COMPOSITIO MATHEMATICA

JOSEF WEIER

Ein Approximationssatz

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 185-216
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__185_0>

Ein Approximationssatz.

von

Josef Weier

Fulda

Es sei P ein Polyeder und F eine für alle (p, τ), wobei p ein Punkt von P und τ eine Zahl aus $[0, 1]$ ist, erklärte stetige Abbildung in P. Mit f^τ bezeichnen wir die durch $f^\tau(p) = F(p, \tau)$, $p \in P$, bestimmte Abbildung von P in sich. Dann heisst $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine „Abbildungsschar" oder „Deformation" in P, mit $f = f^0$ und $f^1 = f'$ auch eine Deformation von f in f'. Gilt für $0 \leqq \tau \leqq 1$, dass die Abbildung f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte hat, so nennen wir F eine „isolierte Deformation". Gibt es eine natürliche Zahl ζ mit der Eigenschaft, dass für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung f^τ höchstens ζ Fixpunkte hat, so bezeichnen wir F als eine „gleichmässig isolierte Deformation".

Wir werden in dieser Arbeit unter anderem folgenden Satz beweisen.

Satz I. Sind P eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und f, f' einander homotope Abbildungen von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, so existiert eine gleichmässig isolierte Deformation von f in f'.

Was leistet Satz I für P? Erstens wird durch eine in den Abschnitten 4 und 5 bewiesene Verschärfung von Satz I der Hopfsche Approximationssatz [1]) von einer Abbildung auf eine Abbildungsschar verallgemeinert. Zweitens führt Satz I zu einem neuen Beweis für die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl einer stetigen Abbildung von P in sich.

1. Zum Hopfschen Approximationssatz. Es seien P ein endliches Polyeder, q ein Punkt von P und f eine stetige Abbildung von P in sich mit q als Fixpunkt, ferner V eine in P offene zu einer Vollkugel homöomorphe Menge mit $q \in V$, so dass q der einzige Fixpunkt von f auf V ist. Dann heisst q ein „regulärer Fixpunkt" von f. Und es gilt folgender Approximationssatz:

---

[1]) H. Hopf, „Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten", Mathem. Zeitschrift, vol. 29 (1929), pp. 493—524.

Zu jeder stetigen Abbildung f von P in sich und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Abbildung g von P in sich mit $\varrho(f, g) < \varepsilon$ und der Eigenschaft, dass jeder Fixpunkt von g regulär ist.

Für die kompakte topologische Mannigfaltigkeit P ist, wenn f eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten bezeichnet, jeder Fixpunkt von f regulär. Hier ist also mit dem vorstehenden Approximationssatz folgender Satz äquivalent: Zu jeder stetigen Abbildung f von P in sich und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Abbildung g von P in sich mit $\varrho(f, g) < \varepsilon$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf eine Abbildungsschar lautet:

Zu jeder Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit $\varrho(f^\tau, g^\tau) < \varepsilon, 0 \leqq \tau \leqq 1$, und der Eigenschaft, dass für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung g^τ höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

Dieser Satz wie Satz I werden in den Abschnitten 4 und 5 bewiesen.

Gilt von der isolierten Deformation $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, dass für $0 \leqq \tau \leqq 1$ jeder Fixpunkt von f^τ regulär ist, so nennen wir $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ auch „regulär". Eine gleichmässig isolierte Deformation, welche regulär ist, nennen wir auch „gleichmässig regulär". In einer Mannigfaltigkeit ist jede isolierte Deformation regulär.

2. Zur algebraischen Fixpunktzahl. Aus dem Satz, dass die algebraische Fixpunktzahl einer stetigen Abbildung eines endlichen Polyeders in sich gleich der Lefschetzschen Zahl der Abbildung ist [2]), folgt, da die Lefschetzsche Zahl eine Homologie- und also eine Homotopieinvariante ist, dass homotope Abbildungen eines endlichen Polyeders in sich die gleiche algebraische Fixpunktzahl haben.

Wir behaupten:

Satz II. Auch für die kompakte topologische Mannigfaltigkeit P ist die algebraische Fixpunktzahl eine Homotopieinvariante.

Ist P simplizial zerlegbar, so folgt die Behauptung aus dem Satz über die Lefschetzsche Zahl. Lässt P keine simpliziale Zerlegung zu, so behält der anschliessend vermöge Satz I geführte Beweis von Satz II seine Gültigkeit. — Ein anderer Beweis von

---

[2]) H. Hopf, a.a.O. Vergleiche ferner P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, Berlin (1935).

Satz II ergibt sich leicht aus Überlegungen, wie sie von Leray [3]) mit Hilfe der Lefschetzschen Zahl für bikompakte zusammenhängende Hausdorffsche Räume, die gewisse Überdeckbarkeitseigenschaften haben, durchgeführt worden sind.

Beweis von Satz II. Der folgende für endliche Polyeder geltende Deformationssatz lässt sich ohne Schwierigkeiten auch für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten beweisen: Zu jeder stetigen Abbildung g eines endlichen Polyeders in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, dass jede stetige Abbildung g' dieses Polyeders in sich mit $\varrho(g, g') < \varepsilon$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten die gleiche algebraische Fixpunktzahl wie g hat.

Hierauf seien f und f' homotope Abbildungen von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten. Nach Satz I gibt es dann eine Deformation (f^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$) von f in f', so dass für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte hat. Und nach dem vorstehenden Deformationssatz gibt es zu jeder Zahl τ aus $[0, 1]$ eine Zahl $\varepsilon^\tau > 0$ mit der Eigenschaft: für alle σ aus $[0, 1]$ mit $|\sigma - \tau| < \varepsilon^\tau$ haben die Abbildungen f^σ und f^τ dieselbe algebraische Fixpunktzahl.

Da das Intervall $[0, 1]$ schon durch endlich viele der Intervalle $(\tau - \varepsilon^\tau,\ \tau + \varepsilon^\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, überdeckt wird, erhält man eine Kette $f = f^{\alpha_0}, f^{\alpha_1}, \ldots, f^{\alpha_m} = f'$ derart, dass für $i = 0, \ldots, m - 1$ die Abbildungen f^{α_i} und $f^{\alpha_{i+1}}$ dieselbe algebraische Fixpunktzahl haben. Hieraus folgt Satz II.

1. *Reguläre Verbindungsfunktionen.*

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen. Es bedeutet R^n den n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum. Sind a, b die Punkte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ des R^n, so ist $a + b$ der Punkt $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ und $\bar{a} + \bar{b}$ die aus den Punkten a und b bestehende Menge, ferner $\overrightarrow{ab}$ der Punkt $(\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n)$. Sind M und N Mengen des R^n, so bezeichnet $B(N; M)$ die Begrenzung bezüglich M von N. Statt $B(N; R^n)$ schreiben wir auch $B(N)$. Die Entfernung von M und N wird mit $\varrho(M, N)$ bezeichnet. Es bedeutet $\delta(M)$ den Durchmesser von M und $U(M; \delta)$ die δ-Umgebung inbezug auf den R^n von M.

Sind $a_1, \ldots, a_r$ linear unabhängige Punkte des R^n, so ist $\overline{a_1, \ldots a_r}$ das von diesen Punkten aufgespannte abgeschlossene

[3]) J. Leray, „Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations", Journal de Mathemathiques pures et appliquées, vol. 24 (1945), pp. 95—167.

Simplex. Für solche Simplexe benutzen wir auch die Bezeichnungen $\bar{x}$, $\bar{x}_1$, $\bar{y}$ etc. Das Innere von $\bar{x}$ inbezug auf seine Trägerebene wird mit $J(\bar{x})$, der Rand bezüglich der Trägerebene mit $\dot{\bar{x}}$ bezeichnet.

Die Bezeichnung $i = 1, 2, \ldots$ besagt, dass i alle natürlichen Zahlen durchläuft. Durchläuft i nur endlich viele, so geben wir stets das letzte Glied an.

Unter einem „*endlichen Polyeder*" des R^n verstehen wir die Vereinigungsmenge von endlich vielen Simplexen $\bar{x}$ des R^n. Eine r-dimensionale „*topologische Mannigfaltigkeit*" im R^n ist eine Menge M im R^n mit der Eigenschaft: zu jedem Punkt p von M gibt es eine in M offene zum R^r homöomorphe Teilmenge von M, die p enthält.

Unter dem n-dimensionalen „*Einheitswürfel*" verstehen wir die Menge aller Punkte $(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ des R^n mit $0 \leqq \tau^i \leqq 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Definition. *Als eine „reguläre Verbindungsfunktion" des R^2 bezeichnen wir eine für alle 4-Tupel (p, p', τ^1, τ^2), wobei p und p' Punkte des R^2 und τ^1, τ^2 Zahlen aus $[0, 1]$ sind, erklärte stetige Abbildung a in den R^2 mit den folgenden Eigenschaften 1 bis 4.*

1. *Es ist $a(p, p', \tau^1, 0) = p$ und $a(p, p', \tau^1, 1) = p'$ für alle Punktpaare (p, p') des R^2 und alle Zahlen τ^1 aus $[0, 1]$.*

2. *Es ist $(a(p, p', \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, 0 \leqq \tau^2 \leqq 1) = p$, wenn (p, p') ein Punktpaar des R^2 mit $p = p'$.*

3. *Sind p, p' Punkte des R^2 und (τ_1^1, τ_1^2), (τ_2^1, τ_2^2) Punkte des 2-dimensionalen Einheitswürfels mit $a(p, p', \tau_1^1, \tau_1^2) = a(p, p', \tau_2^1, \tau_2^2)$, $p \neq p'$, $0 < \tau_1^2 < 1$, $0 < \tau_2^2 < 1$, so ist $(\tau_1^1, \tau_1^2) = (\tau_2^1, \tau_2^2)$.*

4. *Sind p, p' Punkte des R^2 und τ^1, τ_1^2, τ_2^2 Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ mit $a(p, p', \tau^1, \tau_1^2) = a(p, p', \tau^1, \tau_2^2)$ und $p \neq p'$, so ist $\tau_1^2 = \tau_2^2$.*

Wie man sich leicht überlegt, existieren reguläre Verbindungsfunktionen des R^2: Es sei S die 1-dimensionale Sphäre des R^2 mit $(0, 0)$ als Mittelpunkt und 1 als Radius. Dann genügt es, a zu erklären in allen (p, p', τ^1, τ^2), für welche (p, p') ein zu $(0, 0)$ diametrales Punktpaar auf S ist. Nun sei q der Punkt $(0, +1)$ und q' der Punkt $(0, -1)$. Für jede Zahl α aus $[0, 1]$ sei ferner s_α der Punkt $(2\alpha - 1, 0)$ und $(a(q, q', \alpha, \tau^1), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1)$ der Streckenzug $\overline{qs_\alpha} + \overline{s_\alpha q'}$. Ist hierauf (p, p') ein zu $(0, 0)$ diametrales Punktpaar auf S, so drehe man den R^2 um $(0, 0)$, bis q in p liegt. Dann sei $a(p, p', \tau^1, \tau^2)$ der Punkt, in den $a(q, q', \tau^1, \tau^2)$ bei dieser Drehung übergeht.

Bis zum Schluss dieses Abschnittes seien M eine Menge des R^2, f und f' stetige Abbildungen von M in den R^2 ohne Fixpunkte, ferner a_0 eine reguläre Verbindungsfunktion des R^2 und a die für alle (p, τ^1, τ^2) mit $p \in M$, $0 \leqq \tau^1 \leqq 1$ und $0 \leqq \tau^2 \leqq 1$ durch

$$a(p, \tau^1, \tau^2) = a_0(f(p), f'(p), \tau^1, \tau^2)$$

bestimmte Abbildung in den R^2. Ferner sei $A(p)$ für $p \in M$ die Menge

$$(a(p, \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, 0 \leqq \tau^2 \leqq 1)$$

und N die Menge aller Punkte p von M mit $p \in A(p)$. Für $p \in N$ sei $h(p)$ die Menge aller Punkte (τ^1, τ^2) des 2-dimensionalen Einheitswürfels mit $p = a(p, \tau^1, \tau^2)$.

Dann wollen wir I bis IV beweisen:

I. 1. *Es ist $a(p, \tau^1, 0) = f(p)$ und $a(p, \tau^1, 1) = f'(p)$ für alle Punkte p aus M und alle Zahlen τ^1 aus* $[0, 1]$.

I. 2. *Ist p ein Punkt aus M mit $f(p) = f'(p)$, so gilt $A(p)=f(p)$.*

I. 3. *Sind p ein Punkt aus M und (τ_1^1, τ_1^2), (τ_2^1, τ_2^2) Punkte des 2-dimensionalen Einheitswürfels mit*

$$a(p, \tau_1^1, \tau_1^2) = a(p, \tau_2^1, \tau_2^2), f(p) \neq f'(p), 0 < \tau_1^2 < 1, 0 < \tau_2^2 < 1,$$

so gilt $(\tau_1^1, \tau_1^2) = (\tau_2^1, \tau_2^2)$.

I. 4. *Sind p ein Punkt aus M und τ^1, α, β Zahlen aus dem Intervall* $[0, 1]$ *mit $a(p, \tau^1, \alpha) = a(p, \tau^1, \beta)$ und $f(p) \neq f'(p)$, so ist $\alpha = \beta$.*

II. *Es seien q ein Punkt aus M mit $f(q) \neq f'(q)$, ferner σ_0^i, σ^i und σ_1^i, $i = 1, 2$, Zahlen mit $0 < \sigma_0^i < \sigma^i < \sigma_1^i < 1$. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass $\overline{U}(a(q, \sigma^1, \sigma^2); \delta)$ in $(a(q, \tau^1, \tau^2), \sigma_0^i \leqq \tau^i \leqq \sigma_1^i, i = 1, 2)$ liegt.*

III. *Die Abbildung h ist eindeutig und stetig.*

IV. *Es seien q ein Punkt aus N, ferner σ^1, σ^2 Zahlen mit $0 < \sigma^i < 1$, $i = 1, 2$, und $q = a(q, \sigma^1, \sigma^2)$. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$ mit $M \,.\, \overline{U}(q; \delta) \subset N$.*

Die Aussagen I.1 bis I.4 folgen aus den Eigenschaften 1 bis 4 einer regulären Verbindungsfunktion.

Beweis von II. Es sei E die Menge aller Punkte (τ^1, τ^2) des 2-dimensionalen Einheitswürfels mit $\sigma_0^i < \tau^i < \sigma_1^i$, $i = 1, 2$, und b die durch $b(\tau^1, \tau^2) = a(q, \tau^1, \tau^2)$ bestimmte Abbildung von $\overline{\mathrm{E}}$ in den R^2. Die Abbildung b ist stetig. Sie ist ferner eineindeutig: Sind (τ_1^1, τ_1^2) und (τ_2^1, τ_2^2) Punkte aus $\overline{\mathrm{E}}$, so ist im besonderen $0 < \tau_1^2 < 1$ und $0 < \tau_2^2 < 1$; wegen $f(q) \neq f'(q)$ und

I.3 sind also $b(\tau_1^1, \tau_1^2)$ und $b(\tau_2^1, \tau_2^2)$ nur dann gleich, wenn (τ_1^1, τ_1^2) und (τ_2^1, τ_2^2) gleich.

Mithin ist die Abbildung b topologisch. Da E eine offene Menge des R^2 ist, so ist also auch $b(E)$ eine solche. Und hieraus folgt, da $a(q, \sigma^1, \sigma^2)$ ein Punkt von $b(E)$ ist, bereits II.

Beweis von III. Es sei q ein Punkt aus N. Da f nach Voraussetzung keinen Fixpunkt hat, ist im besonderen $q \neq f(q)$. Aus $f(q) = f'(q)$ und I.2 würde also folgen, dass $q \in A(q)$ im Widerspruch zur Erklärung von N. Mithin

$$(^*) \qquad f(q) \neq f'(q).$$

Es seien (τ_i^1, τ_i^2), $i = 1, 2$, zwei nicht notwendig verschiedene Punkte der Menge $h(q)$, also $q = a(q, \tau_i^1, \tau_i^2)$ für $i = 1, 2$. Dann ist

$$(^*_*) \qquad a(q, \tau_1^1, \tau_1^2) = a(q, \tau_2^1, \tau_2^2).$$

Wegen $q \neq f(q)$ und $q \neq f'(q)$ sowie I.1 ist ferner

$$(^{**}_{*}) \qquad 0 < \tau_i^2 < 1, \qquad i = 1, 2.$$

Aus $(^*)$ bis $(^{**}_{*})$ und I.1 schliesslich folgt, dass $(\tau_1^1, \tau_1^2) = (\tau_2^1, \tau_2^2)$, also die Eindeutigkeit von h.

Für $p \in N$ bezeichnen wir den Punkt $h(p)$ auch mit (τ_p^1, τ_p^2).

Wir machen die Annahme, es sei die Abbildung h in dem Punkt q von N unstetig. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass zu jeder natürlichen Zahl k sich ein Punkt a_k in N befindet mit $\varrho(a_k, q) < \frac{1}{k}$ und der Gültigkeit wenigstens einer der beiden Ungleichungen $| \tau_q^i - \tau_{a_k}^i | \geqq \epsilon$, $i = 1, 2$. Unter den Zahlen 1, 2 befindet sich mindestens eine, wir bezeichnen mit r eine solche, zu der es eine Teilfolge $b_1, b_2, \ldots$ der Folge $a_1, a_2, \ldots$ gibt mit

$$(^+) \qquad | \tau_q^r - \tau_{b_k}^r | \geqq \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Da die Punkte $(\tau_{b_k}^1, \tau_{b_k}^2)$, $k = 1, 2, \ldots$, im 2-dimensionalen Einheitswürfel, also in einem Kompaktum liegen, gibt es eine Teilfolge $c_1, c_2, \ldots$ von $b_1, b_2, \ldots$ derart, dass die Folge $(\tau_{c_k}^1, \tau_{c_k}^2)$, $k = 1, 2, \ldots$, konvergiert, dass also jede der beiden Zahlenfolgen $\tau_{c_1}^i, \tau_{c_2}^i, \ldots$, $i = 1, 2$, konvergent ist. Bezeichnen wir $\lim \tau_{c_k}^i$, $k \to \infty$, mit ζ^i, so ist $\zeta^r \neq \tau_q^r$ wegen $(^+)$ und also

$$(^+_+) \qquad (\zeta^1, \zeta^2) \neq \tau_q^1, \tau_q^2).$$

Weiter ist

$$(^{++}_{+}) \qquad q = a(q, \zeta^1, \zeta^2).$$

Zum Beweis sei $\omega > 0$ vorgegeben. Wir bezeichnen für $k = 1, 2, \ldots$ den Punkt $a(q, \tau^1_{c_k}, \tau^2_{c_k})$ auch mit q_k. Wegen

$$a(q, \zeta^1, \zeta^2) = a(q, \lim \tau^1_{c_k}, \lim \tau^2_{c_k}) = \lim a(q, \tau^1_{c_k}, \tau^2_{c_k}) = \lim q_k$$

genügt es, statt $(^{++}_{+})$ zu zeigen: $\varrho(q, q_k) < \omega$ bei hinreichend grossem k. Wegen $c_k \to q$, $k \to \infty$, ist

$$\varrho(a(c_k, \tau^1_{c_k}, \tau^2_{c_k}), a(q, \tau^1_{c_k}, \tau^2_{c_k})) < \frac{\omega}{2},$$

wenn nur k hinreichend gross ist, wegen der Bedeutung von c_k und q_k also $\varrho(c_k, q_k) < \frac{\omega}{2}$. Hieraus und aus $c_k \to q$, $k \to \infty$, folgt, dass $\varrho(q_k, q) < \omega$ bei hinreichend grossem k.

Da h eindeutig ist, widersprechen $q = a(q, \tau^1_q, \tau^2_q)$ und $(^{+}_{+})$, $(^{++}_{+})$ einander. Also ist, wie behauptet, h stetig.

B e w e i s von IV. Wie unter III schon festgestellt wurde, ist $f(q) \neq f'(q)$. Bezeichnen daher σ^i_0 und σ^i_1, $i = 1, 2$, Zahlen mit $0 < \sigma^i_0 < \sigma^i < \sigma^i_1 < 1$, $i = 1, 2$, so gibt es nach II eine Zahl $\varDelta > 0$ derart, dass

$$(^*) \qquad U(q; \varDelta) \subset (a(q, \tau^1, \tau^2), \sigma^i_0 \leqq \tau^i \leqq \sigma^i_1, \; i = 1, 2).$$

Wir machen die Annahme, zu jeder Zahl $\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, existiere ein Punkt $q_k \in M$ mit $\varrho(q_k, q) < \frac{1}{k}$ und der Eigenschaft, dass die abgeschlossene Menge $A(q_k)$ einen Randpunkt r_k mit $\varrho(r_k, q) < \frac{1}{k}$ hat. Für $k = 1, 2, \ldots$ seien dann τ^1_k und τ^2_k Zahlen, so dass r_k der Punkt $a(q_k, \tau^1_k, \tau^2_k)$ ist. Wenigstens eine der Zahlen τ^1_k und τ^2_k ist 0 oder 1. Im anderen Fall folgte nämlich aus II, dass eine ganze Umgebung von r_k in der Menge $A(q_k)$ enthalten ist.

Wegen $\lim \varrho(r_k, q) = 0$ und $\lim \varrho(q_k, q) = 0$, $k \to \infty$, gibt es eine natürliche Zahl m mit $\varrho(q, r_m) < \frac{\varDelta}{2}$ und $\varrho(a(q_m, \tau^1_m, \tau^2_m), a(q, \tau^1_m, \tau^2_m)) < \frac{\varDelta}{2}$. Wegen $r_m = a(q_m, \tau^1_m, \tau^2_m)$ ist dann

$$(^*_*) \qquad \varrho(q, a(q, \tau^1_m, \tau^2_m)) < \varDelta.$$

Da wenigstens eine der Zahlen τ^1_m und τ^2_m gleich 0 oder 1 ist, gilt, wenn wir die Menge der Punkte (τ^1, τ^2) des R^2 mit $\sigma^i_0 \leqq \tau^i \leqq \sigma^i_1$, $i = 1, 2$, auch Q nennen, $(\tau^1_m, \tau^2_m) \in Q$. Also existiert eine gegen den Punkt (τ^1_m, τ^2_m) konvergierende Folge $(\lambda^1_k, \lambda^2_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, mit

$$(\lambda^1_k, \lambda^2_k) \notin Q, \ 0 < \lambda^2_k < 1.$$

Wegen I.3 gilt dann für $k = 1, 2, \ldots$, dass der Punkt $a(q, \lambda^1_k, \lambda^2_k)$ nicht in der Menge $(a(q, \tau^1, \tau^2), \sigma^i_0 \leqq \tau^i \leqq \sigma^i_1, i = 1, 2)$ und wegen $(^*)$ daher auch nicht in $U(q; \Delta)$ gelegen ist. Mithin liegt auch der Punkt $a(q, \tau^1_m, \tau^2_m)$ nicht in $U(q; \Delta)$ im Widerspruch zu $(^*_*)$.

Somit ist die obige Annahme falsch. Daher gibt es eine Zahl $\delta_1 > 0$, so dass für alle Punkte p aus $M \, . \, U(q; \delta_1)$ gilt: kein Randpunkt der Menge $A(p)$ liegt in $U(q; \delta_1)$.

Da $q = a(q, \sigma^1, \sigma^2)$ ist, gibt es eine Zahl $\delta_2 > 0$, so dass für alle Punkte p aus $M \, . \, U(q; \delta_2)$ der Punkt $a(p, \sigma^1, \sigma^2)$ in $U(q; \delta_1)$ liegt, dass also für alle p aus $M \, . \, U(q; \delta_2)$ die Menge $A(p)$ zu $U(q; \delta_1)$ nicht fremd ist.

Mit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ hat hierauf δ die verlangte Eigenschaft: Es bezeichne p einen Punkt aus $M \, . \, U(q; \delta)$. Wegen $\delta \leqq \delta_2$ ist $A(p)$ zu $U(q; \delta_1)$ nicht fremd. Wegen $\delta \leqq \delta_1$ hat $A(p)$ keinen in $U(q; \delta_1)$ liegenden Randpunkt. Daher ist, da $A(p)$ abgeschlossen ist, $U(q; \delta_1)$ in $A(p)$ enthalten. Wegen $\delta \leqq \delta_1$ liegt p in $U(q; \delta_1)$, mithin in $A(p)$. Folglich gilt $p \in N$, was die Behauptung ist.

2. *Reguläre Abbildungsscharen im Kleinen.*

Der folgende Satz handelt über Abbildungsscharen von Polyedern des R^2 in den R^2. Auf ihn und eine in Abschnitt 3 bewiesene Ergänzung wird in Abschnitt 4 ein Satz im Grossen zurückgeführt.

Satz 1. *Es seien P_0 und P endliche Polyeder im R^2, so dass $P_0 \neq 0$ im Innern von P liegt, ferner f und f' stetige Abbildungen von P in den R^2 ohne Fixpunkte. Dann gibt es eine natürliche Zahl ζ und eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in den R^2 mit $f^0 = f$ und den Eigenschaften:*

$$f^\tau(p) = f(p), \qquad p \in B(P), \ 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

$$f^1(p) = f'(p), \text{ wenn } f(p) = f'(p).$$

$$f^1(p) = f'(p), \qquad p \in P_0,$$

für $0 \leqq \tau \leqq 1$ hat f^τ höchstens ζ Fixpunkte.

Wir zerlegen den Beweis von Satz 1 in drei Teile.

Erstens die Funktion a. Nach den Ausführungen in Abschnitt 1 können wir mit a eine für alle (p, τ^1, τ^2), p ein Punkt aus P

und τ^1, τ^2 Zahlen aus $[0, 1]$, erklärte stetige Abbildung in den R^2 bezeichnen, welche die Eigenschaften (1.1) bis (1.4) hat.

(1.1) Es ist $a(p, \tau^1, 0) = f(p)$ und $a(p, \tau^1, 1) = f'(p)$ für alle Paare (p, τ^1) mit $p \in P$ und $0 \leqq \tau^1 \leqq 1$.

(1.2) Es ist $(a(p, \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, 0 \leqq \tau^2 \leqq 1) = f(p)$, wenn p ein Punkt von P mit $f(p) = f'(p)$.

(1.3) Ist p ein Punkt aus P mit $f(p) \neq f'(p)$, so folgt, wenn τ_1^2 und τ_2^2 Zahlen in $(0, 1)$ sind, aus $a(p, \tau_1^1, \tau_1^2) = a(p, \tau_2^1, \tau_2^2)$ die Gleichung $(\tau_1^1, \tau_1^2) = (\tau_2^1, \tau_2^2)$.

(1.4) Ist p ein Punkt aus P mit $f(p) \neq f'(p)$, so folgt für beliebige Zahlen α, β in $[0, 1]$ aus $a(p, \tau^1, \alpha) = a(p, \tau^1, \beta)$ die Gleichung $\alpha = \beta$.

Die Menge aller p von P mit $p \in (a(p, \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, 0 \leqq \tau^2 \leqq 1)$ nennen wir Q. Wir nehmen an, dass Q nicht leer ist. Ist Q leer, so bestätigt man Satz 1 leicht mit Hilfe der Funktion g, welche in allen (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ bestimmt ist durch $g(p, \tau) = a(p, \frac{1}{2}, \tau)$. Wegen der Stetigkeit der Abbildung a ist Q abgeschlossen.

Wir bezeichnen für $p \in Q$ mit $h(p)$ die Menge aller Punkte (τ^1, τ^2) des 2-dimensionalen Einheitswürfels, für die die Gleichung $p = a(p, \tau^1, \tau^2)$ gilt. Nach Abschnitt 1 ist h eindeutig und stetig. Statt $h(p)$ schreiben wir auch ausführlicher (τ_p^1, τ_p^2). Es sei Q_0 die Menge aller Punkte p von Q mit $(\tau_p^1, \tau_p^2) = (\frac{1}{2}, \tau_p^2)$.

Für $Q_0 = 0$ ergibt sich Satz 1 leicht aus g. Wir nehmen fürs folgende an, dass Q_0 nicht leer ist. Wegen der Abgeschlossenheit von Q und der Stetigkeit von h ist Q_0 abgeschlossen. Es ist

$$0 < \tau_p^2 < 1, \qquad p \in Q. \tag{2}$$

Denn da $p = a(p, \tau_p^1, \tau_p^2)$, so folgt aus $\tau_p^2 = 0$ oder $\tau_p^2 = 1$ und (1.1), dass $p = f(p)$ resp. $p = f'(p)$ entgegen den Voraussetzungen.

Wir bezeichnen mit $\delta > 0$ eine Zahl, so dass

$$P \,.\, \overline{U}(Q_0; \delta) \subset Q \tag{3.1}$$

und weiter

$$0 < \tau_p^1 < 1, \qquad p \in P \,.\, U(Q_0; \delta), \tag{3.2}$$

ist. Die Zahl δ existiert: Nach Abschritt 1 gibt es zu jedem Punkt p von Q_0 eine Zahl $\delta_p > 0$, so dass $P \,.\, U(p; \delta_p) \subset Q$. Da Q_0 kompakt ist, lässt es sich bereits mit endlich vielen der $U(p; \delta_p)$ überdecken. Hieraus folgt zunächst, dass es eine Zahl $\delta' > 0$ gibt mit $P \,.\, U(Q_0; \delta') \subset Q$. Da weiter $\tau_p^1 = \frac{1}{2}$, $p \in Q_0$, und h

stetig ist, gilt, wenn die Zahl δ mit $0 < \delta < \delta'$ nur hinreichend klein gewählt ist, (3.2).

Es seien Q_1, Q_2 homogen 2-dimensionale endliche Polyeder mit

$$(3.3)\quad P\,.\,\overline{U}(Q_0;\ \tfrac{1}{4}\delta) \subset Q_1 \subset P\,.\,U(Q_0;\ \tfrac{1}{2}\delta),$$
$$P\,.\,\overline{U}(Q_0;\ \tfrac{3}{4}\delta) \subset Q_2 \subset P\,.\,U(Q_0;\ \delta).$$

Aus der Stetigkeit von h und der Erklärung von Q_0 folgt die Existenz einer Zahl $\varepsilon > 0$, so dass für alle $p \in Q$ mit $\varrho(p,\ Q_0) \geqq \frac{1}{4}\delta$ die Ungleichung

$$|\ \tau_p^1 - \tfrac{1}{2}\ | \geqq 2\varepsilon$$

gilt. Weiter existiert wegen der Stetigkeit von h eine Zahl $\eta > 0$, so dass, wenn p und q Punkte aus Q mit $\varrho(p,\ q) < \eta$ sind,

$$|\ \tau_p^i - \tau_q^i\ | < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad i = 1,\ 2,$$

gilt.

Zweitens Transformation von a. Es möge L_2 eine simpliziale Zerlegung von Q_2 bedeuten, welche auch in Q_1 eine simpliziale Zerlegung L_1 induziert und deren Simplexdurchmesser $< \eta$ sind. Die Eckpunkte von L_2 nennen wir e_i, $i = 1, \ldots, r$.

Hierauf sei $h^*(e_i)$, $i = 1, \ldots, r$, ein Punktsystem in allgemeiner Lage im Innern des 2-dimensionalen Einheitswürfels mit

$$(4)\qquad \varrho(h^*(e_i),\ h(e_i)) < \frac{\varepsilon}{8}, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

und der Eigenschaft, dass die Punkte $h^*(e_1), \ldots, h^*(e_r)$ zu der Strecke $((\frac{1}{2},\ \tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ des 2-dimensionalen Einheitswürfels fremd sind.

Durch die Erklärung der Punkte $h^*(e_i)$ ist eine simpliziale Abbildung h^* von Q_2 in das Innere des 2-dimensionalen Einheitswürfels bestimmt, mit der Bezeichnung $h^*(p) = (\tau_p^{1*},\ \tau_p^{2*})$ also

$$(5.1)\qquad 0 < \tau_p^{i*} < 1, \qquad i = 1,\ 2,\ p \in Q_2,$$

und es gilt weiter: Für $p \in Q_2$ und $i = 1,\ 2$ folgt

$$(5.2)\qquad |\ \tau_p^{i*} - \tfrac{1}{2}\ | > \varepsilon \text{ aus } |\ \tau_p^i - \tfrac{1}{2}\ | > 2\varepsilon.$$

Zum Beweis von (5.2) sei $\bar{x}$ ein Simplex von L_2, weiter q ein Punkt und e ein Eckpunkt von $\bar{x}$. Nach der Erklärung von L_2 ist dann $\varrho(q,\ e) < \eta$, nach der Erklärung von η also

$$(^*)\qquad |\ \tau_q^i - \tau_e^i\ | < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad i = 1,\ 2.$$

Nach (4) ist

$$(\overset{*}{*}) \qquad | \tau_e^{\,i} - \tau_e^{i*} | < \frac{\varepsilon}{8}, \qquad i = 1, 2.$$

Es seien c, d irgendzwei Eckpunkte von $\bar{x}$; wegen $\varrho(c, d) < \eta$

ist dann die Zahl $| \tau_c^i - \tau_d^i | < \frac{\varepsilon}{4}$, wegen (4) also $| \tau_c^{i*} - \tau_d^{i*} | < \frac{\varepsilon}{2}$,

und, da die Abbildung h^* auf $\bar{x}$ affin ist, mithin

$$(\overset{**}{*}) \qquad | \tau_e^{i*} - \tau_q^{i*} | < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad i = 1, 2.$$

Aus (*) bis $(\overset{**}{*})$ folgt $| \tau_q^i - \tau_q^{i*} | < \varepsilon$, $i = 1, 2$, und hieraus, wenn für q die Ungleichung $| \tau_q^i - \frac{1}{2} | > 2\varepsilon$ gilt, (5.2).

Mit Hilfe der auf Q erklärten Abbildung h und der auf Q_2 definierten Abbildung h^* wird h' wie folgt auf Q erklärt:

$$h'(p) = (1 - \varrho(p))h^*(p) + \varrho(p)h(p), \qquad p \in Q_2,$$
$$h'(p) = h(p), \qquad p \in Q - Q_2;$$

dabei ist $\varrho(p)$, $p \in Q$, definiert als $\varrho(p) = \frac{4}{\delta}\, \varrho(p, Q_1)$ für $\varrho(p, Q_1) \leqq \frac{\delta}{4}$ und $\varrho(p) = 1$ für $\varrho(p, Q_1) \geqq \frac{\delta}{4}$.

Die Abbildung h' ist stetig. Denn ist p ein Punkt von $B(Q_2; P)$, so gilt nach (3.3), dass $\varrho(p, Q_0) \geqq \frac{3}{4}\delta$, also $\varrho(p, U(Q_0; \frac{\delta}{2})) \geqq \frac{\delta}{4}$, wegen $Q_1 \subset U(Q_0; \frac{\delta}{2})$ daher $\varrho(p, Q_1) \geqq \frac{\delta}{4}$ folglich $\varrho(p) = 1$.

Schreiben wir für $p \in Q$ statt $h'(p)$ auch $(\tau_p^{1'}, \tau_p^{2'})$, so ist

$$(6.1) \qquad 0 < \tau_p^{2'} < 1, \qquad p \in Q,$$

$$(6.2) \qquad 0 < \tau_p^{1'} < 1, \qquad p \in Q_2,$$

$$(6.3) \qquad h'(p) = h(p), \qquad p \in B(Q; P),$$

$$(6.4) \qquad (\tau_p^{2'}, \tau_p^{2'}) \neq (\tfrac{1}{2}, \tau_p^{2'}), \qquad p \in Q - Q_1.$$

Da Q, wie oben bemerkt wurde, abgeschlossen ist, liegt $B(Q; P)$ in P; daher sind h und h' auf $B(Q; P)$ erklärt.

Zu (6.1). Für $p \in Q_2$ ist $\tau_p^{2'} \in [\tau_p^2, \tau_p^{2}*]$, für $p \in Q - Q_2$ ist $\tau_p^{2'} = \tau_p^2$, und also folgt (6.1) aus (2) und (5.1).

Zu (6.2). Für $p \in Q_2$ gilt wegen (3.2) und der Erklärung von Q_2 in (3.3), dass $0 < \tau_p^1 < 1$, wegen (5.1) weiter $0 < \tau_p^{1*} < 1$. Also ist $0 < \tau_p^{1'} < 1$, da $\tau_p^{1'}$ zwischen τ_p^1 und τ_p^{1*} liegt.

Zu (6.3). Da $Q_2 \subset P \,.\, U(Q_0; \delta)$ und $P \,.\, U(Q_0; \delta) \subset Q$ nach (3.3) beziehungsweise (3.1), ist $Q_2 \,.\, B(Q; P) = 0$, nach der Erklärung von h' also (6.3) richtig.

Zu (6.4). Da $P \,.\, \overline{U}(Q_0; \dfrac{\delta}{4}) \subset Q_1$ nach (3.3), so gilt nach der Erklärung von ε im besonderen für alle Punkte p aus $Q - Q_1$ die Ungleichung $| \tau_p^1 - \frac{1}{2} | > 2\varepsilon$. Hieraus und aus (5.2) folgt (6.4); denn zufolge der Definition von h' ist ja entweder $h'(p) = h(p,$ oder es liegt $h'(p)$ auf der Strecke von $h(p)$ nach $h^*(p)$.

Für $p \in Q$ und $i = 1, 2$ bezeichnen wir mit ω_p^i jene Abbildung der Strekke $[0, 1]$ auf sich, die 0 in 0, 1 in 1, $\tau_p^{i'}$ in τ_p^i überführt und für die übrigen Zahlen linear fortsetzt. Diese Abbildung ist wegen $h'(p) = h(p)$, $p \in Q - Q_2$, und (6.1), (6.2) topologisch. Dann sei

$$a'(p, \tau^1, \tau^2) = a(p, \omega_p^1(\tau^1), \omega_p^2(\tau^2)), \qquad p \in Q,$$

$$a'(p, \tau^1, \tau^2) = a(p, \tau^1, \tau^2), \qquad p \in P - Q.$$

Wegen (6.3) ist $\omega_p^i(\tau^i) = \tau^i$, $0 \leqq \tau^i \leqq 1$, für $p \in B(Q; P)$, also a' stetig.

Über a' gilt weiter (1.1) bis (1.4), wenn man darin a durch a' ersetzt. Wir nennen die so entstehenden Aussagen (1.1′) bis (1.4′).

Zwischen der Funktion a', die für alle (p, τ^1, τ^2) mit $p \in P$ erklärt ist, und der auf Q definierten Funktion h' besteht folgender Zusammenhang:

(7.1) Für $p \in Q$ gibt es genau ein Paar (τ^1, τ^2) mit der Eigenschaft, dass $p = a'(p, \tau^1, \tau^2)$. Und zwar ist $(\tau_p^{1'}, \tau_p^{2'})$ dieses Paar.

(7.2) Für $p \in P - Q$ ist $p \notin (a'(p, \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1$, $0 \leqq \tau^2 \leqq 1)$.

Beweis von (7.1). Ist (τ^1, τ^2) das Paar $(\tau_p^{1'}, \tau_p^{2'})$, so gilt $p = a'$ (p, τ^1, τ^2); denn es ist $a'(p, \tau_p^{1'}, \tau_p^{2'}) = a(p, \omega_p^1(\tau_p^{1'}), \omega_p^2(\tau_p^{2'})) = a(p, \tau_p^1, \tau_p^2) = p$. Dass $(\tau_p^{1'}, \tau_p^{2'})$ das einzige Paar (τ^1, τ^2) mit $p = a'(p, \tau^1, \tau^1)$ ist, folgt daraus, dass es nur ein Paar (τ^1, τ^2) mit $p = a(p, \tau^1, \tau^2)$ gibt, und dass die Abbildungen ω_p^1 und ω_p^2 eineindeutig sind.

Die in (7.2) für $p \in P - Q$ angegebene Beziehung folgt aus der Erklärung von Q und aus der Gleichheit der beiden Mengen $(a'(p, \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, 0 \leqq \tau^2 \leqq 1)$ und $(a(p, \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, 0 \leqq \tau^2 \leqq 1)$.

Drittens das 1-dimensionale Polyeder S. Es sei S die Menge aller Punkte p von Q mit $p \in (a'(p, \frac{1}{2}, \tau), 0 \leqq \tau \leqq 1)$. Wegen (7.1) ist S die Menge aller Punkte p von Q mit $(\tau_p^{1'}, \tau_p^{2'}) = (\frac{1}{2}, \tau_p^{2'})$. Wegen (6.4) ist S in Q_1 gelegen. Für $p \in Q^1$ ist $h'(p) = h^*(p)$, und aus der Erklärung von h^* folgt daher, dass S entweder leer oder ein homogen 1-dimensionales endliches Polyeder ist, das bis auf endlich viele Punkte im Innern von Grundsimplexen von L_1 liegt.

Wenn S leer ist, bestätigt man Satz 1 leicht vermöge der für alle (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ durch $g'(p, \tau) = a'(p, \frac{1}{2}, \tau)$ bestimmten Abbildung g'.

Nun sei S von der Dimension 1. Es möge K eine simpliziale Zerlegung von P bezeichnen, die auch in P_0 eine simpliziale Zerlegung K_0 induziert. Wir bestimmen eine simpliziale Abbildung λ von P in $[0, 1]$ durch die Festsetzung, dass $\lambda(e) = 1$ oder $= 0$, je nachdem e ein Eckpunkt von K mit $e \in K_0$ oder mit $e \notin K_0$ ist. Für die Zahl $\lambda(p)$ schreiben wir auch λ_p. Mit S_i, $i = 1, \ldots, s$, bezeichnen wir Strecken, die zu je zweien keinen gemeinsamen inneren Punkt haben, für die $\Sigma S_i = S$ und weiter 1) und 2) gilt. 1) Auf S_i ist λ affin. 2) Zu jedem S_i existiert ein Grundsimplex von L_1, das S_i bis auf höchstens seinen Rand im Innern enthält. — Es seien $\bar{x}_i$, $i = 1, \ldots, s$, Simplexe der Dimension 2 in Q_1, die paarweis keinen gemeinsamen inneren Punkt haben und für die gilt, dass S_i bis auf seine beiden Randpunkte im Innern von $\bar{x}_i$ liegt.

Bezeichnen wir $\tau_p^{2'}$ für $p \in \Sigma \bar{x}_i$ auch mit $\mu(p)$, so gilt:

(8.1) Für $p \in \Sigma \bar{x}_i$ ist $0 < \mu(p) < 1$.

(8.2) Für $p \in S$ gibt es genau eine Zahl τ mit $p = a'(p, \frac{1}{2}, \tau)$, und zwar ist dies die Zahl $\mu(p)$.

Es folgt (8.1) aus $\Sigma \bar{x}_i \subset Q_1 \subset Q$ und (6.1). Wegen (7.1) gibt es zu jedem Punkt $p \in S$ genau ein Paar (τ^1, τ^2) mit $p = a'(p, \tau^1, \tau^2)$, und zwar ist $(\tau_p^{1'}, \tau_p^{2'})$ dieses Paar. Nach der Erklärung von S ist $\tau_p^{1'} = \frac{1}{2}$, und hieraus folgt (8.2).

Es sei nun j eine der Zahlen $1, \ldots, s$. Die Endpunkte von S_j seien derart mit e' und e'' bezeichnet, dass $\lambda(e') \leqq \lambda(e'')$. Ferner sei μ_m eine Zahl mit $\max(\mu(e'), \mu(e'')) < \mu_m < 1$, weiter m ein Punkt im Innern der Strecke S_j mit

$$(\mu_m - \mu(e'))/\varrho(m, e') > (\lambda(e'') - \lambda(e'))/\varrho(e'', e').$$

Erklären wir dann γ als diejenige Abbildung von S_j in $(0,1)$, die e' in $\mu(e')$, m in μ_m, e'' in $\mu(e'')$ überführt und für die übrigen Punkte linear fortsetzt, so gilt offenbar:

(9) Zu jeder Zahl α aus $[0, 1]$ gibt es höchstens zwei Punkte p auf der Strecke S_j mit $\alpha\lambda(p) = \gamma(p)$.

Wir setzen weiter $\gamma(p = \mu(p)$ für $p \in \bar{\bar{x}}_j$ und γ über die offene Menge $\bar{x}_j - (\bar{\bar{x}}_j + S_j)$ derart stetig fort, dass $0 < \gamma(p) < 1$ in allen Punkten p von $\bar{x}_j$.

Für $p \in \Sigma \bar{x}_i$ möge ξ_p die Strecke $[0, 1]$ so auf sich abbilden, dass 0 in 0, $\gamma(p)$ in $\mu(p)$, 1 in 1 übergeht und für die übrigen Zahlen aus $[0, 1]$ linear fortgesetzt ist. Wegen $0 < \mu(p) < 1$ und $0 < \gamma(p) < 1$ ist die Abbildung ξ_p topologisch.

Mit Hilfe von $\lambda(p)$, $p \in P$, und $\xi_p(\tau)$, $p \in \Sigma \bar{x}_i$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, kann nunmehr eine Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ mit den in Satz 1 verlangten Eigenschaften aus a' erklärt werden. Dabei bewirkt λ, dass $f^\tau(p) = f(p)$ für $p \in B(P)$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$. Durch die Abbildungen ξ_p, $p \in \Sigma \bar{x}_i$, wird erreicht, dass zu jeder Zahl τ aus $[0, 1]$ höchstens endlich viele Punkte p auf S existieren mit $p = f^\tau(p)$. Für $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei

$$f^\tau(p) = a'(p, \tfrac{1}{2}, \xi_p(\lambda_p\tau)), \qquad p \in \Sigma \bar{x}_i,$$

$$f^\tau(p) = a'(p, \tfrac{1}{2}, \lambda_p\tau), \qquad p \in P - \Sigma \bar{x}_i.$$

Da $\gamma(p) = \mu(p)$ für $p \in \Sigma \bar{\bar{x}}_i$, ist $\xi_p(\tau) = \tau$ für $p \in \Sigma \bar{\bar{x}}_i$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$. Mithin ist für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung f^τ stetig.

Wegen $f^0(p) = a'(p, \frac{1}{2}, 0)$, $p \in P$, und (1.1') ist $f^0 = f$. Für $p \in B(P)$ ist, da P_0 nach Voraussetzung zu $B(P)$ fremd ist, $\lambda(p) = 0$. Also ist $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in B(P)$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$. Für $p \in P_0$ ist $\lambda(p) = 1$. Daher ist $f^1(p) = f'(p)$, $p \in P_0$, nach (1.1').

Nach (1.2') ist $(a'(p, \tau^1, \tau^2), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, 0 \leqq \tau^2 \leqq 1) = f(p)$, wenn p ein Punkt von P mit $f(p) = f'(p)$. Im besonderen ist also $f^1(p) = f'(p)$, wenn $f(p) = f'(p)$.

Für $0 \leqq \tau \leqq 1$ hat die Abbildung f^τ höchstens $\zeta = 2s$ Fixpunkte. Zum Beweis sei α eine Zahl aus $[0, 1]$. Nach der Erklärung von S und $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ ist die Menge aller Punkte p von P, die Fixpunkte von f^α sind, in S enthalten. Es sei j eine der Zahlen $1, \ldots, s$. Für alle Punkte p von S_j mit $p = f^\alpha(p)$ ist

$$p = a'(p, \tfrac{1}{2}, \xi_p(\lambda_p\alpha)),$$

nach (8.2) also $\xi_p(\lambda_p\alpha) = \mu(p)$ oder $\lambda_p\alpha = \xi_p^{-1}(\mu(p))$, zufolge der Erklärung von ξ_p daher $\lambda_p\alpha = \gamma(p)$. Nach (9) gibt es auf S_j höchstens zwei Punkte, für die die letzte Gleichung gilt. Mithin

ist die Anzahl der Fixpunkte von f^α auf S nicht grösser als ζ.
Damit ist Satz 1 bewiesen.

3. *Reguläre Abbildungsscharen in Fixpunktumgebungen.*

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz. *Es sei r eine natürliche Zahl, $\bar{x}$ ein r-dimensionales Simplex des R^r, f eine stetige Abbildung von $\bar{x}$ in den R^r mit $p \neq f(p)$, $p \in \overline{\dot{x}}$, und nur endlich vielen Fixpunkten $q_1, \ldots, q_m$; ferner q ein innerer Punkt von $\bar{x}$ mit $q \neq q_i$, $i = 1, \ldots, m$, derart, dass die $J(\overline{qq_i})$, $i = 1, \ldots, m$, paarweise zu einander fremd sind. Für $i = 1, \ldots, m$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei q_i^τ der Punkt $(1-\tau)q_i + \tau q$. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{x}$ in den R^r mit $f^0 = f$ und den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ für $p \in \overline{\dot{x}}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 \leqq \tau < 1$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte von f^τ; $f^1(q) = q$; es ist $f^1(q) = (1-\tau)q + \tau f(p')$, wenn $p \in \bar{x} - q$ ein Punkt mit $p = (1-\tau)q + \tau p'$ und p' die Projektion von p auf $\overline{\dot{x}}$ aus q ist.*

Beweis. Wir bezeichnen die Eckpunkte von $\bar{x}$ mit $a_0, \ldots, a_r$. Für $i = 0, \ldots, r$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei $a_i^\tau = (1-\tau)a_i + \tau q$. Für $0 \leqq \tau < 1$ sei $\bar{x}_\tau$ das von den Punkten $a_0^\tau, \ldots, a_r^\tau$ aufgespannte Simplex.

Es sei $w(p)$ für $p \in \bar{x} - q$ die Projektion von p auf $\overline{\dot{x}}$ aus q, ferner sei w^τ für $0 \leqq \tau < 1$ die durch

$$w^\tau(p) = w(p), \qquad p \in \overline{\dot{x}}_\tau, \tag{1}$$

bestimmte affine Abbildung von $\bar{x}_\tau$ auf $\bar{x}$. Für $0 \leqq \tau < 1$ ist dann

$$w^\tau(q_i^\tau) = q_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Da für jedes τ aus $[0, 1]$ die Abbildung w^τ nicht ausgeartet affin ist, folgt aus (2), dass

$$w^\tau(p) \notin \Sigma\, \bar{q}_i \text{ für } p \in \bar{x}_\tau - \sum_i \bar{q}_i^\tau \qquad 0 \leqq \tau < 1. \tag{3}$$

Für $0 \leqq \tau < 1$ setzen wir dann:

$$f^\tau(p) = p + (1-\tau)\overrightarrow{w^\tau(p) f w^\tau(p)}, \qquad p \in \bar{x}_\tau; \tag{4}$$

und in allen Punkten p aus $\dot{x}_\sigma$, $\tau \geqq \sigma \geqq 0$,

$$f^\tau(p) = p + (1-\sigma)\overrightarrow{w(p) f w(p)}. \tag{5}$$

Es sei $f^1(q) = q$. Für $p \in \overline{\dot{x}}_\sigma$, $1 > \sigma \geqq 0$, sei

$$f^1(p) = p + (1-\sigma)\overrightarrow{w(p) f w(p)}. \tag{6}$$

Die so erklärte Abbildung $F = (f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ hat die verlangten Eigenschaften:

Es ist F stetig, wie aus 1) bis 3) folgt. 1) Für jede Zahl τ aus dem Intervall $[0, 1]$ ist die Abbildung f^τ stetig; denn wegen (1) stimmt auf $\bar{x}_\tau$ die Erklärung (4) mit (5) überein. 2) Die Abbildung f^1 ist stetig; denn für $p \in \dot{\bar{x}}_\sigma$, $\sigma \to 1$, geht der durch (6) bestimmte Punkt $f^1(p)$ gegen p. 3) Wegen $w^\tau(q) = q$, $0 \leqq \tau < 1$, ist $f^\tau(q) = q$ für $0 \leqq \tau < 1$. Und der Durchmesser von $f^\tau(\bar{x}_\tau)$ geht gegen Null für $\tau \to 1$.

Aus (2) und (3) folgt: für $0 \leqq \tau \leqq 1$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die einzigen Fixpunkte von f^τ.

Die von f^1 geforderte Eigenschaft ist mit (6) gleichwertig, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Bemerkung. Es sei $\bar{x}$ ein r-dimensionales Simplex des R^r, q ein innerer Punkt von $\bar{x}$ und f eine stetige Abbildung von $\bar{x}$ in den R^r ohne Fixpunkte. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{x}$ in den R^r mit $f^0 = f$, $f^\tau(p) = f(p)$ für $p \in \dot{\bar{x}}$ und $0 \leqq \tau < 1$, $p \neq f^\tau(p)$ für $p \in \bar{x}$ und $0 \leqq \tau < 1$, $f^1(q) = q$ und $p \neq f^1(p)$ für $p \in \bar{x} - q$.

In der Tat hat mit $\lambda(p) = \varrho(p, \dot{\bar{x}})/(\varrho(p, \dot{\bar{x}}) + \varrho(p, q))$, $p \in \bar{x}$, und der Festsetzung

$$f^\tau(p) = (1 - \tau\lambda(p))f(p) + \tau\lambda(p)p, \qquad p \in \bar{x},$$

bereits die Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ die verlangten Eigenschaften.

Wir können nun herleiten:

Satz 2. *Es seien r eine natürliche Zahl, $\bar{x}$ ein r-dimensionales Simplex des R^r, f und f' stetige Abbildungen von $\bar{x}$ in den R^r mit $p \neq f(p) = f'(p)$, $p \in \dot{\bar{x}}$, und höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann gibt es eine natürliche Zahl ζ und eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{x}$ in den R^r mit $f^0 = f$, $f^1 = f'$,*

$$f^\tau(p) = f(p), \qquad p \in \dot{\bar{x}},\ 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

und der Eigenschaft, dass für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung f^τ höchstens ζ Fixpunkte hat.

Beweis. Wegen der obigen Bemerkung können wir annehmen, dass f wie f' wenigstens einen Fixpunkt hat.

Es seien $a_1, \ldots, a_m$ die Fixpunkte von f und $b_1, \ldots, b_n$ diejenigen von f', ferner q ein innerer Punkt von $\bar{x}$ mit $q \neq a_i$, $i = 1, \ldots, m$, und $q \neq b_i$, $i = 1, \ldots, n$, derart, dass die $J(\overline{qa_i})$, $i = 1, \ldots, m$, paarweis zu einander fremd sind, ebenso die $J(\overline{qb_i})$, $i = 1, \ldots, n$, zu einander. Die Abbildung g sei wie folgt bestimmt: $g(q) = q$; für $p \epsilon \bar{x} - q$ sei, wenn p' die Projektion von p auf $\dot{\bar{x}}$ aus q bezeichnet und $p = (1 - \tau)q + \tau p'$ ist, $g(p)$ der Punkt $(1-\tau)q + \tau f(p')$ Schliesslich sei $\zeta = \max(m, n)$.

Nach dem obigen Hilfssatz gibt es dann Abbildungsscharen $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ und $(h^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ mit $g^0 = f$, $g^1 = g$, $h^0 = f'$, $h^1 = g$,

$$g^\tau(p) = h^\tau(p) = f(p), \qquad p \epsilon \dot{\bar{x}},\ 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

und der Eigenschaft, dass für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildungen g^τ, h^τ höchstens ζ Fixpunkte haben.

Mit $f^\tau = g^{2\tau}$, $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$, und $f^\tau = h^{2-2\tau}$, $\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq 1$, hat hierauf $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ die verlangten Eigenschaften.

Aus den Sätzen 1 und 2 leiten wir nun einen Satz her, auf den wir später die Aufgabe zurückführen werden, isolierte Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 zu erklären. Er hat, wie sich in Abschnitt 4 zeigt, die Bedeutung eines im Kleinen richtigen Satzes, aus dessen mehrfacher Anwendung sich ein Satz im Grossen ergibt.

Satz 3. *Es seien U und V beschränkte offene Mengen des R^2 mit $\bar{U} \subset V$, ferner f und g stetige Abbildungen von $\bar{V}$ in den R^2 mit höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann gibt es eine natürliche Zahl ζ und Scharen $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ und g^τ von $\bar{V}$ in den R^2 mit $f^0 = f$, $g^0 = g$ und den Eigenschaften: für alle (p, τ) mit $p \epsilon \bar{V} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $f^\tau(p) = f(p)$ und $g^\tau(p) = g(p)$;*

$$f^1(p) = g^1(p), \text{ wenn } f(p) = g(p);$$

$$f^1(p) = g^1(p), \qquad p \epsilon \bar{U};$$

für $0 \leqq \tau \leqq 1$ haben die Abbildungen f^τ und g^τ höchstens ζ Fixpunkte.

Beweis. Es seien $q_1, \ldots, q_m$ Punkte in $\bar{U}$, so dass, wenn f oder g Fixpunkte auf $\bar{U}$ hat, diese unter den Punkten $q_1, \ldots, q_m$ enthalten sind. Ferner seien $\bar{x}_i$ und $\bar{y}_i$, $i = 1, \ldots, m$, in V gelegene Simplexe der Dimension 2 derart, dass q_i in $J(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i$ in $J(\bar{y}_i)$ liegt, die $\bar{y}_i$ paarweis zu einander fremd sind und sich auf $\Sigma \bar{y}_i - \Sigma \bar{q}_i$ kein Fixpunkt von f oder g befindet.

Wir bezeichnen mit Q_0 und Q endliche Polyeder im R^2, von denen gilt: 1) es ist $\bar{U} + \Sigma \bar{y}_i \subset Q_0$, Q_0 liegt im Innern von Q, $Q \subset V$; 2) jeder Fixpunkt von f und g auf Q ist unter den Punkten $q_1, \ldots, q_m$ enthalten. Die Polyeder Q_0 und Q existieren. Denn es kann zwar V unendlich viele Komponenten haben, wegen $\overline{U} \subset V$ und der Endlichkeit von $\delta(V)$ ist aber U bereits in endlich vielen Komponenten von V enthalten.

Mit P bezeichnen wir das Polyeder $Q - \Sigma\, J(\bar{x}_i)$, mit P_0 das Polyeder $Q_0 - \Sigma\, J(\bar{y}_i)$. Dann liegt, da Q_0 im Innern von Q liegt, P_0 im Innern von P. Und es hat f wie g auf P keinen Fixpunkt.

Es sei α eine Zahl mit $0 < \alpha < 1$, ferner $g^\tau = g$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Nach Satz 1 gibt es eine natürliche Zahl ζ_0 und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in den R^2 mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$, wenn $(p,\ \tau)$ ein Paar, für das entweder $p \in P$ und $\tau = 0$ oder $p \in B(P)$ und $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ ist;

$$(1) \qquad f^\alpha(p) = g^\alpha(p), \text{ wenn } f(p) = g(p);$$

$$(2) \qquad f^\alpha(p) = g^\alpha(p), \qquad p \in P_0;$$

für $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ had f^τ höchstens ζ_0 Fixpunkte. — In allen $(p,\ \tau)$ mit $p \in \overline{V} - P$ und $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ sei $f^\tau(p) = f(p)$.

Wegen (2) ist im besonderen $f^\alpha(p) = g^\alpha(p)$ für $p \in \Sigma\, \dot{\bar{y}}_i$. Nach Satz 2 gibt es daher für $i = 1, \ldots, m$ eine natürliche Zahl ζ_i und eine Schar $(h_i^\tau,\ \alpha \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen h_i^τ von $\bar{y}_i$ in den R^2 mit den Eigenschaften: $h_i^\tau(p) = f^\alpha(p)$ in allen $(p,\ \tau)$, für die entweder $p \in \bar{y}_i$ und $\tau = \alpha$ oder $p \in \dot{\bar{y}}_i$ und $\alpha \leqq \tau \leqq 1$ ist;

$$(3) \qquad h_i^1(p) = g^1(p), \qquad p \in \bar{y}_i;$$

für $\alpha \leqq \tau \leqq 1$ hat h_i^τ höchstens ζ_i Fixpunkte.

Für alle $(p,\ \tau)$, $p \in \overline{V} - \Sigma\, J(\bar{y}_i)$ und $\alpha \leqq \tau \leqq 1$, sei hierauf $f^\tau(p) = f^\alpha(p)$. Für die $(p,\ \tau)$ mit $p \in \bar{y}_i$ und $\alpha \leqq \tau \leqq 1$ sei $f^\tau(p) = h_i^\tau(p)$; $i = 1, \ldots, m$. Dann ist

$$(4) \qquad f^1(p) = g^1(p), \text{ wenn } f^\alpha(p) = g^\alpha(p).$$

Die Abbildungsschar $F = (f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ ist gleichmässig regulär, da es jede der endlich vielen Abbildungsscharen, aus denen sich F zusammensetzt, ist. Trivialerweise ist $(g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ gleichmässig regulär.

Die Polyeder P, $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ sind zu $\overline{V} - V$ fremd. Daher ist $f^\tau(p) = f(p)$ und $g^\tau(p) = g(p)$ in allen $(p,\ \tau)$ mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Aus (1) und (4) folgt, dass, wenn $f(p) = g(p)$, auch $f^1(p) = g^1(p)$.

Nach der Erklärung von P_0 ist $P_0 + \Sigma\, \bar{y}_i = Q_0$. Aus $f^1(p) = f^\alpha(p), p \in P_0$, und (2) folgt, dass $f^1(p) = g^\alpha(p) = g^1(p)$ für $p \in P_0$. Aus $f^1(p) = h_i^1(p)$, $p \in \bar{y}_i$, und (3) folgt daher, dass $f^1(p) = g^1(p)$ für

$p \in Q_0$, wegen $\overline{U} \subset Q_0$ also im besonderen $f^1(p) = g^1(p)$ für $p \in \overline{U}$.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

4. *Der Approximationssatz für 2-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeiten.*

Aus Satz 3 ergibt sich folgender

Satz im Kleinen. *Es seien Q eine zum R^2 homöomorphe Menge im R^n, U und V in Q offene Mengen mit $\overline{U} \subset V$ und $\overline{V} \subset Q$, ferner f und g stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in Q mit höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann gibt es eine natürliche Zahl ζ und Scharen $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$, $(g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ und g^τ von $\overline{V}$ in Q mit den Eigenschaften: $f_0 = f$; $g_0 = g$; $f^\tau(p) = f(p)$ und $g^\tau(p) = g(p)$ für alle (p, τ) mit in $\overline{V} - V$ gelegenem p und $0 \leqq \tau \leqq 1$;*

$$f^1(p) = g^1(p), \text{ wenn } f(p) = g(p);$$

$$f^1(p) = g^1(p), \qquad\qquad p \in \overline{U};$$

für $0 \leqq \tau \leqq 1$ haben die Abbildungen f^τ und g^τ höchstens ζ Fixpunkte.

Auf diesen Satz im Kleinen führen wir nun den unten angegebenen Approximationssatz (Satz 4) zurück. Für den ganzen Abschnitt bezeichne P eine kompakte 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit im R^n.

Die Hilfssätze 1 und 2 sind elementar.

Hilfssatz 1. *Es sei ε eine positive Zahl. Dann gibt es in P offene Mengen U_i^k und V_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, mit den Eigenschaften: $\overline{U}_i^k \subset V_i^k$, $\delta(V_i^k) < \varepsilon$, für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{V}_{i_1}^k$ und $\overline{V}_{i_1}^k$ fremd, es ist $P = \sum\limits_{i,k} U_i^k$.*

Beweis. Es seien $\bar{x}$ ein n-dimensionales Simplex des R^n mit $P \subset \bar{x}$, K eine simpliziale Zerlegung von $\bar{x}$ mit Simplexdurchmessern $< \dfrac{\varepsilon}{2}$ und $\bar{x}_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, die k-dimensionalen Simplexe von K, $k = 0, \ldots, n$.

Ist δ^0 eine Zahl mit $0 < \delta^0 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ und $\bar{y}_i^0 = \bar{x}_i^0$ für $i = 1, \ldots, m^0$, so gilt:

I^0) Für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{U}(\bar{y}_{i_1}^0;\ \delta^0)$ und $\overline{U}(\bar{y}_{i_1}^0;\ \delta^0)$ zu einander fremd.

II^0) Es ist $\sum\limits_i \bar{x}_i^0 \subset \sum\limits_i U(\bar{y}_i^0;\ \tfrac{1}{2}\delta^0)$.

Wir machen nun die Annahme, es seien j eine der Zahlen $0, \ldots, n-1$ und bereits positive Zahlen $\delta^0, \ldots, \delta^j$ sowie in $\bar{x}$ gelegene Simplexe $\bar{y}_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, j$, bestimmt mit $\delta(\bar{y}_i^k) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ und den Eigenschaften:

I^j) Für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{U}(\bar{y}_{i_1}^k;\ \delta^k)$ und $\overline{U}(\bar{y}_{i_2}^k;\ \delta^k)$ zu einander fremd, $k = 0, \ldots, j$.

II^j) Es ist $\sum\limits_{k=0}^{j}\sum\limits_{i} \bar{x}_i^k \subset \sum\limits_{k=i}^{j}\sum\limits_{i} U(\bar{y}_i^k;\ \tfrac{1}{2}\delta^k)$.

Da $\sum\limits_i \overline{\bar{x}}_i^{j+1} = \sum\limits_i \bar{x}_i^k$ abgeschlossen und $\sum\limits_{k=0}^{j}\sum\limits_i U(\bar{y}_i^k;\ \frac{1}{2}\delta^k)$ offen ist, gibt es wegen II^j) eine Zahl $\delta > 0$, so dass sogar

$$(*)\qquad \sum_i U(\overline{\bar{x}}_i^{j+1};\ \delta) \subset \sum_{k=0}^{j}\sum_i U(\bar{y}_i^k;\ \tfrac{1}{2}\delta^k).$$

Nun sei $\bar{y}_i^{j+1}$ für $i = 1, \ldots, m^{j+1}$ ein Simplex im Innern von $\bar{x}_i^{j+1}$ mit

$$({*\atop *})\qquad \bar{x}_i^{j+1} - \bar{y}_i^{j+1} \subset U(\overline{\bar{x}}_i^{j+1};\ \delta);$$

ferner δ^{j+1} eine Zahl mit $0 < \delta^{j+1} < \dfrac{\varepsilon}{4}$, so dass die $\overline{U}(\bar{y}_i^{j+1};\ \delta^{j+1})$, $i = 1, \ldots, m^{j+1}$, paarweis zu einander fremd sind.

Dann gilt I^{j+1}) und wegen (*), $({*\atop *})$ auch II^{j+1}).

Mit $U_i^k = P\,.\,U(\bar{y}_i^k;\ \frac{1}{2}\delta^k)$ und $V_i^k = P\,.\,U(\bar{y}_i^k;\ \delta^k)$ haben hierauf U_i^k und V_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, die verlangten Eigenschaften: Dass $\overline{U}_i^k \subset V_i^k$, folgt aus der Erklärung von U_i^k und V_i^k. Der Durchmesser von $\bar{y}_i^k$ ist kleiner als $\dfrac{\varepsilon}{2}$, wegen $\delta^k < \dfrac{\varepsilon}{4}$ also der Durchmesser von V_i^k kleiner als ε. Wegen I^k) sind die V_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, paarweis zu einander fremd.

Es ist $\bar{x} = \sum\limits_k\sum\limits_i \bar{x}_i^k \subset \sum\limits_k\sum\limits_i U(\bar{y}_i^k;\ \frac{1}{2}\delta^k)$ nach II^n), also $P = \sum\limits_k\sum\limits_i U_i^k$.

Hilfssatz 2. *Es sei m eine natürliche Zahl und Δ_0 eine positive Zahl. Dann existieren Zahlen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ mit $\Delta_i < \frac{1}{8}\Delta_{i-1}$, $i = 1, \ldots, m$, und der Eigenschaft: zu jedem Punkt p von P gibt es in P offene zum R^2 homöomorphe Mengen $U_i(p)$, $i = 1, \ldots, m$, mit*

$$(1_i)\qquad P\,.\,U(p;\ \Delta_i) \subset U_i(p) \subset P\,.\,U(p;\ \tfrac{1}{8}\Delta_{i-1}).$$

Beweis. Wir machen die Annahme, es seien k eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$ und $\Delta_0, \ldots, \Delta_k$ positive Zahlen, so dass, falls $k > 0$ ist, $\Delta_i < \frac{1}{8}\Delta_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, k$ gilt und ferner: zu jedem Punkt p von P gibt es zum R^2 homöomorphe in P offene Mengen $U_i(p)$, $i = 1, \ldots, k$, mit 1_1) bis 1_k). Dann behaupten wir:

Es gibt eine Zahl Δ_{k+1} mit $0 < \Delta_{k+1} < \frac{1}{8}\Delta_k$ und der Eigenschaft: zu jedem Punkt p von P existiert eine zum R^2 homöomorphe in P offene Menge $U_{k+1}(p)$ mit (1_{k+1}).

Wir wollen zunächst zeigen:

I. Zu jedem Punkte p von P existiert eine zum R^2 homöomorphe p enthaltende in P offene Menge mit einem Durchmesser $< \frac{1}{8}\Delta_k$.

Beweis von I. Es sei q ein Punkt von P und U_q eine q enthaltende zum R^2 homöomorphe in P offene Menge; h eine topologische Abbildung von U_q auf den R^2 und $q' = h(q)$. Bezeichnet dann $U(q'; \delta)$ für $\delta > 0$ die δ-Umgebung inbezug auf den R^2 von q', so gilt: Wenn $\delta > 0$ nur hinreichend klein, so ist der Durchmesser von $h^{-1}(U(q'; \delta))$ kleiner als $\frac{1}{8}\Delta_k$. Da h topologisch, ist die Menge $h^{-1}(U(q^1; \delta)$ für jedes $\delta > 0$ in P offen.

Wegen I können wir also jedem Punkt p von P eine p enthaltende zum R^2 homöomorphe in P offene Menge zuordnen, deren Durchmesser $< \frac{1}{8}\Delta_k$ ist. Da die Menge P kompakt, wird sie schon von endlich vielen dieser Mengen überdeckt. Mithin:

II. Es gibt in P offene zum R^2 homöomorphe Mengen V_i, $i = 1, \ldots, m'$, mit $P = \Sigma V_i$ und $\delta(V_i) < \frac{1}{8}\Delta_k$.

Wir wollen weiter zeigen:

III. Es gibt eine Zahl Δ_{k+1} mit $0 < \Delta_{k+1} < \frac{1}{8}\Delta_k$, so dass zu jedem Punkt p von P wenigstens ein V_i existiert mit $P \,.\, U(p; \Delta_{k+1}) \subset V_i$.

Beweis von III. Für jedes p von P bezeichnen wir mit $W_i(p)$, $i = 1, \ldots, m_p$, diejenigen der V_i, die p enthalten. Dann sei $\delta_i(p)$ für $i = 1, \ldots, m_p$ die obere Grenze aller Zahlen $\delta' > 0$ mit der Eigenschaft, dass $P \,.\, U(p; \delta')$ in $W_i(p)$ liegt. Ferner sei $\delta(p)$ das Maximum der Zahlen $\delta_i(p)$, $i = 1, \ldots, m_p$. Wir machen die Annahme, dass eine Zahl Δ_{k+1} der angegebenen Art nicht existiere. Dann ist die Zahl $\inf \delta(p)$, $p \in P$, gleich Null; und mithin gibt es eine konvergente Punktfolge $p_1, p_2, \ldots$ von Punkten p_i aus P mit $\delta(p_i) \to 0$ für $i \to \infty$. Zu dem Punkt $q = \lim p_i, i \to \infty$, gibt es eine Zahl $\delta_q > 0$ mit $P \,.\, U(p; \delta_q) \subset W_1(q)$ Dann liegt $P \,.\, U(p_i; \frac{1}{2}\delta_q)$ in $W_1(q)$ für alle p_i mit hinreichend grossem i: Wegen $\delta(p_i) \to 0$, $i \to \infty$, ein Widerspruch.

Aus II, III und der Erklärung der V_i folgt: Zu jedem Punkt p von P gibt es eine zum R^2 homöomorphe in P offene Menge $U_{k+1}(p)$ mit (1_{k+1}), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir können jetzt herleiten:

Satz 4 (Approximationssatz für 2 Dimensionen). *Es sei $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen von P in sich und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl ζ und* *eine Abbildungsschar* $(g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *in* P *mit* $\varrho(f^\tau, g^\tau) < \epsilon$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, *und den Eigenschaften: für* $0 \leqq \tau \leqq 1$ *hat die Abbildung* f^τ *höchstens* ζ *Fixpunkte; haben* f^0 *und* f^1 *höchstens endlich viele Fixpunkte, so ist* $g^0 = f^0$ *und* $g^1 = f^1$.

Beweis. Wir bezeichnen $2n + 2$ auch mit a und $\dfrac{1}{2n+2}\varepsilon$ mit Δ_0. Nach Hilfssatz 2 gibt es dann Zahlen $\Delta_1, \ldots, \Delta_a$ mit

$$(1) \qquad 0 < \Delta_i < \tfrac{1}{8}\Delta_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, a,$$

so dass gilt: zu jedem Punkt p von P existieren in P offene zum R^2 homöomorphe Mengen $U_i(p)$, $i = 1, \ldots, a$, mit

$$(2) \qquad P \,.\, U(p;\ \Delta_i) \subset U_i(p) \subset P \,.\, U(p;\ \tfrac{1}{8}\Delta_{i-1}), \qquad i = 1, \ldots, a.$$

Da P kompakt ist, existiert eine Zahl $\eta > 0$, so dass für jede Menge M von P mit einem Durchmesser $< \eta$ gilt:

$$(3) \qquad \delta(f^\tau(M)) < \tfrac{1}{8}\Delta_a, \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1.$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es in P offene Mengen U_{ki} und V_{ki}, $i = 1, \ldots, m_k$, $k = 0, \ldots, n$, mit $U_{ki} \subset V_{ki}$ und den Eigenschaften:

$$(4) \qquad \delta(V_{ki}) < \min(\eta,\ \Delta_a),$$

für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{V}_{ki1}$ und $\overline{V}_{ki2}$ einander fremd, $P = \sum_{i,k} U_{ik}$.

Einige der U_{ki} können leer sein. Die leere Menge bezeichnen wir auch mit $U_{-1,1}$.

Es seien $\zeta_0, \ldots, \zeta_m$ Zahlen mit $\zeta_0 = 0$, $\zeta_i < \zeta_{i+1}$, $i = 0, \ldots, m-1$, und $\zeta_m = 1$, so dass für $i = 0, \ldots, m-1$ gilt:

$$(5) \qquad \varrho(f^{\zeta_i}, f^\tau) < \min(\tfrac{1}{8}\Delta_a,\ \tfrac{1}{4}\varepsilon), \qquad \zeta_i \leqq \tau \leqq \zeta_{i+1}.$$

Für $i = 0, \ldots, m$ sei g^{ζ_i} eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und

$$(6) \qquad \varrho(g^{\zeta_i}, f^{\zeta_i}) < \min(\tfrac{1}{8}\Delta_a,\ \tfrac{1}{4}\varepsilon).$$

Eine solche Abbildung existiert, wie eine einfachere Überlegung ergibt. Haben f^0 und f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte, so sei $g^0 = f^0$ und $g^1 = f^1$.

Weiter sei j eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$ und $\alpha = \zeta_j$, $\beta = \zeta_{j+1}$, $g = g^\alpha$, $g' = g^\beta$, $\omega = \dfrac{\beta - \alpha}{2(n+1)}$.

Für jede Menge M von P mit $\delta(M) < \eta$ ist

$$(7) \qquad \delta(g(M) + g'(M)) < \Delta_a.$$

Denn der Durchmesser von $f^\alpha (M)$ wie $f^\beta (M)$ ist nach (3) kleiner als $\frac{1}{8}\Delta_a$. Da weiter $\varrho(f^\alpha, f^\beta) < \frac{1}{8}\Delta_a$ nach (5), ist also $\delta(f^\alpha(M) + f^\beta(M)) < \frac{1}{4}\Delta_a$, woraus wegen (6) dann (7) folgt.

Zum Beweis von Satz 4 genügt es, eine gleichmässig reguläre Abbildungsschar $(g^\tau,\ \alpha \leqq \tau \leqq \beta)$ von g in g' mit $\varrho(g, g^\tau) \leqq \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$, anzugeben. Denn wegen (5) und (6) ist dann

$$\varrho(g^\tau, g) + \varrho(g, f^\alpha) + \varrho(f^\alpha, f^\tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \alpha \leqq \tau \leqq \beta,$$

also $\varrho(g^\tau, f^\tau) < \varepsilon$ für $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$.

Es seien nun, so wollen wir annehmen, k eine der Zahlen $0, \ldots, n$, ferner $(g^\tau,\ \alpha \leqq \tau \leqq \alpha + k\omega)$ und $(g^\tau,\ \beta - k\omega \leqq \tau \leqq \beta)$ gleichmässig reguläre Abbildungsscharen in P mit $g^\alpha = g$ und $g^\beta = g'$ derart, dass gilt, wenn g_k die Abbildung $g^{\alpha+k\omega}$ und g'_k die Abbildung $g^{\beta-k\omega}$ bezeichnet:

1_k) Für $p \in \sum\limits_{l=-1}^{k-1} \sum\limits_i U_{li}$ ist $g_k(p) = g'_k(p)$.

2_k) Es ist $\delta(g_k(M) + g'_k(M)) < \Delta_{a-2k}$, wenn M eine Menge in P mit $\delta(M) < \eta$ ist.

3_k) Es ist $\varrho(g, g^\tau) \leqq \dfrac{k}{a}\varepsilon$ für alle τ aus $[\alpha, \alpha + \omega k] + [\beta - \omega k, \beta]$.

Für $k = 0$ sind 1_k), 2_k) und 3_k) sicher richtig.

Das Intervall $[\alpha + k\omega,\ \alpha + (k+1)\omega]$ bezeichnen wir auch mit J_α, das Intervall $[\beta - (k+1)\omega,\ \beta - k\omega]$ auch mit J_β.

Wir wollen zeigen, dass aus der vorstehenden Annahme die Existenz gleichmässig regulärer Abbildungsscharen $(g^\tau,\ \tau \in J_\alpha)$ und $(g^\tau,\ \tau \in J_\beta)$ folgt, so dass, wenn g_{k+1}, g'_{k+1} resp. die Abbildungen $g^{\alpha+k\omega+\omega}$, $g^{\beta-k\omega-\omega}$ bezeichnet, 1_{k+1}), 2_{k+1}) und 3_{k+1})gilt.

Es sei U eine der Mengen U_{ki}, $i = 1, \ldots, m_k$, die nicht leer ist, und V das zugehörige V_{ki}.

Dann gibt es zunächst eine in P offene zum R^2 homöomorphe Menge Q_0 mit

$$(8) \qquad \delta(Q_0) < \tfrac{1}{4}\Delta_{a-2k-1}, \quad g_k(\overline{V}) + g'_k(\overline{V}) \subset Q_0.$$

Es sei nämlich q ein Punkt aus $g_k(V)$. Nach der Erklärung der Δ_i gibt es dann eine in P offene zum R^2 homöomorphe Menge Q_0 mit

$$P \,.\, U(q;\ \Delta_{a-2k}) \subset Q_0 \subset P \,.\, U(q;\ \tfrac{1}{8}\Delta_{a-2k-1}).$$

Und für diese Menge gilt (8). Denn wegen $\delta(V) < \eta$ und 2_k) ist der Durchmesser von $g_k(\overline{V}) + g'_k(\overline{V})$ kleiner als Δ_{a-2k}.

Erstens sei $Q_0 . \overline{V} = 0$. Hier setzen wir $Q = Q_0$. Da Q_0 zum R^2 homöomorph ist, gibt es eine für alle (p, τ) mit $p \in \overline{V}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ erklärte stetige Abbildung λ in Q mit $\lambda(p, 0) = g_k(p)$, $\lambda(p, 1) = g'_k(p)$ und der Eigenschaft: $(\lambda(p, \tau), 0 \leqq \tau \leqq 1) = g_k(p)$ wenn $g_k(p) = g'_k(p)$. Das ist leicht einzusehen: Sind h und h' stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in den R^2 und setzt man

$$\mu(p, \tau) = (1 - \tau)h(p) + \tau h'(p)$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, so ist $\mu(p, 0) = h(p)$, $\mu(p, 1) = h'(p)$ und $(\mu(p, \tau), 0 \leqq \tau \leqq 1) = h(p)$ für $h(p) = h'(p)$. Hieraus folgt, da Q zum R^2 homöomorph ist, leicht die Existenz von λ.

In dem vorliegenden ersten Fall werde dann für alle (p, τ) mit $p \in \overline{V}$ und $\tau \in J_\alpha$ die Zahl

$$\frac{\tau - (\alpha + \omega k)}{\omega} \cdot \frac{\varrho(p, \overline{V} - V)}{\varrho(p, \overline{V} - V) + \varrho(p, U)}$$

mit τ_p bezeichnet, und es sei $g^\tau(p) = \lambda(p, \tau_p)$. Für $p \in \overline{V}$ und $\tau \in J_\beta$ sei $g^\tau(p) = g'_k(p)$.

Dann gilt: für $\tau \in J_\alpha$ bzw. $\tau \in J_\beta$ ist

$$g^\tau(p) = g_k(p), \; g^\tau(p) = g'_k(p), \qquad p \in \overline{V} - V; \tag{9}$$

für $p \in \overline{V}$ ist

$$g^{\alpha+\omega k+\omega}(p) = g^{\beta-\omega k-\omega}(p), \text{ wenn } g^{\alpha+\omega k}(p) = g^{\beta-\omega k}(p); \tag{10}$$

$$g^{\alpha+\omega k+\omega}(p) = g^{\beta-\omega k-\omega}(p), \qquad p \in \overline{U}. \tag{11}$$

Zweitens sei $Q_0 . \overline{V} \neq 0$. Hier existiert eine in P offene zum R^2 homöomorphe Menge Q mit

$$\delta(Q) < \tfrac{1}{4}\Delta_{a-2k-2}, \; g_k(\overline{V}) + g'_k(\overline{V}) + \overline{V} \subset Q. \tag{12}$$

Denn nach der Erklärung der Δ_i gibt es eine in P offene zum R^2 homöomorphe Menge Q mit

$$P . U(q; \Delta_{a-2k-1}) \subset Q \subset P . U(q; \tfrac{1}{8}\Delta_{a-2k-2}),$$

und von dieser Menge gilt (12): Wegen $Q_0 . \overline{V} \neq 0$ ist $\delta(Q_0 + V) \leqq \delta(Q_0) + \delta(V)$. Wegen (8), (4) und (1) ist also $\delta(Q_0 + V) < \Delta_{a-2k-1}$ und wegen $q \in Q_0$ daher $Q_0 + V$ in Q gelegen. Mithin ist (12) wegen (8) richtig.

Auf Q, U, V, g_k und g'_k wenden wir den obigen Satz im Kleinen an. Derselbe ergibt gleichmässig reguläre Scharen $(g^\tau, \tau \in J_\alpha)$,

$(g^\tau, \tau \in J_\alpha)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in Q mit (9), (10) und (11).

Da die V_{ki}, $i = 1, \ldots, m_k$, paarweis zu einander fremd sind, können wir $g^\tau(p)$ als in allen (p, τ), für die p in $\sum_i V_{ki}$ und τ in $J_\alpha + J_\beta$ liegt, erklärt nehmen. Für die (p, τ) mit $p \in P - \sum_i V_{ki}$ und $\tau \in J_\alpha$ sei $g^\tau(p) = g_k(p)$. Ist p ein Punkt aus $P - \sum_i V_{ki}$ und τ eine Zahl aus J_β, so sei $g^\tau(p) = g'_k(p)$. Diese Erklärung ist wegen (9) stetig.

Mit der oben angegebenen Bedeutung von g_{k+1} und g'_{k+1} gilt dann $1_{k+1})$, $2_{k+1})$ und $3_{k+1})$:

Es ist $g_{k+1\ 1}(p) = g'_{k+1}\ (p)$ für $p \in \sum_{l=-1}^{k-1} \sum_i U_{li}$ wegen $1_k)$ und (10). Daher gilt $1_{k+1})$ nach (11).

Für $\tau \in J_\alpha$ bzw. $\tau \in J_\beta$ ist

$$(*) \qquad \varrho(g_k, g^\tau) < \tfrac{1}{4}\Delta_{a-2k-2}, \quad \varrho(g'_k, g^\tau) < \tfrac{1}{4}\Delta_{a-2k-2}.$$

Denn da g_k und g'_k auf V nur innerhalb Q verschoben wird, folgt (*) aus (8), (12) und (1).

Nach (*) sind im besonderen $\varrho(g_k, g_{k+1})$ und $\varrho(g'_k, g'_{k+1})$ kleiner als die Zahl $\frac{1}{4}\Delta_{a-2k-2}$. Mithin folgt $2_{k+1})$ aus $2_k)$ und (1).

Zum Beweis von $3_{k+1})$ ist wegen $3_k)$ nur zu zeigen, dass $\varrho(g, g^\tau)$ nicht grösser als $\dfrac{k+1}{a}\varepsilon$ ist für alle τ aus J_α und J_β. Dies folgt aber aus $3_k)$ sowie (*) und $\frac{1}{4}\Delta_{a-2k-2} < \Delta_0 = \dfrac{1}{a}\varepsilon$.

Es ist $\alpha + (n+1)\omega = \beta - (n+1)\omega$. Wir bezeichnen die Zahl $\alpha + (n+1)\omega$ auch mit γ. Für $k = n$ ist dann $\sum_{i=-1}^{k} \sum U_{li}$ gleich P. Und es sind $(g^\tau, \alpha \leqq \tau \leqq \gamma)$ und $(g^\tau, \gamma \leqq \tau \leqq \beta)$ gleichmässig reguläre Abbildungsscharen in P mit $g^\alpha = g$, $g^\beta = g'$ und $\varrho(g, g^\tau) \leqq \dfrac{\varepsilon}{2}$ für alle τ aus $[\alpha, \beta]$.

Nach einer obigen Bemerkung ist damit Satz 4 bewiesen.

5. *Der Approximationssatz in Dimensionen grösser als* 2.

Sind $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ Punkte des R^n, so sagen wir, (a, b) sei ein „*Antipodenpaar*“, wenn $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\alpha_n \neq \beta_n$. Sind M eine Teilmenge des R^n und f, g eindeutige Abbildungen von M in den R^n, so nennen wir den Punkt p von M einen „*Antipodenpunkt*“ von (f, g), wenn $(f(p), g(p))$ ein Antipodenpaar ist.

Definition. *Als eine „reguläre Verbindungsfunktion" des R^n $n > 2$, bezeichnen wir eine für alle $(n+2)$-Tupel $(p, p', \tau', \ldots, \tau^n)$ — wobei p und p' solche Punkte des R^n, dass (p, p') kein Antipodenpaar ist, und $\tau^1, \ldots, \tau^n$ Zahlen aus $[0, 1]$ sind — erklärte stetige Abbildung a in den R^n mit den Eigenschaften 1 bis 4.*

1. *Für alle Punktpaare (p, p') des R^n, für die a erklärt ist, und alle Punkte $(\tau^1, \ldots, \tau^{n-1})$ des $(n-1)$-dimensionalen Einheitswürfels ist*

$$a(p, p', \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, 0) = p, \quad a(p, p', \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, 1) = p'.$$

2. *Es ist $(a(p, p', \tau', \ldots, \tau^n), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq \tau^n \tau 1) = p$, wenn (p, p') ein Punktpaar des R^n mit $p = p'$.*

3. *Sind p, p' Punkte des R^n und $(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ Punkte des n-dimensionalen Einheitswürfels mit*

$$a(p, p', \tau_1^1, \ldots, \tau_1^n) = a(p, p', \tau_2^1, \ldots, \tau_2^n),$$
$$p \neq p', \; 0 < \tau_1^n < 1, \; 0 < \tau_2^n < 1,$$

so ist $(\tau_1^1, \ldots, \tau_1^n) = (\tau_2^1, \ldots, \tau_2^n)$.

4. *Sind p, p' Punkte des R^n und $\tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, \alpha, \beta$ Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ mit $a(p, p', \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, \alpha) = a(p, p', \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, \beta)$ und $p \neq p'$, so ist $\tau_1^n = \tau_2^n$.*

Eine einfachere Überlegung ergibt, dass zu jeder Zahl $n > 2$ reguläre Verbindungsfunktionen des R^n existieren: Es sei S die $(n-1)$-dimensionale Sphäre im R^n mit dem Nullpunkt r des R^n als Mittelpunkt und dem Radius 1, q der Punkt $(0, \ldots, 0, +1)$ und q' der Punkt $(0, \ldots, 0, -1)$. Dann genügt es offenbar, $a(p, p', \tau^1, \ldots, \tau^n)$ zu erklären für alle Punktpaare (p, p') auf S, die zu r diametral liegen und von (q, q') und (q', q) verschieden sind. Dies kann wie folgt geschehen. Es sei V die von s begrenzte abgeschlossene Vollkugel. Den n-dimensionalen Einheitswürfel des R^n nennen wir W, W_0 und W_1 die Menge aller Punkte $(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ von W mit $\tau^n = 0$ bzw. $\tau^n = 1$. Dann erklären wir zunächst eine stetige Abbildung φ von W auf V, und zwar sei $\varphi(W_0) = q$, $\varphi(W_1) = q'$. Über $W - (W_0 + W_1)$ kann man φ leicht derart stetig fortsetzen, dass $W - (W_0 + W_1)$ topologisch auf $V - (\bar{q} + \bar{q}')$ abgebildet wird. Dann sei $a(q, q', \tau^1, \ldots, \tau^n)$ der Punkt $\varphi(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ für alle $(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ des n-dimensionalen Einheitswürfels. Ist hierauf (p, p') irgendein von (q, q') und (q', q) verschiedenes Punktpaar auf S, welches zu r diametral liegt, ferner L_0 die von q, p und p' aufgespannte 2-dimensionale Ebene des R^n, L die $(n-1)$-dimensionale Ebene des R^n senkrecht auf $\overline{qq'}$ durch r und L_1 die auf L_0 senkrechte $(n-2)$-dimensionale

Ebene in L durch r, so drehen wir den R^n um L_1 in derjenigen Richtung, die q auf dem kürzesten Weg nach p überführt. Dabei geht jeder Punkt p des R^n in einen Punkt $d(p)$ über. Schliesslich sei

$$a(p, p', \tau^1, \ldots, \tau^n) = da(q, q', \tau^1, \ldots, \tau^n)$$

für alle Punkte $(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ des n-dimensionalen Einheitswürfels.

Mit einer Ergänzung lautet nun Satz 1 in Dimensionen > 2 wie folgt.

Satz 1'. *Es seien P_0 und P endliche Polyeder im R^r, $r > 2$, so dass $P_0 \neq 0$ im Innern von P liegt; f und f' stetige Abbildungen von P in den R^r ohne Fixpunkte. In einer Umgebung von P_0 liege kein Antipodenpunkt von (f, f'). Dann gibt es eine natürliche Zahl ζ und eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in den R^r, von der gilt: $f^0 = f$; für alle (p, τ) mit $p \in B(P)$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $f^\tau(p) = f(p)$;*

$$f^1(p) = f'(p), \text{ wenn } f(p) = f'(p);$$
$$f^1(p) = f'(p), \qquad p \in P_0;$$

für $0 \leqq \tau \leqq 1$ hat die Abbildung f^τ höchstens ζ Fixpunkte.

Beweis. Es sei P_1 ein endliches Polyeder im R^r, so dass P_0 im Innern von P_1, P_1 in P liegt und sich auf P_1 kein Antipodenpunkt von (f, f') befindet. Dann setzen wir zunächst $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in P - P_1$, und $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Nach den obigen Ausführung existiert weiter eine für alle $(p, \tau^1, \ldots, \tau^n)$, $p \in P_1$ und $0 \leqq \tau^1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq \tau^n \leqq 1$, erklärte stetige Abbildung a mit den folgenden Eigenschaften (1.1) bis (1.4).

(1.1) Es ist $a(p, \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, 0) = f(p)$ und $a(p, \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, 1) = f'(p)$ für alle n-Tupel $(p, \tau^1, \ldots, \tau^{n-1})$ mit $p \in P_1$ und $0 \leqq \tau^1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq \tau^{n-1} \leqq 1$.

(1.2) Es ist $(a(p, \tau^1, \ldots, \tau^n), 0 \leqq \tau^1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq \tau^n \leqq 1) = f(p)$, wenn p ein Punkt aus P_1 mit $f(p) = f'(p)$.

(1.3) Ist p ein Punkt von P_1 mit $f(p) \neq f'(p)$, so folgt, wenn τ_1^n und τ_2^n Zahlen aus $(0, 1)$ sind, aus $a(p, \tau_1^1, \ldots, \tau_1^n) = a(p, \tau_2^1, \ldots, \tau_2^n)$ die Gleichung $(\tau_1^1, \ldots, \tau_1^n) = (\tau_2^1, \ldots, \tau_2^n)$.

(1.4) Ist p ein Punkt aus P_1 mit $f(p) \neq f'(p)$, so folgt für beliebige Zahlen α und β von $[0, 1]$ aus $a(p, \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, \alpha) = a(p, \tau^1, \ldots, \tau^{n-1}, \beta)$ die Gleichung $\alpha = \beta$.

Hierauf kann man Satz 1' wie Satz 1 beweisen.

Wit benutzen später folgenden Hilfssatz. *Es seien K ein endlicher simplizialer Komplex im R^r und f, g simpliziale Ab-*

bildungen von K in den R^r, ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine simpliziale Abbildung f^1 von K in den R^r mit $\varrho(f, f^1) < \varepsilon$ und der Eigenschaft: die Menge der Antipodenpunkte von (f^1, g) ist leer oder ein homogen 1-dimensionales endliches Polyeder.

Beweis. Es bezeichne φ die durch $\varphi(p) = f(p) - g(p)$, $p \in \overline{K}$, bestimmte simpliziale Abbildung von $\overline{K}$ in den R^r, G die Gerade durch die Punkte $(0, \ldots, 0)$ und $(0, \ldots, 0, 1)$ der R^r.

Durch eine ε-Verschiebung der Punkte $\varphi(e)$, e Eckpunkt von K, in Punkte $\varphi^1(e)$ lässt sich eine simpliziale Abbildung φ^1 von K in den R^r mit $\varphi^1(e) \notin G$, $e \in K$, gewinnen, von der gilt: die Menge S aller Punkte p von K mit $\varphi^1(p) \in G$ ist leer oder ein homogen 1-dimensionales endliches Polyeder.

Mit $f^1(p) = g(p) + \varphi^1(p)$, $p \in \overline{K}$, ist die Abbildung f^1 von der verlangten Art: Wegen $\varrho(\varphi, \varphi^1) < \varepsilon$ ist $\varrho(f, f^1) < \varepsilon$. Die Menge der Antipodenpunkte von (f^1, g) ist gleich der Menge der Punkte p von $\overline{K}$ mit $\varphi^1(p) \in G$, also gleich S.

Eine Ergänzung, die es ermöglicht, die oben für 2 Dimensionen ausgeführten Überlegungen auf beliebige Dimensionen zu übertragen, ist in dem folgenden für Dimensionen > 2 gültigen Satz zusammengefasst.

Satz über Antipodenpunkte. *Es seien P, P_0 endliche Polyeder im R^r, $r > 2$, und $P_0 \neq 0$ im Innern von P gelegen, ferner f und g stetige Abbildungen von P in den R^r ohne Fixpunkte. Dann gibt es Scharen $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ fixpunktfreier Abbildungen f^τ und g^τ von P in den R^r mit $f^0 = f$, $g^0 = g$,*

$$(*) \qquad f^\tau(p) = f(p),\ g^\tau(p) = g(p), \qquad p \in B(P),\ 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

$$(*) \qquad f^1(p) = g^1(p),\ \textit{wenn}\ f(p) = g(p),$$

und der Eigenschaft, dass in einer Umgebung von P_0 kein Antipodenpunkt von (f^1, g^1) liegt.

Beweis. Es seien $\eta > 0$ eine Zahl, so dass

$$(1) \qquad \varrho(p, f(p)) > \eta,\ \varrho(p, g(p)) > \eta, \qquad p \in P;$$

Q die Menge aller Punkte p von P mit $f(p) = g(p)$; $\delta > 0$ eine Zahl, so dass $\overline{U}(P_0; \delta)$ im Innern von P liegt und

$$(2) \qquad \varrho(f(p), g(p)) < \frac{\eta}{4}, \qquad p \in P \,.\, \overline{U}(Q;\ \delta);$$

ferner K eine simpliziale Zerlegung von P, deren Simplexedurchmesser kleiner als $\frac{1}{4}\delta$ sind; α und β Zahlen mit $0 < \alpha < \beta < 1$.

Sind φ_1 und γ_1 simpliziale Abbildungen einer Unterteilung K_1 von K in den R^r mit

$$(3) \quad \varrho(\varphi_1, f) < \frac{\eta}{4}, \ \varrho(\gamma_1, g) < \frac{\eta}{4}, \varphi_1(p) \neq \gamma_1(p) \text{ für } \varrho(p, Q) \geqq \frac{1}{4}\delta,$$

so kann man nach dem obigen Hilfssatz durch eine kleine Verschiebung der Punkte $\varphi^1(e)$, e Eckpunkt von K_1, simpliziale Abbildungen φ und γ von K_1 in den R^r gewinnen, von denen (3) gilt, wenn man darin φ_1, γ_1 durch φ, γ ersetzt, und ferner: bezeichnet L den Komplex aller Simplexe $\bar{x}$ von K_1, für die $\varrho(\bar{x}, Q) \geqq \frac{1}{4}\delta$ und $\bar{x} \,.\, P_0 \neq 0$ ist, und ihrer Seiten, so ist die Menge S aller Punkte p von $\overline{L}$, die Antipodenpunkte von (φ, γ) sind, leer oder ein homogen 1-dimensionales endliches Polyeder.

Nun sei $\delta_1 > 0$ eine Zahl, so dass $\overline{U}(\overline{L}; \delta_1)$ in P liegt und zu $Q + B(P)$ fremd ist; ferner $\lambda(p) = 1 - \varrho(p, \overline{L})/\delta_1$ für die Punkte p von $\overline{U}(\overline{L}; \delta_1)$ und $\lambda(p) = 0$ für die übrigen Punkte von P. In allen (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ sei hierauf

$$(4) \qquad f^\tau(p) = \left(1 - \frac{\tau}{\alpha}\lambda(p)\right)f(p) + \frac{\tau}{\alpha}\lambda(p)\varphi(p)$$

und $g^\tau(p)$ bestimmt, indem man f und φ in (4) durch g bzw. γ ersetzt. Dann sind $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$ und $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$ Scharen fixpunktfreier Abbildungen f^τ und g^τ von P in den $\mathbf{R}^r$ mit $f^0 =$ und $g^0 = g$. Es ist $f^\tau(p) = f(p)$ und $g^\tau(p) = g(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in B(P)$ und $0 \leqq \tau \leqq \alpha$.

Wegen $f^\alpha(p) = \varphi(p)$ und $g^\alpha(p) = \gamma(p)$, $p \in L$, gilt ferner: die Menge aller Punkte p von $\overline{L}$, die Antipodenpunkte von (f^α, g^α) sind, ist S. Ist also p ein Punkt von P_0, der Antipodenpunkt von (f^α, g^α) ist und nicht auf S liegt, so ist $p \notin \overline{L}$.

Wenn S leer ist, setzen wir $f^\tau = f^\alpha$ und $g^\tau = g^\alpha$ für $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$. Nun sei $S \neq 0$ und T das 2-dimensionale Polyeder, das die Vereinigungsmenge der Strecken $\overline{f^\alpha(p)g^\alpha(p)}$, $p \in S$, ist. Wegen $r > 2$ können wir annehmen, dass $S \,.\, T$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht und dass überdies, wenn p einer dieser Punkte, p zu $\overline{f^\alpha(p)g^\alpha(p)}$ fremd ist, dass also insgesamt

$$(5) \qquad p \notin \overline{f^\alpha(p)g^\alpha(p)}, \qquad p \in S.$$

Da S kompakt und zu der kompakten Menge $Q + B(P)$ fremd ist, gibt es eine Zahl $\delta_2 > 0$ derart, dass $\overline{U}(S; \delta_2)$ in P liegt und zu $Q + B(P)$ fremd ist und dass (5) sogar bei Ersetzung von S durch $\overline{U}(S; \delta_2)$ richtig bleibt.

Für $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei $h_1^\tau = (1-\tau)f^\alpha + \tau g^\alpha$.

Es sei $\mu(p) = 1 - \varrho(p, S)/\delta_2$ für $p \in \overline{U}(S; \delta_2)$ und $\mu(p) = 0$ in allen übrigen Punkten von P. Schliesslich setzen wir für alle (p, τ), für die $p \in P$ und $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ ist, $g^\tau(p) = g^\alpha(p)$ und

$$(6) \qquad f^\tau(p) = h_1^\sigma(p) \text{ mit } \sigma = ((\tau-\alpha)\mu(p))/(\beta-\alpha).$$

Da die Abbildungen f^α und g^α keinen Fixpunkt haben und man S in (5) durch $\overline{U}(S; \delta_2)$ ersetzen kann, sind $(f^\tau, \alpha \leqq \tau \leqq \beta)$ und $(g^\tau, \alpha \leqq \tau \leqq \beta)$ Scharen fixpunktfreier Abbildungen.

Auf $\overline{L}$ befindet sich kein Antipodenpunkt von (f^β, g^β). Denn es ist S die Menge der Antipodenpunkte von (f^α, g^α) auf $\overline{L}$. Da für $p \in P$ die Punkte $f^\alpha(p)$ und $g^\alpha(p)$ auf $\overline{f^\beta(p)g^\beta(p)}$ liegen, ist die Menge der Antipodenpunkte von (f^β, g^β) in S enthalten, wegen $f^\beta(p) = g^\beta(p)$, $p \in S$, also leer.

Es ist

$$(7) \qquad p \notin \overline{f^\beta(p)g^\beta(p)}, \qquad p \in P \,.\, \overline{U}(Q; \delta).$$

Zum Beweis von (7) sei q ein Punkt aus $P \,.\, \overline{U}(Q; \delta)$. Dann folgt zunächst aus (3), $\varrho(f(q), f^\alpha(q)) \leqq \varrho(f(q), \varphi(q))$ und $\varrho(g(q), g^\alpha(q)) \leqq \varrho(g(q), \gamma(q))$, dass

$$(^+) \qquad \varrho(f(q), f^\alpha(q)) < \frac{\eta}{4}, \; \varrho(g(q), g^\alpha(q)) < \frac{\eta}{4}.$$

Nach (2) und $(^+)$ ist dann $\varrho(f^\alpha(q), g^\alpha(q))$ kleiner als

$$\varrho(f(q), f^\alpha(q)) + \varrho(f(q), g(q)) + \varrho(g(q), g^\alpha(q)) < \tfrac{3}{4}\eta,$$

wegen (1) also $\varrho(q, \overline{f^\alpha(q)g^\alpha(q)})$ nicht kleiner als

$$\varrho(q, f(q)) - \varrho(f(q), f^\alpha(q)) - \varrho(f^\alpha(q), g^\alpha(q)) > \eta - \frac{\eta}{4} - \frac{3}{4}\eta = 0.$$

Aus $\overline{f^\beta(q)g^\beta(q)} \subset \overline{f^\alpha(q)g^\alpha(q)}$ folgt daher, dass $q \notin \overline{f^\beta(q)g^\beta(q)}$.

Da $\overline{U}(\overline{L}; \delta_1)$ und ebenso $\overline{U}(S; \delta_2)$ zu $Q + B(P)$ fremd, ist

$$(8) \qquad f^\tau(p) = f(p), \; g^\tau(p) = g(q), \quad p \in Q + B(P), \; 0 \leqq \tau \leqq \beta.$$

Es bezeichne Q_0 die Menge $\overline{U}(Q \,.\, P_0; \frac{1}{2}\delta)$. Nach der Erklärung von δ liegt $\overline{U}(P_0; \delta)$ im Innern von P; also liegt erst recht $\overline{U}(Q \,.\, P_0; \frac{1}{2}\varepsilon)$ im Innern von P. Daher gibt es eine Zahl $\delta_3 > 0$, so dass $U(Q_0; \delta_3)$ in $P \,.\, U(Q; \delta)$ liegt.

Für $0 \leqq \tau \leqq 1$ bezeichne h_2^τ die Abbildung $(1-\tau)f^\beta + \tau g^\beta$.

Hierauf sei $\gamma(p) = 1 - \varrho(p, Q_0)/\delta_3$ für $p \in U(Q_0; \delta_3)$ und $\gamma(p) = 0$ für die übrigen Punkte p von P. In allen (p, τ) mit $p \in P$ und $\beta \leqq \tau \leqq 1$ sei $g^\tau(p) = g^\beta(p)$ und

(9) $\quad f^\tau(p) = h_1^\sigma(p)$ mit $\sigma = ((\tau - \beta)\gamma(p))/(1 - \beta)$.

Da $U(Q_0; \delta_3)$ in $P \,.\, U(Q; \delta)$ liegt, (7) gilt und die Abbildungen f^β, g^β keinen Fixpunkt haben, sind alle Abbildungen der Scharen $(f^\tau,\ \beta \leqq \tau \leqq 1)$ und $(g^\tau,\ \beta \leqq \tau \leqq 1)$ fixpunktfrei. Da $U(Q_0; \delta_3)$ in P liegt, ist $f^\tau(p) = f(p)$ und $g^\tau(p) = g(p)$, $p \in B(P)$, auch für $\beta \leqq \tau \leqq 1$.

Es sei q ein Punkt von Q. Dann ist $f(q) = g(q)$, nach (8) weiter $f^\beta(q) = g^\beta(q)$ und also auch $f^1(q) = g^1(q)$.

Auf $\bar{L}$ haben (f^β, g^β), also erst recht (f^1, g^1) keinen Antipodenpunkt. Wegen $f^1(p) = g^1(p)$, $p \in Q_0$, und der Bedeutung von Q_0 befindet sich auf $\bar{U}(Q \,.\, P_0; \frac{1}{2}\delta)$ kein Antipodenpunkt von (f^1, g^1). Aus der Erklärung von L folgt, dass P_0 im Innern von $\bar{L} + \bar{U}(Q \,.\, P_0; \frac{1}{2}\delta)$ liegt. Mithin befindet sich in einer Umgebung von P_0 kein Antipodenpunkt von (f^1, g^1).

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir können nun die Gültigkeit von Satz 3 auch in Dimensionen > 2 nachweisen:

Satz 3′. *Es bleibt Satz 3 richtig, wenn man darin 2 durch die beliebige natürliche Zahl $r > 2$ ersetzt.*

Beweis. Die Bedeutung von q_i, $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $i = 1, \ldots, m$, Q_0, Q, P_0 und P sei bis auf die Dimension 2, die man durch r ersetze, die gleiche wie im Beweis zu Satz 3.

Es seien α und β Zahlen mit $0 < \alpha < \beta < 1$.

Nach dem obigen Satz über Antipodenpaare gibt es Scharen $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$, $(g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq \alpha)$ fixpunktfreier Abbildungen f^τ, g^τ von P in den R^r mit $f^0 = f$, $f^0 = g$,

(1) $\quad f^\tau(p) = f(p),\ g^\tau(p) = g(p), \quad p \in B(P),\ 0 \leqq \tau \leqq \alpha,$

(2) $\quad f^\alpha(p) = g^\alpha(p)$, wenn $f(p) = g(p)$,

und der Eigenschaft, dass in einer Umgebung von P_0 kein Antipodenpunkt von (f^α, g^α) liegt.

Für alle (p, τ) mit $p \in \bar{V} - P$ und $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ sei $f^\tau(p) = f(p)$ und $g^\tau(p) = g(p)$. Die so erklärten Abbildungen f^τ und g^τ sind wegen (1) stetig.

Hierauf kann man vermöge Satz 1′ und Satz 2 den Beweis fast wörtlich wie im Fall von Satz 3 zu Ende führen.

Wie aus Satz 3′ folgt, gilt der in Abschnitt 4 angegebene Satz im Kleinen auch für die Dimensionen > 2. Er gilt ferner, wie sich durch einige Kürzungen des für die Dimension 2 ausgeführten Beweises ergibt, auch in der Dimension 1. Alsdann überzeugt man sich ohne Mühe, dass die Aussagen von Abschnitt 4 richtig bleiben, wenn man dort an passender Stelle jeweils 2 durch die beliebige natürliche Zahl r ersetzt. Mithin gilt folgender

Satz 4'. *Bezeichnet r eine natürliche Zahl und P eine r-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit im R^n, so bleibt Satz 4 richtig.*

Schliesslich folgt aus Satz 4', da sich jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Zahlenraum einbetten lässt, der nachstehende

Approximationssatz. *Es seien $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ der kompakten topologischen Mannigfaltigkeit P in sich und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl ζ und eine Schar $(g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit $\varrho(f^\tau, g^\tau) < \varepsilon$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und den Eigenschaften: für $0 \leqq \tau \leqq 1$ hat die Abbildung g^τ höchstens ζ Fixpunkte; haben f^0 und f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte, so ist $f^0 = g^0$ und $f^1 = g^1$.*

Hier schliessen unsere Untersuchungen.

(Oblatum 5-10-54).