COMPOSITIO MATHEMATICA

CORNELIU CONSTANTINESCU

Über die defekten Werte der meromorphen Funktionen deren charakteristische Funktion sehr langsam wächst

Compositio Mathematica, tome 13 (1956-1958), p. 129-147

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1956-1958__13__129_0>

Über die defekten Werte der meromorphen Funktionen deren charakteristische Funktion sehr langsam wächst

von

Corneliu Constantinescu

Es sei $w(z)$ eine in $|z| < \infty$ meromorphe Funktion und $T(r, w)$ ihre charakteristische Funktion. Man nennt

$$\delta(a) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r, a)}{T(r,w)}$$

mit den gewöhnlichen Bezeichnungen, den Defekt von a. Aus der allgemeinen Theorie der meromorphen Funktionen ergibt sich, dass höchstens eine abzählbare Menge von Werten existiert, dessen Defekt positiv ausfallen kann. Falls $w(z)$ eine rationale Funktion ist, so ist $T(r, w) = O(\log r)$ und $w(z)$ besitzt keinen defekten Wert. Es wäre also interessant eine Zwischenklasse von meromorphen nichtrationalen Funktionen zu finden, die höchstens endlich viele defekte Werte haben können. Eine solche Klasse wurde von G. Valiron entdeckt [1], indem er bewiess, dass eine meromorphe Funktion $w(z)$, für welche

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{(\log r)^2} < \infty$$

gilt, eine Reihe von Kreisen $|z| = r_n$, $r_n \to \infty$ besitzt, auf welchen $w(z)$ gleichmässig gegen einen endlichen oder unendlichen Wert strebt und daher höchstens einen defekten und einen asymptotischen Wert hat (siehe auch [2]). Y. Tumura bewiess [3], dass dieselbe Eigenschaft sogar jede meromorphe Funktion hat, die die weniger einschränkende Bedingung erfüllt

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{(\log r)^2} < \infty.$$

Im Jahre 1950 zeigte G. Valiron [4], dass eine meromorphe Funktion von der Ordnung null höchstens einen defekten Wert besitzen kann. In der vorstehenden Arbeit wollen wir die Bedingung

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} = 0$$

durch eine andere ersetzen, in welcher das untere limes anstatt des oberen limes eintreten soll.

§ 1. In diesem Paragraph werden wir drei Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. *Es sei* $G(0, 1, \infty)$ *die, in den Punkten* $0, 1, \infty$ *dreifach punktierte* w*-Ebene. Die hyperbolische Länge* $\lambda(t)$ *einer Kurve, welche die Kreise* $|w| = t_0$ *und* $|w| = t < t_0$ *verbindet, erfüllt für* $t \to 0$ *folgende Ungleichung*

$$\lambda(t) \geqq \tfrac{1}{2} \log_2 \frac{1}{t} - 0(1)$$

wo $0(1)$ *von* t_0 *abhängt.*

Hier ist $\log_n x = \log . \log_{n-1} x$ und $\log_1 x = \log x$.

Es sei $w = \mu(z)$ die Modulfunktion, die das nicht-euklidische Dreieck $x = 0$, $y > 0$; $x = 1$, $y > 0$; $|z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $y > 0$, eineindeutig und konform auf die Halbebene $v = I(w) > 0$ abbildet, so dass die Ecken $0, 1, \infty$ in die Punkte $0, 1, \infty$ respektiv übergehen. Wir werden mit $z = \lambda(w)$ die inverse Funktion von $w = \mu(z)$ bezeichnen, welche die universelle Überlagerungsfläche des Gebietes $G_0 = G(1, 0, \infty)$ eineindeutig und konform auf die Halbebene $y > 0$ abbildet. Die Funktion $\zeta = -e^{-\frac{\pi i}{z}}$ ist holomorph in der Halbebene $y > 0$ und bildet die Halbgerade $x = 0$, $y > 0$ auf das Segment $(-1, 0)$ und den Halbkreis $|z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $y > 0$ auf das Segment $(0, +1)$ ab. Die Funktion $\zeta = -e^{-\frac{\pi i}{\lambda(w)}}$ wofür $\lambda(w)$ der Zweig, der die Halbebene $v > 0$ auf obiges Dreieck abbildet, genommen wird, ist stetig auf der reellen Axe $-\infty < u = R(w) < +1$, und transformiert sie in das Segment $(-1, +1)$, wo der Punkt $\zeta = 0$ dem Punkte $w = 0$ entspricht. Aus dem Spiegelungsprinzip sieht man, dass $\zeta(w)$ auch in $w = 0$ holomorph ist. Es ist sehr leicht zu sehen, dass $\zeta(w)$ in dem zum Segment $(+1, +\infty)$ der reellen Axe komplementären Gebiet, von Null verschieden ist, ausser dem Punkte $w = 0$, und deshalb können wir schreiben

$$-e^{-\frac{\pi i}{\lambda(w)}} = wH_0(w)$$

wo $H_0(w)$ holomorph und von Null verschieden ist. Daraus findet man

$$\lambda(w) = \frac{-\pi i}{\log w + H(w)}$$

wo $H(w)$ eine holomorphe Funktion ist. Wir werden diesen Ausdruck benutzen, um das hyperbolische Mass des Gebietes G_0 zu bestimmen. Wir haben

$$d\sigma_w = d\sigma_z = \frac{|dz|}{2y} = \frac{|\lambda'(w)||dw|}{2I[\lambda(w)]} \,.$$

Es ist

$$|\lambda'(w)| = \frac{\pi|1+wH'(w)|}{|w||\log w+H(w)|^2}$$

$$I[\lambda(w)] = \frac{-\pi\{\log|w|+R[H(w)]\}}{|\log w+H(w)|^2}$$

$$d\sigma_w = \frac{|1+wH'(w)||dw|}{2|w|\left\{\log\frac{1}{|w|}-R[H(w)]\right\}}$$

oder

$$d\sigma_w = \frac{K(w)|dw|}{2|w|\log\frac{1}{|w|}}$$

mit

$$K(w) = \frac{|1+wH'(w)|}{1-\frac{R[H(w)]}{\log\frac{1}{|w|}}}$$

und also

$$\lim_{w\to 0} K(w) = 1$$

Preziser haben wir

$$[K(w)-1]\log\frac{1}{|w|} = \frac{|1+wH(w)|-1+\frac{R[H(w)]}{\log\frac{1}{|w|}}}{1-\frac{R[H(w)]}{\log\frac{1}{|w|}}}\log\frac{1}{|w|} \geqq$$

$$\geqq \frac{R[H(w)]-|w||H(w)|\log\frac{1}{|w|}}{1-\frac{R[H(w)]}{\log\frac{1}{|w|}}}$$

und daher

$$\liminf_{w\to 0}\,[K(w)-1]\log\frac{1}{|w|}\geqq R[H(0)]$$

Es sei jetzt γ eine Kurve, welche die Kreise $|w| = t_0$ und $|w|=t<t_0$ verbindet. Ihre hyperbolische Länge ist dann

$$\lambda(t)=\int_\gamma\frac{K(w)|dw|}{2|w|\log\dfrac{1}{|w|}}=\int_\gamma\frac{|dw|}{2|w|\log\dfrac{1}{|w|}}+\int_\gamma\frac{[K(w)-1]\,|dw|}{2|w|\log\dfrac{1}{|w|}}\geqq$$

$$\geqq\int_t^{t_0}\frac{d\tau}{2\tau\log\dfrac{1}{\tau}}+A(t_0)\int_t^{t_0}\frac{d\tau}{2\tau\left(\log\dfrac{1}{\tau}\right)^2}$$

wo

$$A(t_0)=\inf_{|w|\leqq t_0}\,[K(w)-1]\log\frac{1}{|w|}>-\infty$$

ist. Wenn man diese zwei Integrale berechnet, so erhällt man die gesuchte Ungleichung.

Hilfssatz 2. *Es sei $w(z)$ eine meromorphe Funktion und Δ das Gebiet, das aus der z-Ebene entsteht, falls man alle Punkte entfernt in welchen $w(z)$ gleich* 0, 1, ∞ *ist. Wir bezeichnen mit $l(r)$ die hyperbolische Länge des Kreises $|z| = r$ in bezug auf Δ. Falls diese drei Werte für die Funktion $w(z)$ defekte Werte sind, so ist*

$$\liminf_{r\to\infty}\,[l(r)-3\log T(r,w)]>-\infty;$$

falls zwei von diesen drei Werten defekt sind, so ist

$$\liminf_{r\to\infty}\,[l(r)-2\log T(r,w)]>-\infty$$

und falls einer von diesen drei Werten defekt ist, aber es keine Reihe von Kreisen $|z| = r_n$, $r_n\to\infty$ gibt auf welchen $w(z)$ gegen diesen defekten Wert strebt, so ist

$$\liminf_{r\to\infty}\,[l(r)-\log T(r,w)]>-\infty$$

Wir beginnen mit dem letzten Fall und nehmen an, dass der defekte Wert der Wert Null sei, was keine Einschränkung ist. Es ist

$$0<\delta(0)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m(r,0)}{T(r,w)}$$

wo

$$m(r, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\frac{1}{|w(re^{i\theta})|}d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\overset{+}{\log}\frac{1}{t(r)}$$

$$t(r) = \inf_{|z|=r} |w(z)|$$

ist. Wir bezeichnen noch mit

$$t_0(r) = \sup_{|z|=r} |w(z)|$$

Aus den Bedingungen des Hilfssatzes folgt, dass

$$t_0(r) \geqq t_0$$

$$\lim_{r\to\infty} t(r) = 0$$

ist. Das Bild des Kreises $|z| = r$ in der w-Ebene ist eine geschlossene Kurve, welche die Kreise $|w| = t_0$ und $|w| = t(r)$ verbindet. Nach dem Hilfssatz 1 ist dann ihre hyperbolische Länge bezüglich $G(0, 1, \infty)$ grösser als

$$2\lambda[t(r)] \geqq \log_2\frac{1}{t(r)} - 0(1)$$

für $t(r) \to 0$, $r \to \infty$. In Δ nimmt $w(z)$ Werte aus $G(0, 1, \infty)$, so dass man das Prinzip des hyperbolischen Masses anwenden kann. Man erhält

$$\log_2 \frac{1}{t(r)} - 0(1) \leqq l(r)$$

$$\log \frac{1}{t(r)} \leqq e^{l(r)+0(1)}$$

Wenn wir die obige Ungleichung beachten, so haben wir

$$0 < \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi}\frac{e^{l(r)+0(1)}}{T(r, w)}$$

oder

$$\liminf_{r\to\infty} [l(r) - \log T(r, w)] > -\infty$$

was den dritten Fall beweist.

Nehmen wir jetzt an, dass $w(z)$ die Werte 0 und 1 als defekte Werte hat. Dann ist

$$0 < \delta(0)\delta(1) \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r, 0)m(r, 1)}{[T(r, w)]^2}$$

wo

$$m(r, 1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\frac{1}{|w(re^{i\theta}) - 1|}\, d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\overset{+}{\log}\frac{1}{t'(r)}$$

$$t'(r) = \inf_{|z|=r} |w(z)-1|$$

ist. Indem man den Hilfssatz zweimal benutzt, sieht man dass die hyperbolische Länge bezüglich $G(0, 1, \infty)$ des Bildes der Kurve $|z| = r$ grösser als

$$\log_2 \frac{1}{t(r)} + \log_2 \frac{1}{t'(r)} - 0(1)$$

ist. Nach dem Prinzip des hyperbolischen Masses ist sie aber kleiner als $l(r)$, so dass

$$\log \frac{1}{t(r)} \log \frac{1}{t'(r)} \leqq e^{l(r)+0(1)}$$

ist. Weiter führt man den Beweis genau wie oben.

In ähnlicher Weise wird auch der erste Fall bewiesen.

Hilfssatz 3. *Es sei $w(z)$ eine meromorphe Funktion und Δ das Gebiet, das aus der z-Ebene entsteht, falls man alle Punkte entfernt in welchen $w(z)$ gleich* 0, 1, ∞ *ist. Wir bezeichnen mit $l(r)$ die hyperbolische Länge des Kreises $|z| = r$ in bezug auf Δ. Falls diese drei Werte für die Funktion $w(z)$ defekte Werte sind, so ist*

$$\liminf_{r\to\infty} [l(r) - 6 \log_2 r] = +\infty;$$

falls zwei von diesen drei Werten defekt sind, so ist

$$\liminf_{r\to\infty} [l(r) - 4 \log_2 r] = +\infty$$

und falls einer von diesen drei Werten defekt ist, aber es keine Reihe von Kreisen $|z| = r_n$, $r_n \to \infty$ gibt auf welchen $w(z)$ gegen diesen defekten Wert strebt, so ist

$$\liminf_{r\to\infty} [l(r) - 2 \log_2 r] = +\infty$$

Nach Tumuras Ergebnis [3] ist in allen drei Fällen des Hilfssatzes

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{(\log r)^2} = +\infty$$

denn anders hätte $w(z)$ eine Reihe von Kreisen $|z| = r_n$, $r_n \to \infty$ auf denen $w(z)$ gleichmässig gegen Null strebt. Es ist aber im dritten Fall

$$\liminf_{r\to\infty}\left[\, l(r)-2\log_2 r-\log\frac{T(r,w)}{(\log r)^2}\right] > -\infty$$

und daher

$$\liminf_{r\to\infty}\,[l(r)-2\log_2 r] = +\infty$$

was den dritten Fall beweist.

In ähnlicher Weise werden auch die anderen Fälle bewiesen.

§ 2. In diesem Paragraph werden wir die hyperbolische Länge $l(r)$ für eine meromorphe Funktion $w(z)$ berechnen.

Wir bezeichnen mit $I(r)$ den Kreisring

$$r\,e^{-\frac{A}{\log_2 r}} < |z| < r\,e^{\frac{A}{\log_2 r}}$$

und mit $\nu(r)$ die Zahl der a, b, c-Stellen der Funktion $w(z)$ in $I(r)$. Es seien $z_1, z_2, \ldots z_{\nu(r)}$ diese Stellen, so dass $|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{\nu(r)}|$ ist. Man kann dann immer einen Kreisring

$$\Gamma\colon\; R_1 < |z| < R_2$$

wo $R_1 > r e^{-\frac{Aq}{\log_2 r}}$ $(0 < q < 1)$ und $R_2 < r e^{+\frac{Aq}{\log_2 r}}$ ist, finden, so dass in Γ keine a, b, c-Stelle liegt und

$$\log\frac{R_2}{R_1} \geqq \frac{2Aq}{[1+\nu(r)]\,\log_2 r}$$

ist. Das sieht man am leichtesten wenn man den Kreisring $I(r)$ längs der reellen Axe durchschneidet und mittels der Abbildung

$w = u+iv = \log\dfrac{z}{r}$ auf dem Viereck

$$-\frac{A}{\log_2 r} < u < \frac{A}{\log_2 r},\quad 0 < v < 2\pi$$

abbildet. In dem Viereck

$$-\frac{Aq}{\log_2 r} < u < \frac{Aq}{\log_2 r},\; 0 < v < 2\pi$$

befinden sich höchstens $\nu(r)$ Bildpunkte $w_1, w_2, \ldots w_{\nu(r)}$ der Punkte $z_1, z_2, \ldots z_{\nu(r)}$ und deswegen ist

$$\max_{1\leqq j\leqq \nu(r)-1}\log\left|\frac{z_{j+1}}{z_j}\right| = \max_{1\leqq j\leqq \nu(r)-1}(u_{j+1}-u_j) \geqq \frac{2Aq}{[1+\nu(r)]\,\log_2 r}$$

Es sei nun $\Delta(r)$ das Gebiet, das aus dem Kreisring

$$\sqrt{R_1 R_2}\, e^{-\frac{A(1-q)}{\log_2 r}} < |z| < \sqrt{R_1 R_2}\, e^{\frac{A(1-q)}{\log_2 r}}$$

entsteht, falls man die Segmente

$$\sqrt{R_1 R_2}\; e^{-\frac{A(1-q)}{\log_2 r}} \leqq |z| \leqq R_1;\; R_2 \leqq |z| \leqq \sqrt{R_1 R_2}\, e^{\frac{A(1-q)}{\log_2 r}}$$

$$\arg z = \arg z_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu(r))$$

entfernt. Nun wollen wir die hyperbolische Länge l des Kreises $|z| = \sqrt{R_1 R_2}$ in bezug auf $\varDelta(r)$ berechnen. Die Abbildung $w = \log \dfrac{z}{\sqrt{R_1 R_2}}$ bildet die universelle Überlagerungsfläche des Gebietes $\varDelta(r)$ auf ein Gebiet $D(r)$ von der Form

$$-\frac{A(1-q)}{\log_2 r} < u < \frac{A(1-q)}{\log_2 r}$$

in dem bestimmten Segmente

$$-\frac{A(1-q)}{\log_2 r} \leqq u \leqq \log \frac{R_1}{\sqrt{R_1 R_2}};\; \log \frac{R_2}{\sqrt{R_1 R_2}} \leqq u \leqq \frac{A(1-q)}{\log_2 r}$$

$$v = \theta_j + 2k\pi \quad (j = 1, 2, \ldots \nu(r)) \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ausgeschnitten sind. Der Kreis $|z| = \sqrt{R_1 R_2}$ geht in das Segment

$$u = 0,\; \theta_1 \leqq v \leqq \theta_1 + 2\pi$$

über. Wir bezeichnen mit l_j die hyperbolische Länge des Segmentes

$$u = 0, \quad \theta_j \leqq v \leqq \theta_{j+1} \quad (\theta_{\nu(r)+1} = \theta_1 + 2\pi)$$

in bezug auf $D(r)$. Es ist $l = \sum\limits_{j=1}^{\nu(r)} l_j$. Nun haben wir

$$l_j \leqq 2\int_0^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\log \frac{R_2}{R_1}\right)^2 + v^2}} + 2\int_{v_0}^{\frac{1}{2}\varDelta_j} \frac{dv}{\frac{A(1-q)}{\log_2 r}} \qquad (\varDelta_j = \theta_{j+1} - \theta_j)$$

wo $v_0 = \sqrt{\left[\dfrac{A(1-q)}{\log_2 r}\right]^2 - \left(\frac{1}{2}\log \dfrac{R_2}{R_1}\right)^2}$ ist. Falls $\dfrac{\varDelta_j}{2} < v_0$ ist, so fällt die letzte Integrale ab. Es ist

$$\int_0^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\log\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + v^2}} = \left[\log\left(v + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\log\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + v^2}\right)\right]_0^{v_0}$$

Daraus folgt

$$l_j \leqq 2\log\frac{2A(1-q)}{\log_2 r} + 2\log\frac{1}{\frac{1}{2}\log\frac{R_2}{R_1}} + \Delta_j\frac{\log_2 r}{A(1-q)} \leqq$$

$$\leqq 2\log\frac{2A(1-q)}{\log_2 r} + 2\log\frac{[1+\nu(r)]\log_2 r}{qA} + \Delta_j\frac{\log_2 r}{A(1-q)}$$

$$\leqq 2\log\frac{2(1-q)}{q}[1+\nu(r)] + \Delta_j\frac{\log_2 r}{A(1-q)}$$

und daher

$$l = \sum_{j=1}^{\nu(r)} l_j \leqq 2\nu(r)\log\frac{2(1-q)}{q}[1+\nu(r)] + 2\pi\frac{\log_2 r}{A(1-q)}$$

Damit ist die Aufgabe $l(r)$ zu berechnen gelösst, denn es ist $l \geqq l(\sqrt{R_1R_2})$. Hier ist $R_k = R_k(r)$, $(k = 1, 2)$ mit $\lim_{r\to\infty} R_k(r) = \infty$.

Wir nehmen jetzt an dass die meromorphe Funktion $w(z)$ drei defekte Werte hat. Es ist keine Einschränkung, wenn wir annehmen, dass diese drei Werte 0, 1, ∞ sind. Nach dem Hilfssatz 3 ist dann

$$\liminf_{r\to\infty}\,[l(\sqrt{R_1R_2}) - 6\log_2\sqrt{R_1R_2}] = +\infty$$

Es ist aber

$$\sqrt{R_1R_2} \geqq R_1 \geqq re^{-\frac{Aq}{\log_2 r}}$$

$$\log_2\sqrt{R_1R_2} \geqq \log_2\left(re^{-\frac{Aq}{\log_2 r}}\right) \geqq \log_2 r - 0(1) \text{ für } r\to\infty$$

und deshalb

$$\liminf_{r\to\infty}\left\{2\nu(r)\log\frac{2(1-q)}{q}[1+\nu(r)] - \left[6 - \frac{2\pi}{A(1-q)}\right]\log_2 r\right\} = +\infty$$

Wir nehmen A und q so dass $6 - \dfrac{2\pi}{A(1-q)} > 0$ ist; daraus folgt

$$\lim_{r\to\infty}\nu(r) = \infty$$

Falls

$$\nu(r_n) \leqq \frac{1}{2}\left[6 - \frac{2\pi}{A(1-q)}\right]\frac{\log_2 r_n}{\log_3 r_n}$$

für eine Reihe von Zahlen $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$, $r_n \to \infty$ ist, so muss auch

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log_2 r_n}{\log_3 r_n}\left[\log\frac{2(1-q)}{q}\left(6-\frac{2\pi}{A(1-q)}\right)+\log_3 r_n-\log_4 r_n\right]-\log_2 r_n\right\}=+$$

was nicht stimmt. Es muss also

$$\nu(r)>\left[3-\frac{\pi}{A(1-q)}\right]\frac{\log_2 r}{\log_3 r}$$

für $r \geqq r_0 = r_0\,(A,\ q)$ sein.

Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Da im Kreisringe

$$r_0 \leqq e^{k\varepsilon} < |z| < e^{(k+1)\varepsilon}$$

mindestens $\dfrac{\varepsilon\log k\varepsilon}{2A}-1 \geqq \dfrac{(1-\tau)\,\varepsilon\log k\varepsilon}{2A}$ für $k \geqq \dfrac{1}{\varepsilon}e^{\frac{2A}{\tau\varepsilon}}$ punktfremde Kreisringe der Form $I(r)$ liegen und da jedes $I\ (r)$ nach der obigen Ungleichung mindestens $\left[3-\dfrac{\pi}{A\,(1-q)}\right]\dfrac{\log k\varepsilon}{\log_2 k\varepsilon}$, 0, 1, ∞-Stellen enthält, so enthält der Kreisring

$$e^{k\varepsilon} < |z| < e^{(k+1)\varepsilon}$$

mindestens

$$\frac{(1-\tau)\varepsilon}{2A}\left[3-\frac{\pi}{A\,(1-q)}\right]\frac{(\log k\varepsilon)^2}{\log_2 k\varepsilon}$$

0, 1, ∞-Stellen für $k \geqq k_0 = k_0(A, q, \tau) = \max\left[\dfrac{1}{\varepsilon}e^{\frac{2A}{\tau\varepsilon}},\ \dfrac{1}{\varepsilon}r_0(A, q)\right]$

Wir bezeichnen mit

$$n(r) = n(r,\ 0)+n(r,\ 1)+n(r,\ \infty)$$

wo $n(r,\ a)$ die Zahl der a-Stellen der Funktion $w(z)$ im Kreise $|z| \leqq r$ ist. Wir haben für

$$n(e^{(k+1)\varepsilon})-n(e^{k\varepsilon}) \geqq \frac{\varepsilon(1-\tau)}{2A}\left[3-\frac{\pi}{A(1-q)}\right]\frac{(\log k\varepsilon)^2}{\log_2 k\varepsilon}$$

und daraus

$$n(e^{(k+1)\varepsilon}) \geqq \frac{\varepsilon(1-\tau)}{2A}\left[3-\frac{\pi}{A\,(1-q)}\right]\sum_{j=k_0}^{k}\frac{(\log j\varepsilon)^2}{\log_2 j\varepsilon} \geqq$$

$$\geqq \frac{\varepsilon(1-\tau)\left[3-\dfrac{\pi}{A\,(1-q)}\right]}{2A\log_2 k\varepsilon}\sum_{j=k_0}^{k}(\log j\varepsilon)^2$$

Um die Summe $\sum_{j=k_0}^{k} (\log j\varepsilon)^2$ zu berechnen, werden wir mit

$$S = \sum_{j=k_0}^{k} \log j\varepsilon = \log k! - \log (k_0-1)! + (k-k_0+1)\log \varepsilon$$

bezeichnen. Es ist aber $k! \geqq \frac{k^k}{e^k}$ und deshalb

$$S \geqq k \log k\varepsilon[1-0(1)]$$

für $k \to \infty$. Wenn man jetzt die allgemeine Ungleichung benützt

$$\sum_{j=1}^{k} u_j^2 \geqq \frac{1}{2k+1} (\sum_{j=1}^{k} u_j)^2$$

so findet man

$$\sum_{j=k_0}^{k} (\log j\varepsilon)^2 \geqq \frac{S^2}{2k+1} \geqq \frac{k(\log k\varepsilon)^2}{2} [1-0(1)]$$

und

$$n(e^{(k+1)\varepsilon}) \geqq \frac{(1-\tau)\left[3 - \dfrac{\pi}{A(1-q)}\right]}{4A} \frac{k\varepsilon\,(\log k\varepsilon)^2}{\log_2 k\varepsilon} [1-0(1)]$$

Nimmt man $e^{(k+1)\varepsilon} \leqq r < e^{(k+2)\varepsilon}$ so erhält man

$$n(r) \geqq \frac{(1-\tau)\left[3 - \dfrac{\pi}{A\,(1-q)}\right]}{4A} \frac{\log r\,(\log_2 r)^2}{\log_3 r} [1-0(1)]$$

für $r \geqq r_1(A, q, \tau, \varepsilon)$ und daraus

$$3T(r, w) \geqq N(r, a)+N(r, b)+N(r, \infty)-O(1) \geqq \int_{r_1}^{r} \frac{n(t)dt}{t} - O(1) \geqq$$

$$\geqq \frac{(1-\tau)\left[3 - \dfrac{\pi}{A(1-q)}\right]}{4A} [1-0(1)] \int_{r_1}^{r} \frac{\log t\,(\log_2 t)^2}{\log_3 t} \frac{dt}{t} - O(1) \geqq$$

$$\geqq \frac{(1-\tau)\left[3 - \dfrac{\pi}{A(1-q)}\right][1-0(1)]}{4A \log_3 r} \int_{\log r_1}^{\log r} \tau(\log \tau)^2\, d\tau - O(1) \geqq$$

$$\geqq \frac{(1-\tau)\left[3 - \dfrac{\pi}{A\,(1-q)}\right][1-0\,(1)]}{4A \log_3 r} \frac{(\log r)^2(\log_2 r)^2}{2}$$

oder

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{\dfrac{(\log r)^2(\log_2 r)^2}{\log_3 r}} \geqq \frac{(1-\tau)\left[3-\dfrac{\pi}{A(1-q)}\right]}{8A}$$

Da $\tau > 0$ und $q > 0$ beliebig sind, so finden wir

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{\dfrac{(\log r)^2(\log_2 r)^2}{\log_3 r}} \geqq \frac{3A-\pi}{8A^2} = \frac{9}{32\pi}$$

für $A = \dfrac{2\pi}{3}$

Satz 1. *Es sei $w(z)$ eine meromorphe Funktion für die*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{\dfrac{(\log r)^2(\log_2 r)^2}{\log_3 r}} = h < +\infty$$

ist

A. *Falls $h < \dfrac{9}{32\pi}$ ist, so besitzt $w(z)$ höchstens zwei defekte Werte*

B. *Falls $h < \dfrac{1}{8\pi}$ ist, so besitzt $w(z)$ höchstens einen defekten Wert.*

C. *Falls $h < \dfrac{1}{32\pi}$ ist und $w(z)$ einen defekten Wert a hat, ($w(z)$ kann wegen B nicht zwei defekte Werte haben) so existiert eine Reihe von Kreisen $|z| = r_n$, $r_n \to \infty$, auf welchen $w(z)$ gleichmässig gegen a strebt, und a ist deshalb der einzig mögliche asymptotische Wert.*

Wir erinnern an das Ergebnis G. Valirons [1], laut welchem jeder waschenden Funktion $\varphi(r)$, $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = \infty$ eine meromorphe Funktion $w(r)$ entspricht, für die $T(r, w) < \varphi(r)(\log r)^2$ ist und die unendlich viele asymptotische Werte besitzt. Es ist also die Anwesenheit des defekten Werte im Falle C obigen Satzes eine Notwendigkeit.

Der Beweis wurde nur für den Fall A des Satzes durchgeführt. Er kann auf ähnliche Weise auch für die anderen zwei Fälle durchgeführt werden.

§ 3. In diesem Paragraph werden wir uns beschäftigen mit meromorphen Funktionen für die

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log_2 r} = \lambda < \infty$$

ist. Es ist leicht zu beweisen dass dann für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{(\log r)^{\lambda_1}} = \infty$$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{(\log r)^{\lambda_2}} = 0$$

Sollte man eine neue Bedingung einführen die die Stellen betrifft, in welchen die meromorphe Funktion drei Werte annimmt, so kann man den Satz 1 auf folgende Weise verstärken.

Satz 2. *Es sei $w(z)$ eine meromorphe Funktion und $T(r, w)$ ihre charakteristische Funktion. Wir nehmen an, dass alle Stellen z für die $w(z) = a, b, c$ ist auf n Halbgeraden liegen und dass*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log_2 r} = \lambda < \infty$$

ist.

A. *Falls $\lambda < \dfrac{2n}{n-3}$ $(n \geqq 3)$ so können a, b, c nicht zu gleicher Zeit defekte Werte sein.*

B. *Falls $\lambda < \dfrac{2n}{n-2}$ $(n \geqq 2)$ so ist höchstens einer von diesen drei Werten defekt.*

C. *Falls $\lambda < \dfrac{2n}{n-1}$ $(n \geqq 1)$ und falls einer von diesen drei Werten a, b, c defekt ist (zwei können wegen B nicht defekt sein), so existiert eine Reihe von Kreisen $|z| = r_k \to \infty$ auf welchen $w(z)$ gleichmässig gegen diesen Wert strebt; dementsprechend besitzt die Funktion $w(z)$ höchstens einen defekten und einen asymptotischen Wert* [1]).

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf folgende zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 4. *Es sei Δ das Gebiet, das aus der z-Ebene entsteht,*

[1]) Albert Edrei [5] hat bewiesen, dass eine meromorphe Funktion $w(z)$ für welche die a, b, c-Stellen auf n Halbgeraden liegen, und für die a, b, c defekte Werte sind, eine endliche Ordnung haben muss.

falls man die Segmente $0 \leqq |z| \leqq e^{-\mu}$; $e^{\mu} \leqq |z| \leqq \infty$; *arg* $z = \theta_j$; $j = 1, 2, \ldots, n$ *entfernt* $(\mu > 0;\ 0 \leqq \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi)$ *Die hyperbolische Länge* $L(\mu)$ *des Kreises* $|z| = 1$ *in bezug auf* Δ *erfüllt die Bedingung.*

$$L(\mu) \leqq n \log \frac{1}{\mu} + 0(1)$$

für $\mu \to 0$.

Mittels der Funktion $w = u+iv = \log z$, bilden wir die universelle Überlagerungsfläche des Gebietes Δ auf das einfachzusammenhängende Gebiet D ab. (D ist den Segmenten $-\infty \leqq u \leqq -\mu$; $\mu \leqq u \leqq \infty$; $v = \theta_j + 2k\pi$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; komplementär). Dabei geht der Kreis $|z| = 1$ in das Segment $u = 0$; $\frac{(\theta_n - 2\pi) + \theta_1}{2} \leqq v \leqq \frac{\theta_n + (\theta_1 + 2\pi)}{2}$ über. Wir bezeichnen mit d dieses Segment, mit d_j das Segment $u = 0$; $\frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2} \leqq v \leqq \frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}$ $(\theta_0 = \theta_n - 2\pi;\ \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi)$ mit l_j die hyperbolische Länge des Segments d_j und mit $\Delta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$. Es folgt $L(\mu) = \sum_{j=1}^{n} l_j$

Um die Länge l_j zu berechnen werden wir die Funktion $w = \frac{2\mu\zeta}{1+\zeta^2} + i\theta_j$ betrachten, welche die Kreisscheibe $|\zeta| < 1$ in das Gebiet D_j, das den Segmenten $-\infty < u \leqq -\mu$; $\mu \leqq u \leqq \infty$ komplementär ist, abbildet. Man kann leicht sehen, dass der Kreis

$$\Gamma : |\zeta - ci| < \varrho$$

wo

$$c = \frac{\eta' + \eta''}{2},\quad \varrho = \frac{\eta' - \eta''}{2}$$

und

$$\eta' = \frac{\sqrt{\mu^2 + \Delta_j^2} - \mu}{\Delta_j},\quad \eta'' = -\frac{\sqrt{\mu^2 + \Delta_{j-1}^2} - \mu}{\Delta_{j-1}}$$

ist, durch diese Abbildung in das Gebiet D abgebildet wird. Ähnlich sieht man, dass das Segment δ_j

$$\xi = 0; \quad -\frac{\sqrt{\mu^2+\left(\frac{\Delta_{j-1}}{2}\right)^2}-\mu}{\frac{\Delta_{j-1}}{2}} \leqq \eta \leqq \frac{\sqrt{\mu^2+\left(\frac{\Delta_j}{2}\right)^2}-\mu}{\frac{\Delta_j}{2}}$$

wo $\zeta = \xi + i\eta$ ist, in das Segment d_j abgebildet wird. Wir bezeichnen mit λ_j die hyperbolische Länge des Segmentes δ_j in bezug Γ, und gemäss dem Prinzip des hyperbolischen Masses haben wir $l_j \leqq \lambda_j$. Nun ist

$$\lambda_j = \tfrac{1}{2}\log\frac{\varrho+\varrho'}{\varrho-\varrho'} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\varrho+\varrho''}{\varrho-o''}$$

wo

$$\varrho' = \frac{\sqrt{\mu^2+\left(\frac{\Delta_j}{2}\right)^2}-\mu}{\frac{\Delta_j}{2}} - c$$

$$\varrho'' = \frac{\sqrt{\mu^2+\left(\frac{\Delta_{j-1}}{2}\right)^2}-\mu}{\frac{\Delta_{j-1}}{2}} + c$$

ist. Es ist leicht auszurechnen, dass

$$\eta' = 1 - \frac{\mu}{\Delta_j} + \cdots \quad ; \quad \eta'' = -\left(1 - \frac{\mu}{\Delta_{j-1}} + \cdots\right)$$

$$c = \frac{\Delta_j - \Delta_{j-1}}{2\Delta_{j-1}\Delta_j}\mu + \cdots \quad ; \quad \varrho = 1 - \frac{\Delta_{j-1}+\Delta_j}{2\Delta_{j-1}\Delta_j}\mu + \cdots$$

$$\varrho' = 1 - \frac{3\Delta_{j-1}+\Delta_j}{2\Delta_{j-1}\Delta_j}\mu + \cdots \quad ; \quad \varrho'' = 1 - \frac{\Delta_{j-1}+3\Delta_j}{2\Delta_{j-1}\Delta_j}\mu + \cdots$$

$$\lambda_j = \tfrac{1}{2}\log\frac{2\Delta_j}{\mu} + \tfrac{1}{2}\log\frac{2\Delta_{j-1}}{\mu} + \cdots$$

$$L(\mu) = \sum_{j=1}^{n} l_j \leqq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = n\log\frac{1}{\mu} + \sum_{j=1}^{n}\log 2\Delta_j + \cdots$$

ist, was zu beweisen war.

Hilfssatz 5. *Es sei* $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots \lim\limits_{k\to\infty} p_k = \infty$ *eine Reihe von positiven reellen Zahlen, und* $n(r)$ *die grösste ganze Zahl, für die* $p_k \leqq r$ *ist. Wenn wir mit*

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)dt}{t}$$

$$\mu_k = \log \frac{p_{k+1}}{p_k}$$

bezeichnen, so folgt aus

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r)}{(\log r)^\lambda} = 0; \qquad \lambda > 2$$

die Beziehung

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k (\log \varrho_k)^{\lambda-2} = \infty$$

wo $\varrho_k = \sqrt{p_k p_{k+1}}$ *ist.*

Wenn $n(r) \geqq \varepsilon(\log r)^{\lambda-1}$ für $r \geqq r_0$ ist, so ist auch

$$N(r) \geqq \int_{r_0}^r \frac{n(t)dt}{t} \geqq \varepsilon \int_{r_0}^r \frac{(\log t)^{\lambda-1}dt}{t} = \frac{\varepsilon}{\lambda}(\log r)^\lambda - \frac{\varepsilon}{\lambda}(\log r_0)^\lambda$$

und daraus ist,

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r)}{(\log r)^\lambda} \geqq \frac{\lambda}{\varepsilon} > 0$$

gegen die Voraussetzung. Es gibt also, für jedes $\varepsilon > 0$, eine Reihe von Zahlen $r_1 < r_2 < \ldots < r_\nu < \ldots$, $\lim_{\nu\to\infty} r_\nu = \infty$ so dass

$$n(r_\nu) < \varepsilon (\log r_\nu)^{\lambda-1}$$

ist. Es sei σ eine Zahl für die $0 < \sigma < 1$ ist. Aus den ersichtlichen Ungleichungen

$$p_{n(r_\nu^\sigma)} \leqq r_\nu^\sigma < r_\nu < p_{n(r_\nu)+1}$$

folgt

$$(1-\sigma) \log r_\nu = \log \frac{r_\nu}{r_\nu^\sigma} < \log \frac{p_{n(r)_\nu+1}}{p_{n(r_\nu^\sigma)}} = \sum_{k=n(r_\nu^\sigma)}^{n(r_\nu)} \mu_k \leqq$$

$$\leqq n(r_\nu) \max_{n(r_\nu^\sigma)\leqq k\leqq n(r_\nu)} \{\mu_k\} \leqq \varepsilon (\log r_\nu)^{\lambda-1} \max_{n(r_\nu^\sigma)\leqq k\leqq n(r_\nu)} \{\mu_k\}$$

Es sei k_ν dasjenige k, $n(r_\nu^\sigma) \leqq k \leqq n(r_\nu)$, für welches

$$\mu_{k_\nu} = \max_{n(r_\nu^\sigma)\leqq k\leqq n(r_\nu)} \{\mu_k\}$$

ist. Aus obiger Ungleichung folgt

$$\mu_{k_\nu} (\log r_\nu)^{\lambda-2} \geqq \frac{1-\sigma}{\varepsilon}$$

Falls für einen τ, $0 < \tau < \sigma$

$$\varrho_{k_\nu} < r_\nu^\tau < r_\nu^\sigma$$

ist, so ist $k_\nu = n(r_\nu^\sigma)$ und daraus

$$p_{n(r_\nu^\sigma)}\ p_{n(r_\nu^\sigma)+1} < r_\nu^{2\tau}$$

Aber $p_{n(r_\nu^\sigma)+1} > r_\nu^\sigma$ und dementsprechend

$$p_{n(r_\nu^\sigma)} < r_\nu^{2\tau-\sigma}$$

$$\mu_{n(r_\nu^\sigma)} = \log \frac{p_{n(r_\nu^\sigma)+1}}{p_{n(r_\nu^\sigma)}} > \log \frac{r_\nu^\sigma}{r_\nu^{2\tau-\sigma}} = 2(\sigma-\tau) \log r_\nu$$

Ist also $\varrho_{k_\nu} < r_\nu^\tau$ für unendlich viele ν so ist

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k = \infty$$

und die Beziehung des Hilfssatzes ist erfüllt. Im entgegengesetzten Falle, haben wir für genügend grosse ν

$$\varrho_{k_\nu} > r_\nu^\tau$$

und deshalb

$$(\log \varrho_{k_\nu})^{\lambda-2} > \tau^{\lambda-2} (\log r_\nu)^{\lambda-2}$$

Daher ist

$$\mu_{k_\nu} (\log \varrho_{k_\nu})^{\lambda-2} > \tau^{\lambda-2} \mu_{k_\nu} (\log r_\nu)^{\lambda-2} > \tau^{\lambda-2} \frac{1-\sigma}{\varepsilon}$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für jedes $\varepsilon > 0$ und darum ist

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k (\log \varrho_k)^{\lambda-2} = \infty$$

was zu beweisen war.

Nehmen wir jetzt an, dass $w(z)$ drei defekte Werte besitzt und dass diese drei Werte 0, 1 und ∞ sind. Nach dem Hilfssatz 2 ist dann

$$\liminf_{r\to\infty} [l(r) - 3 \log T(r, w)] > -\infty$$

Es sei auch

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log_2 r} = \lambda < \infty$$

Dann ist für $\lambda_2 > \lambda$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{(\log r)^{\lambda_2}} = 0$$

Wir bezeichnen mit z_k die Punkte in welchen $w(z)$ gleich 0, 1, ∞ ist. Wenn man in Hilfssatz 5, $p_k = |z_k|$ nimmt so folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k (\log \varrho_k)^{\lambda-2} = \infty$$

Aus dem Hilfssatz 4 haben wir dann

$$l(\varrho_k) = L(\mu_k) \leqq n \log \frac{1}{\mu_k} + 0(1)$$

Es sei $\lambda_1 < \lambda$ eine beliebige Zahl. Es ist

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{(\log r)^{\lambda_1}} = \infty$$

Dann haben wir für $r \geqq r(\varepsilon)$

$$T(r, w) \geqq \varepsilon (\log r)^{\lambda_1} = \varepsilon e^{\lambda_1 \log_2 r}$$

Die obige Ungleichung wird

$$\liminf_{k\to\infty} (n \log \frac{1}{\mu_k} - 3\lambda_1 \log_2 \varrho_k) > -\infty$$

$$\liminf_{k\to\infty} n \log \frac{1}{\mu_k (\log \varrho_k)^{\frac{3\lambda_1}{n}}} > -\infty$$

und daher

$$\frac{3\lambda_1}{n} < \lambda_2 - 2.$$

Da $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ willkürlich sind, so folgt

$$\frac{3\lambda}{n} \leqq \lambda - 2$$

oder

$$\lambda \geqq \frac{2n}{n-3}$$

was zu beweisen war. Genau so führt man den Beweis für den Fall B und C.

Bemerkungen. Indem man den Beweis des Hilfssatzes 4 betrachtet, sieht man, dass die Bedingung dass die a, b, c-Stellen auf n Halbgeraden liegen, mit der wenig einschränkenden Bedingung, dass die a, b, c Stellen in n Gebiete der Form

$$\theta_j - \frac{M}{(\log |z|)^{3\lambda_n}} < \arg z < \theta_j + \frac{M}{(\log |z|)^{3\lambda_n}} \quad (j = 1, 2, \ldots n)$$

wo M eine beliebig grosse Zahl und $\lambda_n = \frac{2n}{n-3}$, bzw. $\lambda_n = \frac{2n}{n-2}$ bzw. $\lambda_n = \frac{2n}{n-1}$ ist, ersetzt werden kann.

In den ausgelassenen Fällen ($n = 1$, 2 für die Bedingung A, $n = 1$ für die Bedingung B) kann man das Wachstum der charakteristischen Funktion noch vergrössern.

Bukarest

LITERATURVERZEICHNIS.

GEORGES VALIRON,

[1] Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes — Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo — v. 49, 1925, 415—421.

GEORGES VALIRON,

[2] Sur le nombre des singularités transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algébroïdes. Comptes rendus de l'Académie de Science, v. 200, 1935, 713—715.

Y. TUMURA,

[3] Sur les théorèmes de M. Valiron et les singularités transcendantes indirectement critiques. Proceedings of the Imperial Academy, vol. 17 no. 3, 1941, 65—69.

GEORGES VALIRON,

[4] Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris vol. 230, 1950, 40—42.

ALBERT EDREI,

[5] Meromorphic functions with three radially distributed values. Transactions of the American Mathematical Society v 78, 1955, 276—293.

(Oblatum 24-9-56).