COMPOSITIO MATHEMATICA

P. HEBRONI

Ueber die inneren Automorphismen des abstrakten Differentialringes

Compositio Mathematica, tome 14 (1959-1960), p. 77-82
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1959-1960__14__77_0>

Ueber die inneren Automorphismen des abstrakten Differentialringes

von

P. Hebroni

Jerusalem.

Einleitung

Der vorliegende Aufsatz behandelt die inneren Automorphismen des abstrakten Differentialringes D. Mit D sei hier der abstrakte Ring bezeichnet, den ich in den in der Comp. Math. erschienenen Aufsätzen:„ Über lineare Differentialgleichungen in Ringen u.s.w." (drei Mitteilungen: Mitteilung I, Band 5, S. 403—428, Mitteilung II, Band 6, S. 258—284, Mitteilung III, Band 7, S. 229—252) dargestellt und für die Untersuchung von linearen Integrodifferentialgleichungen verwendet habe. D (dort mit R bezeichnet) ist ein abstrakter Ring, in welchem ausser den drei ersten Grundoperationen auch die Operationen Differentiation und Integration axiomatisch definiert sind. Für D lassen sich leicht die Begriffe des Automorphismus und des inneren Automorphismus definieren.

Wir bitten den Leser, sich mit dem ersten Paragraphen der eben genannten ersten Mitteilung vertraut zu machen (des besseren Verständnisses wegen, an sich würden sogar die ersten vier Seiten jenes Paragraphens genügen).
Diese erste Mitteilung werden wir in Folgenden mit I bezeichnen.

Der Paragraph 1 bringt die Definition und zwei Sätze über die sogenannten *perfekten Elemente* von D. (Ein Element a wird perfekt genannt, wenn

$$a^{-1}, \; a' \text{ und } (a^{-1})'$$

in D existieren).

Ferner die Definition und zwei Sätze über die *transformierenden* Elemente von D. (Ein Element a wird transformierend genannt, wenn es perfekt ist, und wenn $a'a^{-1}$ mit jedem differenzierbarem Element von D vertauschbar ist.

Der Paragraph 2 bringt die Definition des Begriffes des *Automorphismus* für den Differentialring und beweist den

Satz. Ist α ein transformierendes Element von D, so erzeugt

$$a \rightarrow \alpha a \alpha^{-1}$$

einen Automorphismus von D. Diesen Automorphismus nennen wir, da α zu D gehört, einen *inneren Automorphismus*. Ein hierauf folgender einfacher Satz beschliesst die Arbeit.

§ 1. Die Gruppen der perfekten und der transformierenden Elemente von D

Es sei D ein Differentialring (siehe Einleitung).

Definition. Ein Element a von D sei *perfekt* genannt, wenn

$$a^{-1},\ a' \text{ und } (a^{-1})'$$

in D existieren.

Es gilt, wie man leicht erkennt, der

Satz 1. Die perfekten Elemente von D bilden eine Gruppe in Bezug auf die Multiplikation.

Ferner gilt

Satz 2. Ist a perfekt, so ist

$$(a^{-1})' = -a^{-1}a'a^{-1}. \tag{0}$$

Beweis: Es ist

$$aa^{-1} = 1$$

also ist

$$a'a^{-1}+a(a^{-1})' = 0$$

woraus (0) folgt.

Bezeichnungen. 1. Die Gesammtheit der Elemente von D, die differenzierbar sind, sei mit D' bezeichnet.

Wie man leicht erkennt, stellt D' einen Unterring von D dar.

2. Die Gesammtheit der Elemente von D, die mit jedem Elemente von D' vertauschbar sind, sei mit Z bezeichnet.

Definition. Ist α ein perfektes Element von D und ist $\alpha'\alpha^{-1}$ in Z von D enthalten, so sagen wir, α sei ein *transformierendes* Element von D.

Satz 3. Die transformierenden Elemente von D bilden eine Gruppe G in bezug auf die Multiplikation.

Beweis: Offenbar ist 1 in G enthalten.

Es seien α und β Elemente in G. Mit α und β ist auch $\alpha\beta$ perfekt. Da $\alpha'\alpha^{-1}$ und $\beta'\beta^{-1}$ in Z enthalten sind, ist auch $(\alpha\beta)'(\alpha\beta)^{-1}$ in Z enthalten. Denn es ist

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)'(\alpha\beta)^{-1} = [\alpha'\beta+\alpha\beta']\beta^{-1}\alpha^{-1} &= \alpha'\alpha^{-1}+\alpha\beta'\beta^{-1}\alpha^{-1}\\ &= \alpha'\alpha^{-1}+\alpha\alpha^{-1}\beta'\beta^{-1} = \alpha'\alpha^{-1}+\beta'\beta^{-1};\end{aligned}$$

mit α und β ist also auch $\alpha\beta$ in G enthalten.

Wir haben nur noch zu zeigen: ist α in G enthalten und setzt man $\beta = \alpha^{-1}$, so ist auch β in G enthalten. Da α perfekt ist, ist es auch β. Es ist also nur noch zu beweisen, dass $\beta'\beta^{-1}$ zu Z gehört. M.a.W., ist a ein beliebiges Element in D', so ist

$$\beta'\beta^{-1}a = a\beta'\beta^{-1}.$$

Wir setzen $\alpha a\alpha^{-1} = \bar{a}$. Dann ist

$$\beta\bar{a}\beta^{-1} = \alpha^{-1}\alpha a\alpha^{-1}\alpha = a. \tag{4}$$

Nun ist, da $\alpha'\alpha^{-1}$ zu Z gehört,

$$\alpha'\alpha^{-1}\bar{a} = \bar{a}\alpha'\alpha^{-1}.$$

Daraus folgt

$$-\alpha^{-1}\alpha'\alpha^{-1}\bar{a} = -\alpha^{-1}\bar{a}\alpha\alpha^{-1}\alpha'\alpha^{-1}. \tag{5}$$

Beachtet man, dass $\beta' = (\alpha^{-1})' = -\alpha^{-1}\alpha'\alpha^{-1}$, so hat man aus (5)

$$\beta'\bar{a} = \beta\bar{a}\beta^{-1}\beta'.$$

Also ist

$$\beta'\beta^{-1}\beta\bar{a}\beta^{-1} = \beta\bar{a}\beta^{-1}\beta'\beta^{-1},$$

und mit Rücksicht auf (4)

$$\beta'\beta^{-1}a = a\beta'\beta^{-1},$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Bemerkung. Offenbar enthält die Gruppe G die Gruppe der konstanten perfekten Elemente als Untergruppe.

Satz 4. α ist dann und nur dann ein transformierendes Element, wenn es perfekt ist und wenn $\alpha^{-1}\alpha'$ in Z enthalten ist.

Beweis: Der Satz besagt folgendes:

1) Ist a perfekt und ist $a'a^{-1}$ in Z enthalten, so ist $a^{-1}a'$ in Z enthalten.

2) Ist a perfekt und ist $a^{-1}a'$ in Z enthalten, so ist $a'a^{-1}$ in Z enthalten.

Zu 1): Es sei $a'a^{-1}$ in Z enthalten. Dann ist für ein gewisses in Z enthaltenes k

$$a'a^{-1} = k.$$

Somit ist

$$a' = ka = ak, \qquad a^{-1}a' = k,$$

womit 1) bewiesen ist.

Zu 2): Es sei $a^{-1}a'$ in Z enthalten. Dann ist für ein in Z enthaltenes k

$$a^{-1}a' = k.$$

Somit ist

$$a' = ak = ka, \qquad a'a^{-1} = k,$$

womit 2) bewiesen ist.

§ 2. Die inneren Automorphismen des Differentialringes D

Es sei D ein Differentialring. Es sei $\bar{a} = f(a)$ eine Funktion in D, die jedem Elemente a von D ein einziges Element $\bar{a}$ von D zuordnet. $\bar{a} = f(a)$ möge folgende Eigenschaften besitzen:

1) Die Gleichung $f(a) = b$ ist für jedes b in D eindeutig lösbar.

2) Es ist

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \qquad \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \qquad \overline{\int a} = \int \bar{a}. \tag{1}$$

3) Ist a differenzierbar, so ist auch $\bar{a}$ differenzierbar und umgekehrt, und zwar ist

$$\overline{a'} = (\bar{a})'. \tag{2}$$

4) Existiert $\lim\limits_{n=\infty} a_n$, so existiert auch $\lim\limits_{n=\infty} \overline{a_n}$ und umgekehrt, und zwar ist

$$\overline{\lim_{n=\infty} a_n} = \lim_{n=\infty} \overline{a_n}.$$

Wir nennen dann $f(a)$ einen *Automorphismus* von D.

Wir erwähnen den folgenden Satz.

Satz 4'. Ist $\bar{a} = f(a)$ ein Automorphismus von D, so ist

α) $\bar{0} = 0$

β) $\bar{1} = 1$

γ) Ist a invertierbar, so ist auch $\bar{a}$ invertierbar und es ist

$$(\bar{a})^{-1} = \overline{a^{-1}}.$$

Beweis. Zu α). Es ist

$$\bar{0} = \overline{0-0} = \bar{0}-\bar{0} = 0.$$

Zu β). Die Gleichung

$$f(x) = 1$$

ist wegen Voraussetzung 1) lösbar. $x = \rho$ sei eine Lösung dieser Gleichung, so dass

$$\bar{\rho} = f(\rho) = 1.$$

Dann ist

$$\bar{\rho} \cdot \bar{1} = \overline{\rho \cdot 1} = \bar{\rho} = 1.$$

Ferner ist

$$\bar{1} = \overline{1 \cdot 1} = \bar{1} \cdot \bar{1},$$

so dass

$$\bar{1}(\bar{1}-1) = 0.$$

Also ist

$$\bar{1}-1 = 1(\bar{1}-1) = \bar{\rho} \cdot \bar{1}(\bar{1}-1) = \bar{\rho} \cdot 0 = 0.$$

Zu γ). Wegen der Invertierbarkeit von a existiert ein b, so dass $ab = ba = 1$; also ist

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{1} = 1.$$

Ebenso beweist man, dass $\bar{b}\bar{a} = 1$, so dass $\bar{a}$ unvertierbar ist, und dass die Gleichung besteht:

$$(\bar{a})^{-1} = \bar{b} = \overline{a^{-1}}.$$

Satz 5. Ist α ein transformierendes Element von D, so ist die Funktion

$$\bar{a} = f(a) = \alpha a \alpha^{-1} \tag{3}$$

ein Automorphismus von D. Da dieser Automorphismus mit Hilfe eines Elementes α von D hergestellt wurde, so nennen wir ihn einen *inneren Automorphismus*.

Beweis: Offenbar ist 1) erfüllt; ebenso die ersten zwei Teile von 2). Wir beweisen, dass $f(a)$ 3) erfüllt. Zunächst erkennt man sofort, dass wenn a differenzierbar ist, auch $\bar{a}$ differenzierbar ist, und umgekehrt. (2) beweisen wir so. Es ist

$$(4)\begin{cases}(\bar{a})' = (\alpha a \alpha^{-1})' = \alpha a' \alpha^{-1} + \alpha' a \alpha^{-1} - \alpha a \alpha^{-1} \alpha' \alpha^{-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \alpha a' \alpha^{-1} + \alpha' \alpha^{-1} \alpha a \alpha^{-1} - \alpha a \alpha^{-1} \alpha' \alpha^{-1}.\end{cases}$$

Die beiden letzten Terme heben sich auf, da $\alpha'\alpha^{-1}$ zu Z gehört. Es bleibt also

$$(\bar{a})' = \alpha a' \alpha^{-1} = \overline{a'}.$$

Wir beweisen jetzt (1_3). Wegen 3) ist (Siehe I § 1 $(V_{4,4})$)

$$\left(\overline{\int a}\right)' = \overline{\left(\int a\right)'} = \bar{a},$$

und da nach I $(V_{4,3})$ $\overline{\int a}$ ein Integral in D ist, ist nach I, Satz 9,

$$\overline{\int a} = \int\left[\left(\overline{\int a}\right)'\right] = \int \bar{a}.$$

Den Beweis von 4) können wir übergehen.

Beachtenswert ist das Beispiel: α sei eine perfekte Konstante. Wir beweisen noch den

Satz 6. Stellt die Funktion

$$\bar{a} = f(a) = \alpha a \alpha^{-1}$$

einen Automorphismus von D dar und ist α perfekt, so ist $\alpha'\alpha^{-1}$ in Z enthalten.

Beweis. Es sei a ein beliebiges Element in D'. Dann ist

$$(\bar{a})' = \overline{a'}.$$

Es gilt aber (4). Aus (4) folgt:

$$(\bar{a})' = \overline{a'} + \alpha'\alpha^{-1}\alpha a \alpha^{-1} - \alpha a \alpha^{-1}\alpha'\alpha^{-1},$$

also ist

$$\alpha'\alpha^{-1}\alpha a \alpha^{-1} = \alpha a \alpha^{-1}\alpha'\alpha^{-1}.$$

Multipliziert man hier rechts mit α und links mit α^{-1} so erhält man

$$\alpha^{-1}\alpha' a = a\alpha^{-1}\alpha'.$$

Da dies für jedes Element von a in D' gilt, ist $\alpha^{-1}\alpha'$ in Z enthalten. Nach Satz 14 (siehe auch den Beweis) ist auch $\alpha'\alpha^{-1}$ in Z enthalten.

Die Sätze 5 und 6 lassen sich zusammenfassen in den

Satz 7. Ist α perfekt so stellt die Funktion

$$f(a) = \alpha a \alpha^{-1}$$

dann und nur dann einen Automorphismus von D dar, wenn $\alpha'\alpha^{-1}$ in Z enthalten ist.

Man erkennt leicht die Richtigkeit des Satzes:

Satz 8. a) Die inneren Automorphismen von D bilden eine Gruppe J.

b) Bedeutet $\bar{Z}$ die Gesamtheit derjenigen Elemente von G die mit allen Elementen von D vertauschbar sind, so ist $\bar{Z}$ eine invariante Untergruppe von G und J ist mit $G/\bar{Z}$ holoedrisch isomorph.

Bemerkung. Der hier behauptete Isomorphismus ist natürlich so zu verstehen: Ist

$$G = \bar{Z} + \bar{Z}a_1 + \bar{Z}a_2 + \bar{Z}a_3 + \dots$$

und bedeuten Ta_i und Ta_k die Isomorphismen von D die durch Verwendung von a_i und a_k hervorgehen und wendet man auf D zuerst Ta_i und dann Ta_k an, so erhält man einen Automorphismus, der Ta_ia_k gleich ist.

(Oblatum 10-7-58).