COMPOSITIO MATHEMATICA

B. VAN ROOTSELAAR

Algebraische Kennzeichnung freier Wortarithmetiken

Compositio Mathematica, tome 15 (1962-1964), p. 156-168

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1962-1964__15__156_0>

Algebraische Kennzeichnung freier Wortarithmetiken

von

B. van Rootselaar, Amsterdam

§ 1. Einleitung

In [1] wurde der Zusammenhang zwischen der in [2] beschriebenen rekursiven Wortarithmetik und Fastringe kurz angegeben, und zwar unter Beschränkung auf Additionen und Multiplikationen. Es wird jetzt genauer die volle rekursive Wortarithmetik aus [2] axiomatisch gekennzeichnet werden. Es wird sich herausstellen, dass die in [2] beschriebenen (freien) Wortarithmetiken gewisse, durch das multiplikative Zentrum bestimmte Fasthalbringe sind mit besonders einfachem Zentrum. Die so erhaltene Kennzeichnung gestattet es die freien Wortarithmetiken in einfacher Weise zu überblicken, insbesondere auch einige nicht in [2] enthaltene Resultate betreffs der multiplikativen Kürzung herzuleiten und weitere Verallgemeinerungen zu betrachten.

§ 2. Fasthalbringe

Wir betrachten Systeme versehen mit einer Addition und einer Multiplikation. Bezüglich der Addition sollen sie Halbgruppe mit Einheit (die 0) sein in der das rechtsseitige Kürzungsgesetz gilt. Bezüglich der Multiplikation sollen sie Halbgruppe mit Einheit (die 1) sein, während das linksseitige Distributivgesetz $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ gilt. Wir setzen ferner voraus dass $0 \cdot x = 0$ gilt für jedes x und dass es keine Nullteiler gibt. Die Abwesenheit von Nullteiler wird übrigens erst im Beweis von Satz 8 benutzt. Ein System das obigen Forderungen genügt wird kurz ein *Fasthalbring* genannt.

Weil die Kommutativität der Addition nicht vorausgesetzt wird, muss man bei Verwendung des Summenzeichens linksseitige und rechtsseitige Summen unterscheiden. Wir machen darum folgende Verabredung:

$$\sum_1^k a_i \quad \text{steht für} \quad a_1+a_2+\ldots+a_k$$

und

$$\sum_1^{k}{}' a_i \quad \text{steht für} \quad a_k + \ldots + a_2 + a_1.$$

Um an die Darstellung in [2] anzuschliessen arbeiten wir hauptsächlich mit linksseitigen Summen, obschon das an sich ein bischen unnatürlich ist.

Die Kennzeichnung der freien Wortarithmetik erfolgt durch schrittweise Einschränkung der betrachteten Fasthalbringe.

DEFINITION 1: *Ein Fasthalbring H heisst ein A-Fasthalbring, wenn es eine Abbildung $\alpha : H \to Z$ von H in das multiplikative Zentrum $Z = Z(H)$ gibt mit folgenden Eigenschaften:*

A1	$\alpha(x+y) = \alpha(y)$ *für* $y \neq 0$
A2	$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$
A3	$\alpha(c) = c$ *für alle* $c \in Z$
A4	*Aus* $\alpha(x) = 0$ *folgt* $x = 0$.

BEMERKUNG 1: Setzt man A4 nicht voraus, so gilt für die Menge M der x mit $\alpha(x) = 0$ nach A2 jedenfalls $M \cdot H \subset M$ und $H \cdot M \subset M$, d.h. M ist sowohl links- wie rechtsinvariant, doch ist damit noch nicht so viel anzufangen. Es sei ferner bemerkt, dass α nach A3 eine idempotente Abbildung auf Z ist.

Die von Z in H (endlich) erzeugte additive Halbgruppe bezeichnen wir mit $A(Z)$.

SATZ 1: *In einem A-Fasthalbring H mit multiplikativem Zentrum Z ist $A(Z)$ eine freie Halbgruppe.*

BEWEIS: Es sei $x = \sum' a_i$, mit $a_i \neq 0$ und $a_i \in Z$ $(i = 1, \ldots, k)$ und ebenso $y = \sum' b_j$ $(j = 1, \ldots, l)$, so folgt aus $x = y$ nach A1:

$$\alpha(x) = a_1 = \alpha(y) = b_1.$$

Nach dem rechtsseitigen Kürzungsgesetz gilt also:

$$\sum{}' a_i = \sum{}' b_j \; (i = 2, \ldots, k; \; j = 2, \ldots, l), \text{ u.s.w.},$$

(auch $k = l$).

SATZ 2: *Ist H ein A-Fasthalbring mit multiplikativem Zentrum Z, so gilt das linksseitige (additive) Kürzungsgesetz in $A(Z)$.*

BEWEIS: Nach Satz 1 haben $z+x$ und $z+y$ als Summen von Zentrumselementen gleichviel Glieder, welche der Reihenfolge nach einander gleich sind. Darum ergibt sich $x = y$.

BEMERKUNG 2: Die Gültigkeit der linksseitigen Kürzung kann nicht für H behauptet werden. Die Ordinalzahlen bilden ein

Beispiel eines A-Fasthalbrings (sogar eines AL-Fasthalbrings vergl. dazu Def. 2). Es ist $\alpha(x) = 1$ zu setzen für jede Ordinalzahl, es gelten dann die beiden Kürzungsgesetze in $A(Z)$ (die endlichen Ordinalzahlen), aber nicht allgemein (vergl. $1+\omega = 2+\omega$; man beachte die Vertauschung von links und rechts). Dieses Beispiel zeigt zugleich, dass **E** von **A** und **L** unabhängig ist.

Satz 3: *Sind φ und ψ zwei Abbildungen eines A-Fasthalbrings in sein multiplikatives Zentrum Z, welche den Bedingungen* A1 *und* A3 *genügen, so stimmen sie auf $A(Z)$ überein.*

Beweis: Es sei $x = \sum' a_i$ mit $a_i \neq 0$ und $a_i \in Z$ $(i = 1, \ldots, k)$. Dann ist $\varphi(x) = \varphi(a_1) = a_1$ nach A1 und A3, und dasselbe für ψ.

Definition 2: *Ein AL-Fasthalbring ist ein A-Fasthalbring H in dem folgende Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist*

L: *$y+\alpha(x) = x$ ist lösbar für jedes $x \in H$.*

Nach dem rechtsseitigen Kürzungsgesetz der Addition ist die Gleichung dann eindeutig lösbar und es ist mithin in jedem AL-Fasthalbring H eine Abbildung $\beta : H \rightarrow H$ erklärt durch $\beta(x)+\alpha(x) = x$ für alle $x \in H$.

Satz 4: *Es gilt $\beta\alpha(x) = 0$ für jedes x des AL-Fasthalbrings H.*

Beweis: Es sei $x \in H$, alsdann $\alpha(x) \in Z(H)$, und $\alpha^2(x) = \alpha(x)$. Nach **L** hat man

$$\beta\alpha(x)+\alpha^2(x) = \alpha(x)$$

also

$$\beta\alpha(x)+ \alpha(x) = \alpha(x)$$

und nach rechtsseitiger Kürzung also $\beta\alpha(x) = 0$.

Satz 5: *x gehört genau dann zum multiplikativen Zentrum $Z(H)$ des AL-Fasthalbrings H wenn $\beta(x) = 0$.*

Beweis: Ist $x \in Z$, so ist nach A3 $\alpha(x) = x$, und nach **L** ist $\beta(x)+x = x = 0+x$. Also nach rechtsseitiger Kürzung $\beta(x) = 0$.
Ist $\beta(x) = 0$, so ist nach **L** : $\alpha(x) = x$. Es ist $\alpha(x) \in Z$, mithin $x \in Z$.

Satz 6: *Es gilt $c \cdot \beta(x) = \beta(c \cdot x)$ für jedes c des multiplikativen Zentrums Z eines AL-Fasthalbrings H und jedes $x \in H$.*

Beweis: $c \cdot x = c \cdot (\beta(x)+\alpha(x)) = c \cdot \beta(x)+c \cdot \alpha(x)$
$= c \cdot \beta(x)+\alpha(c) \cdot \alpha(x) = c \cdot \beta(x)+\alpha(c \cdot x)$.
Wegen der eindeutigen Lösbarkeit ist also $c \cdot \beta(x) = \beta(c \cdot x)$.

SATZ 7: *Es gilt* $\beta(x+y) = x+\beta(y)$ *für jedes* x *und jedes* $y \neq 0$ *eines AL-Fasthalbrings* H.

BEWEIS: Nach L hat man $\beta(x+y)+\alpha(x+y) = x+y$. Wegen $y \neq 0$ gilt also nach A1:

$$\beta(x+y)+\alpha(y) = x+(\beta(y)+\alpha(y)) = (x+\beta(y))+\alpha(y).$$

Also nach rechtsseitiger Kürzung:

$$\beta(x+y) = x+\beta(y).$$

Wiederholte Anwendung ergibt den

ZUSATZ: *Für alle* $x \in H$ *und* $y \in H$ *mit* $\beta^{i-1}(y) \neq 0$ *gilt*

$$\beta^i(x+y) = x+\beta^i(y).$$

SATZ 8: *Für jedes* x *und* y *eines AL-Fasthalbrings gilt*

$$\beta(x \cdot y) = x \cdot \beta(y)+\alpha(y) \cdot \beta(x).$$

BEWEIS: Ist $x = 0$ oder $y = 0$ so gilt die Gleichung, wegen $\alpha(0) = \beta(0) = 0 (0 \in Z(H))$. Es sei also $x \neq 0$ und $y \neq 0$, also (nach A4) $\alpha(y) \neq 0$, und wegen der Abwesenheit von Nullteiler auch $x \cdot \alpha(y) \neq 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned}\beta(x \cdot y) &= \beta(x \cdot (\beta(y)+\alpha(y))) = \beta(x \cdot \beta(y)+x \cdot \alpha(y))\\ &= x \cdot \beta(y)+\beta(x \cdot \alpha(y)) = x \cdot \beta(y)+\beta(\alpha(y) \cdot x)\\ &= x \cdot \beta(y)+\alpha(y) \cdot \beta(x).\end{aligned}$$

(Nach L, Distributivgesetz, Satz 7, Satz 6.)

Wiederholte Anwendung ergibt den

ZUSATZ: *Für alle* $y \in H$ *und* $x \in H$ *mit* $\beta^{i-1}(x) \neq 0$ *gilt*

$$\beta^i(x \cdot y) = x \cdot \beta(y)+\alpha(y) \cdot \beta^i(x).$$

BEWEIS: Für $y = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei also $y \neq 0$, also nach A4 auch $\alpha(y) \neq 0$. Es sei ferner $\beta(x) \neq 0$, dann ist

$$\begin{aligned}\beta^2(x \cdot y) &= \beta(x \cdot \beta(y)+\alpha(y) \cdot \beta(x)) = x \cdot \beta(y)+\beta(\alpha(y) \cdot \beta(x))\\ &= x \cdot \beta(y)+\alpha(y) \cdot \beta^2(x)\end{aligned}$$

nach Satz 8 und Satz 6. U.s.w.

DEFINITION 3: *Ein ALE-Fasthalbring ist ein AL-Fasthalbring* H *in dem folgende Endlichkeitsbedingung erfüllt ist:*
E: *Zu jedem* $x \in H$ *existiert eine nicht-negative ganze Zahl* i, *derart dass* $\beta^i(x) = 0$.

Die kleinste unter den Zahlen i mit $\beta^i(x) = 0$ bezeichnen wir mit $l(x)$.

Bemerkung 3: In der Definition des ALE-Fasthalbrings kann man auf A2 und A4 verzichten, denn es ist A4 von L und E, und A2, von L, E, A1, A3 abhängig. Die Abhängigkeit von A4 ergibt sich einfach so: ist $\alpha(x) = 0$, dann ist nach L auch $\beta(x) = x$, mithin $\beta^i(x) = x$ für jedes $i \geqq 0$, also $x = 0$ nach E. Die Abhängigkeit von A2 ergibt sich aus der Darstellung II (siehe unten) unter Berücksichtigung von A1 und A3.

Die Bedingung E erzwingt, dass jedes Element eines ALE-Fasthalbrings als endliche Summe von Zentrumselementen darstellbar ist (vergl. Satz 10).

Satz 9: *Ist H ein A-Fasthalbring mit multiplikativem Zentrum Z, so ist $A(Z)$ ein ALE-Fasthalbring.*

Beweis: $A(Z)$ ist abgeschlossen in Bezug auf Addition und Multiplikation. Die erste Behauptung ist klar, die zweite ergibt sich aus:

$$(\sum_i{}' a_i) \cdot (\sum_k{}' b_k) = \sum_k{}' b_k \cdot (\sum_i{}' a_i) = \sum_k{}' (\sum_i{}' a_i \cdot b_k).$$

Wenn $\sum' a_i \in A(Z)$ und $\sum' b_k \in A(Z)$, so steht rechts eine endliche Summe deren Glieder $a_i \cdot b_k$ Elemente von Z sind. Das multiplikative Zentrum von $A(Z)$ ist Z, also ist die Beschränkung zu $A(Z)$ der auf H erklärten Abbildung α eine Abbildung von $A(Z)$ in das multiplikative Zentrum von $A(Z)$, welche ebenfalls A1 bis A4 genügt. Es ist klar, dass auf $A(Z)$ auch L und E erfüllt sind.

Satz 10: *Ist H ein ALE-Fasthalbring, so ist $H = A(Z)$, d.h. ein ALE-Fasthalbring wird durch das multiplikative Zentrum additiv erzeugt.*

Beweis: Es sei $x \in H$, alsdann hat man nach L und E:

$$\begin{aligned} \beta(x)+\alpha(x) &= x \\ \beta^2(x)+\alpha\beta(x) &= \beta(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha\beta^{l(x)-1}(x) &= \beta^{l(x)-1}(x). \end{aligned}$$

Wiederholte Einsetzung ergibt also:

$$x = \alpha\beta^{l(x)-1}(x) + \ldots + \alpha\beta(x) + \alpha(x) = \sum{}' \alpha\beta^i(x)$$

mit $i = 0, \ldots, l(x)-1$.

Bemerkung 4: Nach Sätze 9 und 10 sind die ALE-Fasthalbringe genau diejenigen A-Fasthalbringe H, für die gilt $H = A(Z(H))$.

Bemerkung 5: Nach Sätze 2 und 10 gelten in einem ALE-Fasthalbring die beiden additiven Kürzungsgesetze.

Satz 11: *In einem ALE-Fasthalbring gibt es genau eine Abbildung $\alpha : H \to Z$, welche* A1 *bis* A4 *genügt.*

Beweis: Klar nach Satz 3 und Satz 10.

Es ergeben sich folgende Darstellungen für $x+y$ und $x \cdot y$ mittels der Darstellungen von x und y eines ALE-Fasthalbrings:

$$x+y = \sum{}' \alpha\beta^i(x) + \sum{}' \alpha\beta^k(y) \tag{I}$$

$$x \cdot y = \sum_k{}' \left(\sum_i{}'(\alpha\beta^i(x) \cdot \alpha\beta^k(y))\right) \tag{II}$$

mit $i = 0, \ldots, l(x)-1$ und $k = 0, \ldots, l(y)-1$.

Die Darstellung II berechnet man unter Benutzung des (linksseitigen) Distributivgesetzes und der Tatsache dass α eine Abbildung in das multiplikative Zentrum ist.

§ 3. Rekursive Wortarithmetik

Betrachten wir jetzt die in [2] beschriebene freie rekursive Wortarithmetik, für die wir die Bezeichnung $V(n)$ einführen ($n \geqq 2$). Es steht also $V(n)$ für die freie Wortarithmetik über dem endlichen Alphabet $S_0, \cdots, S_{n-1}$; die freie Wortarithmetik über dem abzählbar unendlichen Alphabet $S_0, S_1, \ldots$ soll mit $V(\omega)$ bezeichnet werden.

Es gibt in $V(n)$ n Additionen $\underset{\nu}{(0)}$ und n Multiplikationen $\underset{\nu}{(\cdot)}$. Für $\nu > 0$ sind die Additionen nach [2], (4.4), S. 13 abhängig von $0_0 = +$ und die Multiplikationen sind nach [1], (2.13), S. 193 abhängig von $\dot{0} = \cdot$.

$V(n)$ ist ein Fasthalbring (ohne Nullteiler, mit Null und Eins) nach [2], (4.2), S. 13; (4.5), (4.7'), (4.9), (4.10), S. 14; (4.11), (4.12), (4.13), S. 15; (12.10), S. 38.

Wir werden nun beweisen, dass $V(n)$ sogar ein ALE-Fasthalbring ist. Zu diesem Zweck bestimmen wir erst das multiplikative Zentrum von $V(n)$ (bzw. $V(\omega)$).

Satz 12: *Das multiplikative Zentrum $Z(V(n))$ von $V(n)$ besteht genau aus den Elementen* 0, $S_0, \ldots, S_{n-1}$. (Man beachte, dass $n > 1$ ist; vergl. [2], S. 11.) $Z(V(\omega))$ *ist* $\{0, S_0, S_1, S_2, \ldots\}$.

Beweis: $0 \cdot y = y \cdot 0$ für jedes $y \in V(n)$, nach [2], (4.9), S. 14 und [2], (4.11), S. 15. Ferner ist $S_i \in Z(V(n))$, was wir durch Rekursion unter Verwendung von Bezeichnungen aus [1] und [2] zeigen. Insbesondere für σ siehe [1].

Es ist:

$$S_i \cdot (S_k y) = S_i \cdot y + S_i \cdot S_k = S_i \cdot y + S_{i+k}$$

und

$$(S_k y) \cdot S_i = \sigma_i(S_k y) = S_{i+k}(\sigma_i y) = \sigma_i y + S_{i+k} = y \cdot S_i + S_{i+k}.$$

Wir zeigen nun, dass $Z(V(n))$ keine weiteren Elemente enthält. Es sei x ein Wort, dass wenigstens zwei Buchstaben enthält, d.h. $x = S_i S_j z$. Man wähle nun k und l derart, dass $j+k \neq i+l$. Diese Wahl ist wegen $n > 1$ immer möglich. Man hat nun:

$$x \cdot S_k S_l = (S_i S_j z) \cdot S_k S_l = S_{i+k} S_{j+k}(\sigma_k z) S_{i+l} S_{j+l}(\sigma_l z)$$

und

$$S_k S_l \cdot x = S_k S_l \cdot (S_i S_j z) = S_{i+k} S_{i+l}(S_k S_l \cdot S_j z).$$

Wegen $j+k \neq i+l$ ist also nach dem Regularitätsaxiom ([2], g, S. 13) $x \cdot S_k S_l \neq S_k S_l \cdot x$.

Es gibt also ein Element, das nicht mit x vertauschbar ist, d.h. x gehört nicht zu $Z(V(n))$. Dieser Beweis ist auch für $V(\omega)$ zutreffend.

Satz 13: $V(n)$ (bzw. $V(\omega)$) *ist ein ALE-Fasthalbring.*

Beweis: Nach Satz 12 ist die in [2], (5.19), S. 18 erklärte Funktion $a(x)$ eine Abbildung von $V(n)$ auf $Z(V(n))$ (bzw. von $V(\omega)$ auf $Z(V(\omega))$). Dass $a(x)$ den Forderungen A3 und A4 genügt ist ohne weiteres klar. Dass A1 erfüllt ist folgt aus [2], (11.5), S. 33. Die Eigenschaft A2 wurde in [1], S. 195 ohne Beweis mitgeteilt. Wir holen den Beweis hier nach.

Erstens: $a(\sigma(x)) = \sigma(a(x))$.

Es ist $a(\sigma(S_i x)) = a(S_{i+1}(\sigma x)) = S_{i+1}$

und

$$\sigma(a(S_i x)) = \sigma(S_i) = S_{i+1}.$$

Zweitens: $a(x \cdot y) = a(x) \cdot a(y)$.

Für $x = 0$ oder $y = 0$ klar. Es sei $x \neq 0$, dann ist

$$a(x \cdot S_i y) = a(x \cdot y + \sigma_i x) = a(\sigma_i(x)) = \sigma_i(a(x))$$

und

$$a(x) \cdot a(S_i y) = a(x) \cdot S_i = \sigma_i(a(x)).$$

$a(x)$ genügt der Bedingung **L**, und es ist tatsächlich die in [2], (5.7), S. 16 eingeführte Funktion $v(x)$ die lösende Abbildung. Dass $V(n)$ (bzw. $V(\omega)$) der Bedingung **E** genügt ist eine unmittelbare Folge der Definition (vergl. [2], S. 11). (Für A2 könnte man sich auf Bemerkung 3 berufen.)

Umgekehrt ist nicht jeder ALE-Fasthalbring einer $V(n)$ (bzw. $V(\omega)$) isomorph. Das findet seine Ursache darin, dass wir noch nichts über das Zentrum vorausgesetzt haben. Die von Null verschiedenen Elemente des multiplikativen Zentrums eines ALE-Fasthalbrings bilden unter Multiplikation eine Halbgruppe mit Einheit. Weil ein ALE-Fasthalbring nach Satz 10 bestimmt ist durch Angabe des multiplikativen Zentrums, so genügen zur weiteren Präzisierung auch Forderungen an das Zentrum. *Wir betrachten im Folgenden nur die multiplikative Struktur des Zentrums und lassen dabei die Null ausser Betracht.* Das multiplikative Zentrum einer $V(\omega)$ ist abzählbar unendlich und das einer $V(n)$ ist jedenfalls endlich. Darüber hinaus kann man aber behaupten:

SATZ 14: *$Z(V(n))$ ist eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n. $Z(V(\omega))$ ist eine unendliche zyklische Halbgruppe mit Einheit.*

BEWEIS: Nach dem Multiplikationsgesetz in $V(n)$ (und $V(\omega)$) ist $S_i \cdot S_j = S_{i+j}$. In $V(n)$ ist $S_i \cdot x = S_j$ lösbar für jedes i und j, mit der Lösung S_{j-i} ($j-i$ mod n). S_0 ist das Einselement in $V(n)$ wie in $V(\omega)$. S_1 ist erzeugendes Element von $Z(V(n))$ wie von $Z(V(\omega))$. In $V(\omega)$ sind die S_i alle verschieden voneinander.

Eine zyklische Halbgruppe wird bekanntlich so erklärt:

Die zyklische Halbgruppe mit Einheit soll die kleinste Halbgruppe mit Einheit sein welche die nicht-leeren Produkte aus einem einzigen Element (das erzeugende Element) enthält. Ist sie unendlich so sind all diese Produkte verschieden. Jede unendliche zyklische Halbgruppe mit Einheit ist der additiven Halbgruppe der natürlichen Zahlen mit Null isomorph.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich der

SATZ 15: *Jeder ALE-Fasthalbring H dessen multiplikatives Zentrum eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung $n(>1)$ ist, ist einer $V(n)$ isomorph.*

BEWEIS: Die Isomorphie von $Z(H)$ und $Z(V(n))$ lässt sich zu einer Isomorphie von H und $V(n)$ erweitern, indem man setzt $\Phi(c+c') = \Phi(c)+\Phi(c')$ für jedes c und c' in $Z(H)$. Daraus ergibt sich $\Phi(x+y) = \Phi(x)+\Phi(y)$ für beliebiges x und y in H. Es gilt ferner $\Phi(\alpha(x)) = a(\Phi(x))$, und aus der Darstellung II erhält man $\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$.

In gleicher Weise erhält man den

Zusatz: *Jeder ALE-Fasthalbring H dessen multiplikatives Zentrum eine unendliche zyklische Halbgruppe (mit Einheit) ist, ist einer $V(\omega)$ isomorph.*

§ 4. Kürzung, Differenz, Ordnung

1. Untersuchen wir, wie sich die multiplikativen Kürzungsgesetze von $Z(H)$ zu H übertragen lassen.

Satz 16: *Gilt im multiplikativen Zentrum Z eines A-Fasthalbrings H das (multiplikative) Kürzungsgesetz, so folgt aus $z \cdot x = z \cdot y$, dass $x = y$, für jedes $z \neq 0$ in H und $x, y \in A(Z)$.*

Beweis: Es sei $z \cdot \sum' a_i = z \cdot \sum' b_j$ und $z \neq 0$, dann ist nach A2

$$\alpha(z) \cdot \alpha(\textstyle\sum' a_i) = \alpha(z) \cdot \alpha(\sum' b_j).$$

Linksseitige Kürzung in Z gibt:

$$\alpha(\textstyle\sum' a_i) = \alpha(\sum' b_j), \quad \text{also} \quad a_1 = b_1.$$

Man kann nun schrieben:

$$\begin{aligned} z \cdot (\sum_{i=1}{}' a_i) &= z \cdot (\sum_{i=2}{}' a_i) + z \cdot a_1 = z \cdot (\sum_{j=1}{}' b_j) \\ &= z \cdot (\sum_{j=2}{}' b_j) + z \cdot b_1 \end{aligned}$$

also, nach rechtsseitiger additiver Kürzung

$$z \cdot (\sum_{i=2}{}' a_i) = z \cdot (\sum_{j=2}{}' b_j), \quad \text{u.s.w.}$$

Man findet also $a_i = b_i$, mithin $\sum'_{i=1} a_i = \sum'_{j=1} b_j$.

Zusatz: *In einem ALE-Fasthalbring H zieht das Kürzungsgesetz für $Z(H)$ das linksseitige Kürzungsgesetz für H nach sich, weil $H = A(Z)$ nach Satz 10.*

Satz 17: *Gilt im multiplikativen Zentrum Z eines A-Fasthalbrings H das Kürzungsgesetz, so gilt das rechtsseitige Kürzungsgesetz in $A(Z)$.*

Beweis: Es sei $x \cdot z = y \cdot z$ und $z \neq 0$. Ferner $x, y, z \in A(Z)$, d.h. $x = \sum' a_i, y = \sum' b_j, z = \sum' c_k$ mit $a_i, b_j, c_k \in Z$ und $i = 1, \ldots l$; $j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$.

Wie im Beweis von Satz 9 kann man für $x \cdot z = y \cdot z$ schreiben

$$\sum_k{}' (\sum_i{}' a_i \cdot c_k) = \sum_k{}' (\sum_j{}' b_j \cdot c_k).$$

Nach Satz 1 ist die Anzahl der Glieder zur linken Seite gleich der Anzahl zur rechten Seite, also $l \cdot n = m \cdot n$, also $l = m$. Aus der Gleichheit der Summen folgt die Gleichheit der korrespondierenden Glieder, also

$$a_i \cdot c_k = b_i \cdot c_k$$

wegen $c_k \neq 0$ folgt also mit Kürzung in $Z: a_i = b_i$ für $1 \leqq i \leqq l = m$, d.h. $x = y$.

ZUSATZ: *Gilt im multiplikativen Zentrum Z eines ALE-Fasthalbrings H das Kürzungsgesetz, so gilt es in H* (Sätze 10, 16 und 17).

BEMERKUNG 6: Weil in $Z(V(n))$ das Kürzungsgesetz gilt, so gilt es in $V(n)$, und dasselbe für $V(\omega)$. Dieses Resultat ist nicht in [2] enthalten. Man kann für $V(n)$ (bezw. $V(\omega)$) auch einen rekursiven Beweis hinschreiben.

2. Die in [2] eingeführte Differenz gestaltet sich für *ALE*-Fasthalbringe folgendermassen:

DEFINITION 4: *Sei H ein ALE-Fasthalbring mit multiplikativem Zentrum Z. Die Abbildung $x - y$: $H \times H \to H$ sei erklärt durch:*

1. *Für $a, b \in Z$ ist $a - b = 0$ im Falle $a = b$ und $a - b = a$ im Falle $a \neq b$.*

2. *Für $x = \sum' a_i$ und $y = \sum' b_j$ in H ist $x - y = \sum' (a_i - b_i)$.*

Für spätere Verwendung (Satz 21) erwähnen wir den

SATZ 18: *Es gilt in jedem ALE-Fasthalbring H*

$$(y + x) - x = y \text{ für jede } x \text{ und } y.$$

(Vergl. [2], (5.12), S. 17).

BEWEIS: Klar nach Definition 4.

SATZ 19: *Gilt im multiplikativen Zentrum Z des ALE-Fasthalbrings H das Kürzungsgesetz, so ist*

$$z \cdot (x - y) = z \cdot x - z \cdot y \text{ für alle } x, y, z \in H.$$

BEWEIS: Wir zeigen erst $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$ für a, b, c in Z. Für $c = 0$ ist die Gleichung trivial und auch für $a = b$. Es sei also $a \neq b$, dann ist $c \cdot (a - b) = c \cdot a$. In Z gilt nun nach Voraussetzung das Kürzungsgesetz, also folgt aus $a \neq b$, dass $c \cdot a \neq c \cdot b$ und es ist also

$$c \cdot a - c \cdot b = c \cdot a.$$

Es seien nun $x = \sum' a_i$, $y = \sum' b_j$ und $z = \sum' c_k$ beliebig in H. Dann ist

$$\begin{aligned} z \cdot x - z \cdot y &= (\sum_k{}' c_k) \cdot (\sum_i{}' a_i) - (\sum_k{}' c_k) \cdot (\sum_j{}' b_j) \\ &= \sum_i{}' (\sum_k{}' c_k) \cdot a_i - \sum_j{}' (\sum_k{}' c_k) \cdot b_j \\ &= \sum_i{}' (\sum_k{}' c_k \cdot a_i) - \sum_j{}' (\sum_k{}' c_k \cdot b_j) \\ &= \sum_i{}' (\sum_k{}' (c_k \cdot a_i - c_k \cdot b_i)) \\ &= \sum_i{}' (\sum_k{}' c_k \cdot (a_i - b_i)) \\ &= \sum_i{}' (a_i - b_i) \cdot (\sum_k{}' c_k) = \sum_i{}' (\sum_k{}' c_k) \cdot (a_i - b_i) \\ &= (\sum_k{}' c_k) \cdot \sum_i{}' (a_i - b_i) \\ &= z \cdot (x - y). \end{aligned}$$

Bemerkung 7: Weil das Kürzungsgesetz in $Z(V(n))$ (bzw. $Z(V(\omega)))$ gilt, so gilt in ganz $V(n)$ (bzw. $V(\omega)$), dass $z \cdot (x-y) = z \cdot x - z \cdot y$. Auch dieses Resultat findet sich nicht in [2], es kann aber auch rekursiv hergeleitet werden. Man überzeugt sich sofort davon, dass $(x-y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z$ nicht gilt.

Bemerkung 8: Die in [2] in $V(n)$ eingeführte Besendifferenz (vergl. [2], (5.15), S. 17) lässt sich besonders einfach für allgemeine ALE-Fasthalbringe erklären. Es ist nämlich $x \sim y = \beta^{l(x)}(x)$.

3. Wir erwähnen noch die Funktion R aus [2], (5.1), S. 16. Das Analogon ρ von R lässt sich folgendermassen erklären:

Definition 5: *Es sei für den ALE-Fasthalbring H die Abbildung $\rho : H \rightarrow H$ erklärt durch die Festsetzung: Für $x = \sum' a_i$ in H sei $\rho(x) = \sum a_i$ (rechtsseitige Summe).*

Die Abbildung ρ hat folgende Eigenschaften, die wir im Beweis von Satz 21 verwenden, und darum zusammenbringen in den

Satz 20: *Es gelten die Identitäten:*

$$\begin{aligned} &\rho(x+y) = \rho(y) + \rho(x) && \text{(vergl. [2], (5.2'), S. 16),} \\ &\rho(\rho(x)) = x && \text{(vergl. [2], (5.3), S. 16),} \\ &\rho(x \cdot y) = \rho(x) \cdot \rho(y) && \text{(vergl. [2], (5.5), S. 16).} \end{aligned}$$

Beweis: Nur die dritte Eigenschaft bedarf der Erläuterung. Es sei $x = \sum' a_i$ und $y = \sum' b_k$ mit a_i und b_k in Z. Dann ist

$$x \cdot y = (\sum{}' a_i) \cdot (\sum{}' b_k) = \sum_k{}' (\sum_i{}' a_i \cdot b_k)$$

also nach der ersten Eigenschaft:

$$\rho(x \cdot y) = \sum_k \rho(\sum_i{}' a_i \cdot b_k) = \sum_k (\sum_i a_i \cdot b_k)$$
$$= (\sum_i a_i) \cdot (\sum_k b_k) = \rho(x) \cdot \rho(y).$$

Die in [2], (9.3), S. 26 eingeführte (partielle) Ordnungsrelation ist transitiv und invariant bezüglich linksseitiger Addition, Multiplikation und linksseitiger additiven Kürzung. Wir zeigen überdies, dass sie auch invariant ist bezüglich linksseitiger multiplikativen Kürzung.

DEFINITION 6: *Es heisst $x \leqq y$ im Fasthalbring H, wenn es ein $t \in H$ gibt, derart dass $x+t = y$.*

BEMERKUNG 9: Ist H eine freie rekursive Wortarithmetik, so stimmt diese Definition mit der in [2], (9.3), S. 26 angeführten Definition überein. Für ALE-Fasthalbringe kann man gleichwertig definieren: $x \leqq y$ wenn es eine nicht-negative ganze Zahl i gibt mit $x = \beta^i(y)$.

SATZ 21: *Wenn im multiplikativen Zentrum Z des ALE-Fasthalbrings H das Kürzungsgesetz gilt, so folgt aus $z \cdot x \leqq z \cdot y$, dass $x \leqq y$ für alle $x, y, z \in H$ mit $z \neq 0$.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung gibt es also ein t mit

$$z \cdot x + t = z \cdot y.$$

Dann ist nach Satz 20:

$$\rho(t) + \rho(z \cdot x) = \rho(z \cdot y).$$

Daraus nach Satz 18 und Satz 20:

$$\rho(t) = \rho(z \cdot y) - \rho(z \cdot x) = \rho(z) \cdot \rho(y) - \rho(z) \cdot \rho(x),$$

also nach Satz 19:

$$\rho(t) = \rho(z) \cdot \big(\rho(y) - \rho(x)\big)$$

und wiederum nach Satz 20:

$$t = z \cdot \rho\big(\rho(y) - \rho(x)\big) = z \cdot s.$$

Wir haben also

$$z \cdot x + z \cdot s = z \cdot y$$

mithin

$$z \cdot (x + s) = z \cdot y$$

also mit linksseitiger Kürzung nach Satz 16, Zusatz:

$$x+s = y, \quad \text{d.h.} \quad x \leqq y.$$

Bemerkung 10: Weil in $Z(V(n))$ (bzw. $Z(V(\omega))$) das Kürzungsgesetz gilt, ist in diesem Fall Satz 21 anwendbar und es ergibt sich die Invarianz der partiellen Ordnung gegenüber linksseitiger Kürzung in ganz $V(n)$ (bzw. ganz $V(\omega)$). Auch dieses Resultat geht über [2] hinaus.

LITERATURVERZEICHNIS

B. van Rootselaar,

[1] *Die Struktur der rekursiven Wortarithmetik des Herrn V. Vučković.* Indagationes Math. 24, 192—200 (1962).

V. Vučković,

[2] *Rekursive Wortarithmetik.* Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math. 14, 9—60 (1960).

(Oblatum 27-3-62).