

Compositio Mathematica, tome 25, n° 3 (1972), p. 281-321

http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__25_3_281_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES NŒUDS ALGÈBRIQUES

par

Lê Dũng Tráng

Table des matières

Introduction	281
1. Les résultats de K. Brauner	283
2. Les polynômes d'Alexander	287
3. La monodromie locale	300
Addendum	320
Bibliographie	320

Introduction

Soit $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme complexe de deux variables non identiquement nul. On note C_b la courbe de \mathbb{C}^2 définie par $f = b$. On suppose pour simplifier que f s'annule à l'origine de \mathbb{C}^2 :

$$f(0) = 0.$$

On suppose que f est sans facteur carré (quadratifrei ou square free), i.e. l'idéal engendré par f dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X, Y]$ égale sa racine.

Considérons alors les boules fermées B_ε , centrées en 0, de rayon ε . Notons S_ε la sphère qui borde B_ε . On peut montrer que pour ε assez petit les sphères S_ε sont transverses à la partie non singulière de C_0 (cf. [18] corol. 2.9). Comme les points singuliers de C_0 sont isolés, on obtient que dans ce cas $C_0 \cap S_\varepsilon$ est un link dans S_ε . On appellera *link algébrique* tout link qui a le type d'un link obtenu de cette façon. Dans cet article nous ne nous sommes intéressés qu'au cas où un link algébrique n'a qu'une seule composante, ou, ce qui est équivalent au cas où $S_\varepsilon \cap C_0$ est connexe quand ε est assez petit. Comme il est coutume de le faire, on appelle *nœud* un link n'ayant qu'une seule composante.

Cette dernière condition est équivalente au fait que l'idéal engendré par f dans l'anneau des séries formelles (resp. convergentes) $\mathbb{C}[[X, Y]]$ (resp. $\mathbb{C}\{X, Y\}$) est un idéal premier (cf. [1] 30.8, 34.3). Quand nous ferons cette supposition, nous l'exprimerons en disant que f est *analytiquement irréductible en 0*.

Dans [18], J. Milnor montre que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a un diffeomorphisme de la paire $(B_\varepsilon, B_\varepsilon \cap C_0)$ sur $(B_\varepsilon, C(K_\varepsilon))$, où $C(K_\varepsilon)$ est le cône réel union des segments d'extrémités 0 et un point de $S_\varepsilon \cap C_0 = K_\varepsilon$. En fait J. Milnor montre qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ et $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$, les links $K_{\varepsilon_1} \subset S_{\varepsilon_1}$ et $K_{\varepsilon_2} \subset S_{\varepsilon_2}$ ont le même type. Il résulte alors que $(B_{\varepsilon_1}, B_{\varepsilon_1} \cap C_0)$ et $(B_{\varepsilon_2}, B_{\varepsilon_2} \cap C_0)$ sont homéomorphes. On exprime ce fait en disant que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, *le link $K_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ détermine le type topologique de la singularité $0 \in C_0$, et dans ce cas on appellera le link $K_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ le link de la singularité $0 \in C_0$.*

Supposons désormais que f est analytiquement irréductible en 0. Dans [2], K. Brauner a montré que l'on pouvait déterminer le nœud de la singularité $0 \in C_0$ à l'aide d'une suite de paires d'entiers $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ définie par la fonction f , appelée suite des paires de Puiseux de f en 0 (cf. § 1) et vérifiant:

- i) m_i et n_i sont premiers entre eux pour tout $i = 1, \dots, g$
- ii) $m_{i-1} n_i < m_i$ pour tout $i = 2, \dots, g$.

Dans [23] et [4], O. Zariski et W. Burau ont calculé des invariants associés au nœud d'une singularité $0 \in C_0$. Ainsi dans [23], O. Zariski calcule le groupe du nœud, i.e. le groupe fondamental $\pi_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon, y)$ de $S_\varepsilon - K_\varepsilon$ en $y \in S_\varepsilon - K_\varepsilon$, en fonction des paires caractéristiques de Puiseux (cf. § 2). Il ressort des résultats de O. Zariski et W. Burau que la détermination du premier polynôme d'Alexander d'un nœud algébrique (cf. § 2) donne la suite des paires de Puiseux de f en 0 et par conséquent le nœud $K_\varepsilon \subset S_\varepsilon$. Par ailleurs, on trouve que ce premier polynôme d'Alexander est cyclotomique, i.e. n'a que des racines qui sont racines de l'unité.

Remarquons par ailleurs que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\beta_\varepsilon > 0$ assez petit tel que, pour tout b , $0 < |b| \leq \beta_\varepsilon$, C_b soit transverse à S_ε et que $C_b \cap B_\varepsilon$ soit une variété différentiable à bord de dimension réelle 2. Ainsi f induit une fibration $\varphi : f^{-1}(S_0) \cap B_\varepsilon \rightarrow S_0$, où S_0 est un cercle de rayon r , $0 < r \leq \beta_\varepsilon$. Le groupe fondamental de S_0 en e opère sur l'homotopie de la fibre $\varphi^{-1}(e)$ de φ au-dessus de e (cf. [18] Chap. 8). Comme $C_e \cap B_\varepsilon$ est une surface réelle compacte, convexe à bord non vide, $C_e \cap B_\varepsilon = \varphi^{-1}(e)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles de dimension 1 et, par conséquent, l'homologie de $\varphi^{-1}(e)$ n'est non nulle qu'en dimension 0 et 1. L'image h_* du générateur de $\pi_1(S_0, e)$ dans le groupe des automorphismes de $H_1(\varphi^{-1}(e), \mathbf{Z})$ s'appelle la *monodromie locale de f en 0*. On remarque que la monodromie locale de f en 0 est définie à conjugaison près et que l'on peut la définir dans le cas plus général des hypersurfaces à singularité isolée (cf. [18]).

E. Brieskorn a conjecturé dans le cas général des hypersurfaces à singularité isolée que cette monodromie locale h_* de f en 0 est d'ordre fini,

i.e. qu'il existe $n > 0$ entier tel que:

$$h_*^n = \text{Id.}$$

On a montré ('théorème de monodromie') (cf. [3], [7], [14] ···) que pour les hypersurfaces à singularité isolée la monodromie locale est quasi-unipotente, i.e. il existe $n_1 > 0$ entier tel que $h_*^{n_1} - \text{Id}$ soit nilpotent. Il en résulte en particulier que les valeurs propres de h_* sont des racines de l'unité. Or dans [18], J. Milnor a montré que, pour le cas des courbes analytiquement irréductibles en 0, le premier polynôme d'Alexander du nœud de la singularité $0 \in C_0$ n'est autre que le polynôme caractéristique de la monodromie locale. De cette constatation et des calculs de O. Zariski et W. Burau résulte la quasi-unipotence de la monodromie locale.

On se propose dans cet article de montrer que les résultats de O. Zariski montrent en fait que la conjecture de Brieskorn est vraie pour les courbes planes analytiquement irréductibles.

1. Les résultats de K. Brauer

(1.1) Nous allons tout d'abord définir la suite des paires de Puiseux qui vont nous permettre de montrer comment K. Brauer détermine un nœud algébrique dans [2].

Notons A l'algèbre quotient $C[[X, Y]]/(f)$ de $C[[X, Y]]$ par l'idéal engendré par f . L'anneau A est évidemment local et complet et son idéal maximal est engendré par les images x et y de X et Y dans A . Comme nous avons supposé f analytiquement irréductible en 0, A est un anneau intègre. Soit K son corps des fractions et soit \bar{A} sa fermeture intégrale dans K . Comme A est un anneau complet donc hensélien, \bar{A} est un anneau local, de type fini sur A , complet. Comme le corps résiduel de \bar{A} est C , on en déduit que $\bar{A} = C[[t]]$ où t est un élément de K entier sur A . En fait si x est un paramètre transverse de A , i.e. x est un paramètre de A tel que $(x, y)\bar{A}$, idéal de \bar{A} engendré par x et y , égale $x\bar{A}$ on peut choisir t tel que

$$t^n = x$$

où n est la multiplicité de A .

On obtient alors que y est une série formelle en t appelée *développement de Puiseux de f en 0*. Dans les notations classiques on choisit une détermination $x^{1/n}$ d'une racine n -ième de x et on écrit:

$$y = \sum_{k \geq 0} a_k x^{k/n}.$$

EXEMPLE (1.1.1). Soit $f = X^7 - Y^3$. Alors x est un paramètre transverse de A , la multiplicité de f , i.e. la multiplicité de A , égale 3 et le développement de Puiseux de f en 0 est:

$$Y = X^{\frac{1}{n}}.$$

Le corps des fractions $C((x))$ de la sous-algèbre $C[[x]]$ de K est un sous-corps de K . Notons G le groupe de Galois de K sur $C((x))$: c'est évidemment un groupe cyclique d'ordre n . Considérons alors le sous-groupe G_i des éléments σ de G tels que la valuation $v(\sigma y - y)$ de $\sigma y - y$ est au moins égale à i :

$$G_i = \{\sigma \mid \sigma \in G \wedge v(\sigma y - y) \geq i\}.$$

Evidemment $G_1 = G$ et $G_{i+1} \subset G_i$. On obtient donc une suite décroissante de sous-groupes de G . Cette suite ne comporte donc qu'un nombre fini de termes distincts. On peut alors définir:

$$\beta_1 = \text{Sup} \{m \mid G_m = G\}.$$

Si $G_{\beta_i+1} \neq \{1\}$:

$$\beta_{i+1} = \text{Sup} \{m \mid G_m = G_{\beta_i+1}\}.$$

La suite finie $\{\beta_1/n, \dots, \beta_g/n\}$ strictement croissante que l'on définit ainsi s'appelle la suite des *exposants caractéristiques de Puiseux de f en 0*.

On peut alors écrire:

$$\frac{\beta_1}{n} = \frac{m_1}{n_1}$$

$$\frac{\beta_i}{n} = \frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}$$

avec m_i et n_i premiers entre eux. Les paires (m_i, n_i) sont appelées *les paires caractéristiques de Puiseux de f en 0*. Elles vérifient:

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} m_{i-1} n_i &< m_i \\ n &= n_1 \cdots n_g. \end{aligned}$$

On appelle g le *genre de la singularité* $0 \in C_0$.

Afin d'avoir un moyen pratique d'obtenir les exposants et paires de Puiseux, nous allons en donner une autre description. Le lecteur se convaincra de l'identité des deux définitions.

Soit:

$$y = \sum_{k \geq 0} a_k x^{k/n}$$

– le développement de Puiseux de f en 0. *On ne s'intéresse qu'aux coefficients du développement qui ne sont pas nuls*. Dans toutes les opérations que nous allons décrire, *nous ne modifions en aucun cas l'ordre des termes de la série*.

① Supposons que tous les *exposants* k/n qui correspondent à des coefficients $a_k \neq 0$ soient écrits sous forme irréductible.

Eventuellement les premiers termes non nuls de la série $\sum_{k \geq 0} a_k x^{k/n}$ sont des termes d'exposants entiers. Mais nécessairement il existe un plus petit k , soit k_1 , tel que:

i) $a_{k_1} \neq 0$

ii) $\frac{k_1}{n} \notin \mathbb{N}$.

Donc:
$$\sum_{k \geq 0} a_k x^{k/n} = P(x) + \sum_{k \geq k_1} a_{k_1} x^{k/n}$$

où $P(x)$ est un polynôme en x et $k_1/n = m_1/n_1$ avec m_1 et n_1 premiers entre eux.

Si $n_1 = n$ nous avons fini et (m_1, n_1) est l'unique paire de Puiseux avec $\beta_1 = m_1$.

② Si $n_1 < n$, n_1 divise n et nécessairement parmi les termes non nuls qui suivent le k_1 -ième terme il existe au moins un terme dont l'exposant k/n n'est pas égal à une fraction où l'on peut mettre n_1 au dénominateur (cf. [20]): ceci provient de l'irréductibilité de f en 0. Soit k_2 le plus petit $k > k_1$ pour lequel cette propriété est vérifiée. On peut alors écrire:

$$\frac{k_2}{n} = \frac{m_2}{n_1 n_2},$$

avec m_2 et n_2 premiers entre eux;

On a donc:

$$\sum_{k \geq 0} a_k x^{k/n} = P(x) + a_{k_1} x^{m_1/n_1} + \sum_{l=1}^{l_1} a_{1l} x^{m_1+l/n_1} + a_{k_2} x^{m_2/n_1 n_2} + \sum_{k > k_2} a_k x^{k/n}.$$

Si $n_1 n_2 = n$, nous avons fini et il n'y a que deux paires de Puiseux (m_1, n_1) et (m_2, n_2) . De plus on a:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= m_1 n_2 \\ \beta_2 &= m_2. \end{aligned}$$

③ Si $n_1 n_2 < n$ on procède comme précédemment et on définit k_3 .

On procède ainsi g fois de telle sorte que $n_1 \cdots n_g = n$. Le nombre d'opérations est évidemment fini.

Finalement on obtient:

$$\begin{aligned} y = \sum_{k \geq 0} a_k x^{k/n} &= P(x) + a_{k_1} x^{m_1/n_1} + \sum_{l=1}^{l_1} a_{1l} x^{m_1+l/n_1} \\ &+ a_{k_2} x^{m_2/n_1 n_2} + \sum_{l=1}^{l_2} a_{2l} x^{m_2+l/n_1 n_2} \\ &+ \cdots + a_{k_g} x^{m_g/n_1 \cdots n_g} + \sum_{k > k_g} a_k x^{k/n}. \end{aligned}$$

(1.1.3) Dans [20] on montre que si

$$y = \sum_{k \geq 0} a_k x^{k/n}$$

est le développement de Puiseux de f on obtient

$$f(x, y) = u \prod_{\xi \in U_n} (y - \sum_{k \geq 0} a_k \xi^k x^{k/n})$$

où U_n est l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité et u est une unité de $\mathbb{C}\{x, y\}$. On obtient ainsi:

(1.1.4) Une suite $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ de paires d'entiers premiers entre eux est une suite de paires caractéristiques de Puiseux si et seulement si les inégalités (1.1.2):

$$m_{i-1} n_i < m_i$$

sont vérifiées pour tout $i = 2, \dots, g$.

(1.2) Nous sommes maintenant en mesure de décrire un nœud algébrique (cf. [2], [24] et [17]).

Reprenons les notations utilisées dans l'introduction. Soient $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ les paires caractéristiques de Puiseux de f en 0. Nous allons décrire le type du nœud $S_\varepsilon \cap C_0$ dans S_ε obtenu quand $\varepsilon > 0$ est assez petit. On peut toujours considérer $S_\varepsilon \cap C_0$ comme plongé dans un espace euclidien de dimension 3 en enlevant un point de S_ε dans $S_\varepsilon - S_\varepsilon \cap C_0$.

Nous définissons pour toute suite M_g de paires d'entiers positifs $(\mu_1, \nu_1), \dots, (\mu_g, \nu_g)$ le nœud $K(M_g)$ suivant:

1) $g = 1$: sur le tore $S^1 \times S^1$ plongé naturellement dans \mathbb{R}^3 la première coordonnée donne le *parallèle* sur lequel on se trouve et la seconde coordonnée donne le *méridien*. Ainsi si $e_0 \in S^1$, $\{e_0\} \times S^1$ est un parallèle et $S^1 \times \{e_0\}$ est un méridien. Considérons alors la courbe fermée K_1 image de l'application analytique $\mathcal{K}_1 : S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ définie par

$$\mathcal{K}_1(z) = (z^{\mu_1}, z^{\nu_1})$$

en identifiant S^1 avec le cercle unité du plan complexe. Cette courbe K est donc un nœud de \mathbb{R}^3 .

On remarque que si $p_i : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ désigne la projection de $S^1 \times S^1$ sur le i -ème facteur ($i = 1, 2$), on obtient que $p_1 \mathcal{K}_1$ a le degré μ_1 et $p_2 \mathcal{K}_1$ a le degré ν_1 . On exprime ce fait en disant que K_1 est un *nœud torique obtenu en faisant ν_1 tours longitudinalement et μ_1 tours transversalement*, ou plus simplement K_1 est un *nœud torique de type* (μ_1, ν_1) . Tout nœud K ayant le même type que celui de K_1 est dit nœud torique de type (μ_1, ν_1) .

3
35 ~ 13

2) $g > 1$: on a construit le nœud $K(M_{g-1})$, où M_{g-1} est la suite de paires d'entiers $(\mu_1, \nu_1), \dots, (\mu_{g-1}, \nu_{g-1})$. On suppose que $K(M_{g-1})$ est plongé dans \mathbf{R}^3 .

Considérons un voisinage tubulaire T_g de $K(M_{g-1})$ dans \mathbf{R}^3 . On remarque que T_g est isomorphe à un tore plein. On a un difféomorphisme φ du bord ∂T_g de T_g sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ tel que si $e_0 \in \mathbf{S}^1$, $\varphi^{-1}(\{e_0\} \times \mathbf{S}^1)$ soit un parallèle de ∂T_g , i.e. une courbe fermée de ∂T_g ayant dans \mathbf{R}^3 un nombre d'entrelacements nul avec $K(M_{g-1})$ (cf. [9] p. 123), et $\varphi^{-1}(\mathbf{S}^1 \times \{e_0\})$ soit un méridien de ∂T_g , i.e. une courbe fermée de ∂T_g ayant dans \mathbf{R}^3 un nombre d'entrelacements égal à 1 avec $K(M_{g-1})$. Soit K_g le nœud torique de type $(\lambda_g, \nu_g)^*$ sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Alors $\varphi^{-1}(K_g)$ est une courbe fermée de ∂T_g qui définit un nœud $K(M_g)$ dans \mathbf{R}^3 .

Un tel nœud est appelé *nœud torique itéré de type M_g ou défini par la suite M_g* .

On a alors:

THÉORÈME (1.2.1). (K. Brauner [2]): *Soit $f: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction polynôme telle que $f(0) = 0$. Supposons que f soit analytiquement irréductible en 0. Alors, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le nœud $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap C_0$ dans S_ε a le type du nœud $K(M_g)$ où M_g est la suite des paires de Puiseux de f en 0.*

D'après (1.1.4) on obtient alors qu'un nœud torique itéré défini par la suite $(\mu_1, \nu_1), \dots, (\mu_g, \nu_g)$ est un nœud algébrique si et seulement si on a les inégalités:

$$\mu_{i-1} \nu_i < \mu_i \text{ avec } i = 2, \dots, g.$$

2. Les polynômes d'Alexander

(2.1) Soit $K \subset \mathbf{S}^3$ un nœud. On appelle *groupe du nœud K* le groupe $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K, y)$ où $y \in \mathbf{S}^3 - K$. Evidemment si deux nœuds $K_1 \subset \mathbf{S}^3$ et $K_2 \subset \mathbf{S}^3$ ont le même type, leurs groupes sont isomorphes. Malheureusement la réciproque est fautive (cf. [11] p. 131). Cependant, dans le cas des nœuds algébriques cette réciproque est vraie (cf. [4] et [17]). En fait quand un groupe de nœuds est défini par un nombre fini de générateurs et relations, on peut lui associer des invariants algébriques appelés 'les polynômes d'Alexander' et nous allons montrer que la connaissance du premier d'entre eux seulement nous donne le type de nœud dans le cas d'un nœud algébrique.

* Rejointé en cours d'épreuve: La suite (λ_j) est définie par:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 \\ \lambda_i &= \mu_i - \mu_{i-1} \nu_i + \lambda_{i-1} \nu_{i-1} \nu_i \quad (i = 2, \dots, g). \end{aligned}$$

Je remercie A. Durfee et N. A'Campo pour m'avoir signalé une faute à cet endroit.

(2.2) Soit G un groupe. Nous dirons que $(x_i)_{i \in I}$ et $(r_j)_{j \in J}$ sont des générateurs et des relations de G si G est isomorphe au quotient du groupe libre L engendré par les $(x_i)_{i \in I}$ par le sous-groupe distingué engendré par les $(r_j)_{j \in J}$.

Dans le cas des nœuds algébriques, on sait montrer que le groupe du nœud est donné par un nombre fini de générateurs et de relations. En fait dans [23], O. Zariski donne explicitement les générateurs et relations du groupe d'un nœud algébrique.

Notons, comme précédemment, $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ les paires caractéristiques qui définissent notre nœud algébrique K .

Le groupe G du nœud K est défini par les générateurs p_i ($i = 1, \dots, g+1$) et q_j ($j = 1, \dots, g$) et les relations (avec $q_0 = 1$):

$$(2.2.1) \quad p_i^{\mu_i} q_{i-1}^{n_i-1} q_i^{-n_i} = r_i \quad i = 1, \dots, g$$

$$(2.2.2) \quad p_{i+1} p_i^{y_i} q_{i-1}^{n_i-1} q_i^{-x_i} = s_i \quad i = 1, \dots, g$$

où μ_i est défini par:

$$(2.2.3) \quad \text{i) } \mu_1 = m_1$$

$$\text{ii) } \mu_i = m_i - n_i m_{i-1} \quad i = 2, \dots, g$$

x_i et y_i sont des entiers vérifiant:

$$(2.2.4) \quad \mu_i x_i = n_i y_i + 1 \quad i = 1, \dots, g.$$

Remarquons que, comme K est une sous-variété de S^3 difféomorphe à S^1 , la dualité d'Alexander (cf. [13]) donne:

LEMME (2.2.4). *Le groupe d'homologie $H_1(S^3 - K)$ est isomorphe à \mathbf{Z} . On obtient alors (cf. [13]):*

COROLLAIRE (2.2.5). *L'abélianisé de G , quotient de G par le sous-groupe distingué $[G, G] = G'$ des commutateurs de G , est isomorphe à \mathbf{Z} .*

(2.2.6) *O. Zariski montre alors que l'image de p_{g+1} dans l'abélianisé G/G' est un générateur.*

(2.3) Dans ce paragraphe nous allons rappeler la définition des polynômes d'Alexander avant de les calculer dans le cas des nœuds algébriques (cf. [11]).

Soit G un groupe défini par les générateurs x_1, \dots, x_q et les relations r_1, \dots, r_p . Quitte à rajouter des relations redondantes, comme la relation triviale par exemple, on peut toujours supposer $p \geq q$. On définit, comme R. Fox dans [9] ou [10], la dérivation formelle des relations r_i par rapport au x_j . Plus précisément écrivons le mot r_i en les x_j sous forme réduite, i.e.:

$$r_i = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_r}^{\varepsilon_r}$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$. La dérivée formelle $\partial r_i / \partial x_j$ de r_i par rapport aux x_j est un élément de l'algèbre $\mathbf{Z}[G]$ du groupe G (cf. [15] p. 109) donné par:

$$\partial r_i / \partial x_j = \varepsilon_1 \delta_{j i_1} x_{i_1}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - 1)} + \varepsilon_2 \delta_{j i_2} x_{i_1} x_{i_2}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_2 - 1)} + \cdots + \varepsilon_r \delta_{j i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)}.$$

EXEMPLE. Soient x et y les générateurs et $x^n y^{-m} = r$ la relation. On a:

$$\begin{aligned} \partial r / \partial x &= 1 + x + \cdots + x^{n-1} \\ \partial r / \partial y &= -x^n y^{-1} - \cdots - x^n y^{-m}. \end{aligned}$$

La justification théorique d'une telle définition et les propriétés qui en résultent sont données dans [10], [11] et [22].

De cette façon on peut définir une matrice jacobienne formelle (a_{ji}) , où $a_{ji} = \partial r_i / \partial x_j$, à coefficients dans $\mathbf{Z}[G]$.

L'application canonique $\sigma : G \rightarrow G/G'$ s'étend en un homomorphisme unique de $\mathbf{Z}[G]$ dans $\mathbf{Z}[G/G']$ que l'on note encore σ .

Nous nous intéresserons à la matrice $(\sigma(a_{ji}))$ à coefficients dans $\mathbf{Z}[G/G']$. En fait, de ce que G/G' soit isomorphe à \mathbf{Z} résulte que $\mathbf{Z}[G/G']$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$, où t est une indéterminée.

La matrice $M = (\sigma(a_{ji}))$ a q lignes et p colonnes. Comme $p \geq q$, on peut considérer les mineurs d'ordre $q-k$ avec $k = 0, \dots, q-1$. On note \mathcal{E}_k l'idéal de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ engendré par les mineurs d'ordre $q-k$ pour $k = 0, \dots, q-1$. Si $0 \leq k \leq 1 \leq q-1$, on a:

$$\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_1.$$

L'idéal \mathcal{E}_k est appelé le k -ième idéal élémentaire de G . Dans [11] on montre:

THÉORÈME (2.3.1). *La suite des idéaux élémentaires de G ne dépend pas du choix des générateurs et relations de G .*

Ce théorème résulte essentiellement du théorème de Tietze.

Dans le cas des nœuds algébriques qui nous intéressent nous allons montrer que $\mathcal{E}_0 = (0)$ et \mathcal{E}_1 est principal (cf. [9] p. 127).

(2.3.2) On montre que toute famille d'éléments de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ possède un *plus grand commun diviseur* (p.g.c.d.), évidemment défini à la multiplication par une puissance entière de t près (cf. [11] p. 118).

(2.3.3) Le k -ième polynôme d'Alexander Δ_k est le p.g.c.d. de l'idéal \mathcal{E}_k . Dans [11], on montre que Δ_k est un générateur de plus petit idéal principal de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ que contient \mathcal{E}_k . On choisira toujours Δ_k dans $\mathbf{Z}[t]$ avec $\Delta_k(0) \neq 0$ quand $k \neq 0$.

On remarque que Δ_{k+1} divise Δ_k ($k = 0, \dots, q-2$).

(2.4) Nous allons alors calculer le premier polynôme d'Alexander d'un nœud algébrique. La méthode utilisée, qui est *très maladroite*, utilise directement la définition du premier polynôme d'Alexander donnée ici et le calcul du groupe du nœud faite par O. Zariski (cf. [23]). En fait on peut faire comme W. Burau dans [4] ou Seifert dans [25] (voir aussi H. Schubert [21] et R. Fox [10]) et calculer le premier polynôme d'Alexander d'un nœud torique itéré, connaissant celui d'un nœud torique de type (m, n) et une formule de récurrence adéquate.

On utilise les notations de (2.2) et on pose:

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} a_{2i-1, 2j-1} &= \partial r_j / \partial p_i \\ a_{2i, 2j-1} &= \partial r_j / \partial q_i \\ a_{2i-1, 2j} &= \partial s_j / \partial p_i \\ a_{2i, 2j} &= \partial s_j / \partial q_i. \end{aligned}$$

Dans ce cas (2.2.1) et (2.2.2) donnent:

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} \partial r_i / \partial p_i &= 1 + \cdots + p_i^{\mu_i-1} \\ \partial r_i / \partial p_j &= 0 \quad \text{si } j \neq i, \\ \partial r_i / \partial q_{i-1} &= p_i^{\mu_i} (1 + \cdots + q_{i-1}^{n_i-1}) \\ \partial r_i / \partial q_i &= p_i^{\mu_i} q_{i-1}^{n_i-1} (-q_i^{-1} - \cdots - q_i^{-n_i}) \\ \partial r_i / \partial q_j &= 0 \quad \text{si } j \neq i-1, i. \end{aligned}$$

$$(2.4.3) \quad \begin{aligned} \partial s_i / \partial p_i &= p_{i+1} (1 + \cdots + p_i^{y_i-1}) \\ \partial s_i / \partial p_{i+1} &= 1 \\ \partial s_i / \partial p_j &= 0 \quad \text{si } j \neq i, i+1 \\ \partial s_i / \partial q_{i-1} &= p_{i+1} p_i^{y_i} (1 + \cdots + q_{i-1}^{n_i-1 x_i-1}) \\ \partial s_i / \partial q_i &= p_{i+1} p_i^{y_i} q_{i-1}^{n_i-1 x_i} (-q_i - \cdots - q_i^{-x_i}) \\ \partial s_i / \partial q_j &= 0 \quad \text{si } j \neq i-1, i. \end{aligned}$$

Soit $\sigma : \mathbf{Z}[G] \rightarrow \mathbf{Z}[G/G']$ l'application canonique qui provient de $G \rightarrow G/G'$. On a, en identifiant $\mathbf{Z}[G/G']$ et $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$:

$$\begin{aligned} \sigma(p_{g+1}) &= t && \text{(cf. (2.2.6))} \\ \sigma(p_i) &= t^{v_i} \\ \sigma(q_i) &= t^{\lambda_i v_{i+1}} && \text{(cf. [23])} \end{aligned}$$

où:

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} v_i = n_i \cdots n_g & i = 1, \dots, g \\ v_{g+1} = 1 \\ \lambda_1 = \mu_1 = m_1 \\ \lambda_i = \mu_i + \lambda_{i-1} n_i n_{i-1} & i = 2, \dots, g \\ \quad = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_i n_{i-1}. \end{cases}$$

Par conséquent on obtient:

$$(2.4.5) \quad \begin{aligned} \sigma(\partial r_i / \partial p_i) &= 1 + \cdots + (t^{v_i})^{\mu_i - 1} = t^{v_i \mu_i} - 1 / (t^{v_i} - 1) \\ \sigma(\partial r_i / \partial p_j) &= 0 \quad \text{si } j \neq i \\ \sigma(\partial r_i / \partial q_{i-1}) &= t^{v_i \mu_i} (t^{\lambda_i - 1 v_i n_i - 1 n_i} - 1) / (t^{\lambda_i - 1 v_i} - 1) \\ \sigma(\partial r_i / \partial q_i) &= -(t^{\lambda_i v_i + 1 n_i} - 1) / (t^{\lambda_i v_i + 1} - 1) \\ \sigma(\partial r_i / \partial q_j) &= 0 \quad \text{si } j \neq i-1, i. \end{aligned}$$

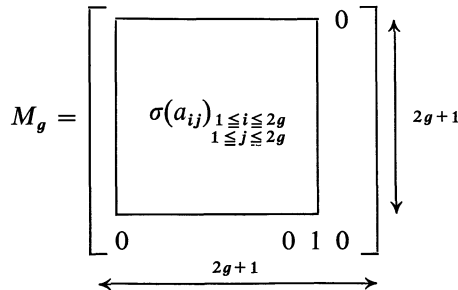
$$(2.4.6) \quad \begin{aligned} \sigma(\partial s_i / \partial p_i) &= t^{v_i + 1} (t^{v_i v_i} - 1) / (t^{v_i} - 1) \\ \sigma(\partial s_i / \partial p_{i+1}) &= 1 \\ \sigma(\partial s_i / \partial p_j) &= 0 \quad \text{si } j \neq i, i+1 \\ \sigma(\partial s_i / \partial q_{i-1}) &= t^{v_i + 1 \mu_i x_i} (t^{\lambda_i - 1 v_i n_i - 1 x_i} - 1) / (t^{\lambda_i - 1 v_i} - 1) \\ \sigma(\partial s_i / \partial q_i) &= -(t^{\lambda_i v_i + 1 x_i} - 1) / (t^{\lambda_i v_i + 1} - 1) \\ \sigma(\partial s_i / \partial q_j) &= 0 \quad \text{si } j \neq i-1, i. \end{aligned}$$

Remarquons que le nombre de générateurs est $2g + 1$ alors que le nombre de relations est $2g$. Pour considérer la matrice M de (2.3) nous adjoignons la relation triviale 1. Par conséquent:

$$(2.4.7) \quad a_{i, 2g+1} = 0.$$

Ceci implique $\mathcal{E}_0 = (0)$, i.e. le 0-ième idéal élémentaire est nul.

Dans la matrice carrée $M_g = (\sigma(a_{ij}))$ d'ordre $2g + 1$, où a_{ij} est défini par (2.4.1) et (2.4.7), les mineurs non nuls d'ordre $2g$ qui engendrent \mathcal{E}_1 sont alors les mineurs obtenus en rayant la colonne de numéro $2g + 1$, uniquement composée de zéros, et une ligne quelconque.



On remarque alors que la dernière ligne de M_g est composée de zéros et d'un seul élément non nul à la $2g$ -ième colonne.

Nous allons montrer que le mineur d'ordre $2g$ obtenu en rayant les $(2g + 1)$ -ième ligne et colonne est le premier polynôme d'Alexander et on donnera une expression explicite de ce polynôme. En fait, les calculs suivants éclairent la démonstration elliptique de O. Zariski dans [23].

Tout d'abord nous ne considérons que la sous-matrice $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ de M_g des $2g$ premières colonnes.

(2.4.8) La sous-matrice de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ obtenue en rayant les $2g'$ dernières lignes et colonnes avec $g' < g$, égale $B(t^{v_{g-g'}+1}, m_1, n_1, \dots, m_{g-g'}, n_{g-g'})$.

On a, en notant $\bar{a} = \sigma(a)$:

$$B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g) = \begin{bmatrix} \boxed{B(t^{n_g}, m_1, n_1, \dots, m_{g-1}, n_{g-1})} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & \bar{a}_{2g-2, 2g-1} & \bar{a}_{2g-2, 2g} \\ & \bar{a}_{2g-1, 2g-1} & \bar{a}_{2g-1, 2g} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{2g, 2g-1} & \bar{a}_{2g, 2g} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans un premier temps nous calculons le mineur obtenu à partir de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ en rayant la dernière ligne. Nous allons noter $\Delta_1^g(t)$ ce mineur. Pour calculer $\Delta_1^g(t)$ nous avons besoin de calculer les mineurs obtenus, pour $g \geq 2$, à partir de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ en rayant les deux dernières lignes et respectivement la dernière et l'avant-dernière colonne. Nous appellerons $M_1^g(t)$ et $N_1^g(t)$ ces deux mineurs.

$$M_1^g(t) = \det \begin{bmatrix} \boxed{B(t^{n_g}, m_1, n_1, \dots, m_{g-1}, n_{g-1})} & 0 \\ & 0 \\ & \bar{a}_{2g-2, 2g-1} \\ & \bar{a}_{2g-1, 2g-1} \end{bmatrix}$$

$$N_1^g(t) = \det \begin{bmatrix} \boxed{B(t^{n_g}, m_1, n_1, \dots, m_{g-1}, n_{g-1})} & 0 \\ & 0 \\ & \bar{a}_{2g-2, 2g} \\ & \bar{a}_{2g-1, 2g} \end{bmatrix}$$

Remarquons:

$$(2.4.9) \quad \Delta_1^g(t) = \bar{a}_{2g, 2g} M_1^g(t) - \bar{a}_{2g, 2g-1} N_1^g(t).$$

LEMME (2.4.10). *Pour $g \geq 2$ on a:*

- i)
$$M_1^g(t) = \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) \cdot \frac{t^{\lambda_g n_g} - 1}{t^{n_g} - 1}$$
- ii)
$$N_1^g(t) = \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) \cdot \frac{t^{\lambda_g x_g} - t}{t^{n_g} - 1}$$
- iii)
$$\Delta_1^1(t) = - \frac{(t^{\mu_1 n_1} - 1)(t - 1)}{(t^{\mu_1} - 1)(t^{n_1} - 1)}$$
- iv)
$$\Delta_1^g(t) = - \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) \cdot \frac{(t^{\lambda_g n_g} - 1)(t - 1)}{(t^{\lambda_g} - 1)(t^{n_g} - 1)}$$

pour $g \geq 2$.

PREUVE DU LEMME (2.4.10). Nous allons faire une démonstration par récurrence sur g .

Pour $g = 2$, on vérifie. Pour aider le lecteur on donne la matrice $B(t, m_1, n_1, m_2, n_2)$. Rappelons que $\mu_i, v_i, \lambda_i, x_i, y_i$ ont été définis dans (2.2.3), (2.2.4), (2.4.4).

$$\begin{bmatrix} \frac{t^{v_1 \mu_1} - 1}{t^{v_1} - 1} & \frac{t^{v_2}(t^{v_1 y_1} - 1)}{t^{v_1} - 1} & 0 & 0 \\ - \frac{(t^{\lambda_1 v_1} - 1)}{t^{\lambda_1 v_2} - 1} & - \frac{(t^{\lambda_1 v_2 x_1} - 1)}{t^{\lambda_1 v_2} - 1} & \frac{t^{v_2 \mu_2}(t^{\lambda_1 v_2 n_1 n_2} - 1)}{t^{\lambda_1 v_2} - 1} & \frac{t^{v_3 \mu_2 x_2}(t^{\lambda_1 v_2 n_1 x_2} - 1)}{t^{\lambda_1 v_2} - 1} \\ 0 & 1 & \frac{t^{v_2 \mu_2} - 1}{t^{v_2} - 1} & \frac{t^{v_3}(t^{v_2 y_2} - 1)}{t^{v_2} - 1} \\ 0 & 0 & - \frac{(t^{\lambda_2 v_2} - 1)}{t^{\lambda_2 v_3} - 1} & - \frac{(t^{\lambda_2 v_3 x_2} - 1)}{t^{\lambda_2 v_3} - 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappelons que dans le cas où $g = 2, v_3 = 1$.

En utilisant (2.4.9), on obtient que iv) est vrai pour $g = 2$.

Supposons alors i), ii) et iv) vrai pour tout $g', 2 \leq g' < g$. On a:

$$M_1^g(t) = \bar{a}_{2g-1, 2g-1} \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) - \bar{a}_{2g-2, 2g-1} M_1^{g-1}(t^{n_g}).$$

L'hypothèse de récurrence sera:

$$M_1^{g-1}(t) = \Delta_1^{g-2}(t^{n_{g-1}}) \frac{t^{\lambda_{g-1}n_{g-1}} - 1}{t^{n_{g-1}} - 1}$$

$$\Delta_1^{g-1}(t) = -\Delta_1^{g-2}(t^{n_{g-1}}) \frac{(t^{\lambda_{g-1}n_{g-1}} - 1)(t-1)}{(t^{n_{g-1}} - 1)(t^{\lambda_{g-1}} - 1)}.$$

D'après (2.4.1), (2.4.5) et (2.4.6), on a :

$$\bar{a}_{2g-1, 2g-1} = \frac{t^{\nu_g \mu_g} - 1}{t^{\nu_g} - 1}$$

$$\bar{a}_{2g-2, 2g-1} = \frac{t^{\nu_g \mu_g} (t^{\lambda_{g-1} \nu_g n_{g-1} n_g} - 1)}{t^{\lambda_{g-1} \nu_g} - 1}.$$

D'où :

$$M_1^g(t) = \Delta_1^{g-2}(t^{n_{g-1} n_g}) \left[- \frac{(t^{\lambda_{g-1} n_{g-1} n_g} - 1)(t^{n_g} - 1)(t^{\nu_g \mu_g} - 1)}{(t^{\nu_g} - 1)(t^{n_{g-1} n_g} - 1)(t^{\lambda_{g-1} n_g} - 1)} \right. \\ \left. - \frac{t^{\nu_g \mu_g} (t^{\lambda_{g-1} \nu_g n_{g-1} n_g} - 1)(t^{\lambda_{g-1} n_g} - 1)}{(t^{\lambda_{g-1} \nu_g} - 1)(t^{n_{g-1} n_g} - 1)} \right].$$

Compte-tenu de $\nu_g = n_g$, $\nu_{g-1} = n_{g-1} n_g$, $\lambda_g = \mu_g + \lambda_{g-1} n_{g-1} n_g$ etc \dots (s'il y a lieu!) on obtient i) du lemme (2.4.10).

Pour $N_1^g(t)$, on obtient :

$$N_1^g(t) = \bar{a}_{2g-1, 2g} \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) - \bar{a}_{2g-2, 2g} M_1^{g-1}(t^{n_g}).$$

En utilisant les hypothèses de récurrence et donnant leur valeur à $\bar{a}_{2g-1, 2g}$ et $\bar{a}_{2g-2, 2g}$, on obtient

$$N_1^g(t) = \Delta_1^{g-2}(t^{n_{g-1} n_g}) \left[- \frac{(t^{\lambda_{g-1} n_{g-1} n_g} - 1)(t^{n_g} - 1)t^{\nu_g+1}(t^{\nu_g \nu_g} - 1)}{(t^{n_{g-1} n_g} - 1)(t^{\lambda_{g-1} n_g} - 1)(t^{\nu_g} - 1)} \right. \\ \left. - \frac{t^{\nu_g+1} \mu_g x_g (t^{\lambda_{g-1} \nu_g n_{g-1} x_g} - 1)(t^{\lambda_{g-1} n_g} - 1)}{(t^{\lambda_{g-1} n_g} - 1)(t^{n_{g-1} n_g} - 1)} \right].$$

Se rappelant que $\nu_{g+1} = 1$ et $\mu_g x_g = n_g y_g + 1$, on obtient ii) du lemme (2.4.10) et iv) résulte de (2.4.9).

En écrivant :

$$(2.4.11) \quad P_{\lambda, n}(t) = \frac{(t^{\lambda n} - 1)(t-1)}{(t^\lambda - 1)(t^n - 1)}$$

on obtient :

$$(2.4.12) \quad \Delta_1^g(t) = (-1)^g P_{\lambda_1, n_1}(t^{\nu_2}) \cdots P_{\lambda_g, n_g}(t).$$

LEMME (2.4.13). *Le polynôme $\Delta_1^g(t)$ est le premier polynôme d'Alexander du nœud algébrique défini par les paires caractéristiques de Puiseux $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$.*

PREUVE. Il suffit de montrer que $\Delta_1^g(t)$ divise les autres mineurs d'ordre $2g$ de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$.

Notons \sum_i^g le mineur de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ obtenu en rayant la i -ème ligne. Alors:

- i) $\Delta_1^g(t) = \Sigma_{2g+1}^g$
- ii) $M_1^g(t) = \Sigma_{2g}^g$
- iii) $\bar{a}_{2g, 2g-1} \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) = \Sigma_{2g-1}^g$
- iv) $\bar{a}_{2g, 2g-1} M_1^{g-1}(t^{n_g}) = \Sigma_{2g-2}^g$
- v) $\bar{a}_{2g-2, 2g-3} \bar{a}_{2g, 2g-1} \alpha_i = \Sigma_i^g$ pour $1 \leq i \leq 2g-3$

où α_i est un mineur d'ordre $2g-4$ de $B(t^{n_g-1n_g}, m_1, n_1, \dots, m_{g-2}, n_{g-2})$ qui est donc divisible par $\Delta_1^{g-2}(t^{n_g-1n_g})$.

Ceci démontre le lemme (2.4.13).

(2.4.14) Du lemme (2.4.13) résulte immédiatement que le premier idéal élémentaire \mathcal{E}_1 est principal.

Nous verrons au paragraphe 3 que ceci était prévisible.

(2.5) De la formule explicite (2.4.12) qui nous donne le premier polynôme d'Alexander nous allons montrer:

LEMME (2.5.1). *Deux nœuds algébriques ayant leurs premiers polynômes d'Alexander égaux sont de même type.*

On reproduit ici la preuve donnée par W. Burau dans [4]. Ce lemme montre bien le caractère particulier des nœuds algébriques, car nous savons que, pour les nœuds en général, même s'ils sont 'tame', une telle assertion est fautive (cf. [11] p. 131).

PREUVE DU LEMME (2.5.1). Soient K et L deux nœuds algébriques définis respectivement par les paires caractéristiques $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ et $(m'_1, n'_1), \dots, (m'_h, n'_h)$. On note $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, x_i, y_i$ ($i = 1, \dots, g$) les nombres associés à $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ par (2.2.3), (2.2.4) et (2.4.4) et $\mu'_j, \nu'_j, \lambda'_j, x'_j, y'_j$ ($j = 1, \dots, h$) les nombres associés à $(m'_1, n'_1), \dots, (m'_h, n'_h)$ de façon analogue.

Soient Δ_1 et $\tilde{\Delta}_1$ les polynômes d'Alexander de K et L respectivement. On a:

$$\Delta_1(t) = \tilde{\Delta}_1(t).$$

Or $\Delta_1(t)$ est un polynôme cyclotomique, i.e. toutes ses racines sont des racines de l'unité. Par conséquent:

$$\Delta_1(t) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (p_\alpha(t))^{r_\alpha}$$

où r_α est un entier positif non nul, $p_\alpha(t)$ est le polynôme cyclotomique irréductible sur \mathcal{Q} dont les racines sont les racines α -ièmes primitives

de l'unité (cf. [15] p. 206) et A est l'ensemble des entiers α tels qu'une racine α -ième primitive de l'unité est racine de $\Delta_1(t)$. Avec des notations évidentes on a de façon analogue:

$$\tilde{\Delta}_1(t) = \prod_{\beta \in B} (p_\beta(t))^{s_\beta}.$$

Mais d'après (2.4.4) on a:

$$\lambda_g = m_g - m_{g-1} n_g + \lambda_{g-1} n_g n_{g-1}.$$

Comme $m_g - m_{g-1} n_g > 0$ d'après (1.1.2) on obtient par récurrence:

LEMME (2.5.2). $\lambda_g > \lambda_i n_i \cdots n_g = \lambda_i v_i.$

REMARQUE (2.5.3). Pour établir le lemme (2.5.1), l'inégalité (1.1.2) n'est pas nécessaire (cf. W. Burau [4]). En effet (2.4.4) donne:

$$\lambda_i = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i$$

donc:

$$\lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i - m_{i-1} n_i = \lambda_{i-1} n_{i-1} \left(n_i - \frac{m_{i-1} n_i}{\lambda_{i-1} n_{i-1}} \right)$$

et comme: $\lambda_1 = m_1$, - par récurrence sur i on établit: $\lambda_i \geq m_i -$ pour $i = 1, \dots, g$. Donc:

$$\lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1} \left(n_i - \frac{n_i}{n_{i-1}} \right)$$

or: $n_i \geq 2$ - pour $i = 1, \dots, g$. Donc:

$$n_i - \frac{n_i}{n_{i-1}} \geq n_i - \frac{n_i}{2} \geq \frac{n_i}{2} \geq 1.$$

D'où:

$$\lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1}$$

et:

(2.5.4) $\lambda_g n_g > \lambda_i n_i \cdots n_g = \lambda_i v_i$

qui est une inégalité 'plus faible' que celle donnée par (2.5.2) mais qui suffit pour obtenir (2.5.1).

Revenons à la démonstration du lemme (2.5.1). Comme:

$$P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_{i+1} \cdots n_g}) = \frac{(t^{\lambda_i n_i \cdots n_g} - 1)(t^{n_{i+1} \cdots n_g} - 1)}{(t^{\lambda_i n_{i+1} \cdots n_g} - 1)(t^{n_i \cdots n_g} - 1)}$$

on remarque qu'une racine α -ième primitive de l'unité est racine de

$$P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_{i+1} \cdots n_g})$$

si et seulement si α divise $\lambda_i n_i \cdots n_g$ et ne divise pas $\lambda_i n_{i+1} \cdots n_g$ et

$n_i \cdots n_g$. Ainsi les racines $\lambda_i n_i \cdots n_g$ -ièmes primitives de l'unité sont bien racines de

$$P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_i+1} \cdots n_g).$$

Or d'après (2.5.4) (qui résulte de (2.5.2) ou de la remarque (2.5.3)) on a :

$$\lambda_g n_g = \sup_{\alpha \in A} \alpha.$$

De même :

$$\lambda'_h n'_h = \sup_{\beta \in B} \beta.$$

Mais: $\Delta_1(t) = \tilde{\Delta}_1(t)$ – donc $A = B$ et :

$$\lambda_g n_g = \lambda'_h n'_h.$$

En utilisant (2.5.2) on obtient que les racines λ_g -ièmes primitives de l'unité ne peuvent pas être racines de $P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_i+1} \cdots n_g)$ pour $i = 1, \dots, g-1$. Elles ne peuvent pas être racines de

$$P_{\lambda_g, n_g}(t) = \frac{(t^{\lambda_g n_g} - 1)(t - 1)}{(t^{\lambda_g} - 1)(t^{n_g} - 1)}.$$

Mais pour tout $\alpha > \lambda_g$ qui divise $\lambda_g n_g$, les racines α -ièmes primitives de l'unité sont racines de $P_{\lambda_g, n_g}(t)$, donc de $\Delta_1(t)$. Par conséquent λ_g qui est strictement plus grand que n_g est le plus grand diviseur de $\lambda_g n_g$. Si λ_g n'est pas dans A , on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_g &= \lambda'_h \\ n_g &= n'_h \end{aligned}$$

car $\lambda_g n_g = \lambda'_h n'_h$ et $A = B$.

Cette conclusion peut être obtenue sans utiliser (1.1.2). En effet, il suffit de voir que les racines λ_g -ièmes primitives de l'unité ne sont pas racines de

$$P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_i+1} \cdots n_g)$$

quand $i = 1, \dots, g-1$. Comme λ_g diviserait $\lambda_i n_i, \dots, n_g$ on pourrait écrire

$$\lambda_g = \lambda'_i n'_i \cdots n'_g$$

où n'_j diviserait n_i pour $j = i, \dots, g$ et λ'_i diviserait λ_i . Mais λ_g et n_g étant premiers entre eux, (démonstration par récurrence), on aurait $n'_g = 1$. Or :

$$\lambda_g > \lambda_i n_i \cdots n_{g-1}$$

– ce qui est contradictoire.

Ainsi en divisant Δ_1 et $\tilde{\Delta}_1$ par $P_{\lambda_g, n_g}(t)$, on obtient :

$$F(t^{n_g}) = \tilde{F}(t^{n_g}).$$

En posant $t^{ng} = u$ on remarque que F et \tilde{F} sont les polynômes d'Alexander des nœuds algébriques associés respectivement à $(m_1, n_1), \dots, (m_{g-1}, n_{g-1})$ et $(m'_1, n'_1, \dots, (m'_{h-1}, n'_{h-1})$, et par récurrence sur $\sup(g, h)$ on obtient:

$$\begin{aligned} g-1 &= h-1 \\ m_i &= m'_i \\ n_i &= n'_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, g-1. \end{aligned}$$

Donc:

$$m_g = m'_g.$$

Le lemme (2.5.1) est alors démontré.

Nous allons maintenant donner une autre propriété intéressante des nœuds algébriques dont la démonstration utilisera l'inégalité du lemme (2.5.2). Cette propriété implique une certaine conjecture d'Hironaka (cf. [16] et [17]).

(2.5.5) Nous dirons que deux nœuds K et L sont *concordants*, ou bien *FM-équivalents*, s'il existe une surface à bord S plongée dans $\mathcal{S}^3 \times [0, 1]$ difféomorphe à $\mathcal{S}^1 \times [0, 1]$ et dont les composantes $\partial_1 S$ et $\partial_2 S$ du bord sont respectivement dans $\mathcal{S}^3 \times \{0\}$ et $\mathcal{S}^3 \times \{1\}$ et y définissent des nœuds du même type respectivement que K et L .

Un théorème de R. Fox et J. Milnor (cf. [12] et [8] p. 6.07) donne alors une relation entre les premiers polynômes d'Alexander de deux nœuds concordants.

THÉORÈME (2.5.6) (R. Fox-J. Milnor). *Soient K et L deux nœuds concordants. Soient Δ_K et Δ_L leurs premiers polynômes d'Alexander. Alors il existe un polynôme $F(t) \in \mathbf{Z}[t]$ tel que:*

$$\Delta_K(t)\Delta_L(t) = F(t)t^m F(1/t)$$

– où $t^m F(1/t)$ est le polynôme symétrique de $F(t)$ dont les racines sur \mathbf{C} sont les inverses des racines de $F(t)$.

Grâce à la forme particulière du premier polynôme d'Alexander d'un nœud algébrique, on va prouver:

COROLLAIRE (2.5.7) (cf. [17]). *Deux nœuds algébriques concordants ont le même type.*

Ce corollaire montre encore une fois que les nœuds algébriques jouissent de bonnes propriétés, car un nœud concordant avec le nœud trivial, appelé un 'slice knot' (cf. [9]), n'a pas en général le même type qu'un nœud trivial.

PREUVE DU COROLLAIRE (2.5.7). Dans le cas d'un nœud algébrique, nous avons vu que le premier polynôme d'Alexander est un polynôme cy-

clotomique. Par conséquent si K et L sont deux nœuds algébriques concordants on obtient:

$$\Delta_K(t)\Delta_L(t) = (F(t))^2.$$

Soient $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ et $(m'_1, n'_1), \dots, (m'_h, n'_h)$ les paires caractéristiques qui définissent respectivement le type des nœuds K et L .

Pour établir le corollaire (2.5.7), d'après le lemme (2.5.1), il suffit de montrer que $\Delta_K = \Delta_L$. Remarquons qu'il n'y a aucun problème pour le faire si Δ_K , par exemple, n'a que des zéros distincts. En général on aura besoin du:

LEMME (2.5.8). *Soit:*

$$\Delta_K(t) = \prod_{\alpha \in A} p_\alpha(t)^{r_\alpha}$$

– la décomposition de Δ_K en facteurs irréductibles sur \mathcal{Q} . Alors:

- i) $\lambda_g n_g = \sup_{\alpha \in A} \alpha$;
- ii) λ_g est le plus grand diviseur de $\lambda_g n_g$ qui n'est pas dans A ;
- iii) les racines α -ièmes primitives de l'unité, où α divise $\lambda_g n_g$ et $\alpha > \lambda_g$, sont racines simples de $\Delta_K(t)$.

PREUVE DU LEMME (2.5.8). Les parties i) et ii) ont été démontrées précédemment au cours de la preuve du lemme (2.5.1). Le iii) provient de ce que ces racines α -ièmes primitives de l'unité sont racines de $P_{\lambda_g, n_g}(t)$ et ne sont pas racines des

$$P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_i+1 \cdots n_g})$$

pour $i = 1, \dots, g-1$, quand $g \geq 2$ (le cas $g = 1$ est un cas où $\Delta_K(t)$ n'a que des racines distinctes).

Revenons à la preuve du corollaire (2.5.7). Comme les racines $\lambda_g n_g$ -ièmes primitives de l'unité sont racines simples de $\Delta_K(t)$, elles sont racines de $\Delta_L(t)$. Par conséquent $\lambda_g n_g \in B$, où $\Delta_L(t) = \prod_{\beta \in B} p_\beta(t)^{s_\beta}$ est la décomposition de Δ_L en polynômes irréductibles sur \mathcal{Q} . Un raisonnement par l'absurde montre que dans ce cas nécessairement:

$$\lambda_g n_g = \lambda'_h n'_h.$$

On peut supposer $\lambda_g \geq \lambda'_h$. Si $\lambda_g > \lambda'_h$, le lemme (2.5.8) montrerait que les racines λ_g -ièmes primitives de l'unité seraient des racines simples de $\Delta_L(t)$, mais ceci impliquerait qu'elles seraient racines de $\Delta_K(t)$ donc $\lambda_g \in A$ et ceci est contradictoire avec le ii) du lemme (2.5.8). Donc $\lambda_g = \lambda'_h$ et $n_g = n'_h$. On procède alors comme pour le lemme (2.5.1) et on montre par récurrence sur $\sup(g, h)$ que:

$$\begin{aligned} g &= h \\ m_i &= m'_i \\ n_i &= n'_i \end{aligned} \quad \text{pour } i = 1, \dots, g.$$

3. La monodromie locale

(3.1) Nous avons défini la *monodromie locale* de la singularité $0 \in C_0$ dans l'introduction. En utilisant les résultats de J. Milnor [18], on peut la définir en général dans le cas d'une singularité isolée d'hypersurface.

Reprenons les notations utilisées dans l'introduction.

Soit $(\varepsilon, r) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, avec $\varepsilon \neq 0$ et $0 < r \leq b_\varepsilon$, un couple de nombres réels positifs tel que:

- 1°) $\varphi_\varepsilon : S_\varepsilon - K_\varepsilon \rightarrow \mathbf{S}^1$, défini par $\varphi_\varepsilon(z) = f(z)/|f(z)|$ est une fibration localement triviale.
- 2°) La restriction de f induit une fibration localement triviale de $\mathring{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(S_r)$ sur S_r , où S_r est le cercle de rayon r dans \mathbf{C} .
- 3°) Les fibrations de 1°) et 2°) sont difféomorphes et définissent la monodromie locale de la singularité $0 \in C_0$.
- 4°) Pour tout $\varepsilon', 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, $S_{\varepsilon'}$ est transverse à C_0 .

Un tel couple (ε, r) existe d'après [18].

On dira qu'un tel couple est un couple de nombres réels permis.

Soit (ε, r) un couple de nombres réels permis.

Soit $e^{i\theta} \in \mathbf{S}^1$ et $F_\theta = \varphi_\varepsilon^{-1}(e^{i\theta})$. La suite exacte de la fibration localement triviale φ_ε donne la suite exacte courte:

$$(3.1.1) \quad 1 \rightarrow \pi_1(F_\theta, x) \rightarrow \pi_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon, x) \rightarrow \pi_1(\mathbf{S}^1, e^{i\theta}) \rightarrow 1$$

avec $x \in F_\theta$.

Mais $\pi_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon, x)$ est le groupe du nœud algébrique $K_\varepsilon \subset S_\varepsilon$. Notons G ce groupe et $G' = [G, G]$ son sous-groupe des commutateurs. On a la suite exacte courte:

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G/G' \rightarrow 1.$$

D'après la propriété universelle de l'abélianisé d'un groupe et le fait que $\pi_1(\mathbf{S}^1, e^{i\theta})$, isomorphe à \mathbf{Z} , est abélien, on obtient un homomorphisme surjectif de G/G' sur $\pi_1(\mathbf{S}^1, e^{i\theta})$ qui est nécessairement bijectif. Ce qui fait que G' et $\pi_1(F_\theta, x)$ sont isomorphes. Or comme (ε, r) est permis, d'après le 3°) ci-dessus, on trouve que F_θ est difféomorphe avec $\mathring{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(re^{i\theta})$ qui est une surface compacte connexe orientable à bord connexe. On sait alors que F_θ a le type d'homotopie d'un graphe fini. Ce graphe fini a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles. Le nombre μ de cercles égale 2 fois le genre de F_θ et par ailleurs (cf. [18]):

$$\mu = \dim_{\mathbf{C}} (\mathbf{C}[[X, Y]]/(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y))$$

– où $\mathbf{C}[[X, Y]]$ est l'anneau des séries formelles complexes de deux variables et $(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$ est l'idéal de $\mathbf{C}[[X, Y]]$ engendré par les dérivées partielles de f . Il en résulte que le groupe fondamental de F_θ en un point

$x \in F_\theta$ est un groupe libre sur un ensemble de μ éléments que l'on notera ξ_1, \dots, ξ_μ . Ainsi le groupe G est une extension d'un groupe libre de type fini par un groupe infini cyclique. Ce dernier groupe étant libre, G est même un produit semi-direct. Si η est un élément de G dont l'image dans G/G' engendre G/G' , alors $\eta G' \eta^{-1} \subset G'$. Donc si on note $\Phi(\xi_i)$ le mot $\eta \xi_i \eta^{-1}$, on a dans G :

$$(3.1.2) \quad r_i = \eta \xi_i \eta^{-1} \Phi(\xi_i)^{-1} = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, \mu.$$

Le groupe G est donc défini par les générateurs $\xi_1, \dots, \xi_\mu, \eta$ et les relations (3.1.2).

Mais dans la suite exacte courte (3.1.1) de la fibration φ_{ε_2} , l'automorphisme de $\pi_1(F_\theta, x)$ défini par η induit un automorphisme $\tilde{\Phi}$ de $H_1(F_\theta)$, abélianisé de $\pi_1(F_\theta, x)$ qui n'est autre que la monodromie locale de $0 \in C_0$. En identifiant G' et $\pi_1(F_\theta, x)$, on a donc:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(F_\theta, x) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(F_\theta, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(F_\theta) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & H_1(F_\theta) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes naturels.

(3.2) Avec ce qui précède nous redémontrons le résultat connu suivant:

LEMME (3.2.1). *Le 0-ième idéal élémentaire du groupe du nœud algébrique est nul et le premier idéal élémentaire est principal.*

PREUVE. Comme on a $\mu + 1$ générateurs et μ relations, pour construire la matrice M de (2.3) on rajoute la relation triviale, ce qui fait que M a une colonne de zéros et que par conséquent $\mathcal{E}_0 = (0)$.

Pour montrer que \mathcal{E}_1 est principal il suffit de montrer qu'une ligne de M est composée de zéros. Considérons la ligne qui correspond aux dérivations formelles des relations r_i par rapport à η :

$$\partial r_i / \partial \eta = 1 - \eta \xi_i \eta^{-1}.$$

Si $\sigma : \mathbf{Z}[G] \rightarrow \mathbf{Z}[G/G']$ est l'application canonique qui étend $G \xrightarrow{\tilde{\sigma}} G/G'$, on a:

$$\tilde{\sigma}(\eta \xi_i \eta^{-1}) = 1_{G/G'}$$

et

$$\sigma(\eta \xi_i \eta^{-1}) = 1_{G/G'} \cdot 1 = 1$$

– où 1 est l'unité de $\mathbf{Z}[G/G']$. Donc:

$$\sigma(\partial r_i / \partial \eta) = 0.$$

En fait on obtient le résultat plus précis suivant (cf. [18] Lemme 10.1):

THÉOREME (3.2.2). *Le premier polynôme d'Alexander égale le polynôme caractéristique de la monodromie locale de $0 \in C_0$.*

DÉMONSTRATION. On a noté $\tilde{\Phi}$ la monodromie locale de $0 \in C_0$ et on a:

$$\tilde{\Phi}(\bar{\xi}_i) = \sum_{j=1}^{\mu} n_{ji} \bar{\xi}_j$$

où $\bar{\xi}_i$ est l'image de ξ_i dans $H_1(F_\theta)$.

Nous allons calculer $\sigma(\partial r_j / \partial \xi_i)$. On a:

$$\partial r_i / \partial \xi_i = \eta + \eta \xi_i \eta^{-1} \partial(\Phi(\xi_i)^{-1}) / \partial \xi_i.$$

On remarque que l'on a:

$$\partial(\Phi(\xi_i)^{-1}) / \partial \xi_i = -\Phi(\xi_i)^{-1} \partial(\Phi(\xi_i)) / \partial \xi_i$$

(cf. (2.7) chap. VII de [11]). Par ailleurs, si g est un élément de G' tel que:

$$\bar{g} = \sum_{j=1}^{\mu} \gamma_j \bar{\xi}_j.$$

On va montrer que $\sigma(\partial g / \partial \xi_i) = \gamma_i$. On établit ceci par récurrence sur la longueur du mot g en les lettres ξ_i . On obtient évidemment le résultat si la longueur de g est 0, i.e. g est l'élément neutre de G' . Supposons donc que la longueur de g , égale à n , est au moins 1, donc on peut écrire:

$$g = g' \zeta_k^{\varepsilon_k}$$

– où la longueur du mot g' est $n-1$ et $\varepsilon_k = \pm 1$.

On obtient:

$$\begin{aligned} \partial g / \partial \xi_i &= \partial g' / \partial \xi_i + g' \partial \zeta_k^{\varepsilon_k} / \partial \xi_i \\ &= \partial g' / \partial \xi_i + \varepsilon_k \delta_{ik} g' \zeta_k^{\frac{1}{2}(\varepsilon_k - 1)}. \end{aligned}$$

Or si:

$$\bar{g}' = \sum_{j=1}^{\mu} \gamma'_j \bar{\xi}_j$$

– on a pour $i \neq k$:

$$\partial g / \partial \xi_i = \partial g' / \partial \xi_i$$

et:

$$\gamma_i = \gamma'_i$$

– et dans ce cas notre assertion est démontrée en utilisant l'hypothèse de récurrence convenable. Pour $i = k$, on a:

$$\partial g / \partial \xi_i = \partial g' / \partial \xi_i + \varepsilon_i g' \zeta_i^{\frac{1}{2}(\varepsilon_i - 1)}.$$

Donc:

$$\sigma(\partial g / \partial \xi_i) = \sigma(\partial g' / \partial \xi_i) + \sigma(\varepsilon_i g' \zeta_i^{\frac{1}{2}(\varepsilon_i - 1)}).$$

Or:

$$\sigma(\varepsilon_i g' \xi_i^{\frac{1}{2}(\varepsilon_i - 1)}) = \varepsilon_i.$$

Comme:

$$\gamma_i = \gamma'_i + \varepsilon_i$$

– dans ce cas également notre assertion est démontrée. Donc:

$$\sigma(\partial r_i / \partial \xi_i) = t - n_{ii}$$

en identifiant $\mathbf{Z}[G/G']$ avec $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$.

De même:

$$\sigma(\partial r_j / \partial \xi_i) = -n_{ij} \text{ si } j \neq i.$$

La matrice $(\sigma(\partial r_j / \partial \xi_i))$ s'écrit donc:

$$(3.2.3) \quad \begin{bmatrix} t - n_{11} & -n_{12} & \cdots & -n_{1\mu} \\ -n_{21} & t - n_{22} & \cdots & -n_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n_{\mu 1} & -n_{\mu 2} & \cdots & t - n_{\mu\mu} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et on obtient bien que le premier polynôme d'Alexander égale le polynôme caractéristique de la monodromie.

En nous basant sur ce qui précède, on retrouve dans le cas des nœuds algébriques:

THÉORÈME (3.2.4) (*H. Crowell* [5], [6] et [19]): *Le quotient du premier polynôme d'Alexander par le deuxième polynôme d'Alexander égale le polynôme minimal de la monodromie.*

DÉMONSTRATION. *Rappelons que nous avons choisi comme polynômes d'Alexander Δ_i des polynômes tels que:*

- i) $\Delta_i \in \mathbf{Z}[t]$
- ii) $\Delta_i(1) \neq 0$.

On appelle ici *polynôme minimal* de la monodromie un polynôme P de plus bas degré qui annule la monodromie, i.e.:

$$P(\tilde{\Phi}) = 0.$$

Remarquons que le \mathbf{Z} -module $G'/G'' = H_1(F_\theta)$ est libre, donc sans torsion.

En tensorisant par le corps des rationnels \mathbf{Q} , on obtient une structure d'espace vectoriel sur \mathbf{Q} sur $G'/G'' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et $\tilde{\Phi}$ donne:

$$G'/G'' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \xrightarrow{\tilde{\Phi} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}}} G'/G'' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

En prenant l'image du système $\{\xi_1, \dots, \xi_\mu\}$ pour base de l'espace vectoriel $G'/G'' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ sur \mathbf{Q} , en notant encore $\tilde{\xi}_i$ l'image de ξ_i dans $G'/G'' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, la matrice de $\tilde{\Phi} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}}$ est encore (n_{ij}) .

On peut alors montrer que les mineurs d'ordre $\mu-1$ de la matrice $(\delta_{ij}t - n_{ij})$ engendrent un idéal principal de $\mathbf{Q}[t]$ qui ne dépend pas de la base choisie (cf. [15]) et qui n'est autre que $\Delta_2(t)$. En choisissant une base dans laquelle $\tilde{\Phi}$ s'écrit dans une forme de Jordan convenable, on peut alors montrer que Δ_1/Δ_2 est le polynôme minimal P de $\tilde{\Phi} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}}$ en tant qu'application linéaire sur \mathbf{Q} (cf. [15]). Par ailleurs on a:

$$(\tilde{\Phi} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}})^n = \tilde{\Phi}^n \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}}.$$

Par conséquent:

$$P(\tilde{\Phi} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}}) = P(\tilde{\Phi}) \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}} = i \cdot P(\tilde{\Phi}).$$

Si i désigne l'homomorphisme canonique de G'/G'' dans $G'/G'' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Comme G'/G'' est sans torsion sur \mathbf{Z} , i est injectif et $P(\tilde{\Phi} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}}) = 0$ implique $P(\tilde{\Phi}) = 0$.

Comme P est le polynôme minimal de $\tilde{\Phi} \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Id}_{\mathbf{Q}}$, P est nécessairement un polynôme minimal de $\tilde{\Phi}$. Comme G'/G'' est sans torsion sur \mathbf{Z} , on peut aussi choisir P primitif, i.e. tous les coefficients de P sont relativement premiers.

(3.2.5) Nous conviendrons alors de ne considérer que le polynôme minimal de $\tilde{\Phi}$ qui est *primitif*.

(3.3) Nous allons utiliser le théorème (3.2.4) pour démontrer la conjecture de Brieskorn (cf. l'introduction). Nous voulons établir qu'il existe un entier n tel que:

$$\tilde{\Phi}^n = \text{Id}.$$

Comme le quotient du premier polynôme d'Alexander par le deuxième polynôme d'Alexander est un polynôme cyclotomique P de coefficient directeur égal à 1, il suffit de démontrer que ce polynôme P n'a que des racines simples. Car si:

$$P(t) = \prod_{\gamma \in \Gamma} p_{\gamma}(t)$$

est la décomposition de P en polynômes cyclotomiques irréductibles sur \mathbf{Q} et si n est le *plus petit commun multiple* (p.p.c.m.) des $\gamma \in \Gamma$, on a que $t^n - 1$ est un multiple de P et de $P(\tilde{\Phi}) = 0$ résulte:

$$\tilde{\Phi}^n - \text{Id} = 0.$$

La véracité de la conjecture de Brieskorn résulte donc du théorème suivant:

THÉORÈME (3.3.1). *Le polynôme minimal de la monodromie locale d'une singularité d'une courbe plane analytiquement irréductible est un polynôme qui n'a que des racines simples et dont le coefficient directeur égale 1.*

DÉMONSTRATION. *Elle est encore basée sur les résultats de O. Zariski. Il s'agit de calculer le p.g.c.d. des mineurs d'ordre $2g-1$ de la matrice $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ de (2.4). Soient Δ_1 le premier polynôme d'Alexander et:*

$$\Delta_1 = \prod_{\alpha \in A} p_\alpha^{r_\alpha}$$

sa décomposition en polynômes cyclotomiques irréductibles sur \mathcal{Q} .

Alors il suffit de montrer que

$$\tilde{\Delta} = \prod_{\alpha \in A} p_\alpha^{r_\alpha - 1}$$

divise le deuxième polynôme d'Alexander. Car, $\Delta_1/\tilde{\Delta}$ n'ayant que des racines simples, Δ_1/Δ_2 n'aura que des racines simples et le théorème (3.3.1) sera montré.

Il suffit alors de vérifier que tous les mineurs d'ordre $2g-1$ de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ sont divisibles par $\tilde{\Delta}$.

Nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME (3.3.2). *On note $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, x_i$ et y_i les différents nombres associés pour $i = 1, \dots, g$ à $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ par (2.2.3), (2.2.4) et (2.4.4). On a alors:*

- i) $t^{\lambda_i \nu_i} - t^{\mu_i \nu_i}$ est divisible par $t^{\lambda_i - 1 \nu_i - 1} - 1$, pour $i = 2, \dots, g$;
- ii) $t^{\lambda_i \nu_i + 1 x_i} - t^{\mu_i \nu_i + 1 x_i}$ est divisible par $t^{\lambda_i - 1 \nu_i - 1} - 1$ pour $i = 2, \dots, g$;
- iii) $\frac{t^{\nu_i \mu_i} - 1}{t^{\nu_i} - 1}$ et $\frac{t^{\nu_i + 1} (t^{\nu_i y_i} - 1)}{t^{\nu_i} - 1}$ sont premiers entre eux pour $i = 1, \dots, g$;
- iv) $\frac{t^{\lambda_i \nu_i} - 1}{t^{\lambda_i \nu_i + 1} - 1}$ et $\frac{t^{\lambda_i \nu_i + 1 x_i} - 1}{t^{\lambda_i \nu_i + 1} - 1}$ sont premiers entre eux pour $i = 1, \dots, g$.

PREUVE. i) et ii) proviennent de ce que:

$$\lambda_i = \mu_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i.$$

En effet, on a, par exemple pour i):

$$\begin{aligned} t^{\lambda_i \nu_i} - t^{\mu_i \nu_i} &= t^{\mu_i \nu_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i \nu_i} - t^{\mu_i \nu_i} \\ &= t^{\mu_i \nu_i} (t^{\lambda_{i-1} n_{i-1} n_i \nu_i} - 1). \end{aligned}$$

Les racines de $t^{\lambda_{i-1} n_{i-1} n_i \nu_i} - 1$ sont alors les racines α -ièmes primitives de l'unité où α divise $\lambda_{i-1} n_{i-1} n_i \nu_i = \lambda_{i-1} \nu_{i-1} n_i$. Les racines de

$t^{\lambda_i - 1\nu_i - 1} - 1$ sont donc racines de $t^{\lambda_i\nu_i} - t^{\mu_i\nu_i}$. La preuve est analogue pour ii).

iii) et iv) proviennent de:

$$\mu_i x_i = n_i y_i + 1$$

qui implique que μ_i et y_i d'une part, et n_i et x_i d'autre part sont premiers entre eux.

Pour $g = 1$, le théorème (3.3.1) est vrai car Δ_1 n'a que des racines distinctes.

Pour $g = 2$, on peut vérifier que le théorème (3.3.1) est vrai en considérant tous les mineurs (3×3) de la matrice $B(t, m_1, n_1, m_2, n_2)$ donnée au cours de la preuve du lemme (2.4.10).

On suppose alors $g > 2$ et on peut supposer le théorème (3.3.1) vrai pour tout $g', g > g' \geq 2$. On regarde alors tous les mineurs d'ordre $2g - 1$ de la matrice $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$.

1. On raye la $2g$ -ième colonne:

(1.a) Si on ne raye pas la $(2g + 1)$ -ième ligne, les mineurs obtenus sont nuls.

(1.b) On raye la $(2g + 1)$ -ième ligne et les mineurs obtenus égalent:

$$-\frac{t^{\lambda_g\nu_g} - 1}{t^{\lambda_g} - 1} \alpha, \frac{t^{\mu_g\nu_g} - 1}{t^{\nu_g} - 1} \beta, \frac{t^{\lambda_g\nu_g} - t^{\mu_g\nu_g}}{t^{\nu_g} - 1} \gamma$$

– où α, β, γ sont divisibles par $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$ où Δ_i^{g-1} est le i -ième polynôme d'Alexander du nœud algébrique donné par $(m_1, n_1), \dots, (m_{g-1}, n_{g-1})$.

Remarquons que l'un de ces mineurs égale $M_1^g(t)$ (cf. lemme (2.4.10)).

Ces mineurs sont tous divisibles par $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$.

2. On raye la $(2g - 1)$ -ième colonne:

(2.a) On ne raye pas la $(2g + 1)$ -ième ligne.

(2.a.1) Si on ne raye pas la $2g$ -ième ligne, les mineurs obtenus sont nuls.

(2.a.2) On raye la $2g$ -ième ligne.

Les mineurs obtenus sont alors égaux aux mineurs d'ordre $2g - 2$ de $B(t^{n_g}, m_1, n_1, \dots, m_{g-1}, n_{g-1})$, le p.g.c.d. de ces mineurs est $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$.

(2.b) On raye la $(2g + 1)$ -ième ligne.

On obtient comme dans (1.b) que les mineurs obtenus sont de la forme:

$$-\frac{t^{\lambda_g x_g} - 1}{t^{\lambda_g} - 1} \alpha', \frac{t(t^{\nu_g y_g} - 1)}{t^{\nu_g} - 1} \beta', \frac{t^{\mu_g x_g} (t^{\lambda_g - 1\nu_g - 1 x_g} - 1)}{t^{\lambda_g - 1\nu_g} - 1} \gamma'$$

où α', β', γ' sont divisibles par $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$.

L'un des mineurs obtenus est $N_1^g(t)$ (cf. lemme (2.4.10)).

$$\begin{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 B(t^{\mu_g - 1n_g}, m_1, n_1, \dots, m_{g-2}, n_{g-2}) \\
 \hline
 t^{\lambda_g - 1\nu_g - 1} - t^{\mu_g - 1\nu_g - 1} \\
 \frac{t^{\lambda_g - 2\nu_g - 1} - 1}{t^{\nu_g - 1\mu_g - 1} - 1} \\
 \frac{t^{\nu_g - 1\mu_g - 1} - 1}{t^{\nu_g - 1} - 1} \\
 \frac{t^{\lambda_g - 1\nu_g - 1} - 1}{t^{\lambda_g - 1\nu_g - 1} - 1} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 \frac{t^{\nu_g \lambda_g - 1x_{g-1}} - t^{\nu_g \mu_g - 1x_{g-1}}}{t^{\lambda_g - 2\nu_g - 1} - 1} \\
 \frac{t^{\nu_g} (t^{\nu_g - 1\nu_g - 1} - 1)}{t^{\nu_g - 1} - 1} \\
 \frac{t^{\lambda_g - 1\nu_g - 1} - 1}{t^{\lambda_g - 1\nu_g - 1} - 1} \\
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 t^{\lambda_g \nu_g} - t^{\mu_g \nu_g} \\
 \frac{t^{\lambda_g \nu_g} - 1}{t^{\lambda_g - 1\nu_g} - 1} \\
 \frac{t^{\mu_g \nu_g} - 1}{t^{\nu_g} - 1} \\
 \frac{t^{\lambda_g \nu_g} - 1}{t^{\lambda_g} - 1} \\
 0 \\
 0 \\
 1
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 t^{\lambda_g x_g} - t^{\mu_g x_g} \\
 \frac{t^{\lambda_g x_g} - 1}{t^{\lambda_g - 1\nu_g} - 1} \\
 \frac{t^{\lambda_g \nu_g} - 1}{t^{\nu_g} - 1} \\
 \frac{t^{\lambda_g \nu_g} - 1}{t^{\lambda_g} - 1} \\
 0 \\
 0 \\
 1
 \end{array}
 \end{bmatrix}$$

3. On raye la k -ième colonne avec $k < 2g - 1$:

(3.a) On raye deux lignes de numéro strictement plus petit que $2g$. Les mineurs obtenus sont égaux à:

$$\frac{t^{\lambda_g v_g} - 1}{t^{\lambda_g} - 1} \xi.$$

– où ξ est un mineur d'ordre $2g - 3$ de

$$B(t^{n_g}, m_1, n_1, \dots, m_{g-1}, n_{g-1}),$$

donc ξ est divisible par $\Delta_2^{g-1}(t^{n_g})$. En fait

$$\frac{(t^{\lambda_g v_g} - 1)}{t^{\lambda_g} - 1} \Delta_2^{g-1}(t^{n_g})$$

est le p.g.c.d. de ces mineurs.

(3.b) L'une des lignes rayées a le numéro $2g + 1$: nous considérerons ce cas avec

(3.c) L'une des lignes rayées a le numéro $2g$.

Nous allons nous occuper des cas (3.b) et (3.c): on appelle l le numéro de ligne autre que $2g + 1$ (resp. $2g$) que l'on raye et c le numéro de la colonne rayée. On aura différents cas selon que $l > c$, $c = 1$, $c > l$.

(3.b, c.1) $l = 2r$, $c = 2s > 2r$, $g > s > r$.

On note $M_g(2r, 2s)(t)$ le mineur obtenu de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ en rayant les lignes de numéros $2r$, $2g$ et $2g + 1$ et les colonnes de numéros $2s$, $2g$.

On note $N_g(2r, 2s)(t)$ le mineur obtenu de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ en rayant les lignes de numéros $2r$, $2g$ et $2g + 1$ et les colonnes de numéros $2s$, $2g - 1$.

Enfin on note $\Delta_g(2r, 2s)(t)$ le mineur obtenu en rayant les lignes numéros $2r$, $2g + 1$ et la colonne de numéro $2s$.

Nous allons calculer $M_g(2r, 2s)(t)$, $N_g(2r, 2s)(t)$, $\Delta_g(2r, 2s)(t)$ par récurrence sur $g - s$.

LEMME (3.3.3). On a:

$$1. M_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) = \alpha_0 \frac{t^{v_{s+1} \mu_{s+1}} - 1}{t^{v_{s+1}} - 1}$$

$$2. N_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) = \alpha_0 \frac{t^{v_{s+2}}(t^{v_{s+1} v_{s+1}} - 1)}{t^{v_{s+1}} - 1}$$

$$3. \Delta_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) = \alpha_1 - \alpha_0 P_{\lambda_{s+1}, n_{s+1}}(t^{v_{s+2}}) \text{ et si } i \geq 2:$$

$$4. M_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_{s+i+1}}) = \alpha_{i-1} \frac{t^{v_{s+i}\mu_{s+i}-1}}{t^{v_{s+i}-1}} + \xi_i$$

$$- \Delta_{s+i-2}(2r, 2s)(t^{v_{s+i-1}})P_{\lambda_{s+i-1}, n_{s+i-1}}(t^{v_{s+i}}) \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i}-1}}{t^{v_{s+i}-1}}$$

$$5. N_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_{s+i+1}}) = \alpha_{i-1} \frac{t^{v_{s+i+1}}(t^{v_{s+i}v_{s+i}-1})}{t^{v_{s+i}-1}} + \eta_i$$

$$- \Delta_{s+i-2}(2r, 2s)(t^{v_{s+i-1}})P_{\lambda_{s+i-1}, n_{s+i-1}}(t^{v_{s+i}}) \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}-t^{v_{s+i+1}}}}{t^{v_{s+i}-1}}$$

$$6. \Delta_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_{s+i+1}}) = \alpha_i - \Delta_{s+i-1}(2r, 2s)(t^{v_{s+i}})P_{\lambda_{s+i}, n_{s+i}}(t^{v_{s+i+1}})$$

avec α_i, ξ_i, η_i divisibles par $\Delta_1^{s+i-1}(t^{v_{s+i}})$

$$P_{\lambda, n}(t) = \frac{(t^{\lambda n} - 1)(t - 1)}{(t^\lambda - 1)(t^n - 1)}$$

et:

$$\Delta_s(2r, 2s)(t^{v_{s+1}}) = \alpha_0.$$

PREUVE DU LEMME (3.3.3). On a:

$$M_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) = - \frac{t^{v_{s+1}\mu_{s+1}-1}}{t^{v_{s+1}-1}} \cdot \frac{t^{v_{s+1}\lambda_{s+1}-1}}{t^{v_{s+1}\lambda_s-1}} \cdot \bar{\alpha}_0$$

– où $\bar{\alpha}_0$ est un mineur d'ordre $2(s-1)$ de

$$B(t^{v_s}, m_1, n_1, \dots, m_{s-1}, n_{s-1})$$

qui est donc divisible par $\Delta_1^{s-1}(t^{v_s})$. On pose donc:

$$- \frac{t^{v_{s+1}\lambda_{s+1}-1}}{t^{v_{s+1}\lambda_s-1}} \bar{\alpha}_0 = \alpha_0.$$

On obtient 2. de la même façon.

Pour obtenir 3., on remarque:

$$\Delta_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) = -M_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) \cdot \frac{t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}x_{s+1}-1}}{t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}-1}}$$

$$+ N_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) \frac{t^{\lambda_{s+1}v_{s+1}-1}}{t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}-1}}$$

$$= \alpha_0 \left[- \frac{(t^{v_{s+1}\mu_{s+1}-1})(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}x_{s+1}-1})}{(t^{v_{s+1}-1})(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}-1})} \right.$$

$$\left. + \frac{t^{v_{s+2}}(t^{v_{s+1}v_{s+1}-1})(t^{\lambda_{s+1}v_{s+1}-1})}{(t^{v_{s+1}-1})(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}-1})} \right].$$

Compte-tenu de $\mu_{s+1}x_{s+1} = n_{s+1}y_{s+1} + 1$, en posant:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \left[- \frac{(t^{v_{s+1}\mu_{s+1}} - t^{v_{s+1}\lambda_{s+1}})(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}x_{s+1}} - 1)}{(t^{v_{s+1}} - 1)(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}} - 1)} - \frac{(t^{\lambda_{s+1}v_{s+1}} - 1)(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}x_{s+1}} - t^{\mu_{s+1}x_{s+1}v_{s+2}})}{(t^{v_{s+1}} - 1)(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}} - 1)} \right].$$

On obtient:

$$\Delta_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) = \alpha_1 - \alpha_0 P_{\lambda_{s+1}, n_{s+1}}(t^{v_{s+2}})$$

et α_1 est bien divisible par $\Delta_1^s(t^{v_{s+1}})$, car α_0 est divisible par $\Delta_1^{s-1}(t^{v_s})$ et de plus

$$\frac{t^{v_{s+1}\mu_{s+1}} - t^{\lambda_{s+1}v_{s+1}}}{t^{v_{s+1}} - 1} \quad \text{et} \quad \frac{t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}x_{s+1}} - t^{\mu_{s+1}v_{s+2}x_{s+1}}}{t^{v_{s+1}} - 1}$$

sont divisibles par

$$\frac{t^{\lambda_s v_s} - 1}{t^{v_{s+1}} - 1}$$

d'après i) et ii) du lemme (3.3.2).

Nous allons montrer 4., 5., 6. dans le cas où $i = 2$. On a:

$$\begin{aligned} M_{s+2}(2r, 2s)(t^{v_{s+3}}) &= \Delta_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) \frac{t^{v_{s+2}\mu_{s+2}} - 1}{t^{v_{s+2}} - 1} \\ &\quad - M_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_{s+2}}) \frac{t^{\lambda_{s+2}v_{s+2}} - t^{v_{s+2}\mu_{s+2}}}{t^{v_{s+2}} - 1}. \end{aligned}$$

En utilisant 1. et 3. du lemme (3.3.3) que l'on vient de démontrer, on obtient:

$$\begin{aligned} M_{s+2}(t^{v_{s+3}}) &= \alpha_1 \frac{t^{v_{s+2}\mu_{s+2}} - 1}{t^{v_{s+2}} - 1} \\ &\quad - \alpha_0 \frac{(t^{\lambda_{s+1}v_{s+1}} - 1)(t^{v_{s+2}} - 1)(t^{v_{s+2}\mu_{s+2}} - 1)}{(t^{\lambda_{s+1}} - 1)(t^{v_{s+1}} - 1)(t^{v_{s+2}} - 1)} \\ &\quad - \alpha_0 \frac{(t^{v_{s+1}\mu_{s+1}} - 1)(t^{\lambda_{s+2}v_{s+2}} - t^{v_{s+2}\mu_{s+2}})}{(t^{v_{s+1}} - 1)(t^{v_{s+2}} - 1)}. \end{aligned}$$

En posant:

$$-\alpha_0 \frac{(t^{v_{s+1}\mu_{s+1}} - t^{\lambda_{s+1}v_{s+1}})(t^{\lambda_{s+2}v_{s+2}} - t^{\mu_{s+2}v_{s+2}})}{(t^{v_{s+1}} - 1)(t^{\lambda_{s+1}v_{s+2}} - 1)} = \xi_2$$

– et on obtient que

$$\frac{t^{v_s+1\mu_s+1} - t^{\lambda_s+1v_s+1}}{t^{v_s+1} - 1} \text{ et } \frac{t^{\lambda_s+2v_s+2} - t^{\mu_s+2v_s+2}}{t^{\lambda_s+1v_s+2} - 1}$$

sont respectivement divisibles par

$$\frac{t^{\lambda_s v_s} - 1}{t^{v_s+1} - 1} \text{ et } \frac{t^{\lambda_s+1v_s+1} - 1}{t^{\lambda_s+1v_s+2} - 1}$$

d'après le i) du lemme (3.3.2). Comme α_0 est divisible par $\Delta_1^{s-1}(t^{v_s})$, ξ_2 est bien divisible par $\Delta_1^{s+1}(t^{v_s+2})$. D'où:

$$\begin{aligned} M_{s+2}(2r, 2s)(t^{v_s+3}) &= \alpha_1 \frac{t^{v_s+2\mu_s+2} - 1}{t^{v_s+2} - 1} + \xi_2 \\ &\quad - \alpha_0 P_{\lambda_s+1, n_s+1}(t^{v_s+2}) \cdot \frac{t^{\lambda_s+2v_s+2} - 1}{t^{v_s+2} - 1}. \end{aligned}$$

De même on a:

$$\begin{aligned} N_{s+2}(2r, 2s)(t^{v_s+3}) &= +\Delta_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_s+2}) \frac{t^{v_s+3}(t^{v_s+2v_s+2} - 1)}{t^{v_s+2} - 1} \\ &\quad - M_{s+1}(2r, 2s)(t^{v_s+2}) \frac{t^{\lambda_s+2v_s+3x_s+2} - t^{\mu_s+2v_s+3x_s+2}}{t^{\lambda_s+1v_s+2} - 1}. \end{aligned}$$

En utilisant 2. et 3. du lemme (3.3.3) déjà démontrés, et posant:

$$\eta_2 = -\alpha_0 \frac{(t^{v_s+1\mu_s+1} - t^{v_s+1\lambda_s+1})(t^{v_s+3\lambda_s+2x_s+2} - t^{v_s+3\mu_s+2x_s+2})}{(t^{v_s+1} - 1)(t^{\lambda_s+1v_s+2} - 1)}$$

– on obtient que η_2 est bien divisible par $\Delta_1^{s+1}(t^{v_s+2})$ d'après le lemme (3.3.2) et:

$$\begin{aligned} N_{s+2}(2r, 2s)(t^{v_s+3}) &= \alpha_1 \frac{t^{v_s+3}(t^{v_s+2v_s+2} - 1)}{t^{v_s+2} - 1} + \eta_2 \\ &\quad - \alpha_0 P_{\lambda_s+1, n_s+1}(t^{v_s+2}) \frac{t^{\lambda_s+2x_s+2v_s+3} - t^{v_s+3}}{t^{v_s+2} - 1}. \end{aligned}$$

De même on a:

$$\begin{aligned} \Delta_{s+2}(2r, 2s)(t^{v_s+3}) &= -M_{s+2}(2r, 2s)(t^{v_s+3}) \frac{t^{\lambda_s+2v_s+3x_s+2} - 1}{t^{\lambda_s+2v_s+3} - 1} \\ &\quad + N_{s+2}(2r, 2s)(t^{v_s+3}) \frac{t^{\lambda_s+2v_s+2} - 1}{t^{\lambda_s+2v_s+3} - 1}. \end{aligned}$$

En posant:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left[- \frac{(t^{\nu_s+2\mu_s+2} - t^{\nu_s+2\lambda_s+2})(t^{\lambda_s+2\nu_s+3x_s+2} - 1)}{(t^{\nu_s+2} - 1)(t^{\lambda_s+2\nu_s+3} - 1)} \right. \\ \left. + \frac{(t^{\lambda_s+2\nu_s+2} - 1)(t^{\nu_s+3\mu_s+2x_s+2} - t^{\lambda_s+2\nu_s+3x_s+2})}{(t^{\nu_s+2} - 1)(t^{\lambda_s+2\nu_s+3} - 1)} \right] \\ - \xi_2 \frac{t^{\lambda_s+2\nu_s+3x_s+2} - 1}{t^{\lambda_s+2\nu_s+3} - 1} + \eta_2 \frac{t^{\lambda_s+2\nu_s+2} - 1}{t^{\lambda_s+2\nu_s+3} - 1}.$$

En utilisant encore le lemme (3.3.2) on obtient encore que α_2 est divisible par $\Delta_1^{s+1}(t^{\nu_s+2})$ et on obtient la formule voulue pour $\Delta_{s+2}(2s, 2r)(t^{\nu_s+3})$.

Ainsi 4., 5. et 6. sont vrais pour $i = 2$. Supposons alors $i > 2$ et que pour tout j , $i > j \geq 2$, on ait:

$$(3.3.3.1) \quad M_{s+j}(2r, 2s)(t^{\nu_s+j+1}) = \alpha_{j-1} \frac{t^{\nu_s+j\mu_s+j} - 1}{t^{\nu_s+j} - 1} + \xi_j \\ - \Delta_{s+j-2}(2r, 2s)(t^{\nu_s+j-1}) P_{\lambda_s+j-1, n_s+j-1}(t^{\nu_s+j}) \frac{t^{\lambda_s+j\nu_s+j} - 1}{t^{\nu_s+j} - 1}$$

$$(3.3.3.2) \quad N_{s+j}(2r, 2s)(t^{\nu_s+j+1}) = \alpha_{j-1} \frac{t^{\nu_s+j+1}(t^{\nu_s+j\nu_s+j} - 1)}{t^{\nu_s+j} - 1} + \eta_j \\ - \Delta_{s+j-2}(2r, 2s)(t^{\nu_s+j-1}) P_{\lambda_s+j-1, n_s+j-1}(t^{\nu_s+j}) \frac{t^{\lambda_s+j\nu_s+j+1x_s+j} - t^{\nu_s+j+1}}{t^{\nu_s+j} - 1}$$

$$(3.3.3.3) \quad \Delta_{s+j}(2r, 2s)(t^{\nu_s+j+1}) \\ = \alpha_j - \Delta_{s+j-1}(2r, 2s)(t^{\nu_s+j}) P_{\lambda_s+j, n_s+j}(t^{\nu_s+j+1})$$

- avec α_j, ξ_j, η_j divisibles par $\Delta_1^{s+j-1}(t^{\nu_s+j})$.

Nous allons donc montrer que (3.3.3.k) pour $k = 1, 2, 3$ sont vrais pour $j = i$.

Nous avons:

$$M_{s+i}(2r, 2s)(t^{\nu_s+i+1}) = \Delta_{s+i-1}(2r, 2s)(t^{\nu_s+i}) \frac{t^{\nu_s+i\mu_s+i} - 1}{t^{\nu_s+i} - 1} \\ - M_{s+i-1}(2r, 2s)(t^{\nu_s+i}) \frac{t^{\lambda_s+i\nu_s+i} - t^{\mu_s+i\nu_s+i}}{t^{\nu_s+i\lambda_s+i-1} - 1}.$$

En utilisant (3.3.3.1) et (3.3.3.3) quand $j = i-1$ on obtient (3.3.3.1) pour $j = i$ avec:

$$\xi_i = -\xi_{i-1} \frac{t^{\lambda_s+i\nu_s+i} - t^{\mu_s+i\nu_s+i}}{t^{\nu_s+i\lambda_s+i-1} - 1} \\ - \alpha_{i-2} \frac{(t^{\lambda_s+i-1\nu_s+i-1} - t^{\mu_s+i-1\nu_s+i-1})(t^{\mu_s+i\nu_s+i} - t^{\lambda_s+i\nu_s+i})}{(t^{\nu_s+i} - 1)(t^{\lambda_s+i-1\nu_s+i-1} - 1)}$$

– qui est bien divisible par $\Delta_1^{s+i-1}(t^{v_{s+i}})$.

De même:

$$N_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_{s+i+1}}) = \Delta_{s+i-1}(2r, 2s)(t^{v_{s+i}}) \frac{t^{v_{s+i+1}}(t^{v_{s+i}v_{s+i}-1})}{t^{v_{s+i}-1}} \\ - M_{s+i-1}(2r, 2s)(t^{v_{s+i}}) \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}-t^{\mu_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}}}}{t^{\lambda_{s+i-1}v_{s+i}-1}}.$$

En utilisant (3.3.3.1) et (3.3.3.3) pour $j = i-1$ on obtient (3.3.3.2) pour $j = i$ avec:

$$\eta_i = -\xi_{i-1} \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}-t^{\mu_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}}}}{t^{v_{s+i}-1}} \\ - \alpha_{i-2} \frac{(t^{v_{s+i-1}\mu_{s+i-1}-t^{v_{s+i-1}\lambda_{s+i-1}}})(t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}-t^{\mu_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}}})}{(t^{v_{s+i-1}-1})(t^{\lambda_{s+i-1}v_{s+i}-1})}$$

– où η_i est bien divisible par $\Delta_1^{s+i-1}(t^{v_{s+i}})$.

Enfin (3.3.3.3) pour $j = i$ est obtenu grâce à:

$$\Delta_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_{s+i+1}}) = -M_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_{s+i+1}}) \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}-1}}{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}-1}} \\ + N_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_{s+i+1}}) \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i}-1}}{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}-1}}$$

et à (3.3.3.1) et (3.3.3.2) démontrés pour $j = i$ et en posant:

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} \left[- \frac{(t^{\mu_{s+i}v_{s+i}-t^{\lambda_{s+i}v_{s+i}}})(t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}-1})}{(t^{v_{s+i}-1})(t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}-1})} \right. \\ \left. + \frac{(t^{\lambda_{s+i}v_{s+i}-1})(t^{\mu_{s+i}x_{s+i}v_{s+i+1}-t^{\lambda_{s+i}x_{s+i}v_{s+i+1}}})}{(t^{v_{s+i}-1})(t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}-1})} \right] \\ + \eta_i \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i}-1}}{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}-1}} - \xi_i \frac{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}x_{s+i}-1}}{t^{\lambda_{s+i}v_{s+i+1}-1}}$$

– qui est bien divisible par $\Delta_1^{s+i-1}(t^{v_{s+i}})$ d'après le lemme (3.3.2).

Le lemme (3.3.3) est alors démontré.

(3.b,c.2) $l = 2r, \quad c = 2s-1 > 2r, \quad g > s > r.$

On note $M_g(2r, 2s-1)(t)$ le mineur de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ obtenu en rayant les lignes de numéros $2r, 2g$ et $2g+1$ et les colonnes de numéros $2s-1, 2g$.

On note $N_g(2r, 2s-1)(t)$ le mineur de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ obtenu en rayant les lignes de numéros $2r, 2g$ et $2g+1$ et les colonnes de numéros $2s-1$ et $2g-1$.

Enfin on note $\Delta_g(2r, 2s-1)(t)$ le mineur de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ obtenu en rayant les lignes de numéros $2r, 2g+1$ et la colonne de numéro $2s-1$. Comme dans le cas (3.b,c.1), on obtient:

LEMME (3.3.4). *On a:*

1. $M_{s+1}(2r, 2s-1)(t^{v_s+2}) = \tilde{\alpha}_0 \frac{t^{v_s+1\mu_{s+1}} - 1}{t^{v_s+1} - 1} + \tilde{\xi}_1;$
2. $N_{s+1}(2r, 2s-1)(t^{v_s+2}) = \tilde{\alpha}_0 \frac{t^{v_s+2}(t^{v_s+1\nu_{s+1}} - 1)}{t^{v_s+1} - 1} + \tilde{\eta}_1;$
3. $\Delta_{s+1}(2r, 2s-1)(t^{v_s+2}) = \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0 P_{\lambda_{s+1}, n_{s+1}}(t^{v_s+2});$

et pour $i \geq 2$:

4. $M_{s+i}(2r, 2s)(t^{v_s+i+1}) = \tilde{\alpha}_{i-1} \frac{t^{v_s+i\mu_{s+i}} - 1}{t^{v_s+i} - 1} + \tilde{\xi}_i$
 $- \Delta_{s+i-2}(2r, 2s-1)(t^{v_s+i-1}) P_{\lambda_{s+i-1}, n_{s+i-1}}(t^{v_s+i}) \frac{t^{\lambda_{s+i} + i\nu_{s+i}} - 1}{t^{v_s+i} - 1}$
5. $N_{s+i}(2r, 2s-1)(t^{v_s+i+1}) = \tilde{\alpha}_{i-1} \frac{t^{v_s+i+1}(t^{v_s+i\nu_{s+i}} - 1)}{t^{v_s+i} - 1} + \tilde{\eta}_i$
 $- \Delta_{s+i-2}(2r, 2s-1)(t^{v_s+i-1}) P_{\lambda_{s+i-1}, n_{s+i-1}}(t^{v_s+i}) \frac{t^{\lambda_{s+i} + i\nu_{s+i} + 1\nu_{s+i}} - t^{v_s+i+1}}{t^{v_s+i} - 1}$
6. $\Delta_{s+i}(2r, 2s-1)(t^{v_s+i+1})$
 $= \tilde{\alpha}_i - \Delta_{s+i-1}(2r, 2s-1)(t^{v_s+i}) P_{\lambda_{s+i}, n_{s+i}}(t^{v_s+i+1})$

avec $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i$ divisibles par $\Delta_1^{s+i-1}(t^{v_s+i})$

$$P_{\lambda, n}(t) = \frac{(t^{\lambda n} - 1)(t - 1)}{(t^\lambda - 1)(t^n - 1)}$$

et:

$$\Delta_s(2r, 2s-1)(t^{v_s+1}) = \tilde{\alpha}_0.$$

La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme (3.3.3) et est laissée au lecteur. Remarquons que ce lemme diffère du lemme (3.3.3) que par la situation 'initiale' donnée en 1., 2. et 3..

(3.b,c.3) $l = 2r+1, c = 2s, g > s > r.$

Ce cas se traite comme (3.b,c.1).

(3.b,c.4) $l = 2r+1, c = 2s-1, g > s > r.$

Ce cas se traite comme (3.b,c.2).

(3.b,c.5) $r = s, l = 2r+1, c = 2r-1, g > r.$

Ce cas se traite comme (3.b,c.2).

(3.b,c.6) $r = s, l = 2r, c = 2r - 1, g > r$.
Ce cas se traite comme (3.b,c.1).

(3.b,c.7) $r = s, l = 2r + 1, c = 2r, g > r$.
Ce cas se traite comme (3.b,c.1).

(3.b,c.8) $r = s, l = 2r, c = 2r, g > r$.
Ce cas se traite comme (3.b,c.1).

Il nous reste maintenant à traiter où $r \neq s$ et $g > r > s$.

On va procéder comme les cas précédents. Mais nous avons besoin d'un lemme préliminaire qui nous donnera des résultats analogues aux 1., 2 et 3. du lemme (3.3.3) ou aux 1., 2. et 3. du lemme (3.3.4).

LEMME (3.3.5). Soit $g \geq 2$. Les mineurs d'ordre $2g - 1$ de la sous-matrice A_g de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$, obtenue en rayant les deux dernières lignes, sont divisibles par $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$.

PREUVE. Supposons $g = 2$. Notons m_i^2 le mineur obtenu en rayant la i -ième colonne et les deux dernières lignes de $B(t, m_1, n_1, m_2, n_2)$. On a :

$$\begin{aligned} m_4^2 &= \frac{(t^{v_1 \lambda_1} - 1)(t^{v_2} - 1)(t^{v_2 \mu_2} - 1)}{(t^{\lambda_1} - 1)(t^{v_1} - 1)(t^{v_2} - 1)} - \frac{(t^{v_1 \mu_1} - 1)(t^{\lambda_2 v_2} - t^{\mu_2 v_2})}{(t^{v_1} - 1)(t^{v_2 \lambda_1} - 1)} \\ m_3^2 &= \frac{(t^{v_1 \lambda_1} - 1)(t^{v_2} - 1)(t^{v_2 y_2} - 1)t^{v_3}}{(t^{\lambda_1} - 1)(t^{v_1} - 1)(t^{v_2} - 1)} - \frac{(t^{\lambda_2 v_3 x_2} - t^{\mu_2 v_3 x_2})(t^{v_1 \mu_1} - 1)}{(t^{v_2 \lambda_1} - 1)(t^{v_1} - 1)} \\ m_2^2 &= \left[\frac{t^{v_3}(t^{v_2 y_2} - 1)(t^{\lambda_2 v_2} - t^{\mu_2 v_2})}{(t^{v_2} - 1)(t^{\lambda_1 v_2} - 1)} - \frac{(t^{\lambda_2 v_3 x_2} - t^{\mu_2 v_3 x_2})(t^{v_2 \mu_2} - 1)}{(t^{\lambda_1 v_2} - 1)(t^{v_2} - 1)} \right] \frac{(t^{v_1 \mu_1} - 1)}{(t^{v_1} - 1)} \\ m_1^2 &= \left[\frac{t^{v_3}(t^{v_2 y_2} - 1)(t^{\lambda_2 v_2} - t^{\mu_2 v_2})}{(t^{v_2} - 1)(t^{\lambda_1 v_2} - 1)} - \frac{(t^{v_3 \lambda_2 x_2} - t^{\mu_2 v_3 x_2})(t^{v_2 \mu_2} - 1)}{(t^{\lambda_1 v_2} - 1)(t^{v_2} - 1)} \right] \frac{t^{v_2}(t^{v_1 y_1} - 1)}{t^{v_1} - 1}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\Delta_1^1(t^{v_2})$ divise évidemment m_2^2 et m_4^2 . De plus on remarque que les zéros communs de $t^{\lambda_1 v_1 n_2} - 1$ et de $t^{\lambda_1 v_1 x_2} - 1$ sont les racines α -ièmes primitives de l'unité, où α divise $\lambda_1 v_1 n_2$ et $\lambda_1 v_1 x_2$. Or d'après (2.2.4) n_2 et x_2 sont premiers entre eux, donc α divise $\lambda_1 v_1$ et un diviseur commun de $t^{\lambda_1 v_1 n_2} - 1$ et $t^{\lambda_1 v_1 x_2} - 1$ est $t^{\lambda_1 v_1} - 1$. En constatant :

$$\begin{aligned} t^{\lambda_2 v_2} - t^{\mu_2 v_2} &= t^{\mu_2 v_2}(t^{\lambda_1 v_1 n_2} - 1) \\ t^{\lambda_2 v_3 x_2} - t^{\mu_2 v_3 x_2} &= t^{\mu_2 v_3 x_2}(t^{\lambda_1 v_1 x_2} - 1) \end{aligned}$$

on obtient que $\Delta_1^1(t^{v_2})$ divise bien m_1^2 et m_3^2 .

Soit $\mathfrak{F}_g(t)$ l'idéal de $\mathbf{Z}[t]$ engendré par les mineurs d'ordre $2g - 1$ du lemme (3.3.5).

On vient de montrer que $\Delta_1^1(t^{v_2})$ divise les éléments de $\mathfrak{F}_1(t)$.

Supposons que pour tout g' , $g > g' \geq 2$ $\Delta_1^{g'-1}(t^{v_{g'}})$ divise les éléments de $\mathfrak{F}_{g'}(t^{v_{g'+1}})$. On va montrer que $\Delta_1^{g-1}(t^{v_g})$ divise les éléments de $\mathfrak{F}_g(t^{v_{g+1}})$.

On considère les mineurs où:

i) On a enlevé la colonne de numéro $2g$ et les deux dernières lignes dans $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$. On obtient le mineur

$$m_{2g}^g = M_1^g(t^{v_{g+1}}) = \Delta_1^{g-1}(t^{v_g}) \frac{t^{\lambda_g v_g} - 1}{t^{v_g} - 1}.$$

ii) On a enlevé la colonne de numéro $2g-1$ et les deux dernières lignes dans $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$. On obtient le mineur

$$m_{2g-1}^g = N_1^g(t^{v_{g+1}}) = \Delta_1^{g-1}(t^{v_g}) \frac{t^{\lambda_g x_g v_{g+1}} - t^{v_{g+1}}}{t^{v_g} - 1}.$$

iii) On a enlevé la colonne de numéro c avec $1 \leq c \leq 2g-2$ et les deux dernières lignes dans $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$. On obtient le mineur m_c^g avec:

$$m_c^g = \alpha \beta$$

où $\alpha \in \mathfrak{F}_{g-1}(t^{v_g})$ est divisible par $\Delta_1^{g-2}(t^{v_{g-1}})$ et:

$$\beta = \frac{t^{v_g \mu_g} (t^{\lambda_g - 1 v_{g-1} n_g} - 1) t^{v_{g+1}} (t^{v_g v_g} - 1) - t^{v_{g+1} \mu_g x_g} (t^{\lambda_g - 1 v_{g-1} x_g} - 1) (t^{v_g \mu_g} - 1)}{(t^{\lambda_g - 1 v_g} - 1) (t^{v_g} - 1)}$$

qui est divisible par $P_{\lambda_{g-1}, n_{g-1}}(t^{v_g})$ car n_g et x_g étant premiers entre eux, d'après (2.2.4), on obtient que $t^{\lambda_g - 1 v_{g-1}} - 1$ divise $t^{\lambda_g - 1 v_g - 1 n_g} - 1$ et $t^{\lambda_g - 1 v_g - 1 x_g} - 1$. Il en résulte que m_c^g est divisible par $\Delta_1^{g-1}(t^{v_g})$ ainsi que tout élément de $\mathfrak{F}_g(t)$.

(3.b,c.9) $l = 2r$, $c = 2s$, $g > r > s$.

En notant $M_g(2r, 2s)(t)$, $N_g(2r, 2s)(t)$ et $\Delta_g(2r, 2s)(t)$ les mineurs obtenus comme dans (3.b,c.1) on obtient un lemme analogue au lemme (3.3.3).

(3.b,c.10) $l = 2r$, $c = 2s-1$, $g > r > s$.

C'est un cas qui se traite exactement comme le précédent.

(3.b,c.11) $l = 2r+1$, $c = 2s$, $g > r > s$.

On note $M_g(2r+1, 2s)(t)$ le mineur obtenu en rayant dans $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ les lignes de numéro $2g$, $2g+1$ et $2r+1$ et les colonnes de numéro $2s$ et $2g$.

On note $N_g(2r+1, 2s)(t)$ le mineur de la même matrice obtenu en rayant les lignes de numéro $2g$, $2g+1$ et $2r+1$ et les colonnes de numéro $2s$ et $2g-1$.

En fin on note $\Delta_g(2r+1, 2s)(t)$ le mineur de la même matrice obtenu en rayant les lignes de numéro $2g+1$ et $2r+1$ et la colonne de numéro $2s$.

On obtient alors un lemme analogue au lemme (3.3.3).

(3.b,c.12) $l = 2r+1$, $c = 2s-1$, $g > r > s$,
est un cas qui se traite comme le précédent.

De tout ce qui précède on obtient:

LEMME (3.3.6). *Les mineurs d'ordre $2g-1$ de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_g, n_g)$ sont divisibles par le p.g.c.d.*

$$\tilde{\Delta} \text{ de } \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) \text{ et } \Delta_2^{g-1}(t^{n_g}) \frac{(t^{\lambda_g n_g} - 1)(t - 1)}{(t^{\lambda_g} - 1)(t^{n_g} - 1)}.$$

De plus on a: $\tilde{\Delta}(t) = \Delta_2^g(t)$.

PREUVE. Pour les cas (1.a), (1.b), (2.a), (2.b) et (3.a) les mineurs obtenus sont bien divisibles par le p.g.c.d.

$$\tilde{\Delta} \text{ de } \Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) \text{ et } \Delta_2^{g-1}(t^{n_g}) P_{\lambda_g, n_g}(t).$$

Nous allons montrer que ceci est encore vrai pour les mineurs obtenus dans les cas (3.b) et (3.c): ceci impliquera que $\tilde{\Delta}(t)$ égale $\Delta_2^g(t)$.

Nous allons faire une démonstration par récurrence sur g . Tout ceci est vrai pour $g = 2$: il suffit de le vérifier 'à la main'. On fait donc l'hypothèse de récurrence suivante:

(3.3.7) Pour tout h , $2 \leq h < g$ le p.g.c.d. de

$$\Delta_1^{h-1}(t^{n_h}) \text{ et } \Delta_2^{h-1}(t^{n_h}) P_{\lambda_h, n_h}(t)$$

égale le p.g.c.d. $\Delta_2^h(t)$ des mineurs d'ordre $2h-1$ de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_h, n_h)$.

Tout d'abord nous montrons que $\tilde{\Delta}(t)$ divise les mineurs obtenus dans les cas (3.b) et (3.c). Il suffit de considérer le cas (3.b,c.1) ou (3.b,c.2) traité par le lemme (3.3.3) ou (3.3.4) puisque tous les autres cas donnent des résultats analogues. Les mineurs obtenus, dans le cas (3.b,c.1) par exemple, sont $\Delta_g(2r, 2s)(t)$ et $M_g(2r, 2s)(t)$.

Nous allons alors démontrer notre assertion par récurrence sur $g-s$.

a) $g-s = 1$:

$$\Delta_{s+1}(2r, 2s)(t) = \alpha_1 - \alpha_0 P_{\lambda_{s+1}, n_{s+1}}(t)$$

– où α_1 est divisible par $\Delta_1^s(t^{n_{s+1}})$ et α_0 est divisible par $\Delta_1^{s-1}(t^{n_{s+1}})$. Mais $\Delta_2^s(t^{n_{s+1}})$ divise $\Delta_1^{s-1}(t^{n_{s+1}})$ d'après l'hypothèse par récurrence et on obtient bien que le p.g.c.d. de $\Delta_1^s(t^{n_{s+1}})$ et $\Delta_2^s(t^{n_{s+1}}) P_{\lambda_{s+1}, n_{s+1}}(t)$ divise $\Delta_{s+1}(2r, 2s)(t)$.

D'autre part:

$$M_{s+1}(2r, 2s)(t) = \alpha_0 \frac{t^{n_{s+1}\mu_{s+1}} - 1}{t^{n_{s+1}} - 1}.$$

Pour conclure dans ce cas, nous avons besoin du:

LEMME (3.3.8). *Les polynômes $\Delta_1^g(t)$ et $\Delta_1^g(t)/\tilde{\Delta}(t)$ ont les mêmes zéros et les zéros de $\Delta_1^g(t)/\tilde{\Delta}(t)$ sont simples.*

PREUVE. Soit ξ un zéro de $\Delta_1^g(t)$ ayant la multiplicité $m \geq 2$. Nous allons montrer que ξ est un zéro de multiplicité $m-1$ de $\tilde{\Delta}(t)$. On a, d'après (3.3.7), que, pour tout h , $2 \leq h < g$, $\Delta_1^h(t)$ et $\Delta_1^h(t)/\Delta_2^h(t)$ ont les mêmes zéros et que les zéros de $\Delta_1^h(t)/\Delta_2^h(t)$ sont simples.

Comme:

$$\Delta_1^g(t) = -\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})P_{\lambda_g, n_g}(t) -, \text{ si } P_{\lambda_g, n_g}(\xi) \neq 0,$$

on a que ξ est un zéro de $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$ de multiplicité m , donc un zéro de $\Delta_2^{g-1}(t^{n_g})$ de multiplicité $m-1$ d'après l'hypothèse de récurrence (3.3.7).

omme $\tilde{\Delta}(t)$ est le p.g.c.d. de

$$\Delta_1^{g-1}(t^{n_g}) \text{ et } \Delta_2^{g-1}(t^{n_g})P_{\lambda_g, n_g}(t)$$

et que $P_{\lambda_g, n_g}(\xi) \neq 0$, ξ est alors un zéro d'ordre $m-1$ de $\tilde{\Delta}(t)$. Si $P_{\lambda_g, n_g}(\xi) = 0$, comme λ_g et n_g sont premiers entre eux, ξ est un zéro simple de $P_{\lambda_g, n_g}(t)$ et un zéro de multiplicité $m-1$ de $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$. L'hypothèse de récurrence (3.3.7) montre alors que ξ est un zéro de multiplicité $m-2$ de $\Delta_2^{g-1}(t^{n_g})$ si $m \geq 3$ ou bien $\Delta_2^{g-1}(\xi^{n_g}) \neq 0$ si $m = 2$. Dans ces deux cas ξ est alors bien un zéro d'ordre $m-1$ de $\tilde{\Delta}(t)$.

Si ξ est un zéro simple de $\Delta_1^g(t)$, on vérifie que $\tilde{\Delta}(\xi) \neq 0$ en utilisant encore (3.3.7).

Pour montrer que $M_{s+1}(2r, 2s)(t)$ est divisible par $\tilde{\Delta}(t)$ il suffit donc de montrer que tout zéro ξ de multiplicité $m-1$ de $\tilde{\Delta}$ est un zéro de multiplicité $\mu \geq m-1$ de $M_{s+1}(2r, 2s)(t)$.

Soit ξ une racine de $\Delta_1^g(t)$ de multiplicité m , avec $m \geq 2$. Comme

$$P_{\lambda_{g-1}, n_{g-1}}(t^{n_g}) \text{ et } P_{\lambda_g, n_g}(t)$$

n'ont que des zéros simples, ξ est une racine de $\Delta_1^{g-2}(t^{n_{g-1}n_g})$ de multiplicité $m-2$ ou $m-1$ ou m , en convenant que si $m = 2$, 'est de multiplicité $m-2$ ' signifie que ξ n'est pas racine de $\Delta_1^{g-2}(t^{n_{g-1}n_g})$:

1. ξ est une racine de multiplicité $m-2$ de $\Delta_1^{g-2}(t^{n_{g-1}n_g})$, alors ξ est racine simple de $P_{\lambda_{g-1}, n_{g-1}}(t^{n_g})$ et de $P_{\lambda_g, n_g}(t)$.

ξ est alors une racine α -ième primitive de l'unité avec α diviseur de $\lambda_g n_g$ et $\lambda_{g-1} n_{g-1} n_g$ et non diviseur de $\lambda_g, n_g, \lambda_{g-1} n_{g-1}, n_{g-1} n_g$. Or:

$$\lambda_g = \mu_g + \lambda_{g-1} n_{g-1} n_g.$$

Donc α divise $\mu_g n_g$ et ne divise pas n_g : ξ est donc racine simple de

$$\frac{t^{\mu_g n_g} - 1}{t^{n_g} - 1}.$$

Dans ce cas ξ est alors une racine de multiplicité au moins égale à $m-1$ de $M_{s+1}(2r, 2s)(t)$.

2. ξ est une racine de multiplicité $m-1$ ou m de $\Delta_1^{g-2}(t^{n_g-1n_g})$, alors ξ est une racine de multiplicité au moins égale à $m-1$ de $M_{s+1}(2r, 2s)(t)$. Comme le coefficient directeur de $\tilde{\Delta}$ égale 1, on trouve alors que $\tilde{\Delta}$ divise bien $M_{s+1}(2r, 2s)(t)$. En fait on a montré:

LEMME (3.3.9). *Le polynôme $\tilde{\Delta}(t)$ divise*

$$\Delta_1^{g-2}(t^{n_g-1n_g}) \frac{t^{n_g \mu_g} - 1}{t^{n_g} - 1}.$$

b) $g-s = k$:

$$\Delta_{s+k}(2r, 2s)(t) = \alpha_k - \Delta_{s+k-1}(2r, 2s)(t^{n_s+k}) P_{\lambda_{s+k}, n_{s+k}}(t)$$

– où α_k est divisible par $\Delta_1^{s+k-1}(t^{n_s+h})$. On remarque que $\Delta_{s+k-1}(2r, 2s)(t)$ est un mineur d'ordre $2(g-1)-1$ de $B(t, m_1, n_1, \dots, m_{g-1}, n_{g-1})$. En appliquant l'hypothèse de récurrence (3.3.7) on trouve que $\Delta_2^{g-1}(t^{n_g})$ divise $\Delta_{g-1}(2r, 2s)(t^{n_g})$.

De même:

$$\begin{aligned} M_{s+k}(2r, 2s)(t) &= \alpha_{k-1} \frac{t^{n_g \mu_g} - 1}{t^{n_g} - 1} + \xi_k \\ &\quad - \Delta_{g-2}(2r, 2s)(t^{n_g-1n_g}) P_{\lambda_{g-1}, n_{g-1}}(t^{n_g}) \frac{t^{\lambda_{g-1} n_g} - 1}{t^{n_g} - 1} \end{aligned}$$

– où α_{k-1} est divisible par $\Delta_1^{g-2}(t^{n_g-1n_g})$ et ξ_k est divisible par $\Delta_1^{g-1}(t^{n_g})$.

On utilise le lemme (3.3.9) pour obtenir que

$$\alpha_{k-1} \frac{t^{n_g \mu_g} - 1}{t^{n_g} - 1}$$

est divisible par $\tilde{\Delta}$ et on vérifie, comme (3.3.9):

LEMME (3.3.10). *Le polynôme $\tilde{\Delta}(t)$ divise*

$$\Delta_2^{g-2}(t^{n_g-1n_g}) P_{\lambda_{g-1}, n_{g-1}}(t^{n_g}) \frac{t^{\lambda_{g-1} n_g} - 1}{t^{n_g} - 1}.$$

La première partie du lemme (3.3.6) est donc prouvée.

Il nous reste à montrer que $\tilde{\Delta}(t)$ égale $\Delta_2^g(t)$. Ceci provient de ce que $\tilde{\Delta}(t)$ divise $\Delta_2^g(t)$ et que par conséquent $\Delta_1^g(t)/\Delta_2^g(t)$ divise $\Delta_1^g(t)/\tilde{\Delta}(t)$:

le lemme (3.3.8) montre que $\Delta_1^g(t)/\Delta_2^g(t)$ n'a que des zéros simples, mais, comme $\Delta_1^g(t)$ est le polynôme caractéristique de la monodromie locale d'une singularité algébrique de courbe plane ayant les paires de Puiseux (m_i, n_i) et que $\Delta_1^g(t)/\Delta_2^g(t)$ est le polynôme minimal de cette même monodromie d'après le théorème (3.2.4), on obtient qu'ils ont nécessairement les mêmes zéros et que, par conséquent:

$$\tilde{A}(t) = A_2^g(t).$$

Du même coup la démonstration du théorème (3.3.1) est achevée et la conjecture de Brieskorn pour les courbes planes analytiquement irréductibles à l'origine est vraie.

PROBLÈMES.

1. Trouver une autre preuve.
2. Considérer le cas des courbes planes réduites.
3. Cas des hypersurfaces à singularité isolée.

ADDENDUM.

Depuis la rédaction de cet article, N. A'Campo de Poitiers et P. Deligne de l'I.H.E.S. ont également trouvé d'autres démonstrations de la conjecture d'E. Brieskorn dans le cas d'une singularité analytiquement irréductible d'une courbe plane. Ceci répond donc au problème 1 ci-dessus.

De plus N. A'Campo a trouvé que la courbe $(x^2 + y^3)(y^2 + x^3)$ n'a pas de monodromie finie. Ceci résoud donc le problème 2.

En utilisant le résultat de M. Sébastiani et R. Thom dans *Inventiones Mathematicae*, 13, p. 90–96, 1971, le contre-exemple de N. A'Campo montre que la monodromie locale d'une singularité isolée d'hypersurface complexe n'est pas finie en général.

BIBLIOGRAPHIE

S. ABHYANKAR

- [1] *Local Analytic Geometry*, Academic Press.

K. BRAUNER

- [2] *Zur Geometrie der Funktionen Zweier komplexen Veränderlichen*, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 6 (1928), 1–54.

E. BRIESKORN

- [3] *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, *Manuscripta Mathematicae*, Vol. 2 (1970), 103–160.

W. BURAU

- [4] *Kennzeichnung der Schlauchknoten*, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 9 (1932), 125–133.

R. CROWELL

- [5] *The Group G'/G'' of a Knot Group G* , *Duke Math. J.*, 30 (1963), 349–354.

R. CROWELL

- [6] *The Annihilator of a Knot Module*, *Proc. A.M.S.*, 15 (1960), 696–700.

P. DELIGNE

- [7] Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag.

G. DE RHAM

- [8] Torsion et type simple d'homotopie, Lecture Notes in Math. 48, Springer-Verlag.

R. FOX

- [9] A Quick Trip through Knot Theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics, edited by M. Fort, Prentice-Hall.

R. FOX

- [10] Free Differential Calculus, V. The Alexander Matrices Reexamined, Ann. of Math. 71 (1960), 187–196.

R. FOX–R. CROWELL

- [11] Introduction to Knot Theory, Ginn, 1963.

R. FOX–J. MILNOR

- [12] Singularities of 2-spheres in 4-space and Equivalence of Knots, Bull. A.M.S., vol. 63, p. 406.

M. GREENBERG

- [13] Lectures on Algebraic Topology, Benjamin.

A. GROTHENDIECK

- [14] Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA VII), Bures-sur-Yvette, I.H.E.S., 1968.

S. LANG

- [15] Algebra, Addison-Wesley.

MME. M. LEJEUNE, MM. LÊ DŨNG TRÁNG, B. TEISSIER

- [16] Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 271 (1970), 1065–1067.

LÊ DŨNG TRÁNG

- [17] Un critère d'équisingularité, Séminaire Norguet, Université de Paris VII, 1970–1971, à paraître.

J. MILNOR

- [18] Singular Points of Complex Hypersurfaces, Ann. of Math. Stud. 61, Princeton University Press.

L. NEUWIRTH

- [19] Knot Groups, Ann. of Math. Stud. 56, Princeton University Press.

F. PHAM

- [20] Cours de 3ème cycle. Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Paris, à paraître au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

H. SCHUBERT

- [21] Knoten und Vollringe, Acta Math., Vol. 90, 131–286.

A. THORUP

- [22] On the Alexander Polynomial, à paraître.

O. ZARISKI

- [23] On the Topology of Algebroid Singularities, Amer. J. Math., 54 (1932), 453–465.

O. ZARISKI

- [24] Algebraic Surfaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 161, Springer-Verlag.

H. SEIFERT

- [25] On the Homology Invariant of Knots, Quart. J. Math. Oxford, Vol. 1, p. 23–32.