GERD BARON
ERHARD BRAUNE

Zur Transzendenz von Lückenreihen mit ganzalgebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument

Compositio Mathematica, tome 22, nº 1 (1970), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1970__22_1_1_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 22, Fasc. 1, 1970, pag. 1-6
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

Zur Transzendenz von Lückenreihen mit ganzalgebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument

von

Gerd Baron und Erhard Braune

In der vorliegenden Abhandlung werden Bedingungen angegeben, unter welchen eine Lückenreihe $\sigma(\Theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Theta^{e_\nu}$ (e_ν ganzrational, und monoton wachsend) für algebraische Θ transzendente Werte annimmt. Es wurde eine Methode verwendet und verallgemeinert, die in einer Arbeit von Cohn [1] zum Transzendenzbeweis für gewisse Lückenreihen mit rationalen Koeffizienten und algebraischem Argument dargelegt wurde. Anschließend wird noch ein einfaches Verfahren zur Konstruktion passender e_ν angegeben.

Bezeichnungen: Sei α eine algebraische Zahl vom Grade n, so gibt es ein irreduzibles Polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ mit ganzzahligen Koeffizienten und g.g.T. $(b_0, \cdots, b_n) = 1$, sodaß $P(\alpha) = 0$. Es heißt dann b_n der höchste Koeffizient von α, $H = \max_{0 \leq i \leq n} |b_i|$ die Höhe von α und die anderen Nullstellen von $P(x)$ heißen die Konjugierten α_j von $\alpha = \alpha_1$. Nun sei $\overline{|\alpha|}$ definiert durch $\overline{|\alpha|} = \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j|$. Ist $b_n = 1$, so heißt α ganzalgebraisch.

Satz. Sei $\sigma(\Theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Theta^{e_\nu}$ eine Lückenreihe, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die a_ν sind ganzalgebraisch vom Grade g_ν.
(2) Es gibt eine Konstante D, sodaß für alle ν gilt

$$0 < D^{-\nu} < |a_{\nu i}| < D^{\nu} \qquad i = 1, \cdots, g_\nu.$$

(3) Sei $\bar{c}_h = \prod_{\nu=1}^{h} g_\nu$, so gilt: $\lim_{h \to \infty} e_h \bar{c}_h^2 / e_{h+1} = 0$. Dann ist $\sigma(\Theta)$ transzendent für jedes algebraische Θ mit $0 < |\Theta| < 1$.

Beweis. Es wird später (Bem. 3) gezeigt werden, daß für die Reihen $\sigma(x)$, die die obigen Voraussetzungen erfüllen, der Konvergenzradius 1 ist.

Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ ein beliebiges Polynom mit ganzrationalen Koeffizienten, der Höhe H und dem Grad n. Sei θ algebraisch vom Grade g. Es ist zu zeigen, daß $P(\sigma(\theta)) \neq 0$, was gleichbedeutend ist mit $|P(\sigma(\theta))| > 0$. Sei σ_h die h-te Partialsumme und R_h der h-te Reihenrest, so gilt unter Weglassung des Argumentes $\theta : \sigma = \sigma_h + R_h$, und somit

$$\begin{aligned} |P(\sigma)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} b_i (\sigma_h + R_h)^i \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n} b_i \sigma_h^i + R_h \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k} \sigma_h^k R_h^{i-k-1} \right| \end{aligned}$$

Die Werte aller σ_h und R_h sind nach oben und unten beschränkt. Sei nun q eine von h unabhängige obere Schranke für die Absolutbeträge von σ_h und R_h, so folgt

$$|P(\sigma)| > |P(\sigma_h)| - |R_h| \sum_{i=0}^{n} |b_i| 2^i q^i > |P(\sigma_h)| - C|R_h| \tag{1}$$

mit einem von h unabhängigen $C > 1$.

Es muß nun $|P(\sigma_h)|$ nach unten und $|R_h|$ nach oben passend abgeschätzt werden, sodaß daraus $|P(\sigma)| > 0$ folgt.

a) Abschätzung von $|R_h(\theta)|$ nach oben:
Da der Konvergenzradius der Reihe 1 ist, gibt es für jedes θ mit $|\theta| < 1$ ein $\varepsilon > 0$ und ein h_0, sodaß für alle $h > h_0$ gilt

$$|a_h| \leqq (1+\varepsilon)^{e_h}, \quad \tilde{\theta} = (1+\varepsilon)|\theta| < 1 \quad \text{und} \quad 1-\tilde{\theta} > \tilde{\theta}^{e_h}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} |R_h| = |\sigma - \sigma_h| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{h+k} \theta^{e_{h+k}} \right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{h+k}| \, |\theta|^{e_{h+k}} \\ &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\theta}^{e_{h+k}} = \tilde{\theta}^{e_{h+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\theta}^{e_{h+k}-e_{h+1}} \leqq \tilde{\theta}^{e_{h+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\theta}^{k} \\ &= \tilde{\theta}^{e_{h+1}} \cdot \frac{1}{1-\tilde{\theta}} = \left(\frac{\tilde{\theta}}{(1-\tilde{\theta})^{1/(e_{h+1})}} \right)^{e_{h+1}} < \frac{1}{T(\theta)^{e_{h+1}}} \end{aligned} \tag{2}$$

mit einem von h unabhängigen $T(\theta) > 1$.

b) Abschätzung von $P(\sigma_h)$ nach unten:

Allgemein gilt nach [3] (S. 7, Satz 3): Ist $P(x)$ ein Polynom mit ganzrationalen Koeffizienten, der Höhe H und dem Grade n, α eine algebraische Zahl mit $P(\alpha) \neq 0$, der Höhe h, dem höchsten Koeffizienten q und dem Grade s, dann gilt:

$$|P(\alpha)| > \frac{c^n}{H^{s-1}} \tag{3}$$

mit einer Konstanten $c > 0$, die nur von α abhängt. Es soll hier gezeigt werden, daß c zu

$$(3') \qquad c = \frac{1}{(8h^2)^s}$$

gewählt werden kann. Nach [3] (S. 7 unten, letzte Abschätzung) gilt:

$$|P(\alpha)| \geqq ((n+1)H(h+1)^n)^{1-s}q^{-ns}.$$

Da nun $q < h+1 \leqq 2h$, $s > 1$ und $n+1 \leqq 2^n$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}|P(\alpha)| &> (2^n H(2h)^n)^{1-s}(2h)^{-ns}\\ &= (2^{1-s}(2h)^{1-2s})^n H^{1-s} > (8h^2)^{-sn}H^{1-s}.\end{aligned}$$

Dies beweist (3) mit (3′), ja es gilt erst recht

$$(3'') \qquad |P(\alpha)| > \frac{1}{(8h^2)^{sn}H^s}.$$

In unserem Falle ist $\alpha = \sigma_h(\theta)$ eine algebraische Zahl vom Grade $s = g_{\sigma_h} \leqq g\bar{c}_h = c_h$ und der Höhe $h = H_{\sigma_h}$, die noch passend nach oben abzuschätzen ist. $s \leqq c_h$ gilt, da c_h nicht kleiner ist als der Grad des Erweiterungskörpers $Q(\theta, a_1, \cdots, a_h)$ über Q, dem Körper der rationalen Zahlen. Für unendlich viele h gilt sicher $P(\sigma_h(\theta)) \neq 0$, da andernfalls $P(x)$ unendlich viele Nullstellen haben müßte, was unmöglich ist. Es gibt zur algebraischen Zahl θ eine ganzrationale Zahl B, sodaß $B\theta$ ganzalgebraisch ist. Daraus folgt

$$K_h = K_h(\theta) = B^{e_h}\sigma_h(\theta) = \sum_{i=1}^{h} a_i(B\theta)^{e_i}B^{e_h-e_i}$$

ist wiederum ganzalgebraisch, da jeder Faktor jedes Summanden in $K_h(\theta)$ ganzalgebraisch ist und die ganzalgebraischen Zahlen einen Ring bilden. Nach einem Hilfssatz aus [3] (S. 10, Hilfssatz 4) folgt nun für die Höhe von K_h

$$H(K_h) \leqq (2\overline{|K_h|})^{c_h} = (2\overline{|B^{e_h}\sigma_h|})^{c_h} = (2B^{e_h}\overline{|\sigma_h|})^{c_h} \leqq (d_1 B)^{c_h e_h}.$$

Da

$$\overline{|\sigma_h|} \leqq \sum_{i=1}^{h} \overline{|a_i|}\,\overline{|\theta|}^{e_i} < \sum_{i=1}^{h} D^i\,\overline{|\theta|}^{e_i} < (h+1)(D\overline{|\theta|})^{e_h} < \tfrac{1}{2}d_1^{e_h}$$

mit $d_1 > 1$ und von h unabhängig.

Nach [3] (S. 11, erste Abschätzung oben) ergibt sich daher für die Höhe von σ_h die Abschätzung

$$H_{\sigma_h} \leqq B^{e_h c_h} H(K_h) \leqq (d_1 B^2)^{e_h c_h} < d_2^{e_h c_h}$$

mit einer von h unabhängigen Größe $d_2 > 1$.

Dies alles entsprechend in (3″) eingesetzt, ergibt

$$(4) \qquad |P(\sigma_h(\theta)| > \frac{1}{(8 d_2^{2e_h c_h})^{c_h n}} \cdot \frac{1}{H^{c_h}} > d_3^{-e_h c_h^2}$$

wobei $d_3 > 1$ wieder von h unabhängig ist.

(2) und (4) in (1) eingesetzt, ergibt nun

$$(5) \qquad P|(\sigma(\theta))| > d_3^{-e_h c_h^2} - C T^{-e_{h+1}}.$$

c) Es wird gezeigt, daß Voraussetzung (3) des Satzes $|P(\sigma(\theta))| > 0$ impliziert:

Aus
$$\lim_{h\to\infty} \frac{e_h c_h^2}{e_{h+1}} = 0$$

folgt
$$e_h c_h^2 \ln d_3 < e_{h+1} \ln T - \ln C$$

ab einem gewissen h_0; also

$$d_3^{-e_h c_h^2} > C T^{-e_{h+1}}.$$

Daher nach (5) $|P(\sigma(\theta))| > 0$.

Damit ist die Transzendenz von $\sigma(\theta)$ bewiesen.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung 3 des Satzes, also

$$\lim_{h\to\infty} \frac{e_h \bar{c}_h^2}{e_{h+1}} = 0$$

ist äquivalent zu folgender Bedingung:

Für jedes $A > 0$ gibt es ein h_0, sodaß für alle $h > h_0$ gilt

$$e_{h+1} > A\, e_h \bar{c}_h^2.$$

Beweis. 1) Aus

$$\lim_{h\to\infty} \frac{e_h \bar{c}_h^2}{e_{h+1}} = 0$$

folgt klarerweise

$$\lim_{h\to\infty} (e_{h+1} - A e_h \bar{c}_h^2) = \infty$$

für jedes $A > 0$.

2) Aus
$$e_{h+1} > A e_h \bar{c}_h^2$$

folgt

$$\frac{e_h \bar{c}_h^2}{e_{h+1}} < \frac{1}{A}$$

für jedes $A > 0$, was gleichbedeutend ist mit

$$\lim_{h\to\infty} \frac{e_h \bar{c}_h^2}{e_{h+1}} = 0.$$

Brmerkung 2. Ist $\{A_h\}$ eine Folge, die über alle Grenzen wächst und gilt für $h > h_0 e_{h+1} > A_h e_h \bar{c}_h^2$, so folgt, daß die Voraussetzung 3 des Satzes erfüllt ist, da gilt

$$0 \leqq \lim_{h\to\infty} \frac{e_h \bar{c}_h^2}{e_{h+1}} \leqq \lim_{h\to\infty} \frac{1}{A_h} = 0.$$

Dadurch ist eine Konstruktionsmöglichkeit für passende e_h gegeben.

Bemerkung 3. Wir wollen zeigen, daß der Konvergenzradius der Reihen $\sigma(x)$, die die Voraussetzungen 2 und 3 des Satzes erfüllen, gleich 1 ist. Aus Voraussetzung 3 und Bemerkung 1 folgt für ein beliebiges, aber im Weiteren festes $A > 1$

$$e_{n+1} > A e_n \bar{c}_n^2 \geqq A e_n$$

für $n > N$, also für alle $k \geqq 1$

$$e_{N+k} \geqq A^k e_N \geqq A^k N.$$

Daher auch für $n > N$

$$\frac{n}{e_n} = \frac{N+k}{e_{N+k}} \leqq \frac{N+k}{A^k N}.$$

Da $\lim_{k\to\infty} (N+k)/A^k N = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} n/e_n = 0$ also auch

$$\lim_{n\to\infty} D^{\pm n/e_n} = D^{\pm \lim_{n\to\infty} n/e_n} = 1.$$

Aus Voraussetzung 2 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} D^{-n/e_n} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[e_n]{|a_n|} \leqq \lim_{n\to\infty} D^{n/e_n}.$$

Bemerkung 4. Aus $\lim_{n\to\infty} n/e_n = 0$ und dem Fabryschen Lückensatz (sehe [2] S. 2) folgt, daß $\sigma(x)$ über den Einheitskreis nicht analytisch fortgesetzt werden kann. Auch die von Cohn in [1] behandelten Reihen, sind über ihren Konvergenzkreis nicht analytisch fortsetzbar.

BEMERKUNG 5. Klarerweise folgt aus dem Satz auch folgendes Resultat: Ist $\sigma(x) = \sum a_n x^{e_n}$ eine Potenzreihe, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und ist A eine beliebige von Null verschiedene algebraische Zahl, so liefert

$$\sigma^*(x) = \sum \frac{a_n x^{e_n}}{A^{e_n}}$$

für alle algebraischen Θ mit $0 < |\theta| < |A|$ transzendente Werte, da $\sigma^*(\theta) = \sigma(\theta/A)$ mit $0 < |\theta/A| < 1$. $\sigma^*(x)$ hat den Konvergenzradius $|A|$ und ist über den Konvergenzkreis nicht analytisch fortsetzbar.

LITERATUR

H. COHN

[1] Note on almost algebraic numbers. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 1042—1045.

L. ILIEFF

[2] Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen. DVW, Berlin, 1960.

TH. SCHNEIDER

[3] Einführung in die transzendenten Zahlen. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.

(Oblatum 11–II–69)

Institut für Mathematik
Technische Hochschule Wien
Karlsplatz 13, Wien A-1040, Austria

und

Huemerstraße 8
Linz/Donau A-4020, Austria