

COMPOSITIO MATHEMATICA

ULRICH FELGNER

Untersuchungen über das Zornsche Lemma

Compositio Mathematica, tome 18, n° 1-2 (1967), p. 170-180

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1967__18_1-2_170_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Untersuchungen über das Zornsche Lemma

von

Ulrich Felgner

Unter allen auf dem Auswahlaxiom beruhenden transfiniten Schlussweisen hat sich diejenige des ZORNschen Lemmas als die eleganteste Formulierung erwiesen. Es ist einfach zu handhaben und man hat nicht nötig, wie im Wohlordnungssatz, der Grundmenge eine fremde Ordnungsstruktur, wie die der Wohlordnung, aufzuprägen. In der Analysis kann es zwar nicht das Auswahlaxiom verdrängen, in der Algebra aber hat es inzwischen eine überragende Stellung eingenommen.

Die ursprüngliche Fassung des ZORNschen Lemmas ([5], S. 667—670):

(Z) *Jede induktiv geordnete¹ Menge \mathfrak{M} besitzt maximale Elemente*

kann auf vielfältige Weise verallgemeinert werden; ist nämlich $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ ein induktiv geordnetes Mengensystem, dann kann man \mathfrak{M} durch eine beliebige teilgeordnete Menge (M, \leq) ersetzen², Ketten durch wohlgeordnete Teilmengen und obere Grenzen schliesslich durch obere Schranken. H. Kneser (in [2]) und T. Szele (in [4]) gaben eine solche Verallgemeinerung:

(K) *Ist in einer teilgeordneten Menge (M, \leq) jede wohlgeordnete Teilmenge (T, \leq) nach oben beschränkt, dann besitzt M maximale Elemente.*

Es ist bekannt, dass beide, (Z) und (K), untereinander und dem Auswahlaxiom (das im folgenden mit (A) bezeichnet sei) äquivalent sind. Da (K) die grösstmögliche Verallgemeinerung von (Z) ist — wie mir scheint —, kann man fragen, ob nicht umgekehrt (Z) noch weiter eingeschränkt werden kann, ohne dass die

¹ Eine Familie \mathfrak{M} von Mengen heisst (nach BOURBAKI) *induktiv geordnet*, wenn die Vereinigungsmenge jeder nichtleeren Kette $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M}$ Element von \mathfrak{M} ist.

² Diese Verallgemeinerung ist allerdings nur begrifflich, da die Inklusionsrelation \subseteq unter den Begriff der Ordnungsrelation fällt, aber jede teilgeordnete Menge (M, \leq) durch die Zuordnung $a \in M \rightarrow \{x \in M; x \leq a\}$ zu einer Mengenordnung isomorph ist.

Äquivalenz mit (A) dabei verloren geht. Für die Anwendungen ist eine solche Fragestellung uninteressant, axiomatisch gesehen ist sie aber interessant, da sie die „Variationsbreite“ eines Axioms angiebt.

Zunächst werde ich eine solche Einschränkung angeben und im Laufe der Untersuchungen noch ein paar weitere Sätze aufstellen, von denen ich die Äquivalenz mit (A) zeigen werde. Diese Sätze kann man erhalten, wenn man die verschiedenen Beweismöglichkeiten für $(Z) \Rightarrow (K)$ etwas genauer untersucht. Die bisher bekannten äquivalenten Formulierungen von (A) lassen sich gliedern in Maximalprinzip, Wohlordenbarkeitsaussagen, Trichotomieaussagen, Kardinalzahlformen und algebraische Formen (vergl. [3]). Die mit (A) äquivalenten Formulierungen dieser Note sind Konfinalitätsprinzip, und da solche anscheinend bisher unbeachtet geblieben sind, mag denn diese Arbeit etwas interessant sein.

1

Zunächst seien einige Begriffe, auf die ich mich stützen werde, definiert, die in der Literatur nicht einheitlich sind.

Eine Menge $M \neq \emptyset$ heisst *teilgeordnet*, wenn in ihr eine transitive, antireflexive und antisymmetrische Relation, meist mit $<$ bezeichnet, erklärt ist. Wenn ausserdem je zwei Elemente $a \neq b$ von M stets bezüglich $<$ vergleichbar sind, dann heisst (M, \leq) eine *Kette* (oder *vollgeordnete Menge*). Ein Element m einer teilgeordneten Menge (M, \leq) heisst *maximal* (in M), wenn es kein $n \in M$ mit $m < n$ gibt. Ist $\emptyset \neq T \subseteq M$, dann heisst ein Element $s \in M$ *obere Schranke* von T , wenn $t \leq s \forall t \in T$ gilt. Falls eine obere Schranke $g \in M$ existiert, so dass $g \leq s$ für jede obere Schranke s von T erfüllt ist, dann soll g *obere Grenze* von T heissen. Eine teilgeordnete Menge (M, \leq) heisst *gerichtet* (genauer: *nach oben gerichtet*) oder *gefiltert*, wenn in ihr jede endliche Teilmenge nach oben beschränkt ist.

DEFINITION: Eine nichtleere Teilmenge N einer gerichteten Menge (M, \leq) heisst *konfinal* in M , falls es zu jedem $x \in M$ ein $y \in N$ mit $x \leq y$ gibt.

Mit anderen Worten: $N \neq \emptyset$ ist genau dann konfinal in M , wenn N mit jedem Hauptende $[m, \rightarrow [= \{x \in M; m \leq x\}$ nichtleeren Durchschnitt hat. Jede konfinale Teilmenge einer gerichteten Menge ist offenbar wieder eine gerichtete Menge.

In dieser Form lässt sich der Begriff der Konfinalität nicht auf

beliebige teilgeordnete Mengen übertragen. Da aber für Ketten die Definition mit der folgenden übereinstimmt:

Eine nichtleere Teilmenge N einer Kette (K, \leq) heisst konfinal in K , wenn es kein $s \in K$ mit $n < s \forall n \in N$ gibt.³

(Äquivalenzbeweis durch Kontraposition!), kann man, ausgehend von dieser Definition, so etwas wie Konfinalität in beliebigen teilgeordneten Mengen erklären:

DEFINITION: Eine nichtleere Teilmenge S einer teilgeordneten Menge (M, \leq) heisst *quasi-konfinal* in M , wenn S eine Kette (bezüglich \leq) ist und wenn kein $m \in M$ mit $s < m \forall s \in S$ existiert.⁴

Wenn (M, \leq) eine teilgeordnete Menge ist, dann heisst $G_{\leq} = \{(a, b); a, b \in M \text{ \& } a \leq b\}$ der Graph der Relation \leq . Damit definieren wir schliesslich:

Wenn G der Graph der teilgeordneten Menge (M, \leq) ist, dann heisst (M, G) eine *verästelte Menge*, wenn alle gerichteten Teilmengen (von M) Ketten sind.

Es wurde dabei der Name „verästelt“ gewählt, da man das Hasse-Diagramm einer solchen Menge anschaulich etwa wie folgt beschreiben kann: es besteht aus sich verzweigenden Ketten, von denen keine zwei wieder zusammenwachsen.

2

In den Beweisführungen einer ganzen Reihe von Sätzen, in denen das ZORNsche Lemma angewandt wird, kann man anstelle des Nachweises, dass jede Kette von Teilmengen eine obere Grenze (meist die Vereinigungsmenge aller Kettenglieder) hat, sogar beweisen, dass jede gerichtete Familie von Teilmengen nach oben begrenzt ist (nämlich wieder durch die Vereinigungsmenge). Es liegt daher nahe zu fragen, ob die folgende Einschränkung von (Z):

³ [1] S. 8.

⁴ Es sei darauf hingewiesen, dass eine quasi-konfinale Teilmenge einer gerichteten Menge nicht konfinal zu sein braucht. Die Menge der Zahlenpaare $\{(n, m); n, m \in \mathbb{Z}\}$, die durch

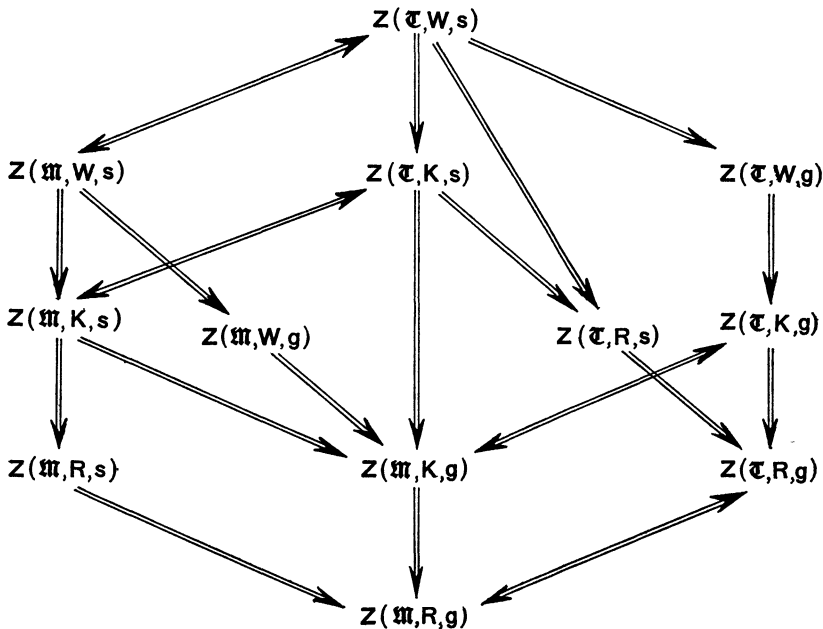
$$(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2) \Leftrightarrow (n_2 \leq n_1 \text{ \& } m_1 \leq m_2)$$

zu einer gerichteten Menge wird, besitzt beispielsweise $\{(0, n); n \in \mathbb{N}\}$ als quasi-konfinale Teilmenge, die aber nicht konfinal ist. Für Ketten allerdings fallen die Begriffe „konfinal“ und „quasi-konfinal“ zusammen.

(Z^*) Ist \mathfrak{M} eine Familie von Mengen und hat jede bezüglich der Inklusionsrelation \subseteq gerichtete Teilmenge \mathfrak{N} von \mathfrak{M} die Vereinigungsmenge $\bigcup \{E; E \in \mathfrak{N}\}$ als obere Grenze in \mathfrak{M} , dann besitzt \mathfrak{M} maximale Elemente

mit dem Auswahlaxiom (A) äquivalent ist. Diese Frage wird im Folgenden bejaht.

Ein Vergleich von (K) und (Z^*) lehrt, dass man auch eine Fülle von Sätzen (S) aussprechen kann, die gewissermassen „zwischen“ (K) und (Z^*) liegen, in dem Sinne, dass $(K) \Rightarrow (S) \Rightarrow (Z^*)$ gilt. Führt man nämlich die folgenden Bezeichnungen ein: \mathfrak{M} für „Familie von Mengen“, K für „Ketten“, s für „obere Schranken“, g für „obere Grenzen“, \mathfrak{L} für „teilgeordnete“, R für „gerichtete“ und W für „wohlgeordnete“ Mengen, dann soll $Z(x, y, z)$ diejenige Aussage darstellen, die aus (Z) dadurch hervorgeht, dass man den Begriff „Familie von Teilmengen“ durch x , „Kette“ durch y und „obere Grenze“ durch z ersetzt. Das Lemma von Kneser und Szele (K) hat dann also die Form $Z(\mathfrak{L}, W, s)$, (Z^*) die Form $Z(\mathfrak{M}, R, g)$ und (Z) selber die Form $Z(\mathfrak{M}, K, g)$. Dazu muss man allerdings noch voraussetzen, dass g im Falle $Z(\mathfrak{M}, y, g)$ nicht nur obere Grenze in \mathfrak{M} ist, sondern auch mengentheoretische Vereinigung.



Da jede wohlgeordnete Menge eine Kette und jede Kette eine gerichtete Menge ist, jede obere Grenze eine obere Schranke und jede beliebige teilgeordnete Menge (M, \leq) zu einem Mengensystem $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ isomorph ist (siehe Fussnote 2), gelten offensichtlich die folgenden Implikationen, die man am kürzesten und deutlichsten durch das vorstehende Diagramm darstellen kann. (Der Übersichtlichkeit halber sind nicht alle möglichen Implikationspfeile eingezeichnet worden).

Um die Äquivalenz aller dieser Sätze untereinander zu beweisen, braucht man also nur noch $(Z^*) \Rightarrow (K)$, das heisst: $Z(\mathfrak{M}, R, g) \Rightarrow Z(\mathfrak{X}, W, s)$, zu zeigen.

Beweis für $(Z^) \Rightarrow (K)$:*

Sei (M, \leq) eine teilgeordnete Menge und sei \mathcal{W} die Menge aller (bezüglich derselben Ordnungsrelation \leq) wohlgeordneten Teilmengen von M . Wenn $M \neq \emptyset$, so auch $\mathcal{W} \neq \emptyset$, denn $M \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists m \in M$; dann ist aber $\{m\} \in \mathcal{W}$. In \mathcal{W} wird eine Ordnungsrelation \trianglelefteq wie folgt definiert:

$$(*) \quad W_1 \trianglelefteq W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. W_1 \subseteq W_2 \\ 2. (x \in W_1, x \geq y \in W_2) \Rightarrow y \in W_1. \end{cases}$$

(wenn W_1 also ein Anfangsstück von W_2 ist). $(\mathcal{W}, \trianglelefteq)$ ist eine verästelte Menge. Eine gerichtete Menge \mathcal{F} von \mathcal{W} ist also eine Kette und hat daher die Vereinigungsmenge

$$V = \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W$$

als obere Grenze. Nach (Z^*) besitzt \mathcal{W} ein maximales Element T . Eine obere Schranke von T ist aber ein maximales Element von M , Q.E.D.

Diesen Beweis kann man natürlich auch für eine *direkte* Ableitung des Lemmas (K) aus dem ZORNschen Lemma verwenden. Eine solche Ableitung (also ohne den Umweg über den Wohlordnungssatz oder das Auswahlaxiom) ist meines Wissens noch an keiner Stelle gegeben worden. Kneser gibt in [2] beispielsweise für $(Z) \Rightarrow (K)$ folgenden Beweis an: zunächst wird aus (Z) das folgende Konfinalitätsprinzip abgeleitet:

(F) Jede Kette hat eine konfinale wohlgeordnete Teilmenge

Wenn jetzt (M, \leq) eine teilgeordnete Menge ist, in der jede wohlgeordnete Kette beschränkt ist, dann kann man jeder Kette von M eine konfinale wohlgeordnete Teilmenge zuordnen und

weiss daher, dass auch alle Ketten in M beschränkt sind, weshalb M nach (Z) ein maximales Element hat. Bei dieser Zuordnung braucht man aber das Auswahlaxiom (A) , weshalb der Beweis nicht direkt ist.

Der Satz (F) „erklärt“ warum es bei Fragen rund um das ZORNsche Lemma gleichgültig ist, ob man mit Ketten oder mit wohlgeordneten Mengen arbeitet. Aus dem Zornschen Lemma kann man zwar den folgenden Satz:

(M) Wenn G der Graph einer teilgeordneten Menge M ist, dann gibt es eine Teilmenge $G_1 \neq \emptyset$ von G , die maximal bezüglich der Eigenschaft ist, dass (M, G_1) verästelt ist.

ableiten, aber da ein maximales Element von (M, G_1) nicht notwendig maximal in (M, G) ist, „erklärt“ dieser Satz nicht, warum man im ZORNschen Lemma von Ketten zu gerichteten Mengen übergehen kann. Dies geschieht vielmehr entweder durch das Hausdorffsche Lemma, nach dem jede gerichtete Teilmenge eine maximale Kette enthält, oder einfacher durch den folgenden, ohne Auswahlaxiom beweisbaren Satz:

Zu jeder teilgeordneten Menge (M, \leq) gibt es eine verästelte Menge $(\mathcal{K}, \trianglelefteq)$, in der jede nichtleere Kette eine obere Grenze besitzt, derart, dass die minimalen Elemente von $(\mathcal{K}, \trianglelefteq)$ in eindeutiger Weise den Elementen von M entsprechen. Unter dieser Abbildung werden genau diejenigen Elemente von \mathcal{K} , die zugleich maximal als auch minimal (bezüglich \trianglelefteq) sind, auf die (bezüglich \leq) maximalen Elemente von M abgebildet.

Zum Beweis des Satzes kann man die Menge \mathcal{W} aller wohlgeordneten Teilmengen (W, \leq) von (M, \leq) oder die Menge \mathcal{K} aller Ketten (K, \leq) von (M, \leq) nehmen. Durch die oben genannte Ordnungsrelation $(*)$ werden beide Mengen zu verästelten Mengen mit den verlangten Eigenschaften, aufgrund der trivialen Zuordenbarkeit $M \ni m \leftrightarrow \{m\} \in \mathcal{W}$ (bzw. $\{m\} \in \mathcal{K}$).

3

Die im Beweis von $(Z^*) \Rightarrow (K)$ vorkommende Menge T ist eine quasi-konfinale Menge von (M, \leq) . Es wird nun behauptet, dass schon die Existenz quasi-konfinaler Teilmengen in teilgeordneten Mengen mit (Z) und damit mit (A) äquivalent ist:

(C_1) Jede teilgeordnete nichtleere Menge (M, \leq) besitzt quasi-konfinale Teilmengen.

(C₂) *Jede teilgeordnete nichtleere Menge (M, \leq) besitzt wohlgeordnete quasi-konfinale Teilmengen.*

Sei (H) das Hausdorffsche Lemma („Jede nichtleere teilgeordnete Menge besitzt maximale Ketten“⁵), dann ist $(H) \Rightarrow (C_1)$ offensichtlich. Umgekehrt zeigt man $(C_1) \Rightarrow (H)$ folgendermassen:

Beweis für $(C_1) \Rightarrow (H)$:

Sei (M, \leq) eine nichtleere teilgeordnete Menge und sei \mathcal{K} die Familie aller Ketten (K, \leq) aus (M, \leq) . Da (\mathcal{K}, \subseteq) teilgeordnet ist, besitzt \mathcal{K} nach (C_1) eine quasi-konfinale Teilmenge \mathfrak{K} . Dann ist aber $T = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$ eine maximale Kette in M , Q.E.D.

$(C_2) \Rightarrow (C_1) \Rightarrow (Z)$ ist offensichtlich. $(Z) \Rightarrow (C_2)$ lässt sich genauso beweisen, wie $(Z^*) \Rightarrow (K)$. Damit ist die Äquivalenz nachgewiesen.

(C_2) entsteht aus (C_1) ebenso wie (K) aus (Z) indem man das Wort „Kette“ durch „wohlgeordnete Teilmenge“ ersetzt. Diese Ersetzung lässt das Hausdorffsche Lemma natürlich nicht zu, aber ein Vergleich von (H) mit (C_2) lehrt, dass Quasi-konfinalität der passende äquivalente Begriff für Maximalität bei wohlgeordneten Teilmengen ist.

4

Der Übergang von Ketten zu gerichteten Mengen führte vom Zornschen Lemma zum Lemma (Z^*) . Im Falle des Hausdorffschen Lemmas führt dieser Übergang zu dem folgenden allgemeineren Satz:

(R) *Jede nichtleere teilgeordnete Menge (M, \leq) besitzt maximale gerichtete Teilmengen.*

Man kann zeigen, dass (R) mit (Z^*) , also auch mit (A) äquivalent ist:

Beweis für $(Z^) \Rightarrow (R)$:*

Sei (M, \leq) eine nichtleere teilgeordnete Menge und sei \mathcal{F} die Menge aller gerichteten Teilmengen (G, \leq) von (M, \leq) . Für $m \in M$ ist $\{m\}$ eine gerichtete Menge, so dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Sei nun (\mathcal{G}, \subseteq) eine (bezüglich der Inklusionsrelation \subseteq) gerichtete Teilmenge von (\mathcal{F}, \subseteq) . Seien

$$x, y \in \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = V$$

⁵ [1] S. 140

Es gibt also $G_1 \in \mathcal{G}$ und $G_2 \in \mathcal{G}$ mit $x \in G_1$ und $y \in G_2$. Da \mathcal{G} gefiltert ist, gibt es ein G_3 mit $G_1 \subseteq G_3$ und $G_2 \subseteq G_3$. Wegen $G_3 \in \mathcal{F}$ haben x und y eine obere Schranke z in G_3 , also auch in V . Daher ist auch V gerichtet und ist obere Grenze von \mathcal{G} in \mathcal{F} . Nach (Z^*) besitzt \mathcal{F} maximale Elemente, Q.E.D.

Beweis für $(R) \Rightarrow (A)$:

Sei M eine nichtleere Menge und sei Φ die Menge aller einwertigen Funktionen φ , die auf Teilmengen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ definiert sind und $\varphi(V) \in V$ für alle diejenigen $\emptyset \neq V \subseteq M$ erfüllen, für die sie definiert sind. $\Phi \neq \emptyset$, denn jeder einelementigen Teilmenge $\{m\} \subseteq M$ kann man (effektiv) eine Auswahlfunktion μ_m dadurch zuordnen, indem man $\mu_m(\{m\}) = m$ setzt. Für $\varphi \in \Phi$ soll $\mathcal{D}(\varphi)$ den Definitionsbereich von φ bezeichnen ($\mathcal{D}(\varphi) \subseteq \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \forall \varphi \in \Phi$). Durch

$$\varphi \triangleleft \psi \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \mathcal{D}(\varphi) \subset \mathcal{D}(\psi) \\ 2. \varphi(V) = \psi(V) \forall V \in \mathcal{D}(\varphi) \end{cases}$$

wird Φ zu einer teilgeordneten Menge. Nach (R) besitzt (Φ, \triangleleft) eine maximale gerichtete Teilmenge \mathcal{R} . Dann ist aber

$$f = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{R}} \varphi$$

eine auf ganz $\mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ definierte Auswahlfunktion. In der Tat ist f eine eindeutige Funktion, da es zu $\varphi, \psi \in \mathcal{R}$ ein $\vartheta \in \mathcal{R}$ mit $\varphi \trianglelefteq \vartheta$ und $\psi \trianglelefteq \vartheta$ gibt, weshalb φ und ψ auf $\mathcal{D}(\varphi) \cap \mathcal{D}(\psi)$ übereinstimmen müssen. Wäre f für ein $\emptyset \neq A \subseteq M$ nicht erklärt, dann könnte man ein $a \in A$ auswählen und ein γ durch $\gamma(A) = a$ definieren ($\mathcal{D}(\gamma) = \{A\}$). Dann wäre aber $\mathcal{R} \cup \{\varphi \cup \gamma; \varphi \in \mathcal{R}\}$ eine grössere gerichtete Menge im Widerspruch zur Maximalität von \mathcal{R} . Daher $\mathcal{D}(f) = \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$, Q.E.D.

Vom Zusammenhang zwischen quasi-konfinalen und maximalen gerichteten Mengen in teilgeordneten Mengen handelt das folgende Lemma:

Jede quasi-konfinale Teilmenge T einer teilgeordneten Menge (M, \leq) kann in eine maximale gefilterte Teilmenge (G, \leq) von (M, \leq) eingebettet werden. Alle maximalen Ketten, die T enthalten, sind Teilmengen von G .

Der Beweis ist unter Verwendung von (Z) leicht zu führen.

Wenn F eine maximale gerichtete Menge in der teilgeordneten Menge (M, \leq) ist und K eine quasi-konfinale Teilmenge von F ,

dann ist K im allgemeinen nicht auch quasi-konfinal in M . Nimmt man nämlich das Beispiel von Fussnote ⁴ und fügt die Menge aller Paare $(-\omega, n)$ und (n, ω) hinzu, wo $n \in \mathbf{Z}$ und ω die kleinste transfiniten Limeszahl ist (also $-\omega < n < \omega \forall n \in \mathbf{Z}$), dann ist $\{(m, n); n, m \in \mathbf{Z}\}$ eine maximale gerichtete Teilmenge und $\{(0, n); n \in \mathbf{N}\}$ eine quasi-konfinale Teilmenge in ihr, die aber $(0, \omega)$ als echte obere Schranke hat. Wenn jedoch K sowohl quasi-konfinal als auch konfinal in F ist, dann ist K auch quasi-konfinal in M .

5

Im Abschnitt 2 war gezeigt worden, dass man $(Z) \Rightarrow (K)$ auf dem Umweg über (F) und (A) beweisen kann. Dabei kann man (A) vermeiden, wenn man (F) wie folgt verallgemeinert:

(C₃) Wenn $\mathfrak{K} = \{K_i; i \in I\}$ eine Familie von nichtleeren Ketten (K_i, \leq_i) ist, dann gibt es eine Funktion φ , die jedem K_i eindeutig eine in K_i konfinale wohlgeordnete Teilmenge V_i zuordnet. ⁶

Diese Aussage ist mit (A) äquivalent:

Beweis für $(A) \Rightarrow (C_3)$:

Nach (A) gibt es eine Auswahlfunktion ψ , die auf der Potenzmenge

$$\mathfrak{P}(\bigcup_{i \in I} K_i) \setminus \{\emptyset\}$$

definiert ist. Unter den wohlgeordneten Teilmengen eines jeden K_i werden nur die regulären betrachtet; dabei heisst eine nichtleere Teilmenge R_i von K_i *regulär*, falls:

1. R_i hinsichtlich der in K_i erklärten Ordnungsrelation \leq_i wohlgeordnet ist,

2. $\text{Min}(R_i) = \psi(K_i)$

3. $x \in R_i \Leftrightarrow \psi(R_i \langle x \rangle) = x$ wobei $R_i(a) = \{x \in R_i; x <_i a\}$ und $R_i \langle a \rangle = \{y \in K_i; y >_i x \forall x \in R_i(a)\}$ gesetzt worden ist.

Da $\{\psi(K_i)\}$ reguläre Menge ist, ist für jedes $i \in I$ die Menge \mathfrak{M}_i aller regulären Teilmengen von K_i nicht leer. Da die Vereinigungsmenge V_i aller regulären Teilmengen von K_i wieder regulär ist (vergl. Kneser [2] oder Szele [4]), ist

$$V_i = \bigcup_{R_i \in \mathfrak{M}_i} R_i$$

⁶ (C₃) hat folgendes Korollar: „Wenn in einer teilgeordneten Menge (M, \leq) alle wohlgeordneten Teilmengen (W, \leq) nach oben beschränkt sind, so sind es auch alle Ketten (K, \leq) .“ Dies Korollar impliziert sofort das Konfinalitätsprinzip (F).

die maximale reguläre Teilmenge von K_i . Angenommen, es gibt eine obere Schranke $s_i \in K_i$ von V_i . Dann ist aber s_i maximales Element von K_i und es gilt $s_i \in V_i$, denn angenommen:

$$\text{non } (s_i \text{ maximal \& } s_i \in V_i) \Leftrightarrow (\text{non } (s_i \text{ maximal}) \text{ oder } (s_i \notin V_i))$$

(De Morgan-Formel), dann wäre in beiden Fällen $S_i = \{x \in K_i; x >_i v \forall v \in V_i\}$ nicht leer. Sei also $u = \psi(S_i)$ und $P_i = V_i \cup \{u\}$. Wegen $P_i(u) = V_i$ und $P_i \langle u \rangle = \{y \in K_i; y >_i x \forall x \in P_i(u)\} = S_i$ wäre dann aber auch P_i eine reguläre Menge im Widerspruch zur Maximalität von V_i . Im Falle der Existenz einer oberen Schranke s_i ist somit s_i maximales Element von K_i und Element von V_i , was sofort die Konfinalität von V_i in K_i nach sich zieht. Wenn aber V_i nicht in K_i beschränkt ist, dann ist V_i bereits definitionsgemäss konfinal. Damit ist der Beweis erbracht.

Die Umkehrung beweist man am bequemsten auf dem Umweg über den folgenden Satz:

(W) "Jede Kette kann wohlgeordnet werden"

$(C_3) \Rightarrow (W)$ ist trivial, denn wenn (K, \leq) eine Kette ist, dann gibt es nach (C_3) eine Funktion φ , die jeder Teilmenge $T_i \neq \emptyset$ von K eine in T_i wohlgeordnete konfinale Teilmenge V_i zuordnet. Setzt man $\psi(T_i) = \text{Min}(V_i)$, so hat man eine Auswahlfunktion ψ , die auf $\mathfrak{B}(K) \setminus \{\emptyset\}$ definiert ist. Wie Zermelo (Math. Ann. 59 (1904) und Math. Ann. 65 (1908) und später Devidé (Coll. Math. XI, 53–54 (1963)) und andere zeigten, kann (K, \leq) wohlgeordnet werden.

Dass aus (W) der Wohlordnungssatz folgt, beweisen H. und J. Rubin beispielsweise in [3] S. 77–78. Bei dieser Ableitung wird das Fundierungsaxiom ⁷ benutzt.

Die Methode, die im Beweis von $(A) \Rightarrow (C_3)$ angewandt worden ist, geht auf Zermelo (Math. Ann. 59 (1904)), H. Kneser ([2]) und T. Szele ([4]) zurück. Natürlich kann man (C_3) auch aus dem Wohlordnungssatz durch transfiniten Induktion ableiten. Diejenigen Eigenschaften, von Ordnungszahlen, die man in einem solchen Beweis braucht, kann man alle ohne (A) und ohne das Fundierungsaxiom beweisen (näheres darüber in [3] S. XXII).

Zusatz 1 bei der Korrektur: Lemma (M) auf S. 6 ist mit (C_1) und daher mit (A) äquivalent. Sei nämlich (M, \leq) eine teilgeordnete Menge und G der Graph von \leq . Nach (M) existiert eine maxi-

⁷ Das Fundierungsaxiom: Falls M eine nichtleere Menge ist, dann gibt es ein $m \in M$, so dass M und m keine gemeinsamen Elemente haben.

male Teilmenge $G_1 \subseteq G$, so dass (M, G_1) verästelt ist. Für $m \in M$ ist $K_m = \{x; x \in M \ \& \ (x, m) \in G_1\}$ eine Kette. Falls ein $n \in M$ mit $n < k \ \forall k \in K_m$ existiert, dann ist $(n, m) \notin G_1$ und (M, G_2) ist verästelt, wo $G_2 = G_1 \cup \{(n, t); \exists k \in K_m \text{ mit } (k, t) \in G_1\}$. Widerspruch! G_1 wäre nicht maximal. Daher ist (K_m, \leq) koninitial in (M, \leq) . Die Existenz koninitialer Teilmengen ist aber mit der Existenz konfinaler Teilmengen äquivalent, Q.E.D.

Zusatz 2: Kurz nach Einreichen des Manuskriptes habe ich erfahren, dass auch Prof. F. Bachmann das Prinzip (C_1) entdeckt hat, welches er "Hochkettenprinzip" nennt. Sein Artikel: "Zornsches Lemma und Hochkettenprinzip" ist im Algebra-Band der "Grundzüge der Mathematik" erschienen (Göttingen 1966, 11. Kapitel).

Von ihm habe ich auch erfahren, dass ein Beweis von $(Z) \Rightarrow (K)$ schon 1949/50 im Archiv der Math., vol. 2, S. 436 von N. Bourbaki gegeben worden ist.

LITERATUR

F. HAUSDORFF

[1] Grundzüge der Mengenlehre (Nachdruck: Chelsea, New York 1949).

H. KNESER

[2] Eine direkte Ableitung des Zornschen Lemmas aus dem Auswahlaxiom. Math. Zeitschr. 53, S. 110–113 (1950).

H. und J. RUBIN

[3] Equivalents of the Axiom of Choice, Amsterdam 1963 (North Holland Publ. Comp.; Studies in Logic).

T. SZELE

[4] On Zorns Lemma, Publicationes Mathematicae Debrecen, Tom. I, S. 254 (1950), Korrektur dazu S. 257.

M. ZORN

[5] A remark on Method in transfinite Algebra, Bull. of the Amer. Math. Soc. 41, S. 667–670 (1935).

(Oblatum 15-11-1965)

6242 KRONBERG/Taunus

Schillerstr. 10

Deutschland

(Math. Inst. d. Univ. Frankfurt/M.)