COMPOSITIO MATHEMATICA

J. NITSCHE

Umkehrsätze für Spline-Approximationen

Compositio Mathematica, tome 21, nº 4 (1969), p. 400-416
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_4_400_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 21, Fasc. 4, 1969, pag. 400-416
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

Umkehrsätze für Spline-Approximationen

von

J. Nitsche

Abstract: Using an appropriate measure for the approximation by spline-functions inverse theorems including estimates for the moduli of continuity and the approximation errors of higher derivatives of a given function are derived. The application to the Ritz-method in case of a second order Sturm-Liouville-problem is shown.

1

In der Approximationstheorie werden unter dem Begriff Umkehrsätze diejenigen Aussagen zusammengefasst, die aus der Approximierbarkeit einer Funktion durch Elemente einer Folge endlich dimensionaler Teilräume auf Stetigkeits- und weitere Approximationseigenschaften der Funktion schliessen lassen. Dieser Fragenkreis ist für die trigonometrischen und algebraischen Polynome eingehend studiert.

In den letzten 20 Jahren haben neben diesen Systemen die Spline-Funktionen eine zunehmende Beachtung gefunden. Zu ihrer Definition wird von einem in dem zugrundegelegten Intervall I definierten und endlich dimensionalen Funktionenraum $\mathfrak{L}$ ausgegangen. Eine Spline-Funktion $x = x(\pi) \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ zu einer Unterteilung π von I ist eine solche Funktion, die in den Teilintervallen von π jeweils mit einer Funktion aus $\mathfrak{L}$ übereinstimmt. Im allgemeinen treten noch gewisse Übergangs- und Endbedingungen wie die Stetigkeit von x mit Einschluss gewisser Ableitungen hinzu. Für $\mathfrak{L}$ bieten sich primär Polynome eines bestimmten Grades an, weitere Beispiele sind die trigonometrischen Polynome oder allgemeiner die Lösungen einer homogenen Differentialgleichung. In einer Vielzahl von Arbeiten wurden die Fragen der Existenz von speziellen Spline-Interpolationen wie der dabei auftretenden Fehler studiert, die Nummern [1]—[22] der Literaturzusammenstellung geben einen Überblick dafür.

Umkehrsätze für Spline-Approximationen stehen mit Ausnahme von [30], worin der Fall linearer Funktionen für $\mathfrak{L}$ behandelt wird, im wesentlichen aus. Auf gewisse Ansatzpunkte in den Arbeiten von Ahlberg-Nilson [1], Ahlberg-Nilson-Walsh [2], Malozemov [14] und Schoenberg [18] sei jedoch hingewiesen. Neben der aus der Approximationstheorie bekannten Rolle derartiger Sätze zur Charakterisierung von Funktionenklassen im Sinne der konstruktiven Funktionentheorie sei ihre Bedeutung an einem Beispiel illustriert, welches den ursprünglichen Anlass für die vorliegenden Untersuchungen gab. Beim Ritzschen Verfahren zur angenäherten Lösung eines Sturm-Liouville-Problems einer Differentialgleichung 2. Ordnung wird ein quadratisches Funktional, gebildet mit der Funktion und ihrer 1. Ableitung, minimiert. Mit Hilfe direkter Approximationssätze lassen sich Fehlerabschätzungen für die Annäherung der Funktion und ihrer 1. Ableitung herleiten, vgl. dazu Birkhoff-de Boor-Schwartz-Wendroff [8], Birkhoff-Schultz-Varga [9], Ciarlet-Schultz-Varga [12], Schultz-Varga [19], Varga [22] sowie Nitsche [29]. Über das Verhalten der 2. Ableitung und somit auch über das Erfülltsein der Differentialgleichung ist zunächst nichts bekannt. Genau dazu werden Aussagen benötigt, die aus dem Verhalten der Approximation der Funktion Folgerungen auf das ihrer Ableitungen gestatten.

Das bei Spline-Funktionen zugrunde zu legende Approximationsmass ist nicht evident. Sicher ist die Beschränkung auf die Spline-Funktionen zu einer bestimmten Folge von Unterteilungen nicht zweckmässig. Im Hinblick auf die übliche Formulierung direkter Sätze über Spline-Interpolation bzw. -Approximation bietet sich

$$E_q(h, f, \mathfrak{P}) = \sup_{\bar{\pi} \leqq h} \inf_{x \in \mathfrak{P}(\pi)} \|f - x\|_q \tag{1.1}$$

als Mass an. E charakterisiert ja die Aussage, dass zu jeder Unterteilung π mit einer h nicht übersteigenden maximalen Gitterbreite $\bar{\pi}$ in $\mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ eine solche Spline-Funktion $x(\pi)$ existiert, die von f in der L_q-Norm um höchstens $E_q(h)$ abweicht. Wie sich zeigt, spielt dann das Problem der zugelassenen oder unterdrückten Unstetigkeiten in den Stützstellen eine untergeordnete Rolle, insbesondere lassen sich die Sprünge im q-ten Mittel bei bestapproximierenden Funktionen x durch E_q abschätzen. Zentraler Punkt für die gesamte Entwicklung ist eine benötigte Eigenschaft des Teilraumes $\mathfrak{L}$, die wir als Voraussetzung formulieren wollen:

VORAUSSETZUNG. Für jedes $x \in \mathfrak{L}$ und jedes Teilintervall $I' \subset I$ der Breite Δ gilt

$$\operatorname*{Max}_{s \in I'} \left| \frac{d}{ds} x(s) \right| \leqq C \Delta^{-1} \operatorname*{Max}_{s \in I'} |x(s)|. \tag{1.2}$$

(1.2) ist für trigonometrische Polynome die Bernsteinsche Ungleichung bzw. im algebraischen Fall die von Markov. Sämtliche hier abgeleiteten Sätze gelten, wenn $\mathfrak{L}$ — abgesehen von der Differenzierbarkeit und gegebenenfalls der entsprechenden Beziehung für die Ableitungen — diese Voraussetzung erfüllt.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass auch im vorliegenden Fall die typischen Methoden der Approximationstheorie volle Anwendung finden. In dieser Hinsicht sei etwa auf die Darstellungen bei Lorentz [23] und Timan [34] verwiesen.

2

Dem Folgenden legen wir das Intervall $I = [0, 1]$ zugrunde und bezeichnen mit

$$\pi = \{s_k | 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_\kappa = 1\}$$

eine Unterteilung von I in die Teilintervalle $I_k = [s_k, s_{k+1})$ bzw. $I_{\kappa-1} = [s_{\kappa-1}, 1]$. Das Maximum bzw. Minimum der Intervallbreiten $\Delta_k = s_{k+1} - s_k$ wird durch $\bar{\pi}$ bzw. $\underline{\pi}$ angezeigt. Unter Festhalten eines endlich dimensionalen Raumes $\mathfrak{L}$ von in I definierten und hinreichend oft differenzierbaren Funktionen sei $\mathfrak{P}(\pi) = \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ der Raum der Funktionen, die in I_k jeweils mit einer Funktion aus $\mathfrak{L}$ übereinstimmen. $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ usw. geben die Räume an, deren Elemente durch Differentiation von $x \in \mathfrak{P}$ in den Intervallen I_k gewonnen werden. Durch angehängte Indizes wie q usw. werden die Normen bzw. Stetigkeitsmoduli in L_q angegeben, ein zweiter Index wie I' gibt den Hinweis auf das Intervall:

$$||f||_{q \cdot I'} = \left\{ \int_{I'} |f(s)|^q ds \right\}^{1/q}$$

$$\omega_r(f, h)_{q \cdot I'} = \sup_{t < h} \left\{ \int_{s,\, s+rt \in I'} |\Delta_t^r f(s)|^q ds \right\}^{1/q}.$$

Die Bezugnahme auf das Intervall unterbleibt bei $I' = I$. $c_1, c_2, \cdots$ oder $c_3(p, q)$ bedeuten numerische Konstanten, die Angabe von p, q deutet die Abhängigkeit von diesen Parametern an. Die c_ν sind aber stets unabhängig von der approximierten Funktion, den Spline-Funktionen sowie den Unterteilungen.

Für das Weitere unterstellen wir die oben formulierte Voraussetzung und, soweit höhere Ableitungen auftreten, die entsprechende Beziehung (1.2) für die Ableitungen $x^{(r)}$ bei $x \in \mathfrak{L}$. Zunächst lässt sich aus (1.2) eine interessante Beziehung herleiten, die die L_p-Norm eines $x \in \mathfrak{L}$ durch die L_q-Norm bei $q < p$ abschätzt:

Lemma 0. *Es sei $x \in \mathfrak{L}$. Dann gilt fur jedes Intervall $I' \subset I$ der Breite Δ bei $1 \leqq q \leqq p \leqq \infty$*

$$||x||_{p \cdot I'} \leqq c_1(p, q)\Delta^{-1/q+1/p}||x||_{q \cdot I'}. \tag{2.1}$$

Der Beweis ist für algebraische Polynome bei Timan [34], S. 236 durchgeführt und lässt sich wörtlich übertragen. Es ist

$$c_1 = \{c(1+q)\}^{1/q-1/p}.$$

Nach dieser Vorbereitung wollen wir für Spline-Funktionen zeigen

Lemma 1. *Es sei $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ und $1 \leqq q \leqq p \leqq \infty$. Dann bestehen die Ungleichungen*

$$||x||_q \leqq ||x||_p, \tag{2.2}$$

$$||x||_p \leqq c_1(p, q)\underline{\pi}^{-1/q+1/p}||x||_q, \tag{2.3}$$

$$||x'||_p \leqq c_2(p)\underline{\pi}^{-1}||x||_p. \tag{2.4}$$

Zunächst ist (2.2) wegen der Länge 1 von I nach der Hölderschen Ungleichung klar. Weiterhin ist mit Lemma 0

$$\begin{aligned} ||x||_p^p &= \sum ||x||_{p \cdot I_k}^p \leqq c_1^p \sum \Delta_k^{-p/q+1}||x||_{q \cdot I_k}^p \\ &\leqq c_1^p \underline{\pi}^{-p/q+1}||x||_q^{p-q} \sum ||x||_{q \cdot I_k}^q \\ &= c_1^p \underline{\pi}^{-p/q+1}||x||_q^p, \end{aligned}$$

womit (2.3) gezeigt ist. Schliesslich ist

$$\begin{aligned} ||x'||_p^p &= \sum ||x'||_{p \cdot I_k}^p \leqq \sum \Delta_k ||x'||_{\infty \cdot I_k}^p \\ &\leqq c^p \sum \Delta_k^{1-p}||x||_{\infty \cdot I_k}^p \\ &\leqq c^p c_1^p(\infty, p) \sum \Delta_k^{-p}||x||_{p \cdot I_k}^p \leqq \{cc_1(\infty, p)\underline{\pi}^{-1}\}^p||x||_p^p. \end{aligned}$$

Die Spline-Funktionen $x \in \mathfrak{P}$ können je nach Wahl von $\mathfrak{P}$ an den Stützstellen s_k Sprünge haben. Um die späteren Konvergenzbeweise zu vereinfachen, werden wir x in folgender Weise glätten: Mit

$$\Phi(s) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(1+s) & \text{für } -1 \leqq s < 0 \\ -\tfrac{1}{2}(1-s) & \text{für } \quad 0 \leqq s \leqq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\lambda > 2$ werde gesetzt

$$x_\lambda(s) = x(s) + \sum [x]_k \Phi(\lambda \underline{\pi}^{-1}(s - s_k)). \tag{2.5}$$

Hierbei gibt

$$[x]_k = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \{x(s_k+\varepsilon)-x(s_k-\varepsilon)\} \tag{2.6}$$

den Sprung von x bei s_k an. Mit der Abkürzung

$$||[x]||_p = \{ \sum |[x]_k|^p\}^{1/p} \tag{2.7}$$

lässt sich die Abweichung $x-x_\lambda$ bequem darstellen, denn es gilt

Lemma 2. *Es sei* $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ *und* $\lambda > 2$. *Dann gilt bei* $1 \leqq p \leqq \infty$

$$||x-x_\lambda||_p \leqq c_3(p, \lambda)\underline{\pi}^{1/p}||[x]||_p \tag{2.8}$$

$$||x'-x'_\lambda||_p \leqq c_4(p, \lambda)\underline{\pi}^{1/p-1}||[x]||_p. \tag{2.9}$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, da sich bei $\lambda > 2$ die von den verschiedenen Sprungstellen herrührenden Korrekturen in (2.5) nicht überlappen. Es ist

$$c_3 = \left\{\frac{2^{1-p}}{\lambda(p+1)}\right\}^{1/p}, \quad c_4 = (2\lambda)^{(p-1)/p}.$$

Ist $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ nicht beliebig gewählt sondern best-approximierend zu einer Funktion $f \in L_p$, so lässt sich die Sprunggrösse $||[x]||_p$ durch das Approximationsmass E_p der Funktion abschätzen:

Lemma 3. *Es sei* $E_p(t) = E_p(t, f, \mathfrak{P})$ *das Approximationsmass einer Funktion* $f \in L_p$ *und* $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ *gemäss*

$$||x-f||_p \leqq E_p(\bar{\pi})$$

gewählt. Dann gilt für die Sprünge von x

$$||[x]||_p \leqq c_5(p)\underline{\pi}^{-1/p}E_p(\bar{\pi}). \tag{2.10}$$

Bevor wir Lemma 3 beweisen, wollen wir noch eine Konsequenz formulieren:

Lemma 4. *Die Bedeutung von* $E_p(t)$ *und* x *sei wie in Lemma* 3, *und* x_λ *gemäss* (2.5) *eine Glättung von* x. *Dann gilt bei* $\lambda > 2$

$$||x-x_\lambda||_p \leqq c_6(p, \lambda)E_p(\bar{\pi}), \tag{2.11}$$

$$||x'-x'_\lambda||_p \leqq c_7(p, \lambda)\underline{\pi}^{-1}E_p(\bar{\pi}). \tag{2.12}$$

Zum Beweis von Lemma 3 betrachten wir neben π eine zweite Unterteilung π_1, die ausser den Punkten $s = 0$ und $s = 1$ die Mittelpunkte der Intervalle I_k von π als Stützstellen hat.

$\pi_2 = \pi \cup \pi_1$ enthalte die Stützstellen von π und π_1. Dann gilt

$$\underline{\pi}_1 \geqq \tfrac{1}{2}\underline{\pi}, \qquad \bar{\pi}_1 \leqq \bar{\pi},$$
$$\underline{\pi}_2 \geqq \tfrac{1}{2}\underline{\pi}, \qquad \bar{\pi}_2 \leqq \tfrac{1}{2}\bar{\pi}.$$

Die Funktion $x_1 \in \mathfrak{P}(\pi_1, \mathfrak{L})$ sei gemäss

$$||x_1 - f||_p \leqq E_p(\bar{\pi}_1) \leqq E_p(\bar{\pi})$$

gewählt. Da nun $x - x_1 \in \mathfrak{P}(\pi_2, \mathfrak{L})$ gilt, folgt wegen

$$||x - x_1||_p \leqq 2E_p(\bar{\pi})$$

nach Lemma 1

$$(2.14) \qquad ||x' - x_1'||_p \leqq 4c_2 \underline{\pi}^{-1} E_p(\bar{\pi}).$$

Wir betrachten jetzt eine Stützstelle $\sigma = s_k$. In einem offenen Intervall der Breite $\frac{1}{2}\underline{\pi}$ um σ ist x_1 stetig, während x höchstens in σ unstetig ist. Für $0 < t < \frac{1}{4}\underline{\pi}$ gilt daher mit $y = x - x_1$:

$$y(\sigma \pm t) = y(\sigma \pm 0) + \int_\sigma^{\sigma \pm t} y'(\tau)d\tau$$

bzw.

$$(2.15) \qquad [x]_k = y(\sigma + t) - y(\sigma - t) - \int_{\sigma - t}^{\sigma + t} y'(\tau)d\tau.$$

Das Integral lässt sich gemäss

$$\left| \int_{\sigma - t}^{\sigma + t} y' d\tau \right|^p \leqq (2t)^{p-1} \int_{\sigma - t}^{\sigma + t} |y'|^p dt$$

abschätzen. Die Integration der p-ten Potenz von (2.15) führt daher auf

$$\tfrac{1}{4}\underline{\pi} |[x]_k|^p \leqq c_8(p) \left\{ \int_{\sigma - \underline{\pi}/4}^{\sigma + \underline{\pi}/4} |y|^p dt + \underline{\pi}^p \int_{\sigma - \underline{\pi}/4}^{\sigma + \underline{\pi}/4} |y'|^p dt \right\}.$$

Die Intervalle $(s_k - \underline{\pi}/4, s_k + \underline{\pi}/4)$ überlappen sich nicht, so dass sich nach Summation

$$\tfrac{1}{4}\underline{\pi} ||[x]||_p^p \leqq c_8(p) \{ ||x - x_1||_p^p + \underline{\pi}^p ||x' - x_1'||_p^p \}$$

ergibt. Unter Berücksichtigung von Lemma 1 bzw. (2.14) ist damit Lemma 3 bewiesen.

3

Wir wollen uns jetzt mit Abschätzungen für die Stetigkeitsmoduli beschäftigen und beweisen

Satz 1. *Es sei* $f \in L_p$ *und es gelte* $E_p(t, f, \mathfrak{P}) \leqq E(t)$ *mit einer monotonen Funktion* $E(t)$. *Dann ist*

$$(3.1) \quad \omega_r(f, h)_p \leqq c_9(p, r) \left\{ E(h) + h^r \left[||f||_p + \int_h^1 t^{-r-1} E(t) dt \right] \right\}.$$

Im Laufe des Beweises wird sich speziell ergeben

Zusatz 1.1. *Im Falle von polinomialen Spline-Approximationen vom Grade c gilt bei* $r > l$

$$(3.2) \qquad \omega_r(f, h)_p \leqq c_{10}(p, r) E(h).$$

Zum Beweis betrachten wir zu einem natürlichen n die 2 Unterteilungen π_1 und π_2, wobei π_1 die äquidistanten Stützstellen $s_k = hk$ mit $h = 1/N = 2^{-n}$ besitze, während π_2 als innere Stützstellen die $N-1$ Punkte $s_k = h(k+\frac{1}{2})$ für $k = 0, 1, \cdots, N-2$ aufweise. Daneben führen wir noch die Unterteilungen $\pi_{i \cdot \nu}$ $(i = 1, 2)$ für $\nu = 1, 2, \cdots, n-1$ ein, die aus π_i durch sukzessives Zusammenlegen je zweier benachbarter Intervalle hervorgehen. Dann ist

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} \underline{\pi}_{1 \cdot \nu} = \underline{\pi}_{1 \cdot \nu} &= 2^{\nu-n}, \\ 2^{\nu-n-1} \leqq \underline{\pi}_{2 \cdot \nu} < \bar{\pi}_{2 \cdot \nu} &< 2^{\nu-n+1}. \end{aligned}$$

$x_{i \cdot \nu} \in \mathfrak{P}(\pi_{i \cdot \nu}, \mathfrak{L})$ seien optimale Approximationen an f in L_p. Das Intervall I zerlegen wir in die 2 disjunkten Teile

$$I^1 = \left\{ \bigcup_0^{N-2} [hk, h(k+\tfrac{1}{2})) \right\} \cup [1-h, 1],$$

$$I^2 = \bigcup_0^{N-2} [h(k+\tfrac{1}{2}), h(k+1)).$$

Für $t < h/2r$ liegen die Argumente $s, s+t, \cdots, s+rt$ von $\Delta_t^r f(s)$ bei $s \in I^i$ ganz in einem Teilintervall von π_i. Daher ist für solche t und $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} ||\Delta_t^r f||_{p \cdot I^i} &\leqq ||\Delta_t^r x_i||_{p \cdot I^i} + ||\Delta_t^r (f - x_i)||_{p \cdot I^i} \\ &\leqq t^r ||x_i^{(r)}||_p + 2^r E(\bar{\pi}_i), \end{aligned}$$

woraus unmittelbar

$$(3.4) \qquad \omega_r(f, h/2r)_p \leqq c_{11} \{ E(\tfrac{3}{2}h) + h^r [||x_1^{(r)}||_p + ||x_2^{(r)}||_p] \}$$

folgt.

Wir wollen zunächst den Zusatz erledigen. Sind nämlich x_i Polynome vom l-ten Grad in den Teilintervallen, so ist $x_i^{(r)} = 0$ bei $r > l$. (3.4) reduziert sich daher auf

$$\omega_r(f, h/2r)_p \leqq c_{11} E(\tfrac{3}{2}h). \tag{3.5}$$

Sei nun $t < 1$ vorgegeben. Wir wählen n so, dass die Beziehungen

$$\tfrac{1}{3}t < h = 2^{-n} \leqq \tfrac{2}{3}t$$

erfüllt sind. Dann folgt aus (3.5) wegen der Monotonie von ω und E

$$\omega_r(f, t/6r)_p \leqq c_{11} E(t)$$

und daher auch

$$\omega_r(f, t)_p \leqq c_{11}(6r)^r E(t), \tag{3.6}$$

womit (3.2) gezeigt ist.

Allgemein können wir die Normen in (3.4) in folgender Weise abschätzen. Wir verwenden die Darstellung

$$x_i = x_{i\cdot n-1} + \sum_{1}^{n-1} (x_{i\cdot\nu-1} - x_{i\cdot\nu})$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
||x_i^{(r)}||_p &\leqq ||x_{i\cdot n-1}^{(r)}||_p + \sum_{1}^{n-1} ||x_{i\cdot\nu-1}^{(r)} - x_{i\cdot\nu}^{(r)}||_p \\
&\leqq c_2^r \underline{\pi}_{i\cdot n-1}^{-r} ||x_{i\cdot n-1}||_p + c_2^r \sum_{1}^{n-1} \underline{\pi}_{i\cdot\nu-1}^{-r} ||x_{i\cdot\nu-1} - x_{i\cdot\nu}||_p \\
&\leqq 4^r c_2^r \{2||f||_p + \sum_{1}^{n-1} 2^{r(n-\nu+1)} \cdot 2E(2^{\nu-n+1})\} \\
&\leqq 2^{2r+1} c_2^r \{2||f||_p + \sum_{1}^{n-2} 2^{r\nu} E(2^{-\nu})\}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $E(t) \leqq ||f||_p$ und damit auch $||x_{i\cdot n-1}|| \leqq 2||f||_p$ berücksichtigt. Wegen der Monotonie von E ist bei $r > 0$

$$\sum_{1}^{n-2} 2^{r\nu} E(2^{-\nu}) \leqq \frac{r}{1-2^{-r}} \int_{2h}^{1} t^{-r-1} E(t)dt.$$

Es gilt somit

$$||x_i^{(r)}||_p \leqq c_{12} \left\{ ||f||_p + \int_{\frac{3}{2}h}^{1} t^{-r-1} E(t)dt \right\},$$

und daher nach (3.4) für alle h der Gestalt 2^{-n}

$$\omega_r(f, h/2r)_p \leqq c_{13} \left\{ E(\tfrac{3}{2}h) + (\tfrac{3}{2}h)^r \left[||f||_p + \int_{\frac{3}{2}h}^{1} t^{-r-1} E(t)dt \right] \right\}. \tag{3.7}$$

Der Übergang von (3.7) zu (3.1) erfolgt wie der von (3.5) zu (3.2).

Aus Satz 1 können wir speziell folgern

ZUSATZ 1.2. *Gilt für eine Funktion $f \in L_p$*

$$E_p(h, f, \mathfrak{P}) = 0(h^\alpha),$$

so erfüllt der r-te Stetigkeitsmodul

$$\omega_r(f, h)_p = \begin{cases} 0(h^r) & r < \alpha \\ 0(h^r|\ln h| & r = \alpha \\ 0(h^\alpha) & r > \alpha. \end{cases}$$

Im Falle $r < \alpha$ könnte daraus mit Hilfe von Sätzen der reellen Analysis auf die Existenz der r-ten Ableitung und $f^{(r)} \in L_p$ geschlossen werden. Da sich diese Aussage zusammen mit Abschätzungen der Approximierbarkeit durch die entsprechende Ableitung der Spline-Funktionen im nächsten Paragraphen direkt ergibt, gehen wir hier nicht näher darauf ein.

4

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, inwieweit für ein $f \in L_p$ aus dem Verhalten von $E_p(h, f, \mathfrak{P})$ auf $f \in L_q$ für Werte $q \neq p$ bzw. $f' \in L_p$ usw. und auf die entsprechenden Approximationsmasse geschlossen werden kann. Zunächst ist

$$E_q(h, f, \mathfrak{P}) \leqq E_p(h, f, \mathfrak{P}) \qquad \text{bei } 1 \leqq q \leqq p$$

offensichtlich. Interessant ist erst der Fall $q > p$. Hier gilt

SATZ 2. *Es sei $E_p(h) = E_p(h, f, \mathfrak{P})$ das Approximationsmass einer Funktion $f \in L_p$. Existiert für ein $\alpha > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 t^{-\alpha-1} E_p(t) dt, \tag{4.1}$$

so gilt für jedes q mit $q^{-1} \geqq p^{-1} - \alpha$ auch $f \in L_q$, und es ist bei $\varepsilon > 0$

$$E_q(h, f, \mathfrak{P}) \leqq c_{14}(p, q, \varepsilon) \int_0^{(1+\varepsilon)h} t^{-\alpha-1} E_p(t) dt. \tag{4.2}$$

Ausser $f \in L_q$ ist zu zeigen, dass zu jeder Unterteilung π mit $\bar{\pi} \leqq h$ ein $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ existiert, so dass $||f - x||_q$ die Schranke in (4.2) nicht übersteigt. Da die Unterteilung π keinen weiteren Bedingungen als $\bar{\pi} \leqq h$ unterliegt, müssen wir eine Hilfskonstruktion benützen, die das Verhältnis $\underline{\pi}/\bar{\pi}$ nach unten beschränkt. Nach Wahl eines $\kappa > 0$, das später mit dem ε in (4.2) gekoppelt wird, gehen wir von einer gegebenen Unterteilung π durch Vergröberung zu einer solchen Teilung π_0 über, die

$$\kappa h \leqq \underline{\pi}_0 \leqq \bar{\pi}_0 \leqq (1+2\kappa)h$$

erfüllt. Dazu legen wir gegebenenfalls jeweils benachbarte Intervalle so lange zusammen, bis die Breite κh nicht unterschritten wird. Beginnend am linken Rand ist die maximale Breite $(1+\kappa)h$, allerdings kann das letzte Intervall übrigbleiben, so dass die obere Schranke $(1+2\kappa)h$ sich ergibt. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{P}(\pi_0) \subset \mathfrak{P}(\pi)$. Zum Nachweis von (4.2) wird es genügen, nur Funktionen aus $\mathfrak{P}(\pi_0)$ heranzuziehen.

Weiterhin betrachten wir die Folge $\{\pi_\nu\}$, die aus π_0 durch fortgesetzte Halbierung der Teilintervalle entsteht. Für sie gilt analog

$$\kappa h 2^{-\nu} \leqq \underline{\pi}_\nu \leqq \bar{\pi}_\nu \leqq (1+2\kappa)h2^{-\nu}.$$

$x_\nu \in \mathfrak{P}(\pi_\nu, \mathfrak{L})$ seien best-approximierend:

$$||f-x_\nu||_p \leqq E_p(\bar{\pi}_\nu).$$

Da $x_\nu \in L_q$ für jedes q gilt, braucht für $f \in L_q$ nur die Konvergenz in L_q der Reihe

$$\sum (x_{\nu+1}-x_\nu)$$

nachgewiesen zu werden. Es gilt dann auch

$$||x_0-f||_q \leqq \sum_0^\infty ||x_{\nu+1}-x_\nu||_q.$$

Die π_ν gehen durch Verfeinerung auseinander hervor, daher ist $x_{\nu+1}-x_\nu \in \mathfrak{P}(\pi_{\nu+1}, \mathfrak{L})$. Lemma 1 liefert daher bei $q > p$ und $q^{-1} \geqq p^{-1}-\alpha$:

$$\begin{aligned} ||x_{\nu+1}-x_\nu||_q &\leqq c_1(q, p)\underline{\pi}_\nu^{-\alpha}||x_{\nu+1}-x_\nu||_p \\ &\leqq c_{15}(q, p)\kappa^{-\alpha}h^{-\alpha}2^{\alpha\nu}E_p\big((1+2\kappa)h2^{-\nu}\big), \end{aligned}$$

und somit ist

$$\sum_0^\infty ||x_{\nu+1}-x_\nu||_q \leqq c_{16} \sum_0^\infty h^{-\alpha}2^{\alpha\nu}E_p\big((1+2\kappa)h2^{-\nu}\big).$$

In der üblichen Weise lässt sich diese Summe durch

$$c_{17}(\alpha, \kappa)\int_0^{(1+3\kappa)h} t^{-\alpha-1}E_p(t)dt$$

abschätzen. Bei $\kappa = \varepsilon/3$ ergibt sich so der Satz 2. Aus dem Beweisgang ist ersichtlich

Zusatz 2.1. *Die Voraussetzungen von Satz 2 seien erfüllt. $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ sei best-approximierend in L_p und es gelte für die*

Unterteilung $\bar{\pi} \leqq \kappa^{-1}\underline{\pi}$. *Dann gilt bei* $q^{-1} \geqq p^{-1}-\alpha$:

$$(4.3) \qquad \|f-x\|_q \leqq c_{14}(p, q, 3\kappa)\int_0^{(1+3\kappa)\bar{\pi}} t^{-\alpha-1} E_p(t)dt.$$

Im wesentlichen mit der gleichen Schlussweise können wir weiterhin zeigen

Satz 3. *Existiert mit* $E_p(h) = E_p(h, f, \mathfrak{P})$ *das Integral*

$$(4.4) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t^{-2} E_p(t)dt,$$

so besitzt f *fast überall eine Ableitung* $f' \in L_p$, *und es ist bei* $\varepsilon > 0$

$$(4.5) \qquad E_p(h, f', \mathfrak{P}') \leqq c_{18}(p, \alpha, \varepsilon)\int_0^{(1+\varepsilon)h} t^{-2} E_p(t)dt.$$

Die Konstruktion der π_ν und die Bedeutung der x_ν seien wie beim Beweis von Satz 2. Wir schalten jetzt aber die Glättungen (2.5) zwischen, um Unstetigkeiten zu umgehen. Zunächst haben wir nach Lemma 4

$$\|f-x_{\lambda\cdot\nu}\|_p \leqq (1+c_6(p, \lambda))E_p(\bar{\pi}_\nu).$$

Daher konvergiert $\{x_{\lambda\cdot\nu}\}$ in L_p ebenfalls gegen f. Weiter ist

$$\begin{aligned}\|x'_{\lambda\cdot\nu+1}-x'_{\lambda\cdot\nu}\|_p &\leqq \|x'_{\nu+1}-x'_\nu\|_p + c_7\{\underline{\pi}_{\nu+1}^{-1} E_p(\bar{\pi}_{\nu+1})+\underline{\pi}_\nu^{-1} E_p(\bar{\pi}_\nu)\}\\ &\leqq c_{19}\underline{\pi}_{\nu+1}^{-1} E_p(\bar{\pi}_\nu)\\ &\leqq c_{20}h^{-1}2^\nu E_p((1+2\kappa)h2^{-\nu}).\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Folge $\{x'_{\lambda\cdot\nu}\}$ in L_p, d.h. f ist differenzierbar und $f' \in L_p$. Die übliche Umformung führt auf

$$\|f-x'_{\lambda\cdot 0}\|_p \leqq c_{21}\int_0^{(1+3\kappa)h} t^{-2} E_p(t)dt.$$

Das Ersetzen von $x'_{\lambda\cdot 0}$ durch x'_0 bewirkt einen Fehler

$$\begin{aligned}\|x'_{\lambda\cdot 0}-x'_0\|_p &\leqq c_7(\kappa h)^{-1} E_p((1+2\kappa)h)\\ &\leqq c_7\kappa^{-2}(1+2\kappa)(1+3\kappa)\int_{(1+2\kappa)h}^{(1+3\kappa)h} t^{-2} E_p(t)dt,\end{aligned}$$

womit Satz 3 bewiesen ist. Wieder gilt

Zusatz 3.1. *Es sei* $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ *best-approximierend in* L_p. *Der Fehler* $\|f'-x'\|_p$ *übersteigt die Schranke* (4.5) *nicht, wenn für die Unterteilung* $\bar{\pi} \leqq 3\underline{\pi}/\varepsilon$ *gilt.*

In Erweiterung zu Satz 3 lässt sich zeigen

Zusatz 3.2. *Existiert*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} t^{-r-1}E_p(t)dt \tag{4.6}$$

so ist $f^{(r)} \in L_p$ *und*

$$E_p(h, f^{(r)}, \mathfrak{P}^{(r)}) \leqq c_{22}(p, r, \varepsilon)\int_0^{(1+\varepsilon)h} t^{-r-1}E_p(t)dt. \tag{4.7}$$

Darüber hinaus ist auch $\|f^{(r)}-x^{(r)}\|_p$ *durch die rechte Seite in* (4.7) *beschränkt, wenn* $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ *best-approximierend in* L_p *ist und* $\bar{\pi} \leqq \underline{\pi}/\kappa$, $(1+3\kappa)^r \leqq 1+\varepsilon$ *gilt.*

Für $r = 1$ handelt es sich um Satz 3. Bei $r > 1$ existiert jedenfalls $\int t^{-2}E$, d.h. es gilt $f' \in L_p$. Sei nun $f^{(\nu)} \in L_p$ und

$$E_p(h, f^{(\nu)}, \mathfrak{P}^{(\nu)}) \leqq c_{23}\int_0^{(1+3\kappa)^\nu h} t^{-\nu-1}E_p(t)dt \tag{4.8}$$

für ein ν mit $1 \leqq \nu < r$ bewiesen. Wir wollen $f^{(\nu+1)} \in L_p$ und eine (4.8) entsprechende Beziehung für $\nu+1$ zeigen. Dazu setzen wir

$$g(t) = \int_0^t \tau^{-\nu-2}E_p(\tau)d\tau,$$

nach (4.6) ist $g(0) = 0$. Für $f^{(\nu+1)} \in L_p$ müssen wir nach Satz 3 zeigen, dass

$$\int_{\varepsilon}^{1} t^{-2}E_p(t, f^{(\nu)}, \mathfrak{P}^{(\nu)})dt \leqq c_{23}\int_{\varepsilon}^{1} t^{-2}dt\int_0^{mt} \tau g'(\tau)d\tau$$

existiert $\big(m = (1+3\kappa)^\nu\big)$. Durch partielle Integration lässt sich für das rechts stehende Integral die Schranke $(1+m)g(m)$ finden. Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_0^{(1+3\kappa)h} t^{-2}E_p(t, f^{(\nu)}, \mathfrak{P}^{(\nu)})dt &\leqq c_{23}\int_0^{(1+3\kappa)h} t^{-2}dt\int_0^{mt} \tau g'(\tau)d\tau\\ &\leqq c_{23}g\big((1+3\kappa)^{\nu+1}h\big).\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich so der Zusatz. Durch Spezialisierung finden wir

Zusatz 3.3. *Es sei* $E_p(h, f, \mathfrak{P}) = 0(h^\alpha)$. *Dann besitzt* f *Ableitungen bis zur Ordnung* $r_0 < \alpha$, *und es gilt für die Approximationsmasse* $(\nu \leqq r_0)$

$$E_p(h, f^{(\nu)}, \mathfrak{P}^{(\nu)}) = 0(h^{\alpha-\nu}).$$

Werden nur solche Unterteilungen herangezogen, die $\bar{\pi} \leqq \underline{\pi}/\kappa$

erfüllen, so gilt mit den in L_p best-approximierenden Funktionen $x \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$

$$||f^{(\nu)} - x^{(\nu)}||_p = 0(\bar{\pi}^{\alpha-\nu}).$$

5

Im Folgenden wollen wir eine Anwendung der vorangehenden Sätze besprechen. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} & Ly = -(py')' + qy = f(s) \qquad s \in I \\ (5.1) \qquad & y(0) = y(1) = 0 \\ & (p \geqq \underline{p} > 0, \, q \geqq 0). \end{aligned}$$

Beim Ritzschen Verfahren mit Spline-Funktionen als Ansatzfunktionen wird zu einer Unterteilung π die Näherung $x(\pi) \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ als Minimallösung in $\mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ des Variationsproblems

$$\int_I (px'^2 + qx^2)ds - 2\int_I fxds \Rightarrow \text{Min !}$$

bestimmt. Dann ergibt sich unmittelbar für den Fehler $x(\pi) - y$ die Abschätzung [1]

$$\begin{aligned} ||y' - x'||_2 &\leqq c_{24} \inf_{\xi \in \mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})} ||y' - \xi'||_2 \\ &\leqq c_{24} E_2(\bar{\pi}, y', \mathfrak{P}'). \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen *i.)* $p^{(n+1)}$, $q^{(n)}$ beschränkt und messbar in I und ii) $f^{(n)} \in L_2(I)$ sichern $y^{(n+2)} \in L_2(I)$ für die Lösung von (5.1). Nach Birkhoff-Schultz-Varga [9] kann daher bei Verwenden geeigneter polynomialer Spline-Funktionen

$$(5.2) \qquad ||y' - x'||_2 \leqq c_{25} \bar{\pi}^{n+1} ||f||_n^*$$

gezeigt werden, wobei rechts die Sobolev-Norm in $W_2^n(I)$ zu nehmen ist.

Hinsichtlich des Fehlers in schwächeren Normen konnte in [29]

$$(5.3) \qquad ||y - x||_2 \leqq c_{26} \bar{\pi}^{n+2} ||f||_n^*$$

$$(5.4) \qquad ||y - x||_\infty \leqq c_{27} \bar{\pi}^{n+\frac{3}{2}} ||f||_n^*$$

gefolgert werden. Während sich (5.3) mit Hilfe eines allgemeinen Satzes beim Ritzschen Verfahren aus (5.3) ergab (vgl. [28]),

[1] Vgl. dazu z.B. Mihlin [25], [26].

wurde (5.4) mit Hilfe der für alle die Randbedingungen (5.1_2) erfüllenden Funktionen gültigen Beziehung

$$||z||_\infty \leqq 2\{||z||_2||z'||_2\}^{\frac{1}{2}}$$

gewonnen. Der Satz 2 liefert mit $p = 2$ und $q = \infty$ dieses Resultat allein aus (5.3) bei der Annahme $\bar{\pi} \leqq \underline{\pi}/\kappa$ mit festem $\kappa > 0$.

Von besonderer Bedeutung ist die Frage, ob $Lx(\pi)$ bei $\bar{\pi} \to 0$ gegen f konvergiert. Für die Konvergenz in L_2 zu jedem $f \in L_2$ ist dafür die sogenannte Polskii-Bedingung (vgl. Polskii [32], [33]) notwendig und hinreichend. Im vorliegenden Fall wäre

$$\varliminf_{\bar{\pi}\to 0} \inf_{x \in \mathfrak{P}(\pi)} \frac{||P_\pi Lx||_2}{||Lx||_2} > 0 \tag{5.5}$$

nachzuweisen, wobei P_π die Orthogonalprojektion in L_2 auf $\mathfrak{P}(\pi, \mathfrak{L})$ angibt. Unseres Wissens ist die Gültigkeit von (5.5) bislang in der Literatur nur für eine Klasse von Ansatzfunktionen nachgewiesen worden, wenn nämlich die approximierenden Teilräume von den Eigenelementen eines zu L ähnlichen Operators erzeugt werden, vgl. dazu Mihlin [24], v. Plehwe [31]. Zwar konnten wir für die quadratischen und stetig differenzierbaren Spline-Funktionen den Beweis führen. Da dieses Ergebnis aber sehr speziell ist, unterblieb bislang die Publikation.

Der vorliegende Satz 3 umgeht nun diese Schwierigkeiten, denn wir erhalten unmittelbar

Satz 4. *Die Lösung y des Randwertproblems* (5.1) *lasse sich gemäss* (5.2) *approximieren. Dann gilt $y^{(n+1)} \in L_2$. Werden nur Unterteilungen mit $\bar{\pi} \leqq \underline{\pi}/\kappa$ $(\kappa > 0)$ verwendet, so gilt weiterhin mit den Ritz-Näherungen $x(\pi)$ fur $\nu \leqq n+1$*

$$||y^{(\nu)} - x^{(\nu)}||_2 \leqq c_\nu \bar{\pi}^{n-\nu+2}||f||_n^*$$
$$||y^{(\nu)} - x^{(\nu)}||_\infty \leqq c'_\nu \bar{\pi}^{n-\nu+\frac{3}{2}}||f||_n^*.$$

Der Satz beinhaltet insbesondere, dass bei $n \geqq 1$, d.h. $f' \in L_2$ und geeigneten Spline-Funktionen, $Lx(\pi) \to f$ in L_2 bzw. L_∞ gilt und zwar mit der Ordnung n bzw. $n - \frac{1}{2}$.

LITERATUR

J. H. Ahlberg and E. N. Nilson

[1] Convergence properties of the spline fit. SIAM J. Appl. Math. 11 (1963), 95—104

J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh

[2] Best approximation and convergence properties for higher order spline approximation. J. Math. Mech. 14 (1965), 231—244.

J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh

[3] Convergence properties of generalized splines. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 54 (1965), 344—350.

J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh

[4] The theory of splines and their applications. Academic Press, New York 1967.

G. Birkhoff

[5] Local spline approximation by moments. J. Math. Mech. 16 (1967), 987—990.

G. Birkhoff and C. de Boor

[6] Error bounds for spline interpolation. J. Math. Mech. 13 (1964), 827—836.

G. Birkhoff and C. de Boor

[7] Piecewise polynomial interpolation and approximation. Proc. of the Symp. on appr. of functions, Michigan 1964, Elsevier Publ. Comp., Amsterdam 1965.

G. Birkhoff, C. de Boor, B. Swartz and B. Wendroff

[8] Rayleigh-Ritz approximation by piecewise cubic polynomials. SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 188—203.

G. Birkhoff, M. H. Schultz, and R. S. Varga

[9] Piecewise hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations. Numer. Math. 11 (1968), 232—256.

C. de Boor

[10] Best approximation properties of spline functions of odd degree. J. Math. Mech. 12 (1963), 747—749.

C. de Boor

[11] On local spline approximation by moments. J. of Math. and Mech. 17 (1968), 729—735.

P. G. Ciarlet, M. H. Schultz and R. S. Varga

[12] Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. I. One Dimensional Problem. Numer. Math. 9 (1967), 394—430.

S. Karlin and Z. Ziegler

[13] Tschebyscheffian spline functions. SIAM J. Num. Anal. 3 (1966), 514—543.

V. N. Malozemov

[14] On polygonal interpolation. Mat. Zametki 1 (1967), 537—540.

M. Marsden, and I. J. Schoenberg

[15] On variation diminishing spline approximation methods. Mathematica (Cluj) 8 (31) (1966), 61—82.

A. Meir and A. Sharma

[16] Simultaneous approximation of a function and its derivatives. — SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 553—563.

H. Rutishauser

[17] Bemerkungen zur glatten Interpolation. ZAMP 11 (1960), 508—513.

I. J. Schoenberg
[18] Spline interpolation and the higher derivatives. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51 (1964), 24—28.

M. H. Schultz and R. S. Varga
[19] L-Splines. Numer. Math. 10 (1967), 345—369.

A. Sharma and A. Meir
[20] Degree of approximation of spline interpolation. J. Math. Mech. 15 (1966), 759—767.

Ju. N. Subbotin
[21] Piecewise-polynomial interpolation (russ.). Mat. Zametki 1 (1967), 63—70.

R. S. Varga
[22] Hermite interpolation-type Ritz methods for two-point boundary value problems. Numerical Solution of Partial Diff. Equations (Proc. Sympos. Univ. Maryland, 1965), 365—373. Academic Press, New York, 1966.

G. G. Lorentz
[23] Approximation of functions. Holt, Rinehart and Winston, New York-Chicago-San Francisco-Toronto-London 1966.

S. G. Mihlin
[24] Über die Ritzsche Methode. Doklady Akademia Nauk SSSR, 106 (1956), 391—394 (russ.).

S. G. Mihlin
[25] Variationsmethoden der mathematischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin, 1962.

S. G. Mihlin
[26] Numerische Realisierung von Variationsmethoden. Nauka, Moskau 1966 (russ.).

I. P. Natanson
[27] Konstruktive Funktionentheorie. Akademie-Verlag, Berlin, 1955.

J. Nitsche
[28] Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens. Numer. Math. 11 (1968), 346—348.

J. Nitsche
[29] Verfahren von Ritz und Spline-Interpolation bei Sturm-Liouville-Randwertproblemen. Num. Math. 13 (1969), 260—265.

J. Nitsche
[30] Sätze vom Jackson-Bernstein-Typ fur die Approximation mit Spline-Funktionen. Math. Zeitschr. 109 (1969), 97—106.

A. v. Plehwe
[31] Eine Bemerkung zu einer Arbeit von A. V. Dzhishkariani. ZAMM 48 (1968), 422—423.

N. I. Polskii
[32] Über die Konvergenz gewisser Näherungsverfahren der Analysis. Ukr. Mat. J., Kiew 7 (1955), 56—70 (Russ.).

N. I. Polskii

[33] Projective methods in applied mathematics. Soviet Math. Doklady 3 (1962), 488—492.

A. F. Timan

[34] Theory of approximation of functions of a real variable. Fizmatgiz, Moskau 1960 (engl. Übersetzung Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris 1963).

(Oblatum 23–12–68)

78 Freiburg, Hebelstraße 40
Institut für Angewandte Mathematik