HERBERT FLEISCHNER

Fixpunkteigenschaften von automorphismen spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender graphen

Compositio Mathematica, tome 23, nº 4 (1971), p. 445-452

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_4_445_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 23, Fasc. 4, 1971, pag. 445–452
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

FIXPUNKTEIGENSCHAFTEN VON AUTOMORPHISMEN SPEZIELLER, ENDLICHER, EBENER, DREIFACH-KNOTENZUSAMMENHÄNGENDER GRAPHEN

von

Herbert Fleischner

In [1] wurde der Begriff des 0^+-Isomorphismus als ein Isomorphismus des Graphen X_1 auf den Graphen X_2 definiert, bei dem die zyklische Anordnung der Kanten und der positive Drehsinn der zyklischen Kantenanordnung für alle Knoten von X_1 erhalten bleiben. Beim 0^--Isomorphismus gehen die im positiven Drehsinn um $P \in V(X_1)$ angeordneten Kanten in die um $Q \in V(X_2)$ angeordneten Kanten bei Umkehrung des Drehsinns über, wenn P in Q abgebildet wird, und das gilt für alle $P \in V(X_1)$. Analog sind 0^+ – bzw. 0^--Automorphismen definiert. In [1] wurde dann gezeigt, daß zwei spezielle, endliche, ebene, dreifach-knotenzusammenhängende Graphen, die isomorph sind, notwendigerweise auch 0^+- oder 0^--isomorph sind. Daher enhält die Automorphismengruppe $G(X)$ des speziellen, endlichen, ebenen, dreifach-knotenzusammenhängenden Graphen X nur 0^+- und 0^--Automorphismen (siehe [2]). $G^+(X)$ bzw. $G^-(X)$ bezeichnet die Menge aller 0^+ - bzw. 0^--Automorphismen.

Sei $\alpha \in G^+(X)$ ein nichttrivialer Automorphismus der Ordnung n (kurz $0(\alpha) = n$) des speziellen, endlichen, ebenen, dreifach-knotenzusammenhängenden Graphen X. Wir bilden einen Teilgraphen X_0 von X mit folgenden Eigenschaften:

1) $x_0 \in V(X_0) \rightarrow x_0, \cdots, x_{n-1}$ sind paarweise verschieden.
2) X_0 ist zusammenhängend.
3) $X_i \cap X_j = \phi$ für alle $i \neq j$, $i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$; X_i bzw. x_i ist durch die Definitionsgleichung $X_i := \alpha^i X_0$ bzw. $x_i := \alpha^i x_0$ gegeben.
4) card $V(X_0)$ maximal, card $E(X_0)$ maximal.

Dann erhält man aus Satz 3 in [2] die Gleichung

$$V(X) - \bigcup_{i=0}^{n-1} V(X_i) = \phi \vee \{F_1\} \vee \{F_1, F_2\}, \tag{1}$$

wobei $\alpha^i F_j = F_j$ für alle $i = 0, \cdots, n-1, j = 1, 2$ gilt.

Ist $0(\alpha) = n > 2$, so gilt (siehe [2], Satz 4)

$$(2)\qquad \begin{aligned} E(X)-\bigcup_{i=0}^{n-1}E(X_i)-\bigcup_{i=0}^{n-1}E_{it} \\ = \phi \vee \bigcup_{i=0}^{n-1}\{\alpha^i[F_1, x_{0k}]\} \vee \bigcup_{i=0}^{n-1}(\{\alpha^i[F_1, x_{0k}]\} \cup \{\alpha^i[F_2\, y_{0l}]\}), \end{aligned}$$

wobei x_{0k}, y_{0l} Knoten von X_0 sind, und k, l durchlaufen eine gewisse Indexmenge. Die Elemente in den Mengen auf der rechten Seite der Gleichung sind paarweise verschieden, E_{it} enthält alle X_{it} und $X_{(i+1)t}$ verbindenden Kanten, und t erzeugt die Restklassen mod n (unter $[a, b]$ verstehen wir die ungerichtete Kante mit den Endpunkten a, b). Insbesondere besagt (2), daß bezüglich der von α erzeugten zyklischen Untergruppe $\mathfrak{z}_\alpha \subset G^+(X)$ bzw. bezüglich jeder Potenz α^i, $i \not\equiv 0$ mod n, keine Fixkanten auftreten, wenn $n > 2$.

Wir betrachten nun die Kugeloberfläche und teilen sie in $n > 2$ kongruente Elementarflächenstücke $L_0, \cdots, L_{n-1}$ ein, die alle den Nordpol (N) und Südpol (S) enthalten und von Meridianen begrenzt sind. Jedes dieser L_i habe den Öffnungswinkel $2\pi/n$. Wir zeichnen nun X_0 als ebenen Graphen auf L_0 so, daß der (äußere) Rand von X_0 die x_{0k} und y_{0l} sowie die zu den Kanten von E_0 und $E_{(n-1)t}$ inzidenten Knoten von X_0 enthält (ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) sollen die $x_{0k}(y_{0l})$ auf der nördlichen (südlichen) Halbkugel liegen). Daß eine solche Darstellung möglich ist, erkennt man leicht, wenn man von einer beliebigen Realisierung von X auf der Kugel ausgeht. Nun verschieben wir die Knoten von X_0 stetig, bis verschiedene Knoten auf verschiedenen Breitengraden liegen und keine Knoten oder Kanten N oder S oder Teile der begrenzenden Meridiane enthalten. Trivialerweise ist das erreichbar. X_{it} erhält man durch Rotation um die N-S-Achse um den Winkel $2\pi i/n$ im positiven oder negativen Drehsinn. Die eventuell auf der rechten Seite der Gleichung (2) auftretenden Kanten werden als auf Meridianen liegende Kurvenstücke mit den Anfangspunkten x_{0k} bzw. y_{0l} und den Endpunkten $F_1 = N$ bzw. $F_2 = S$ gezeichnet. Die Kanten von E_0, die X_0 und X_t verbinden, zeichnen wir nun irgendwie als glatte Kurven, die paarweise höchstens Knoten gemeinsam haben (und natürlich auch mit den anderen Kanten von X_0), und erhalten dann die E_{it} analog wie oben durch Rotation um die N-S-Achse um den Winkel $2\pi i/n$. Gibt es genau einen oder keinen Fixknoten bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha$, so erhält man durch analoge Einbettung von X auf die Kugeloberfläche genau ein Fixland oder genau zwei Fixländer bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha$, von denen jedes genau einen der beiden Pole enthält, und die bezüglich Rotationen um $2\pi i/n$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ in sich übergehen. Bezeichnen wir mit $F_V(\alpha)$ bzw. $F_E(\alpha)$ bzw. $F_L(\alpha)$ die Anzahl der Fixknoten bzw. Fixkanten bzw. Fixländer bezüglich α bzw. $\mathfrak{z}_\alpha$, so erhalten wir also für den Fall $0(\alpha) > 2$

$$(3') \qquad F_E(\alpha) = 0, \; F_V(\alpha)+F_L(\alpha) = 2.$$

Sei $0(\alpha) = 2$, $\alpha \in G^+(X)$. Analog wie oben wird X_0 und X_1 auf die Kugeloberfläche gezeichnet. Gilt $\alpha e \neq e$ für alle $e \in E(X)$, d.h. $F_E(\alpha) = 0$, so zeigt man analog wie im Fall $0(\alpha) > 2$, daß (3′) gilt. Sei also $E_\alpha := \{e \in E(X)/\alpha e = e\} \neq \emptyset$, und o.B.d.A. liege die beliebig, aber fest gewählte Kante $e_0 = [x_0, x_1] \in E_\alpha$ auf der nördlichen Halbkugel. Notwendigerweise gilt $\alpha x_0 = x_1$, $\alpha x_1 = x_0$, da wir sonst in Widerspruch zu '$\alpha \in G^+(X)$' gelangen. O.B.d.A. verläuft e_0 längs eines Meridians über N. Wie im Fall $0(\alpha) > 2$ zeichnen wir E_0 und E_1 (siehe (2)), die wegen des Dreifach-Knotenzusammenhanges von X auch hier nichtleere Kantenmengen sind. Durch den e_0 enthaltenden Meridian wird die nördliche Halbkugel in den östlichen Bereich BO und den westlichen Bereich BW geteilt. Durch Anwendung von α geht BO in BW über und umgekehrt. Daraus erkennt man leicht, daß auf der nördlichen Halbkugel keine Fixknoten und Fixländer liegen können. Aber auch eventuell weitere Fixkanten liegen nicht auf der nördlichen Halbkugel, da man sonst in Widerspruch zur Ebenheit von X gelangt. Gilt $E_0 = \{e_0\}$, so gibt es auf der südlichen Halbkugel genau einen Fixknoten oder genau ein Fixland. Gilt jedoch $E_0 \neq \{e_0\}$, $f_0 \in E_0, f_0 \neq e_0$, so betrachten wir f_0 analog auf der südlichen Halbkugel und erkennen, daß $E_0 = \{e_0, f_0\}$, also $F_E(\alpha) = 2$, $F_V(\alpha) = 0$, $F_L(\alpha) = 0$.

Zusammenfassend gilt also für beliebiges nichttriviales $\alpha \in G^+(X)$ die Gleichung

$$(3) \qquad F_V(\alpha)+F_E(\alpha)+F_L(\alpha) = 2.$$

Weiters erhält man aus dem Bisherigen den folgenden

Darstellungssatz für spezielle, endliche, ebene, dreifach-knotenzusammenhängende Graphen, die einen nichttrivialen 0^+*-Automorphismus besitzen*: Enthält $G(X)$ des speziellen, endlichen, ebenen, dreifach-knotenzusammenhängenden Graphen X einen nichttrivialen 0^+-Automorphismus α der Ordnung n, so läßt sich X auf der Kugeloberfläche so zeichnen, daß α als Rotation um die N-S-Achse um den Winkel $2\pi s/n$ erscheint, wobei s die kleinste natürliche Zahl mit $st \equiv 1 \bmod n$ ist.

Alle im Folgenden betrachteten Graphen sind spezielle, endliche, ebene, dreifach-knotenzusammenhängende Graphen, so daß darauf nicht speziell hingewiesen wird. N sei die Menge der natürlichen Zahlen.

Sei nun $\beta \in G^-(X)$. In [2] wurde gezeigt, daß $0(\beta) = 2k$, $k \in N$, und daß für $k \geqq 2$ gilt

$$(4) \qquad F_V(\beta)+F_E(\beta)+F_L(\beta) = 0.$$

Für den Fall $0(\beta) = 2$ beweisen wir

SATZ 1: *Wenn* $F_V(\beta) \neq 0$ *oder* $F_E(\beta) \neq 0$, *so gilt sogar*

$$F_V(\beta)+F_E(\beta) \geqq 3. \tag{5}$$

BEWEIS: I) $F_V(\beta) \neq 0$. Sei $x = \beta x$. Durch die $2g(x)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_{g(x)} \\ e_k, e_{k-1}, \cdots, e_1, e_{g(x)}, \cdots, e_{k+1} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leqq k \leqq g(x)$ sind die Übergänge (bei Anwendung von β) der zu x inzidenten Kanten ineinander hinreichend gekennzeichnet.

a) $k = 2m-1$, $m \in N$. Da die Summe übereinanderstehender Indices in den ersten k Spalten stets $k+1$ ist, so steht e_m über e_m, d.h. $\beta e_m = e_m$. Ist $e_m = [x, y]$, so gilt wegen $\beta x = x$ auch $\beta y = y$. Also ist $F_V(\beta) \geqq 2$, $F_E(\beta) \geqq 1$, somit ist die behauptete Ungleichung in diesem Fall richtig.

b) $k = 2m, m \in N$. Dann gilt $\beta e_m = e_{m+1}, \beta e_{m+1} = e_m$, d.h., die Landesgrenze, die e_m, x, e_{m+1} enthält, geht in sich über. Wir schreiben die aufeinanderfolgenden Knoten dieser Landesgrenze in einer zweizeiligen Matrix entsprechend der durch β vermittelten Übergänge ($x = x_1$) und erhalten

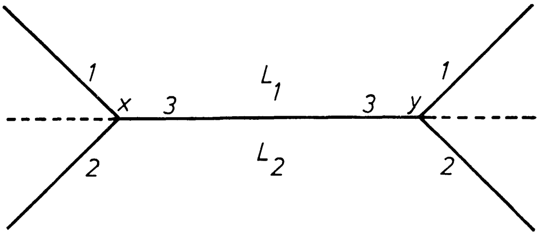
$$\text{i)} \quad \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_{t+1}, \cdots, x_s \\ x_1, x_s, \cdots, x_{t+1}, \cdots, x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{falls } s = 2t, \ t \in N,$$

bzw.

$$\text{ii)} \quad \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_{t+1}, x_{t+2}, \cdots, x_s \\ x_1, x_s, \cdots, x_{t+2}, x_{t+1}, \cdots, x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{falls } s = 2t+1, \ t \in N.$$

Im Fall i) haben wir einen weiteren Fixknoten, im Fall ii) eine Fixkante – nämlich $[x_{t+1}, x_{t+2}]$ – gefunden. Im Fall i) behandeln wir x_{t+1} wie x ($x_{t+1} \neq x = x_1$ wegen $t \geqq 1$) und finden wie im Fall a) eine Fixkante oder im Fall b) einen dritten – wegen des Dreifach-knotenzusammenhanges von X von x und x_{t+1} verschiedenen – Fixknoten oder eine Fixkante. Stets ist jedoch im Fall i) $F_V(\beta)+F_E(\beta) \geqq 3$ erfüllt. Im Fall ii) betrachten wir die zweite Landesgrenze, die $[x_{t+1}, x_{t+2}]$ enthält, und finden einen weiteren Fixknoten oder eine weitere Fixkante, die wieder wegen des Dreifach-Knotenzusammenhanges von X von $x = x_1$ und $[x_{t+1}, x_{t+2}]$ verschieden sind, so daß auch hier die behauptete Ungleichung erfüllt ist.

II) $F_E(\beta) \neq 0$. Sei $e = [x, y)$ mit $\beta e = e$. Gilt $\beta x = x$, also auch $\beta y = y$, so sind wir bereits fertig. Es sei also $\beta x = y$, $\beta y = x$. Dazu betrachten wir Skizze 1: Da $\beta \in G^-(X)$, und da $e = 3$ laut Annahme in sich übergeht, so gehen auch die mit 1 bzw. 2 bezeichneten Kanten not-



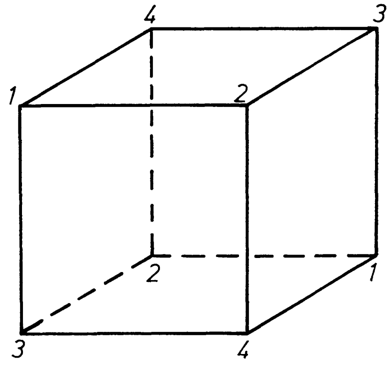
SKIZZE 1

wendigerweise bei Anwendung von β ineinander über. In jedem der beiden L_i findet man aber dann noch einen weiteren Fixknoten oder eine weitere Fixkante, die alle wegen des Dreifach-Knotenzusammenhanges von X voneinander verschieden sind. Also ist auch hier $F_V(\beta)+F_E(\beta) \geqq 3$ erfüllt. q.e.d.

Falls $F_V(\beta) = F_E(\beta) = 0$, so muß auch $F_L(\beta) = 0$ gelten, da für $\beta L = L$ entweder zwei Knoten oder zwei Kanten oder ein Knoten und eine Kante in sich selbst übergehen. Somit erhalten wir (mit ι bezeichnen wir die identische Abbildung)

SATZ 2: *Ist* $\beta \in G^-(X)$ *und* $\beta^2 = \iota$, *so gilt* $F_V(\beta)+F_E(\beta) \geqq 3$ *oder* $F_V(\beta)+F_E(\beta)+F_L(\beta) = 0$.

Daß der zweite Fall tatsächlich eintreten kann, zeigt Skizze 2: Hier ist β *gegeben durch die Vertauschung gleichnumerierter Ecken der Grund- und Deckfläche des Würfels.*



SKIZZE 2

SATZ 3: *Seien* $x, y \in V(X)$, *e bzw. f zu x bzw. y inzidente Kanten. Dann gibt es höchstens einen* 0^+*-Automorphismus* (0^-*-Automorphismus*), *der x in y und e in f überführt.*

BEWEIS: Angenommen, es gibt $\alpha, \beta \in G^+(X)$ mit den Eigenschaften

$$\alpha x = \beta x = y$$
$$\alpha e = \beta e = f.$$

Sei $e = [x, z], f = [y, v]$, dann gilt für $\alpha^{-1}\beta \in G^+(X)$

$$\alpha^{-1}\beta x = \alpha^{-1} y = x$$
$$\alpha^{-1}\beta z = \alpha^{-1} v = z, \text{ da natürlich } \alpha z = \beta z = v$$
$$\alpha^{-1}\beta e = \alpha^{-1} f = e.$$

Es bleiben also bei einem 0^+-Automorphismus zwei Knoten und die sie verbindende Kante fest, was nach [3] $\alpha^{-1}\beta = \iota$, also $\alpha = \beta$ bedeutet. Falls $\alpha, \beta \in G^-(X)$ angenommen wird, so erhält man ebenfalls $\alpha^{-1}\beta \in G^+(X)$ und durch dieselbe Argumentation $\alpha^{-1}\beta = \iota$. q.e.d.

Somit ist durch ein Tripel der Art $(xy, ef, +)$ bzw. $(xy, ef, -)$ eindeutig jener 0^+ - bzw. 0^--Automorphismus definiert, der x in y und die zu x inzidente Kante e in die zu y inzidente Kante f überführt.

Mit Hilfe von Satz 3 läßt sich nun leicht die Abschätzung von L. Weinberg (siehe [4]) über die maximale Ordnung von $G(X)$ herleiten. Sie lautet: card $G(X) \leqq 4$ card $E(X)$, und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn X einer der Platonischen Graphen ist.

Da durch ein Tripel der Art $(xy, ef, +)$ bzw. $(xy, ef, -)$ jeder 0^+ - bzw. 0^--Automorphismus bestimmt ist, wenn x und e fest gewählt werden, und y alle Knoten (auch x) von X und e alle zu y inzidenten Kanten durchläuft, erhalten wir höchstens $g(y)$ 0^+- und höchstens $g(y)$ 0^--Automorphismen bei festem y. Also gibt es insgesamt höchstens $\Sigma_{y \in V(X)}\, g(y)$ 0^+- und höchstens $\Sigma_{y \in V(X)}\, g(y)$ 0^--Automorphismen von X. Da bekanntlich $\Sigma_{y \in V(X)}\, g(y) = 2$ card $E(X)$, ist tatsächlich 4 card $E(X)$ eine obere Schranke für die Ordnung von $G(X)$.

Damit aber wirklich diese obere Schranke erreicht wird, muß X regulärer Graph sein, und alle Länder von X müssen gleichen Umfang haben. Diese beiden Eigenschaften haben unter obigen Voraussetzungen über X genau die fünf Platonischen Graphen. Daß die Automorphismengruppen dieser Graphen tatsächlich die Ordnung 4 card $E(X)$ haben, läßt sich leicht nachprüfen.

SATZ 4: $\mathfrak{z} := \{\alpha \in G^+(X) / \alpha x = x,\ x \in V(X)\}$ *ist eine zyklische Untergruppe von* $G(X)$.

BEWEIS: Da $\mathfrak{z} = \{\iota\}$ die triviale zyklische Gruppe ergibt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{z}$ einen nichttrivialen Automorphismus α enthält.

Seien $e_0, \cdots, e_{g(x)-1}$ die zu x inzidenten Kanten entsprechend ihrer zyklischen Anordnung im positiven Drehsinn. Nach Satz 3 ist jedes Element von $\mathfrak{z}$ durch ein Tripel $(xx, e_0 e_k, +)$ gegeben. Sei $\alpha_0 \in \mathfrak{z}$ mit minimalem $k \geqq 1$ gewählt. Für die Ordnung von α_0 gelte $0(\alpha_0) = n$. Wir zeigen, daß α_0 erzeugendes Element von $\mathfrak{z}$ ist.

Angenommen, $\mathfrak{z}_{\alpha_0}: = \{\alpha_0^i/i = 0, 1, \cdots, n-1\} \neq \mathfrak{z}$. Sei $\beta \in \mathfrak{z}-\mathfrak{z}_{\alpha_0}$. Dann gilt $\beta = (xx, e_0 e_j, +)$. Nun wählen wir $t \in N$ so, daß $tk < j \leqq (t+1)k$, was wegen $j > k$ gefordert werden kann. Dann gilt für den Automorphismus

$$\alpha_0^{-t}\beta = \alpha_0^{n-t}\beta:$$
$$\alpha_0^{-t}\beta x = x$$
$$\alpha_0^{-t}\beta e_0 = \alpha_0^{-t} e_j = e_{j-tk}.$$

Nach obiger Ungleichung gilt $1 \leqq j-tk \leqq k$. Wäre $j-tk = k$, also $j = (t+1)k$, so wäre wegen der Eindeutigkeit der Darstellung jedes Automorphismus durch ein Tripel obiger Art $\beta = \alpha_0^{t+1}$, im Widerspruch zur Annahme $\beta \in \mathfrak{z}-\mathfrak{z}_{\alpha_0}$. Also muß $1 \leqq j-tk < k$ gelten. Setzen wir $j-tk = s$, so erhalten wir $\alpha_0^{-t}\beta = (xx, e_0 e_s, +) \in \mathfrak{z}$ und $1 \leqq s < k$, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von k. Also muß $\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_{\alpha_0} = \phi$ gelten, d.h., $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\alpha_0}$. q.e.d.

SATZ 5: *Durch* $\mathfrak{z} : = \{\alpha \in G^+(X)/\alpha L = L\}$, *wobei L eine Landesgrenze ist, wird eine zyklische Untergruppe von* $G(X)$ *definiert.*

BEWEIS: Wir schreiben die Knoten der Landesgrenze $x_0, \cdots, x_r$, $r \geqq 2$, entsprechend ihrer zyklischen Anordnung im positiven Drehsinn an. Dann führen wir einen neuen Knoten y im Inneren von L ein, den wir mit $x_0, \cdots, x_r$ durch jeweils genau eine Kante verbinden, und erhalten wieder einen speziellen, endlichen, ebenen, dreifachknotenzusammenhängenden Graphen, nämlich X_y. Jedem $\alpha \in \mathfrak{z}$ entspricht genau ein $\beta = (yy, [y, x_0][y, x_i], +)$, und klarerweise sind $\mathfrak{z}_y$ und $\mathfrak{z}$ isomorph, wobei $\mathfrak{z}_y$ die Menge aller dieser β ist. Nach Satz 4 ist $\mathfrak{z}_y$ zyklische Untergruppe von $G(X_y)$, also $\mathfrak{z}$ zyklische Untergruppe von $G(X)$. q.e.d.

SATZ 6: *Ist x Fixknoten bezüglich jedes Elementes von* $G(X)$, *so ist entweder* $G(X)$ *eine zyklische Gruppe, oder* $G(X)$ *enthält einen zyklischen Normalteiler von Index* 2, *und alle* 0^-*-Automorphismen aus* $G(X)$ *haben die Ordnung* 2. *Ersetzen wir "x Fixknoten" durch „L Fixland", so ist die so erhaltene Aussage ebenfalls wahr.*

BEWEIS: Satz 6 ergibt sich als Folgerung von Satz 2 und Satz 5 in [2] und dem hier bewiesenen Satz 5. q.e.d.

SATZ 7: *Gilt* $\alpha e = e$ *für alle* $\alpha \in G(X)$ *und eine feste Kante e, so ist* $G(X)$ *zyklisch von der Ordnung zwei oder abelsch von der Ordnung vier* *mit* $\alpha^2 = \iota$ *für alle* $\alpha \in G(X)$, *d.h., isomorph dem direkten Produkt der zyklischen Gruppe* $\mathfrak{z}_2$ *mit sich selbst.*

BEWEIS: Die vier möglichen Automorphismen in der Tripelschreibweise sind (wobei $e = [x, y]$)

$\iota = (xx, ee, +)$, $\alpha = (xx, ee, -)$, $\beta = (xy, ee, +)$, $\gamma = (xy, ee, -)$. Klarerweise gilt $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \iota$. Daraus folgt aber schon die Kommutativität von $G(X)$. q.e.d.

LITERATUR

H. FLEISCHNER

[1] Über endliche, ebene, Eulersche und paare kubische Graphen (Monatsh. f. Math. 74, 410-420 (1970))

H. FLEISCHNER

[2] Die Struktur der Automorphismen spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender Graphen (eingereicht bei Compositio Mathematica)

F. HARARY UND W. TUTTE

[3] On the Order of the Group of a Planar Map (J. Comb. Theory 1 (1966), 394–395)

L. WEINBERG

[4] On the Maximum Order of the Automorphism Group of a Planar Triply Connected Graph (J. SIAM, 14, No. 4, 1966).

(Oblatum 5–VIII–1970)

Department of Mathematics,
State University of New York at Binghamton,
Harpur College,
Binghamton, New York 13901,
U.S.A.