WALTER BAUM

Die Nullwegegruppe und ihre Verallgemeinerungen

Compositio Mathematica, tome 11 (1953), p. 83-118
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1953__11__83_0>

Die Nullwegegruppe und ihre Verallgemeinerungen

von

Walter Baum

Syracuse, N.Y., U.S.A.

Einleitung.

1. Die Poincarésche Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ eines (simplizial zerlegten) zusammenhängenden Polyeders $\overline{K}$ kann in natürlicher Weise als homomorphes Bild der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ des eindimensionalen Gerüstkomplexes K^1 von K dargestellt werden (K^1 besteht aus allen höchstens eindimensionalen Simplexen von K). Als Fundamentalgruppe eines eindimensionalen Komplexes ist dabei $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe. Der Kern dieses Homomorphismus, d.h. das Vollurbild des Einselements von $\mathfrak{G}$, ist derjenige Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$, dessen Elemente durch geschlossene Wege auf K^1 repräsentiert werden, die in K auf einen Punkt, den Aufpunkt O der Gruppe $\mathfrak{F}$, stetig zusammenziehbar sind. Es ist also $\mathfrak{F}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{G}$.

2. Diese Darstellungsweise von $\mathfrak{G}$ gestattet es, aus gewissen Untergruppen von $\mathfrak{F}$ durch Operationen, die bei homomorpher Abbildung ungeändert bleiben, andere Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... zu bilden, die mit $\mathfrak{G}$ als abstrakter Gruppe in folgendem Sinne invariant verknüpft sind: Wird $\mathfrak{G}$ dargestellt als Faktorgruppe einer anderen freien Gruppe $\mathfrak{F}'$ nach ihrem Normalteiler $\mathfrak{N}'$, so sind die bei den verschiedenen Darstellungen $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}'/\mathfrak{N}'$ analog gebildeten Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$; ... paarweise einander isomorph: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{B}'$, ... $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind also als abstrakte Gruppen durch $\mathfrak{G}$ bestimmt.

3. Infolge der genannten geometrischen Bedeutung der Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ spielen gewisse dieser mit $\mathfrak{G}$ invariant verknüpften Gruppen eine wichtige Rolle in der Topologie. Solche Gruppen und ihre Bedeutung hat H. Hopf bei seiner Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Fundamentalgruppe und zweiter Bettischer Gruppe entdeckt [3]: Dieser Zusammenhang wird hergestellt durch eine mit $\mathfrak{G}$ invariant verknüpfte Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$, die folgendermaßen definiert ist: Ist $\mathfrak{C}$ die Kommutatorgruppe

von $\mathfrak{F}$, und $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ derjenige Normalteiler von $\mathfrak{C}$ (und auch von $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$), der erzeugt wird von allen Elementen der Form $xrx^{-1}r^{-1}$ ($x \in \mathfrak{F}$, $r \in \mathfrak{R}$), so ist

$$\mathfrak{G}_1^* \simeq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}/\mathfrak{C}(\mathfrak{R}).$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$, die immer Abelsch ist, wurde von Hopf in dieser Arbeit [3] eingeführt als Untergruppe einer anderen Restklassengruppe

$$\mathfrak{G}^* \simeq \mathfrak{C}/\mathfrak{C}(\mathfrak{R}),$$

die ebenfalls mit $\mathfrak{G}$ invariant verknüpft und übrigens im allgemeinen nicht kommutativ ist.

4. Es zeigt sich nun, daß die geometrische Bedeutung der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ die einer speziellen eindimensionalen Homotopiegruppe ist. Sie wird am bequemsten für simpliziale Wege definiert: die simplizialen Abbildungen einer (orientierten) simplizialen 1-dimensionalen Sphäre S^1 in K^1, die auf jedem Simplex von K^1 den Abbildungsgrad Null haben, stellen spezielle Wege, die „*Nullwege*'', dar. Für diese wird ein spezieller Homotopiebegriff erklärt: zwei Nullwege sind einander „ν-homotop'' auf K, wenn sie sich unter Festhaltung eines Punktes so auf K (d.h. bereits auf K^2) ineinander (kombinatorisch) deformieren lassen, daß jeder „Zwischenweg'' Nullweg ist. Die auf Grund dieses Homotopiebegriffs gebildeten Aequivalenzklassen von Nullwegen bilden eine Gruppe, die Nullwegegruppe $\Psi^1(K)$ von K. Dann gilt (§ 6, Korollar zu Satz I):

$$(1) \qquad \mathfrak{G}^* \simeq \Psi^1(K).$$

5. Die Nullwegegruppe läßt sich für beliebige Dimensionen n analog definieren wie für $n = 1$. Der einheitlichen Bezeichnungsweise wegen heißen sie die n-dimensionalen „Nullsphärodengruppen'' ($n \geqq 1$). (Eine simpliziale n-dimensionale „Sphärode'' ist eine simpliziale Abbildung einer n-dimensionalen Sphäre in den n-dimensionalen Gerüstkomplex K^n von K.) Die n-dimensionalen Nullsphärodengruppen sind spezielle n-dimensionale Homotopiegruppen; sie sind — wie die Hurewiczschen Homotopiegruppen [6] — für $n > 1$ Abelsch. Für die Auffindung der algebraischen Struktur der n-ten Nullsphärodengruppe $\Psi^n(K)$ gibt die Isomorphie (1) einen Hinweis; doch besitzt die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ zwei, im allgemeinen verschiedene Verallgemeinerungen beim Übergang zu Dimensionen $n \geqq 2$. H. Hopf [5] hat gezeigt, daß die Kommutatoruntergruppe $\mathfrak{C}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von K^1 zwei geometrische Bedeutungen besitzt, die für $n = 1$ zusammenfallen: die

Repräsentanten der Elemente sind a) als eindimensionale Zyklen aufgefaßt, gleich Null im Sinne der Homologie, b) Produkte von Wegen von der Form $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}^{-1}$, wobei $\bar{\mathfrak{a}}$ ein auf K^1 mit $\mathfrak{a}$ freihomotoper Weg, also $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, ist. Für Dimensionen $n > 1$ liefert die Übertragung der geometrischen Aspekte a), b) im allgemeinen verschiedene Gruppen (= Untergruppen von $\Pi^n(K^n)$): $\Gamma^n(K^n)$ für a), $\Pi_0^n(K^n)$ für b); (dabei ist $\Gamma^n(K^n) \supset \Pi_0^n(K^n)$); die beiden Gruppen sind n-dimensionale Verallgemeinerungen von $\mathfrak{C}$. Die Gruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ wird im Sinne von b) verallgemeinert zu $P_0^n(K^n, K)$. [1]) Die algebraische Struktur von $\Psi^n(K)$ ist dann bestimmt durch (cf. § 3, Satz I):

$$\Psi^n(K) \simeq \Gamma^n(K^n)/P_0^n(K^n, K). \tag{2}$$

Die Nullsphärodengruppe $\Psi^n(K^n)$ des Gerüstkomplexes K^n ist isomorph zu $\Gamma^n(K^n)$ (cf. § 3, Satz I'), worin als Spezialfall $\Psi^1(K^1) \simeq \mathfrak{C}$ enthalten ist.

6. Eine Untergruppe $\Psi_0^n(K)$ von $\Psi^n(K)$, die im Folgenden eine Rolle spielt, wird — grob gesagt — gebildet durch die Klassen solcher n-dimensionaler Nullsphäroden, in denen jeder n-dimensionale sphärische Zyklus von K^n (= simpliziales Bild des Grundzyklus einer orientierten, simplizialen S^n) in beiden Orientierungen gleich oft vorkommt. [2]) Sie ist homomorphes Bild der Gruppe $\Pi_0^n(K^n)$, genau:

$$\Psi_0^n(K) \simeq \Pi_0^n(K^n)/P_0^n(K^n, K) \qquad (\text{§ 4, Satz II}).$$

Analog zu Satz I', § 3, gilt hier

$$\Psi_0^n(K^n) \simeq \Pi_0^n(K^n) \qquad (\text{§ 4, Satz II}').$$

In der Dimension $n = 1$ fällt $\Psi^1(K)$ mit $\Psi_0^1(K)$ und $\Psi^1(K^1)$ mit $\Psi_0^1(K^1)$ zusammen.

Die bisher betrachteten Nullsphärodengruppen lassen sich auch „stetig" definieren, d.h. für den Fall stetiger Abbildungen einer S^n und stetiger Deformationen dieser Abbildungen. Sie sind topologische Invarianten eines Polyeders. (§ 7).

7. Die Rolle der Untergruppe $\Psi_0^n(K)$ innerhalb der Gruppe $\Psi^n(K)$ ist die, daß die Faktorgruppe $\Psi^n(K)/\Psi_0^n(K) = \Omega^n(K)$ eine Gruppe ist, die aus geometrischen und algebraischen Gründen Interesse verdient. Faßt man je zwei n-dimensionale sphärische Zyklen von K^n, die in einer n-dimensionalen Nullsphärode in beiden Orientierungen gleich oft vorkommen (cf. oben No. 6), als

---

[1]) Für die Definition dieser Gruppen cf. 3.1.

[2]) Korrekte Definition siehe 4.2.

eine „sphärische Komponente" der Nullsphärode auf — die Zusammengehörigkeit zweier sphärischer Zyklen zu einer Komponente ist durch die die Nullsphärode definierende Abbildung der S^n bestimmt — so werden die Elemente von $\Omega^n(K)$ durch Nullsphäroden repräsentiert, die durch vollständiges Weglassen der sphärische Komponenten aus den Nullsphäroden von $\Psi^n(K)$ entstanden sind. $\Omega^n(K)$ ist also die Gruppe der (in diesem Sinne) „reduzierten" n-dimensionalen Nullsphäroden von K. Es zeigt sich, daß diese Gruppe isomorph ist mit der analog gebildeten Gruppe $\Omega^n(K^n)$ des Gerüstkomplexes (§ 5, Satz IV). Diese Tatsache wird wesentlich, wenn man sie in Zusammenhang damit bringt, daß $\Omega^n(K)$ eine topologische Invariante von K ist. Denn es ergibt sich daraus, daß auch die durch den Gerüstkomplex K^n bestimmte Gruppe $\Omega^n(K^n)$ eine Invariante von K ist. (§ 6, Satz VIII). Die algebraische Struktur von $\Omega^n(K)$ (und $\Omega^n(K^n)$) ist andererseits durch die Isomorphie

$$\Omega^n(K) \simeq \Gamma^n(K^n)/\Pi_0^n(K^n)$$

bestimmt (§ 5, Satz III), wobei

$$\Gamma^n(K^n)/\Pi_0^n(K^n) = \Delta^n(K^n)$$

eine Gruppe ist, die in den Untersuchungen von H. Hopf über Zusammenhänge zwischen Homotopie- und Homologiegruppen [5] wichtig ist. Aus der Invarianz von $\Omega^n(K^n)$ folgt, daß $\Delta^n(K^n)$ eine topologische Invariante von K ist (§ 6, Satz VII).

8. Bringt man den genannten Satz III (§ 5) in Zusammenhang mit einem anderen Satz von H. Hopf ([5], Satz I), so zeigt es sich, daß man für eine weitere von Hopf im Rahmen seiner erwähnten Untersuchungen eingeführte Gruppe eine geometrische Deutung erhält: Hopf hat [4] durch einen algebraischen Prozeß jeder abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ eine unendliche Folge von Abelschen Gruppen $\mathfrak{G}^1$, $\mathfrak{G}^2$, ..., die „zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Bettischen Gruppen", in eindeutiger Weise zugeordnet. Ist $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden Komplexes K, so ist $\mathfrak{G}^1$ die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach ihrer Kommutatorgruppe, $\mathfrak{G}^2$ der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ von No. 3 isomorph. Die Gruppe $\mathfrak{G}^3$ läßt sich geometrisch nun so deuten: sie ist isomorph der Gruppe $\Omega^2(K)$ der zweidimensionalen reduzierten Nullsphäroden von K (§ 6, Korollar zu Satz V). Die geometrische Deutung der Gruppen $\mathfrak{G}^i$ ($i \geqq 3$) durch die reduzierten Nullsphärodengruppen läßt sich auf diese Weise nur erreichen, wenn man noch voraussetzt, daß K asphärisch in allen

Dimensionen r mit $1 < r < n$ sei (§ 6, Satz V). Die Gruppe $\Omega^1(K)$ besteht übrigens immer aus dem Nullelement allein (§ 6, Satz VI).

9. Die Resultate von No. 7 und No. 8 werden in gewissem Sinne einfacher, wenn K einfach zusammenhängend ist. Dann ist nämlich die Gruppe der reduzierten Nullsphäroden isomorph der Gruppe der (gewöhnlichen) Nullsphäroden, und es genügt somit, allein diese zu betrachten. Nach No. 7 und 8 gelten dann z.B. die folgenden beiden Aussagen: Ist K einfach zusammenhängend, so ist die Gruppe $\Psi^n(K^n)$ der n-dimensionalen Nullsphäroden von K^n eine topologische Invariante von K; ferner:

$$\Psi^2(K^n) \simeq \Psi^2(K) \simeq \mathfrak{G}^3.$$

10. In dieser Arbeit werden die Nullsphärodengruppen von vorneherein für den n-dimensionalen Fall behandelt, mit Einschluß des (nichtkommutativen) eindimensionalen Falls. Nur Folgerungen für $n = 1$ werden gelegentlich separat dargestellt. Es hat sich dabei gezeigt, daß es vorteilhaft ist, den Deformationsbegriff für Sphäroden anders darzustellen, als es sonst — z.B. bei den Hurewiczschen Homotopiegruppen — üblich ist (§ 1). Der neue Deformationsbegriff ist aber im Prinzip dem üblichen äquivalent.

Herrn Professor H. Hopf danke ich herzlich für Anregung und wertvolle Ratschläge zu dieser Arbeit.

§ 1. Der Begriff der Deformation für stetige und simpliziale Sphärenbilder.

1.1. Die Elemente der n-ten Homotopiegruppe $\Pi^n(\overline{K})$ eines zusammenhängenden Polyeders $\overline{K}$ sind die Aequivalenzklassen der stetigen Abbildungen [3]) einer orientierten n-dimensionalen Sphäre S^n in $\overline{K}$. Der dabei zugrundeliegende Aequivalenzbegriff ist die stetige Deformierbarkeit der stetigen Sphärenbilder einer Klasse ineinander unter Festhaltung eines gemeinsamen Punktes in $\overline{K}$. Die übliche Art, die Deformation eines Sphärenbildes $\mathfrak{s}_1^n$ in ein anderes $\mathfrak{s}_2^n$ zu definieren, beruht auf der Betrachtung des topologischen Produktes der Urbildsphäre S^n mit einer abgeschlossenen Parameterstrecke T^1, deren Punkten die reellen Parameterwerte t etwa zwischen 0 und 1 zugeordnet sind. Eine etwas andere Methode, den Deformationsprozeß zu erklären, hat den Vorteil,

[3]) Alle stetigen Abbildungen, die in dieser Arbeit vorkommen, sind eindeutig. Statt „stetige Abbildung" sagen wir manchmal kurz „Abbildung".

daß ihre Übertragung auf den Fall simplizialer Sphärenbilder und deren simplizialen Deformationen weniger kompliziert ist als für die erstgenannte Art. Die beiden Methoden sind übrigens dem Prinzip nach äquivalent.

1.2. Diese zweite Methode läßt sich so erklären: Ein stetiges Sphärenbild $\mathfrak{S}^n$ (wir sagen kurz: eine Sphärode) sei durch eine eindeutige stetige Abbildung f der orientierten Urbildsphäre S^n in $\overline{K}$ gegeben. Auf S^n sei ein Punkt o, ein Urbild des späteren Bezugspunktes O von $\Pi^n(\overline{K})$, ausgezeichnet. An S^n hänge man in o eine orientierte $(n+1)$-dimensionale Vollkugel $\overline{V}^{n+1}$ an, [4]) indem man einen Punkt o_1 ihrer Randsphäre $\overline{S}^n$ mit o identifiziert. Die so entstandene „topologische Summe" von S^n mit der (abgeschlossenen) Vollkugel $\overline{V}^{n+1}$ werde mit $S^n \oplus \overline{V}^{n+1}$ bezeichnet. o_2 sei der Diametralpunkt von o_1 auf $\overline{S}^n$. k_1, k_2 seien zwei, voneinander verschiedene, $(n-1)$-dimensionale Parallelkreise auf $\overline{S}^n$ (bezügl. o_1, o_2 als Pole), etwa k_1 auf der Hemisphäre von o_1, k_2 auf derjenigen von o_2. Die von k_1 auf $\overline{S}^n$ berandete n-dimensionale Vollkugel, die o_1 enthält, heiße C_1; analog sei C_2 mit Hilfe von k_2 und o_2 definiert. (C_1, C_2 werden wir manchmal kurz Kappen nennen.) Schließlich sei Z der n-dimensionale Ringbereich (die „Zone") auf $\overline{S}^n$, der durch k_1 und k_2 berandet wird.

Der für das Folgende grundlegende Begriff der *Deformation einer Sphärode* $\mathfrak{S}^n$ *über einem ihrer Punkte* A wird nun so definiert: Sei A ein (beliebiger) Punkt von $\mathfrak{S}^n$, a ein Urbild von A auf S^n, also $f(a) = A$. [5]) Eine Deformation der Sphärode $\mathfrak{S}^n$ über dem Punkte A wird dann gegeben durch eine Abbildung F von $S^n \oplus \overline{V}^{n+1}$ in $\overline{K}$, die folgendermaßen als Erweiterung der Abbildung f von S^n konstruiert wird:

$$
\begin{array}{ll}
(0) & F(S^n) \equiv f(S^n) = \mathfrak{S}^n \quad (F \text{ und } f \text{ auf } S^n \text{ identisch}) \\
(1) & F(o_1) = F(o_2) = f(o) = O \\
(2) & F(k_1) = F(k_2) = f(a) = A \\
(3) & \begin{cases} F(C_1) = f(u) = U \\ F(C_2) = f(u^{-1}) = U^{-1} \end{cases}
\end{array}
$$

wobei u ein orientierter 1-dimensionaler Weg auf S^n ist, der von

[4]) Die Orientierung von $\overline{V}^{n+1}$ werde dabei im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum R^{n+1}, in dem $\overline{V}^{n+1}$ und S^n eingebettet sind, gleich gewählt der Orientierung der von S^n berandeten Vollkugel V^{n+1}. (V^{n+1} wird hier sonst keine Rolle spielen.)

[5]) Verschiedene Urbilder von A auf S^n (sofern sie existieren) bedingen verschiedene Deformationen von $\mathfrak{S}^n$ über A, und somit verschiedene deformierte Sphäroden von $\mathfrak{S}^n$.

o nach a läuft, u^{-1} der entgegengesetzt durchlaufene Weg, und U bzw. U^{-1} die f-Bilder von u bzw. u^{-1} auf $\mathfrak{S}^n$ sind.

Das Resultat der Deformation ist $F(S^n \oplus \overline{S}^n) = \mathfrak{S}_1^n$. $\mathfrak{S}_1^n$ stellt die Sphärode dar, in die $\mathfrak{S}^n$ deformiert wurde, wenn man $\mathfrak{S}_1^n$ als stetiges Bild einer orientierten Sphäre $\mathscr{S}^n$ (mit ausgezeichnetem Punkt) auffaßt, die stetig so auf $S^n \oplus \overline{S}^n$ abgebildet wurde, daß der $(n-1)$-dimensionale „Aequator" durch den ausgezeichneten Punkt von $\mathscr{S}^n$ in o übergeht, die eine Hemisphäre in $\overline{S}^n$, die andere in S^n.

1.3. Man kann eine Deformation einer Sphärode $\mathfrak{S}^n$ im Punkte A auch folgendermaßen darstellen: $\mathfrak{S}^n$ sei durch die stetige Abbildung φ der orientierten n-dimensionalen Sphäre Σ^n in $\overline{K}$ gegeben: $\varphi(\Sigma^n) = \mathfrak{S}^n$; der ausgezeichnete Punkt $\mathfrak{o}$ von Σ^n werde auf den Punkt O von $\mathfrak{S}^n$ abgebildet: $\varphi(\mathfrak{o}) = O$. α sei ein Urbildpunkt von A auf Σ^n: $\varphi(\alpha) = A$. In α sei an Σ^n die Vollkugel $\mathscr{V}^{n+1}$ angehängt, die von der Sphäre σ^n berandet ist, welche mit Σ^n gleich orientiert sei [6]). Auf Σ^n sei ferner ein 1-dimensionaler Weg $\mathfrak{u}$, der von $\mathfrak{o}$ nach α führt ausgezeichnet. $\mathfrak{u}^{-1}$ sei der zu $\mathfrak{u}$ reziproke Weg. Dann ist eine Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in A gegeben durch eine stetige Abbildung $\tilde{F}$ von $\Sigma^n \oplus \mathscr{V}^{n+1}$ in $\overline{K}$, die eine Erweiterung von φ von Σ^n ist. D.h., für $\tilde{F}$ gilt

$$(\tilde{0}) \quad \tilde{F}(\Sigma^n) \equiv \varphi(\Sigma^n) = \mathfrak{S}^n \qquad (\tilde{F} \text{ und } \varphi \text{ auf } \Sigma^n \text{ identisch}).$$

Speziell gilt also, wenn man noch die φ-Bilder von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}^{-1}$ mit U und U^{-1} bezeichnet,

$$(\tilde{1}) \quad \tilde{F}(\mathfrak{o}) = \varphi(\mathfrak{o}) = O$$

$$(\tilde{2}) \quad \begin{cases} \tilde{F}(\mathfrak{u}) = \varphi(\mathfrak{u}) = U \\ \tilde{F}(\mathfrak{u}^{-1}) = \varphi(\mathfrak{u}^{-1}) = U^{-1}. \end{cases}$$

1.4. Ist eine Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in A gemäß 1.3 erklärt, so kann man sie auch als Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in A im Sinne von 1.2 auffassen: Gegeben sei $\mathfrak{S}^n$ durch $\varphi(\Sigma^n)$; $\varphi(\mathfrak{o}) = O$, $\varphi(\alpha) = A$. Die Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in A sei bestimmt durch eine Abbildung $\tilde{F}(\Sigma^n \oplus \mathscr{V}^{n+1})$ im Sinne von 1.3. Dann nehme man eine, mit Σ^n gleichorientierte [6]) Sphäre S^n im R^{n+1}, an die in o eine Vollkugel $\overline{V}^{n+1}$ (gemäß 1.2) angehängt sei. (Auf der, $\overline{V}^{n+1}$ berandenden, mit S^n gleichorientierten Sphäre $\overline{S}^n$ sind — wie in 1.2. — o_1, o_2, k_1, k_2,

[6]) Zwei n-dimensionale Sphären heißen im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum R^{n+1} gleichorientiert, wenn die von ihnen berandeten orientierten $(n+1)$-dimensionalen Elemente (= topologische Bilder von $(n+1)$-dimensionalen Simplexen) die gleiche Orientierung des R^{n+1} bestimmen. (Die Orientierung der Sphäre wird dabei durch die Orientierung des berandeten Elements induziert.)

C_1, C_2 ausgezeichnet.) Nun bilde man $S^n \oplus \overline{V}^{n+1}$ durch eine Abbildung χ stetig so auf $\Sigma^n \oplus \mathfrak{v}^{n+1}$ ab, daß χ Erweiterung einer orientierungstreuen topologischen Abbildung τ von S^n auf Σ^n, mit $\tau(o) = \mathfrak{o}$, ist und den folgenden Funktionalgleichungen genügt:

$$
\begin{array}{lll}
(\hat{0}) & \chi(S^n) \equiv \tau(S^n) = \Sigma^n & (\chi \text{ und } \tau \text{ auf } S^n \text{ identisch}) \\
(\hat{1}) & \chi(o_1) = \chi(o_2) = \mathfrak{o} & \\
(\hat{2}) & \chi(k_1) = \chi(k_2) = \alpha & \\
(\hat{3}) & \begin{cases} \chi(C_1) = \mathfrak{u} \\ \chi(C_2) = \mathfrak{u}^{-1} \end{cases} &
\end{array}
$$

Durch die Abbildung $\tilde{F}\chi$ von $S^n \oplus \overline{V}^{n+1}$ in $\overline{K}$ ist dann die durch die Abbildung $\tilde{F}$ von $\Sigma^n \oplus \mathfrak{v}^{n+1}$ in $\overline{K}$ definierte Deformation von $\mathfrak{S}^n$ im Sinne von 1.2 dargestellt, und wir setzen

$$
\text{(I)} \qquad \tilde{F}\chi(S^n \oplus \overline{V}^{n+1}) = F(S^n \oplus \overline{V}^{n+1}).
$$

In der Tat stellen zunächst $\varphi(\Sigma^n)$ und $\varphi\tau(S^n)$ dieselbe Sphärode $\mathfrak{S}^n$ in $\overline{K}$, im üblichen Sinne der Homotopietheorie, dar, da τ topologisch und orientierungserhaltend ist. Durch $\tau^{-1}(\alpha) = a$, $\tau^{-1}(\mathfrak{u}) = u$ und $\tau^{-1}(\mathfrak{u}^{-1}) = u^{-1}$ sind ferner der Punkt a und die 1-dimensionalen Wege u, u^{-1} auf S^n definiert, und aus den Funktionalgleichungen $(\hat{0})$, $(\hat{1})$, $(\hat{2})$, $(\hat{3})$ und $(\tilde{0})$, $(\tilde{1})$, $(\tilde{2})$ folgt, daß $F(S^n \oplus \overline{V}^{n+1})$, dargestellt durch $\tilde{F}\chi(S^n \oplus \overline{V}^{n+1})$ (cf. (I)), den Funktionalgleichungen (0), (1), (2), (3) genügt.

1.5. Eine Deformation einer Sphärode $\mathfrak{S}^n = f(S^n)$ in endlich vielen Punkten ${}_iA$ ($i = 1, 2, \ldots, m.$, ${}_iA \neq {}_jA$ für $i \neq j$) wird auf Grund von 1.2 wie folgt definiert: Im Punkte o von S^n hängt man m Vollkugeln ${}_i\overline{V}^{n+1}$ (oder deren topologische Bilder) an, wobei auf der, ${}_i\overline{V}^{n+1}$ berandenden ${}_i\overline{S}^n$ für jeden Index i die Punkte ${}_io_1$, ${}_io_2$, die $(n-1)$-dimensionalen Parallelkreise ${}_ik_1$, ${}_ik_2$ und die n-dimensionalen Kappen ${}_iC_1$, ${}_iC_2$ ausgezeichnet sind, in Analogie zu 1.2. Für jeden Punkt ${}_iA$ von $\mathfrak{S}^n$ sei ein Urbild auf S^n mit ${}_ia$ bezeichnet: $f({}_ia) = {}_iA$. Dann wird eine Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in den Punkten ${}_1A, {}_2A, \ldots, {}_mA$ gegeben durch eine Erweiterungsabbildung F von $f(S^n)$, die $S^n \oplus \bigcup_{i=1}^{m} {}_i\overline{V}^{n+1}$ in $\overline{K}$ abbildet und für die gilt:

$$
\begin{array}{ll}
{}_i(0) & F(S^n) \equiv f(S^n) = \mathfrak{S}^n \\
{}_i(1) & F({}_io_1) = F({}_io_2) = f(o) = O \\
{}_i(2) & F({}_ik_1) = F({}_ik_2) = f({}_ia) = {}_iA \\
{}_i(3) & \begin{cases} F({}_iC_1) = f({}_iu) = {}_iU \\ F({}_iC_2) = f({}_iu^{-1}) = {}_iU^{-1} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{array}
$$

wobei ${}_iu$ ein 1-dimensionaler Weg auf S^n von o nach ${}_ia$ ist, ${}_iu^{-1}$ sein reziproker, und ${}_iU$, ${}_iU^{-1}$ die f-Bilder von ${}_iu$, ${}_iu^{-1}$ sind.

In gleicher Weise lassen sich die Betrachtungen von 1.3 und 1.4 auf den Fall mehrerer Punkte ${}_iA$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ übertragen.

1.6. Das Resultat einer solchen simultanen Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in m Punkten ist wieder eine Sphärode, wie man durch folgende, zum letzten Abschnitt von 1.2 analoge Betrachtung sieht. (Wir führen dies hier nur für $m = 2$ durch und betonen dabei — im Hinblick auf spätere Verwendung — die Rolle der in 1.2 eingeführten Zonen auf den ${}_i\overline{S}^n$.)

In o seien also an S^n die Vollkugeln ${}_1\overline{V}^{n+1}$ und ${}_2\overline{V}^{n+1}$ angehängt, berandet von ${}_1\overline{S}^n$ bzw. ${}_2\overline{S}^n$. Auf ${}_1\overline{S}^n$ sei — wie in 1.2 — die Zone ${}_1Z$, berandet von den $(n - 1)$-dimensionalen Parallelkreisen ${}_1k_1$ und ${}_1k_2$, ausgezeichnet, auf ${}_2\overline{S}^n$ die Zone ${}_2Z$, berandet von ${}_2k_1$ und ${}_2k_2$. Um das Resultat der Deformation, d.h. $F(S^n \oplus {}_1\overline{S}^n \oplus {}_2\overline{S}^n) = \mathfrak{S}_1^n$, als Sphärode darzustellen, betrachten wir eine orientierte Sphäre $\mathscr{S}^n$, mit ausgezeichnetem Punkt, und bilden sie stetig auf $S^n \oplus {}_1\overline{S}^n \oplus {}_2\overline{S}^n$ durch die folgendermaßen definierte Abbildung $\mathscr{F}$ ab: Durch einen Aequator E^{n-1} durch den ausgezeichneten Punkt von $\mathscr{S}^n$ werde $\mathscr{S}^n$ in die beiden Hemisphären ${}_IH^n$, ${}_{II}H^n$ geteilt, und ${}_{II}H^n$ werde durch den Halbmeridian M^{n-1} (der durch den ausgezeichneten Punkt gehe) in die beiden Viertelsphären ${}_1Q^n$ und ${}_2Q^n$ zerlegt. Auf ${}_1Q^n$ sei eine Zone ${}_1\mathscr{Z}$ (berandet von $(n—1)$-dimensionalen Kreisen, die zu E^{n-1} und M^{n-1} fremd sind) ausgezeichnet, und analog auf ${}_2Q^n$ eine Zone ${}_2\mathscr{Z}$. Dann soll die Abbildung $\mathscr{F}$ von $\mathscr{S}^n$ auf $S^n \oplus {}_1\overline{S}^n \oplus {}_2\overline{S}^n$ so konstruiert werden, daß gelte

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}(E^{n-1}) = o \\
&\mathscr{F}({}_IH^n) = S^n \\
&\mathscr{F}(M^{n-1}) = o \\
\mathscr{F}({}_{II}H^n)\colon &\begin{cases} \mathscr{F}({}_1Q^n) = {}_1\overline{S}^n, \text{ wobei } \mathscr{F}({}_1\mathscr{Z}) = {}_1Z \\ \mathscr{F}({}_2Q^n) = {}_2\overline{S}^n, \text{ wobei } \mathscr{F}({}_2\mathscr{Z}) = {}_2Z \end{cases}
\end{aligned}
$$

Das Resultat der Deformation, $\mathfrak{S}_1^n$, ist dann durch die stetige Abbildung $\mathfrak{F}$ von $\mathscr{S}^n$ vermöge

$$\mathfrak{S}_1^n = \mathfrak{F}(\mathscr{S}^n) = F\mathscr{F}(\mathscr{S}^n)$$

als Sphärode dargestellt. (F ist definiert wie in 1.5.)

Wir werden in diesem Sinne sagen, daß eine Sphärode, die durch simultane Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in m Punkten entstanden ist, gegeben sei als Bild einer Sphäre $\mathscr{S}^n$ mit m Zonen.

1.7. Der Begriff der *Deformation* einer Sphärode in einem

Punkte erweist sich speziell im *simplizialen* Fall als zweckmäßig, da sich der Begriff der Deformation über einem Simplex von $\mathfrak{S}^n$ (cf. 1.8) auf ihn zurückführen läßt.

Zunächst läßt sich eine simpliziale Sphärode $\mathfrak{S}^n$ und eine simpliziale Deformation von $\mathfrak{S}^n$ in einem ihrer Eckpunkte A, sowie die übrige Darstellung und der Inhalt von 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 ,1.6 auf den simplizialen Fall übertragen, wenn man die folgenden Spezialisierungen berücksichtigt: Alle auftretenden Sphären und Vollkugeln, sowie $\overline{K}$, sind in einer simplizialen Zerlegung gegeben. Alle Abbildungen sind simplizial. Alle ausgezeichneten Punkte, wie o, o_1, o_2, $\mathfrak{o}$, a, α, A, sind Eckpunkte der simplizialen Zerlegungen der Polyeder, auf denen sie definiert sind. Alle 1-dimensionalen Wege, wie u, $\mathfrak{u}$, U, sind Wege auf den Kantenkomplexen der entsprechenden simplizialen Zerlegungen. Schließlich sind die simplizialen Einteilungen hinreichend fein vorausgesetzt, z.B. um zu ermöglichen, daß eine simpliziale Abbildung eine Abbildung „auf" ist, wenn dies verlangt worden ist (z.B. in 1.4 für χ als Abbildung von $S^n \oplus \overline{V}^{n+1}$ auf $\Sigma^n \oplus \mathcal{V}^{n+1}$). Nötigenfalls wird hierfür vor Vornahme der Abbildung im Urbild eine simpliziale (z.B. baryzentrische) Unterteilung ausgeführt.

(Wir werden die im stetigen Falle verwendeten Bezeichnungen im simplizialen Falle beibehalten, da beide Fälle im weiteren Verlauf getrennt behandelt werden.)

1.8. Wesentlich für unsere Betrachtungen ist der Begriff der *simplizialen* Deformation einer simplizialen Sphärode $\mathfrak{S}^n$ über einem *Simplex* von $\mathfrak{S}^n$. Statt diesen Begriff zuerst zu definieren und ihn dann — wie wir es wünschen — auf denjenigen der simplizialen Deformation in einem Eckpunkt zurückzuführen, werden wir ihn von vorneherein mit Hilfe der Deformation in einem Eckpunkte definieren. Dabei werden wir uns auf den Begriff der simplizialen Deformation über einem *n-dimensionalen* Simplex Y^n von $\mathfrak{S}^n$ beschränken, da nur dieser in dieser Arbeit gebraucht werden wird. Dem Folgenden wird nun der Begriff der simplizialen Deformation in einem Punkte zugrundegelegt, wie er sich — bei Berücksichtigung von 1.7 — aus 1.3 ergibt. (Es ließe sich natürlich auch die Darstellung von 1.2 benutzen.)

Es sei also durch $\varphi(\Sigma^n) = \mathfrak{S}^n$ eine simpliziale Sphärode in $\overline{K}$ gegeben, Y^n ein n-dimensionales Simplex von $\mathfrak{S}^n$; X^n sei ein n-dimensionales Simplex von Σ^n so, daß $\varphi(X^n) = Y^n$. A sei ein Eckpunkt von Y^n, und α derjenige Eckpunkt von X^n, für den $\varphi(\alpha) = A$ gilt. $\mathfrak{u}$ sei ein 1-dimensionaler simplizialer Weg auf Σ^n von $\mathfrak{o}$ nach α, $\mathfrak{u}^{-1}$ der reziproke Weg. In α wird an Σ^n eine so orientierte Vollkugel $\mathscr{V}^{n+1}$, berandet von der Sphäre σ^n, angehängt, daß Σ^n und σ^n gleichorientiert im R^{n+1} sind (cf. Fußnote [6])). Sei ξ^n ein n-dimensionales Simplex von σ^n, das α zum Eckpunkt hat. (X^n und ξ^n sind orientiert durch die Orientierungen von Σ^n und σ^n.) Dann werde ξ^n mit X^n so identifiziert, daß die die Identifizierung definierende topologische simpliziale Abbildung von ξ^n auf X^n den Grad -1 auf X^n hat. Unter Berücksichtigung dieser Identifizierung wird nun eine simpliziale Deformation von $\mathfrak{S}^n$ über dem Simplex Y^n definiert als simpliziale Deformation von $\mathfrak{S}^n$ im Punkte A, d.h. durch eine simpliziale Abbildung $\tilde{F}$ von $\Sigma^n \oplus \mathscr{V}^{n+1}$ in $\overline{K}$, die der Bedingung $(\tilde{0})$ (und folglich auch $(\tilde{1})$ und $(\tilde{2})$ genügt). (Cf. 1.3). Es ist also, nach Vornahme der genannten Identifizierung, $\tilde{F}(\xi^n) = \varphi(-X^n) = -\varphi(X^n)$, d.h. speziell, daß das $\tilde{F}$-Bild jedes Punkts von ξ^n mit dem φ-Bild des ihm bei der Identifizierung (= topologische Abbildung) eineindeutig entsprechenden Punkts von X^n in $\overline{K}$ zusammenfällt.

1.9. Im Besonderen möge eine simpliziale Deformation im Punkte A von $\mathfrak{S}^n$ *elementar* heißen, wenn $\mathscr{V}^{n+1}$ ein $(n+1)$-dimensionales *Simplex* ist. Wird $\mathscr{V}^{n+1}$ durch die die Deformation bestimmende simpliziale Abbildung $\tilde{F}$ von $\Sigma^n \oplus \mathscr{V}^{n+1}$ in $\overline{K}$ auf ein $(n+1)$-dimensionales Simplex abgebildet, so sprechen wir von einer nichttrivialen elementaren Deformation; ist die Dimension des Bildsimplexes von $\mathscr{V}^{n+1}$ höchstens gleich n, so heiße die elementare Deformation trivial. Auf Grund von 1.8 kann man auch sagen, daß eine nichttriviale elementare Deformation von $\mathfrak{S}^n$ über dem Simplex Y^n dadurch bewirkt wird, daß $\mathfrak{S}^n$ in $\overline{K}$ über ein $(n+1)$-dimensionales Simplex von $\overline{K}$, dessen Seite Y^n ist, hinweggezogen wird. Eine simpliziale Deformation kann in endlich vielen Schritten ausgeführt werden, wobei jeder in der Ausübung einer elementaren simplizialen Deformation besteht.

1.10. Bemerkungen: 1.) Die Ausführung einer simplizialen Deformation über endlich vielen Simplexen von $\mathfrak{S}^n$ ist nun nach 1.8 und 1.5 leicht ersichtlich. 2.) Es läßt sich, analog zu 1.8, eine allgemeinere Definition der simplizialen Deformation über einem Simplex von $\mathfrak{S}^n$ geben, wenn man in $\mathfrak{S}^n$ ein d-dimensionales Simplex Y^d $(0 \leqq d \leqq n)$ betrachtet, auf das durch φ ein r-dimensionales Simplex X^r $(d \leqq r \leqq n)$ von Σ^n abgebildet ist, das mit einem gleichdimensionalen Simplex ξ^r von σ^n identifiziert wird.

1.11. Die Zurückführung der Deformation über einem Simplex auf diejenige in einem Punkt ermöglicht es, den Zusammenhang dieses „lokalen" Deformationsbegriffs mit dem üblichen, „globalen", d.h. sich auf die ganze Sphärode beziehenden, herzustellen, u.zw. sowohl im simplizialen als auch im stetigen Falle. Wir deuten dies hier für den stetigen Fall an: Man geht, für die Erklärung des globalen aus dem lokalen Begriff, von der Deformation in einem Punkte aus, wie sie in **1.2** oder **1.3** dargestellt wurde. (Wir entscheiden uns hier für **1.3**.) Dann laße man auf Σ^n den Punkt α mit dem ausgezeichneten Punkt $\mathfrak{o}$ zusammenfallen, sodaß der Weg $\mathfrak{u}$ auf Σ^n in den Punkt $\mathfrak{o}$ zusammenschrumpft. Man hängt also die Vollkugel $\mathscr{v}^{n+1}$ in $\mathfrak{o}$ an Σ^n an, d.h. betrachtet eine Deformation von $\mathfrak{S}^n$ im Punkte O. Sei $\varkappa^{n-1}$ eine $(n - 1)$-dimensionale Sphäre auf σ^n, die durch $\mathfrak{o}$ gehe und σ^n in die beiden Hemisphären η_1^n, η_2^n teile. Dann identifiziere man etwa η_1^n mit Σ^n, indem man σ^n mit η_1^n auf Σ^n lege und $\varkappa^{n-1}$ über Σ^n hinweg auf $\mathfrak{o}$ zusammenschnüre, so daß η_2^n zur Sphäre wird, innerhalb welcher Σ^n im Punkte $\mathfrak{o}$ hängt. Dann ist die lokale Deformation *über* $\mathfrak{S}^n$ äquivalent mit der globalen Deformation *von* $\mathfrak{S}^n$ im üblichen Sinne, wobei die übliche (globale) Erweiterung der Abbildung φ von Σ^n durch die oben dargestellte (lokale) Art der Erweiterung von φ beschrieben ist.

1.12. Eine *freie Deformation* einer Sphärode $\mathfrak{S}^n$ über einem ihrer Punkte A wird definiert wie die „gebundene" Deformation (in 1.2), nur daß die Funktionalgleichungen (3) ersetzt werden durch

$$(3^*) \quad \begin{cases} F(C_1) = U \\ F(C_2) = U^{-1} \end{cases}$$

wobei U ein beliebiger 1-dimensionaler Weg in $\overline{K}$ ist, der von O nach A läuft, U^{-1} der entgegengesetzte Weg. Es wird also hier, im Gegensatz zum „gebundenen" Fall, nicht mehr verlangt, daß U Bild eines Weges u ist, der ganz auf S^n liegt, d.h. U braucht nicht auf der Punktmenge von $\mathfrak{S}^n$ zu verlaufen. Will man die freie Deformation im Anschluß an **1.3** erklären, so hat man für $\mathfrak{u}$ einen Weg zu nehmen, der im R^{n+1}, in dem Σ^n eingebettet ist, von $\mathfrak{o}$ nach α führt, nicht notwendig auf Σ^n liegt, und durch $\tilde{F}$ auf einen beliebigen Weg U, der in $\overline{K}$ von O nach A läuft, abgebildet wird. $\tilde{F}$ ist in diesem Falle eine Erweiterung von φ, die auf $\Sigma^n \oplus \mathscr{v}^{n+1} \oplus \mathfrak{u}$ definiert ist. Die Übertragung dieser Definition auf den simplizialen Fall ist klar.

Aus diesem „lokalen" Begriff der freien Deformation ergibt sich der „globale" in Analogie zu 1.11: Man läßt wieder den Punkt α von Σ^n mit $\mathfrak{o}$ zusammenfallen, wodurch nun $\mathfrak{u}$ zu einem geschlossenen Weg wird, der an Σ^n in $\mathfrak{o}$ hängt, und nicht notwendig auf Σ^n liegt. Mit der $\mathscr{v}^{n+1}$ berandenden Sphäre σ^n verfährt man dann genauso wie in 1.11, und erhält eine freie Deformation im üblichen Sinne, wobei durch $\tilde{F}(\mathfrak{u})$ dasjenige Element der Fundamental-Gruppe von $\overline{K}$ bestimmt wird, durch welches die freie Homotopie im Sinne des Eilenbergschen Automorphismus der (gebundenen) n-ten Homotopiegruppe von $\overline{K}$ algebraisch ausgedrückt werden kann. (Cf. [2]). Für $n = 1$ werden durch $\tilde{F}(\mathfrak{u})$ und $\tilde{F}(\mathfrak{u}^{-1})$ die Wege gegeben, die den inneren Automorphismus der Fundamentalgruppe von $\overline{K}$ repräsentieren, für $n > 1$ wird durch $\tilde{F}(\mathfrak{u})$ und $\tilde{F}(\mathfrak{u}^{-1})$ bekanntlich ein (nicht notwendig innerer) Automorphismus bewirkt (cf. [2]).

§ 2. Die Gruppe der simplizialen Nullsphäroden.

2.1. Eine n-dimensionale *simpliziale Nullsphärode* ${}^0\mathfrak{S}^n$ in einem zusammenhängenden simplizialen Polyeder $\overline{K}$ ist durch eine simpliziale Abbildung f einer simplizial zerlegten orientierten n-dimensionalen Sphäre S^n in das Polyeder $\overline{K}$ gegeben, die auf jedem Simplex in $\overline{K}$ den Abbildungsgrad Null hat. Bei f wird ein Simplex der S^n entweder mit dem Grad 0 abgebildet oder mit dem Grad ± 1. Stellt f eine simpliziale Nullsphärode dar, dann muß es somit zu jedem Simplex X^n von S^n, das mit dem Grad $+ 1$ (bzw. $- 1$) abgebildet wird, ein Simplex X'^n auf S^n geben, das durch f mit dem Grad $- 1$ (bzw. $+ 1$) in $\overline{K}$ abgebildet wird. Ein Eckpunkt o der Simplizialzerlegung von S^n sei ausgezeichnet; er wird durch f auf den Eckpunkt O von $\overline{K}$, den Bezugspunkt der zu definierenden simplizialen Nullsphärodengruppe von $\overline{K}$ abgebildet. [7])

2.2. Wird die Sphäre S^n auf eine andere orientierte n-dimensionale Sphäre S^n_τ topologisch simplizial mit dem Grad $+ 1$ abgebildet, wobei diese Abbildung τ den Punkt o in einen auf S^n_τ ausgezeichneten Eckpunkt o_τ überführe, so ist durch $f\tau^{-1}$ eine Abbildung von S^n_τ in $\overline{K}$ gegeben, die die *gleiche* Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}^n$ bestimmen möge.

2.3. Sind zwei Nullsphäroden ${}^0\mathfrak{S}^n_1$, ${}^0\mathfrak{S}^n_2$ gegeben durch die Abbildungen $f_1(S^n_1)$, $f_2(S^n_2)$, so kann man sie zusammensetzen, indem man den Punkt $o_1 \in S^n_1$ mit dem Punkt $o_2 \in S^n_2$ identifiziert und die so entstandene topologische Summe $S^n_1 \oplus S^n_2$ durch eine simpliziale Abbildung F in $\overline{K}$ derart abbildet, daß $F(S^n_1) = f_1(S^n_1)$, $F(S^n_2) = f_2(S^n_2)$ ist. Die Zusammensetzung führt zu einer neuen Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}^n_1 + {}^0\mathfrak{S}^n_2$. Man kann nämlich eine genügend fein

---

[7]) Da wir im Folgenden, bis zu § 6, ausschließlich den simplizialen Fall behandeln, werden wir oft das Wort simplizial nicht mehr besonders erwähnen. Statt Eckpunkt werden wir meistens kurz Punkt sagen.

untergeteilte dritte orientierte n-dimensionale Sphäre $\mathscr{S}^n$ durch eine Abbildung $\mathscr{F}$ simplizial derart auf $S_1^n \oplus S_2^n$ abbilden, daß die eine Hemisphäre ${}_I H^n$ von $\mathscr{S}^n$ in S_1^n, die andere, ${}_{II}H^n$, in S_2^n, und die sie trennende $(n - 1)$-dimensionale Aequatorsphäre E^{n-1} samt einem auf ihr liegenden ausgezeichneten Eckpunkt in den S_1^n und S_2^n gemeinsamen Punkt o übergehen. Durch $\mathfrak{F} = F\mathscr{F}$ ist dann eine Abbildung von $\mathscr{S}^n$ in $\overline{K}$ gegeben, die die Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}_1^n + {}^0\mathfrak{S}_2^n$ bestimmt. Die Abbildung $\mathscr{F}$ von $\mathscr{S}^n$ auf $S_1^n \oplus S_2^n$ spielt nur die Rolle einer Parametertransformation für die die Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}_1^n + {}^0\mathfrak{S}_2^n$ definierende Abbildung $\mathfrak{F}$, und man kann in diesem Sinne sagen, daß die Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}_1^n + {}^0\mathfrak{S}_2^n$ bereits durch die Abbildung F von $S_1^n \oplus S_2^n$ gegeben ist:

$$F(S_1^n \oplus S_2^n) = {}^0\mathfrak{S}_1^n + {}^0\mathfrak{S}_2^n.$$

Die Zusammensetzung einer beliebigen endlichen Anzahl k $(k > 2)$ von n-dimensionalen Nullsphäroden geschieht analog wie für $k = 2$.

2.4. Das Inverse, $- {}^0\mathfrak{S}^n$, einer Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}^n$ wird durch die gleiche Abbildung f der entgegengesetzt orientierten Urbildsphäre gegeben: $-{}^0\mathfrak{S}^n = f(-S^n)$. Wir setzen fest, daß man statt $f(-S^n)$ auch $-f(S^n)$ schreiben kann.

2.5. Zwei Nullsphäroden ${}^0\mathfrak{S}_1^n$, ${}^0\mathfrak{S}_2^n$ in $\overline{K}$ sind einander *ν-homotop*, wenn sich die eine in die andere so deformieren läßt, daß jede „Zwischen-Sphärode" eine Nullsphärode (in $\overline{K}$) ist. Die Ausführung dieses speziellen Deformationsprozeßes — er sei ν-Deformationsprozeß benannt — läßt sich, im Anschluß an § 1, folgendermaßen erklären: (Wir beziehen uns dabei auf die Darstellung der Deformation wie sie in **1.3** und **1.8** gegeben wurde und definieren zunächst eine elementare simpliziale ν-Deformation über einem n-dimensionalen Simplex von ${}^0\mathfrak{S}_1^n$.) X^n und X'^n seien zwei Simplexe der Urbildsphäre Σ^n von ${}^0\mathfrak{S}_1^n$, die durch die, ${}^0\mathfrak{S}_1^n$ definierende, Abbildung φ mit entgegengesetzt gleichen Graden $(\pm 1$ bzw. $\mp 1)$ in $\overline{K}$ abgebildet sind: $\varphi(X^n) = Y^n$, $\varphi(X'^n) = -\varphi(X^n) = -Y^n$. Eine Deformation über dem Simplex Y^n (bzw. $-Y^n$) läßt sich (cf. **1.8**) vermittels einer Deformation über einem Eckpunkt A von Y^n definieren. Auf Σ^n betrachten wir daher den Urbildpunkt α von A, der Eckpunkt von X^n ist, und denjenigen α', der Eckpunkt von X'^n ist. (α und α' sind eindeutig bestimmt, da φ X^n bzw. X'^n mit dem Grad $+1$ bzw. -1 auf Y^n abbildet.) Ferner seien $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$ zwei 1-dimensionale simpliziale Wege, die auf Σ^n von $\mathfrak{o}$ nach α bzw. α' laufen; $\mathfrak{u}^{-1}$, $\mathfrak{u}'^{-1}$ die entsprechenden reziproken Wege. In α und α' wird an Σ^n je ein $(n + 1)$-dimensionales

Simplex $\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}$ bzw. $\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'}$ angehängt, wobei $\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}$, $\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'}$ so orientiert sind, daß die dadurch induzierten Orientierungen ihrer Randsphären σ^n_{α}, $\sigma^n_{\alpha'}$ gleich der Orientierung von Σ^n sind (cf. Fußnote[6])). Eine elementare simpliziale ν-Deformation von ${}^0\mathfrak{S}^n_1$ im Eckpunkt A ist dann durch eine Abbildung $\tilde{F}$ von $\Sigma^n \oplus \mathscr{W}^{n+1}_{\alpha} \oplus \mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'}$ in $\overline{K}$ gegeben, die eine Erweiterung von $\varphi(\Sigma^n) = {}^0\mathfrak{S}^n_1$ ist, und der Bedingung genügt, daß

$$\text{(D)} \qquad \tilde{F}(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'}) = -\tilde{F}(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha})$$

ist. Genau gesagt, bedeutet dabei (D) Folgendes: Sei τ_+ eine topologische simpliziale Abbildung von $\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}$ auf $\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'}$ vom Grade $+1$, mit $\tau_+(\alpha) = \alpha'$, τ_- dieselbe Abbildung vom Grade -1, d.h. $\tau_-^{-1}\tau_+(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}) = -\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}$ (Identität auf $\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}$ mit Umkehrung der Orientierung). Dann ist $\tilde{F}(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'})$ gegeben durch:

$$\tilde{F}(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'}) = \tilde{F}\tau_-^{-1}(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha'}) = \tilde{F}(-\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}) = -\tilde{F}(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha}),$$

wobei $-\tilde{F}(\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha})$ nur eine andere Schreibweise für $\tilde{F}(-\mathscr{W}^{n+1}_{\alpha})$ bedeutet. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß das Resultat einer elementaren simplizialen ν-Deformation wieder eine Nullsphärode ist; diese kann, analog wie in 1.6, wieder auf eine Sphäre $\mathscr{S}^n$ bezogen werden.

Insbesondere gelten, als Folge von $\tilde{F}(\Sigma^n) = \varphi(\Sigma^n)$, für die Abbildung $\tilde{F}$ noch die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mathfrak{u}) &= \varphi(\mathfrak{u}) = U, \qquad & \tilde{F}(\mathfrak{u}^{-1}) &= \varphi(\mathfrak{u}^{-1}) = U^{-1} \\ \tilde{F}(\mathfrak{u}') &= \varphi(\mathfrak{u}') = U', \qquad & \tilde{F}(\mathfrak{u}'^{-1}) &= \varphi(\mathfrak{u}'^{-1}) = U'^{-1}, \end{aligned}$$

wo U und U' 1-dimensionale Wege in $\overline{K}$ sind, die (auf der Bildmenge von ${}^0\mathfrak{S}^n_1$) von O nach A $\big(= \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha')\big)$ führen.

Betrachtet man nun auf σ^n_{α} ein n-dimensionales Simplex ξ^n, das α zum Eckpunkt hat, und analog auf $\sigma^n_{\alpha'}$ ein ξ'^n, auf dem α' liegt, und nimmt man vor Ausübung der Abbildung $\tilde{F}$ die in 1.8 dargestellte Identifizierung von ξ^n und X^n einerseits, und ξ'^n und X'^n andererseits vor, so erhält man eine elementare simpliziale ν-Deformation von ${}^0\mathfrak{S}^n_1$ *über dem Simplex* Y^n. In der Ausdrucksweise von 1.9 kann man auch sagen, daß eine nichttriviale elementare simpliziale ν-Deformation von ${}^0\mathfrak{S}^n_1$ über Y^n dadurch bewirkt wird, daß mit jeder positiven Bedeckung von $|\,Y^n\,|$ durch ${}^0\mathfrak{S}^n_1$ gleichzeitig eine negative Bedeckung über ein $(n+1)$-dimensionales Simplex von $\overline{K}$, dessen Seite $|\,Y^n\,|$ ist, hinweggezogen wird.

Die endlich-malige Anwendung einer elementaren simplizialen ν-Deformation heiße eine simpliziale ν-Deformation, und eine auf diese Weise aus ${}^0\mathfrak{S}^n_1$ entstandene Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}^n_2$ heiße *ν-homotop* zu ${}^0\mathfrak{S}^n_1$.

Eine dem Eckpunkt $O \in \overline{K}$ ν-homotope Nullsphärode heiße ν-nullhomotop.

2.6. Wir wollen nun den Zusammenhang des ν-Deformationsbegriffs mit dem Deformationsbegriff von 1.2 herstellen. (Wir gehen dabei aus von 2.5 und benutzen 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.)

Es sei also eine elementare simpliziale ν-Deformation von ${}^0\mathfrak{S}_1^n = \varphi(\Sigma^n)$ über Y^n gemäß 2.5 gegeben. Dann sei S^n eine solche orientierte simpliziale Sphäre, daß $S^n = \tau^{-1}(\Sigma^n)$ ist, wobei τ^{-1} eine topologische simpliziale Abbildung vom Grade $+1$ ist. $o = \tau^{-1}(\mathfrak{o})$ sei der ausgezeichnete Punkt auf S^n. Durch $\tau^{-1}(\mathfrak{u}) = u$ und $\tau^{-1}(\mathfrak{u}') = u'$ sind auf S^n zwei 1-dimensionale Wege gegeben, die von o nach $a = \tau^{-1}(\alpha)$ bzw. $a' = \tau^{-1}(\alpha')$ führen. In o hängen wir an S^n zwei hinreichend fein und isomorph untergeteilte [1] Vollkugeln $\overline{V}^{n+1}$, $\overline{V}'^{n+1}$ an, deren Randsphären $\overline{S}^n$ und $\overline{S}'^n$ mit S^n gleichorientiert sind. Auf $\overline{S}^n$ bzw. $\overline{S}'^n$ seien (wie in 1.2, 1.5) ausgezeichnet die Punkte o_1, o_2 bzw. o_1', o_2' (wobei $o_1 = o_1' = o$ infolge der Anhängung ist), die Kappen C_1, C_2 bzw. C_1', C_2', die Zonen Z bzw. Z' und ihre Randsphären k_1, k_2 bzw. k_1', k_2'. Dann werde $S^n \oplus \overline{V}^{n+1} \oplus \overline{V}'^{n+1}$ durch eine Abbildung χ stetig (simplizial) so auf $\Sigma^n \oplus \mathfrak{v}_\alpha^{n+1} \oplus \mathfrak{v}_{\alpha'}^{n+1}$ abgebildet, daß χ Erweiterung der Abbildung τ von S^n auf Σ^n ist und den folgenden Bedingungen genügt:

$$
\begin{array}{ll}
{}^0(\hat{0}) & \chi(S^n) \equiv \tau(S^n) = \Sigma^n \\
{}^0(\hat{1}) & \chi(o_1) = \chi(o_2) = \chi(o_1') = \chi(o_2') = \chi(o) = \mathfrak{o} \\
{}^0(\hat{2}) & \chi(k_1) = \chi(k_2) = \alpha; \qquad \chi(k_1') = \chi(k_2') = \alpha' \\
{}^0(\hat{3}) & \begin{cases} \chi(C_1) = \mathfrak{u}; & \chi(C_1') = \mathfrak{u}' \\ \chi(C_2) = \mathfrak{u}^{-1}; & \chi(C_2') = \mathfrak{u}'^{-1} \end{cases}
\end{array}
$$

Es ist hier, im Falle der Nullsphäroden, zweckmäßig, zusätzlich von χ noch Folgendes zu verlangen: Sei B_1 das von k_1 in $\overline{V}^{n+1}$ berandete n-dimensionale Element, das durch Schnitt von $\overline{V}^{n+1}$ mit der n-dimensionalen Hyperebene, in der k_1 liegt, entsteht; analog B_2, berandet von k_2. Dann sei W^{n+1} das von der Zone Z, von B_1 und B_2 berandete Teilpolyeder von $\overline{V}^{n+1}$. W'^{n+1} sei analog in $\overline{V}'^{n+1}$ erklärt. Wir können W^{n+1} und W'^{n+1} isomorph untergeteilt voraussetzen, wie wir es für $\overline{V}^{n+1}$ und $\overline{V}'^{n+1}$ getan haben. Dann lautet die Zusatzforderung für χ:

$$
{}^0(\hat{4}) \qquad \chi(W^{n+1}) = \mathfrak{v}_\alpha^{n+1}; \qquad \chi(W'^{n+1}) = \mathfrak{v}_{\alpha'}^{n+1}.
$$

Da $\mathfrak{v}_\alpha^{n+1}$ und $\mathfrak{v}_{\alpha'}^{n+1}$ $(n+1)$-dimensionale Simplexe (also isomorph als Komplexe, bei gegenseitigem Entsprechen von α und α') sind, der Komplex von W^{n+1} mit demjenigen von W'^{n+1} isomorph und χ

simplizial ist, kann und soll dabei χ auf W^{n+1} und W'^{n+1} als „isomorph" in dem Sinne betrachtet werden, daß Simplexen von W^{n+1} und W'^{n+1}, die sich bei der Isomorphie der Unterteilungen von W^{n+1} und W'^{n+1} entsprechen, durch χ Simplexe von $\mathscr{V}_{\alpha}^{n+1}$ bzw. $\mathscr{V}_{\alpha'}^{n+1}$ zugeordnet werden, die sich bei der Isomorphie von $\mathscr{V}_{\alpha}^{n+1}$ und $\mathscr{V}_{\alpha'}^{n+1}$ entsprechen. Insbesondere folgt noch aus $^0(\hat{2})$ und $^0(\hat{4})$:

$$^0(\hat{5}) \qquad \chi(Z) = \sigma_{\alpha}^{n}; \qquad \chi(Z') = \sigma_{\alpha'}^{n},$$

wobei wieder χ auf Z und Z' im angegebenen Sinne „isomorph" ist.

Setzen wir

$$\tilde{F}\chi(S^n \oplus \overline{V}^{n+1} \oplus \overline{V}'^{n+1}) = F(S^n \oplus \overline{V}^{n+1} \oplus \overline{V}'^{n+1}),$$

wobei $\tilde{F}$ wie in 2.5 definiert ist, so ist durch die so erklärte Abbildung F die durch $\tilde{F}(\Sigma^n \oplus \mathscr{V}_{\alpha}^{n+1} \oplus \mathscr{V}_{\alpha'}^{n+1})$ gegebene elementare simpliziale ν-Deformation von $^0\mathfrak{S}_1^n$ im Punkte A unter Zugrundelegung von 1.2 definiert. Man sieht dies leicht durch eine zum letzten Abschnitt von 1.4 analoge Überlegung. Wegen (D) aus 2.5 und $^0(\hat{4})$ gilt für F speziell noch

$$F(W^{n+1}) = - F(W'^{n+1})$$

und als Folge davon

$$F(Z) = - F(Z').$$

Die elementare simpliziale ν-Deformation über einem Simplex, die zusätzlich nur die (in 2.5) angegebene Identifizierung im $\tilde{F}$-Urbild erfordert, und daher — als Folge von 2.5 — der Begriff der ν-Homotopie sind somit auf den Deformationsbegriff von 1.2 zurückgeführt.

2.7. Der ν-Homotopiebegriff erfüllt die Bedingungen der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität und gibt so Anlaß zu einer Einteilung der am Punkte $O \in \overline{K}$ haftenden n-dimensionalen Nullsphäroden in Aequivalenzklassen, die ν-Homotopieklassen. Die ν-Homotopieklassen bilden bei der Summenbildung (bzw. Produktbildung, im Falle $n = 1$), die durch die in 2.3 beschriebene Zusammensetzungsvorschrift für Nullsphäroden induziert ist, eine spezielle Art von n-dimensionaler Homotopiegruppe, *die Gruppe* $\Psi^n(\overline{K})$ *der n-dimensionalen (simplizialen) Nullsphäroden von* $\overline{K}$. $\Psi^n(\overline{K})$ hängt zunächst von der simplizialen Zerlegung von $\overline{K}$ und vom Bezugspunkt O ab. Eine Änderung des Bezugspunkts bewirkt aber, wie leicht zu sehen ist, einen Übergang zu einer isomorphen Gruppe. Daß $\Psi^n(\overline{K})$ von der Simplizialzerlegung von $\overline{K}$

unabhängig ist, wird später gezeigt werden. Nullelement (bzw. Einselement, für $n = 1$) sowie inverses Element sind analog definiert wie für die Hurewiczsche Homotopiegruppe $\pi^n(\overline{K})$ (bzw. die Poincarésche Fundamentalgruppe $\pi^1(\overline{K})$), natürlich stets unter Berücksichtigung des ν-Homotopiebegriffs. Auch beweist man analog, daß $\Psi^n(\overline{K})$ für $n \geqq 2$ Abelsch ist, während $\Psi^1(\overline{K})$ im allgemeinen nicht kommutativ ist.

2.8. Ein einfaches Beispiel eines Polyeders, auf dem es nichttriviale 1-dimensionale Nullsphäroden (= Nullwege) gibt, ist die zweifach gelochte Ebene: Umlaufen die (simplizialen) Wege $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ je eines der beiden Löcher, von einem gemeinsamen Punkte ausgehend, so ist der Weg $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ ein Nullweg, der nicht ν-nullhomotop ist. Ein Beispiel eines Nullweges, der zwar nullhomotop, aber nicht ν-nullhomotop ist, ist der Weg $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ auf dem Torus, wenn $\mathfrak{a}$ ein orientierter Parallelkreis, $\mathfrak{b}$ ein orientierter Meridian des Torus ist, die beide von einem festen Punkt aus durchlaufen werden.

2.9. K^n sei der n-dimensionale Gerüstkomplex von K, d.h. der Teilkomplex von K, der aus allen höchstens n-dimensionalen Simplexen von K besteht. Dann wird die n-dimensionale Nullsphärodengruppe $\Psi^n(\overline{K}^n)$ von $\overline{K}^n$ genauso definiert wie $\Psi^n(\overline{K})$, nur daß die ν-Deformationen, auf denen der ν-Homotopiebegriff in $\overline{K}^n$ beruht, allein auf $\overline{K}^n$ ausgeführt werden, die Abbildung $\tilde{F}$ (cf. 2.5) also eine Abbildung in $\overline{K}^n$ ist. Wir bezeichnen diese Deformationen als (im Verhältnis zu $\overline{K}$) *triviale Deformationen* (cf. 1.9). Die n-dimensionalen Nullsphäroden auf $\overline{K}^n$ bilden übrigens bereits bei dem gewöhnlichen Homotopiebegriff auf $\overline{K}^n$ eine Gruppe, die mit $\Psi^n(\overline{K}^n)$ isomorph ist.

§ 3. Die algebraische Struktur der Nullsphärodengruppen.

3.1. K sei ein zusammenhängender simplizialer Komplex, K^n sein n-dimensionaler Gerüstkomplex (cf. 2.9), und $\overline{K}$ bzw. $\overline{K}^n$ die durch K bzw. K^n bestimmten Polyeder. $\Pi^n(\overline{K})$ bzw. $\Pi^n(\overline{K}^n)$ seien die n-ten Hurewiczschen Homotopiegruppen von $\overline{K}$ bzw. $\overline{K}^n$, relativ zu einem festen Bezugspunkt O. H. Hopf hat gezeigt, daß man mit Hilfe von Faktorgruppen aus gewissen Untergruppen von $\Pi^n(\overline{K}^n)$ bzw. $\Pi^n(\overline{K})$ wichtige Aussagen über die Struktur von $\overline{K}$ und $\overline{K}^n$ machen kann, speziell die Zusammenhänge zwischen Homologiegruppen und Homotopiegruppen in den Dimensionen n und $n + 1$ weitgehend aufdecken kann. Wir geben hier nur eine knappe, für unsere Zwecke zusammengestellte Skizze der von

H. Hopf eingeführten Gruppen an; für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf [5].

a) Faßt man die n-dimensionalen Sphäroden, die Elemente von $\Pi^n(\overline{K})$ repräsentieren, als stetige sphärische Zyklen auf, so wird hiermit — da homotope Sphäroden als stetige sphärische Zyklen a fortiori homolog sind — eine natürliche homomorphe Abbildung h von $\Pi^n(\overline{K})$ in die n-te Homologiegruppe $\mathscr{H}^n(\overline{K})$ gestiftet. Der Kern $\Gamma^n(\overline{K})$ des Homomorphismus h ist also diejenige Untergruppe von $\Pi^n(\overline{K})$, deren Elemente von nullhomologen n-dimensionalen Sphäroden in $\overline{K}$ repräsentiert werden. Für $\overline{K} = \overline{K}^n$ wird $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ durch Sphäroden, die Nullketten sind, repräsentiert, d.h. bei denen der Koeffizient jedes n-dimensionalen Simplexes das Nullelement des Koeffizientenbereichs ist.

b) Seien ϑ, ϑ' zwei Elemente von $\Pi^n(\overline{K})$, die durch n-dimensionale Sphäroden $\mathfrak{s}^n$, $\mathfrak{s}'^n$ repräsentiert werden können, die zueinander in $\overline{K}$ freihomotop sind. Dann ist die Gruppe, die von allen Elementen der Form $\vartheta - \vartheta'$ erzeugt wird eine Untergruppe von $\Gamma^n(\overline{K})$, denn bei h werden ihre Elemente auf Homologieklassen nullhomologer sphärischer Zyklen in $\overline{K}$ abgebildet. Diese Gruppe heiße $\Pi_0^n(\overline{K})$. Für $n = 1$ gilt $\Gamma^1(\overline{K}) \equiv \Pi_0^1(\overline{K})$, für $n > 1$ ist $\Pi_0^n(\overline{K})$ im allgemeinen eine echte Untergruppe von $\Gamma^n(\overline{K})$. Auch hier kann für $\overline{K} = \overline{K}^n$ die Gruppe $\Pi_0^n(\overline{K}^n)$ gebildet werden, indem man bereits in der Definition $\overline{K}$ durch $\overline{K}^n$ ersetzt. $\Pi_0^n(\overline{K}^n)$ ist Untergruppe von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$. Von besonderem Interesse sind die Faktorgruppen $\Delta^n(\overline{K}) = \Gamma^n(\overline{K})/\Pi_0^n(\overline{K})$ und $\Delta^n(\overline{K}^n) = \Gamma^n(\overline{K}^n)/\Pi_0^n(\overline{K}^n)$.

c) Die in $\overline{K}$ nullhomotopen Elemente der n-ten Homotopiegruppe des Gerüstpolyeders $\Pi^n(\overline{K}^n)$ bilden eine Gruppe $P^n(\overline{K}^n, \overline{K})$. Als Untergruppe von $\Pi^n(\overline{K}^n)$ ist P^n einerseits von $\overline{K}^n$ abhängig; andererseits ist P^n innerhalb $\Pi^n(\overline{K}^n)$ gerade durch eine Eigenschaft der Elemente, die sich wesentlich auf $\overline{K}$ bezieht, ausgezeichnet, somit von $\overline{K}$ abhängig. Bildet man (formal) die Gruppe $P^n(\overline{K}^n, \overline{K}^n)$, d.h. ersetzt man in den „Argumenten" von P^n $\overline{K}$ durch $\overline{K}^n$, so folgt aus der Definition von $P^n(\overline{K}^n, \overline{K})$, daß $P^n(\overline{K}^n, \overline{K}^n) = P^n(\overline{K}^n)$ aus dem Nullelement allein besteht.

d) Die Gruppe $P^n(\overline{K}^n, \overline{K})$ enthält einer Untergruppe $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$, die sich zu ihr analog verhält wie $\Pi_0^n(\overline{K}^n)$ zu $\Pi^n(\overline{K}^n)$. D.h.: sind ϱ, ϱ' zwei Elemente von $P^n(\overline{K}^n, \overline{K})$, die durch n-dimensionale Sphäroden repräsentiert werden können, die in $\overline{K}^n$ zueinander freihomotop sind, so ist $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$ die von allen Elementen der Form $\varrho - \varrho'$ erzeugte Untergruppe von $P^n(\overline{K}^n, \overline{K})$. [8]) Aus der Definition

[8]) In der Hopfschen Arbeit [5] heißen die Gruppen $P^n(\overline{K}^n, \overline{K})$, $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$: $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_0$.

von $P_0^n(\bar{K}^n, \bar{K})$ ergibt sich, daß $P_0^n(\bar{K}^n, \bar{K})$ Untergruppe von $\Pi_0^n(\bar{K}^n)$, und nach Abschnitt b) somit auch von $\Gamma^n(\bar{K}^n)$ ist. Die Gruppe $P_0^n(\bar{K}^n, \bar{K}^n) = P_0^n(\bar{K}^n)$ besteht aus dem Nullelement allein (cf. Abschnitt c)).

3.2. Die algebraische Struktur der Nullsphärodengruppe $\Psi^n(\bar{K})$ (cf. 2.7) ist nun durch eine Faktorgruppe aus zweien, der in 3.1 genannten Untergruppen von $\Pi^n(\bar{K}^n)$ gegeben. Oder, anders ausgedrückt, die Nullsphärodengruppe gibt die geometrische Bedeutung dieser Faktorgruppe an. (Da wir die Nullsphärodengruppen zunächst nur für den simplizialen Fall definiert haben, setzen wir die genannten Gruppen vorerst als simpliziale Homotopiegruppen voraus.) Der eben angedeutete Zusammenhang ist genau gegeben durch

Satz I: *Die Gruppe $\Psi^n(\bar{K})$ der n-dimensionalen Nullsphäroden von $\bar{K}$ ist isomorph der Faktorgruppe $\Gamma^n(\bar{K}^n)/P_0^n(\bar{K}^n, \bar{K})$.*

Aus Satz I läßt sich leicht die Struktur von $\Psi^n(\bar{K}^n)$ erhalten. Gemäß 3.1 d) besteht $P_0^n(\bar{K}^n, \bar{K}^n)$ nur aus dem Nullelement. Es folgt somit rein gruppentheoretisch aus Satz I der evidente

Satz I′: *Die Gruppe $\Psi^n(\bar{K}^n)$ der n-dimensionalen Nullsphäroden des Gerüstpolyeders $\bar{K}^n$ ist isomorph der Gruppe $\Gamma^n(\bar{K}^n)$.*

Der Zusammenhang zwischen der algebraischen Struktur der Nullsphärodengruppe des Polyeders und derjenigen des Gerüstpolyeders ist daher gegeben durch

Satz I″: *Die Gruppe $\Psi^n(\bar{K})$ der n-dimensionalen Nullsphäroden des Polyeders $\bar{K}$ ist homomorphes Bild der Gruppe $\Psi^n(\bar{K}^n)$ der n-dimensionalen Nullsphäroden des Gerüstpolyeders $\bar{K}^n$. Der Kern des Homomorphismus ist die Gruppe $P_0^n(\bar{K}^n, \bar{K})$.*

Es genügt offenbar, Satz I zu beweisen.

3.3 Beweis von Satz I. a) Wir beweisen zuerst, daß es eine homomorphe Abbildung ${}^0h$ von $\Gamma^n(\bar{K}^n)$ auf $\Psi^n(\bar{K})$ gibt.

Gemäß Definition (cf. 3.1 a)) sind die Elemente von $\Gamma^n(\bar{K}^n)$ Homotopieklassen von solchen n-dimensionalen Sphäroden, die, als sphärische Zyklen (Ketten) aufgefaßt, (n-dimensionale) Nullzyklen sind, d.h. darstellbar sind in der Form $\sum_{j=1}^{n} t_j Y_j^n$ mit $t_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. (Y_j^n sind n-dimensionale Simplexe von $\bar{K}$.) Dabei läßt sich t_j als Grad der die Sphärode definierenden Abbildung der Urbildsphäre Σ^n auf dem Simplex Y_j^n deuten. Daher besagt $t_j = 0$ (für alle j), daß die die Elemente von $\Gamma^n(\bar{K}^n)$ repräsentierenden Sphäroden *Null*sphäroden in $\bar{K}^n$, und also auch in $\bar{K}$, sind (cf. 2.1.). Da die Elemente von $\Gamma^n(\bar{K}^n)$ Homotopieklassen bezüglich des (gewöhnlichen) Homotopiebegriffs *auf* $\bar{K}^n$ sind, dieser aber, infolge seiner Trivialität im Sinne von 1.9, die Nullsphärodeneigenschaft erhält (cf. 2.9), kann jedes Element γ von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ als eine Nullsphärodenklasse auf $\overline{K}^n$ aufgefaßt werden. Dieser entspricht nun eindeutig eine Nullsphärodenklasse auf $\overline{K}$, d.h. ein Element ψ von $\Psi^n(\overline{K})$, weil erstens die die Elemente ψ repräsentierenden Nullsphäroden (wie alle simplizialen n-dimensionalen Nullsphäroden) ganz auf $\overline{K}^n$ liegen, zweitens je zwei auf $\overline{K}^n$ ν-homotope Nullsphäroden a fortiori auf $\overline{K}$ ν-homotop sind, und drittens jedem Repräsentanten eindeutig seine Klasse entspricht. Diese eindeutige Zuordnung von Elementen von $\Psi^n(\overline{K})$ zu den Elementen von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ heiße ${}^0h$. ${}^0h$ wird für jedes $\gamma \in \Gamma^n(\overline{K}^n)$ explizite gegeben durch die Auswahl einer (beliebigen) Nullsphärode ${}^0\mathfrak{s}^n$, die γ repräsentiert, und durch Zuordnung desjenigen Elements $\psi \in \Psi^n(\overline{K})$ zu γ, das durch ${}^0\mathfrak{s}^n$ vertreten wird. Der Summe (bzw. dem Produkt, für $n = 1$) zweier Elemente von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ werden durch ${}^0h$ evidentermaßen die Summe (das Produkt) ihrer ${}^0h$-Bilder in $\Psi^n(\overline{K})$ zugeordnet, da Urbild und Bild hier durch dieselbe Nullsphärode repräsentiert werden. ${}^0h$ ist daher ein Homomorphismus von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ in $\Psi^n(\overline{K})$.

Ist nun ein beliebiges Element $\psi \in \Psi^n(\overline{K})$ gegeben, so gibt es eine Nullsphärode ${}^0\mathfrak{s}^n$ auf $\overline{K}^n$, die ψ repräsentiert. ${}^0\mathfrak{s}^n$ repräsentiert dann gleichzeitig auch ein Element von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$; und zwar ein solches γ, dem durch ${}^0h$ das Element ψ (gemäß Konstruktion von ${}^0h$) zugeordnet ist. (Das γ, dem ψ zugeordnet wird, ist hier im allgemeinen von der Wahl des Repräsentanten ${}^0\mathfrak{s}^n$ von ψ nicht unabhängig.) Jedes Element von $\Psi^n(\overline{K})$ tritt also bei ${}^0h$ als Bild eines Elements von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ auf. ${}^0h$ ist mithin ein Homomorphismus von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ auf $\Psi^n(\overline{K})$.

b) Wir zeigen jetzt: Der Kern von ${}^0h$, d.h. das Vollurbild des Nullelements von $\Psi^n(\overline{K})$, ist die Gruppe $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$. D.h. dann und nur dann ist eine n-dimensionale Sphärode eine auf $\overline{K}$ ν-nullhomotope Nullsphärode, wenn sie, als Repräsentant eines Elements von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ betrachtet, sogar ein Element der Untergruppe $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$ von $\Gamma^n(\overline{K}^n)$ repräsentiert. Der Beweis geschieht in zwei Schritten:

α) „*dann*" (*hinreichend*): wenn die Sphärode $\mathfrak{s}^n$ ein Element von $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$ repräsentiert, ist sie eine auf $\overline{K}$ ν-nullhomotope Nullsphärode. Weil $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K}) \subset \Gamma^n(\overline{K}^n)$ ist, ist nach a) zunächst $\mathfrak{s}^n$ eine *Null*sphärode: $\mathfrak{s}^n = {}^0\mathfrak{s}^n$. Sie ist — infolge der Definition von $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$ — zusammengesetzt aus lauter n-dimensionalen Sphäroden von der Form $\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n$ (oder zu diesen auf $\overline{K}^n$ homotopen), wo $\mathfrak{r}^n$ und $\mathfrak{r}'^n$ einander auf $\overline{K}^n$ freihomotope n-dimensionale Sphäroden sind, die in $\overline{K}$ nullhomotop sind. Symbolisch sei das ausgedrückt durch ${}^0\mathfrak{z}^n = \Sigma(\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n)$. Es genügt daher, die Behauptung α) für den Fall einer Nullsphärode von der Form $\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n$ zu beweisen.

Da $\mathfrak{r}^n$ und $\mathfrak{r}'^n$ auf $\overline{K}$ nullhomotop (im gewöhnlichen Sinne) sind, existiert für jedes von beiden in $\overline{K}$ ein $(n+1)$-dimensionales Teilpolyeder $|C^{n+1}|$ bzw. $|C'^{n+1}|$, über das hinweg sie so zusammengezogen werden können, daß sie durch diese Deformationen und durch („triviale") Deformationen, die lediglich auf $\overline{K}^n$ vorgenommen werden, in den Bezugspunkt O deformierbar sind. Da $\mathfrak{r}^n$ und $\mathfrak{r}'^n$ außerdem auf $\overline{K}^n$ freihomotop (im gewöhnlichen, d.h. globalen Sinne von 1.12) sind, kann man sie auf $\overline{K}^n$ in zwei Sphäroden $\bar{\mathfrak{r}}^n$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}'^n$ (trivial) deformieren, so daß folgendes gilt: Ist eine der beiden Sphäroden, z.B. $\bar{\mathfrak{r}}^n$, durch $\bar{\mathfrak{r}}^n = \varphi(\Sigma^n)$ gegeben, so läßt sich die andere, $\bar{\mathfrak{r}}'^n$, als Bild von Σ^n, an welche im Punkte $\mathfrak{o}$ ein geschlossener 1-dimensionaler Weg $\mathfrak{u}$ und sein reziproker $\mathfrak{u}^{-1}$ angehängt sind, derart darstellen, daß $\bar{\mathfrak{r}}'^n = \tilde{F}(\Sigma^n \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^{-1})$ ist, wobei $\tilde{F}$ Erweiterung von φ ist, d.h. $\tilde{F}(\Sigma^n) \equiv \varphi(\Sigma^n)$ gilt. (Cf. 1.9 („triviale Deformationen") und 1.12). Durch triviale Deformationen kann man auf diese Weise $\mathfrak{r}^n$ und $\mathfrak{r}'^n$ in solche Sphäroden $\bar{\mathfrak{r}}^n$ und $\bar{\mathfrak{r}}'^n$ überführen, für die die genannten $(n+1)$-dimensionalen Teilpolyeder einander gleich sind; das $\bar{\mathfrak{r}}^n$ und $\bar{\mathfrak{r}}'^n$ gemeinsame Teilpolyeder heiße $|D^{n+1}|$. Die Nullsphärode $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ repräsentiert natürlich dasselbe Element von $P_0^n(\overline{K}^n, \overline{K})$ wie $\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n$, und kann dargestellt werden durch

$$\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n = \tilde{F}[\Sigma^n \oplus -(\Sigma^n \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^{-1})] = \tilde{F}[\Sigma^n \oplus (-\Sigma^n) \oplus \mathfrak{u}^{-1} \oplus \mathfrak{u}].$$

Durch Konstruktion einer geeigneten Abbildung zeigen wir nun, daß $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ ν-nullhomotop in $\overline{K}$ ist.

Wir stellen $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ als Bild einer orientierten Sphäre $\mathcal{S}^n$ dar, an die in einem ausgezeichneten Punkt e ein geschlossener 1-dimensionaler Weg $\mathfrak{w}$ und sein reziproker $\mathfrak{w}^{-1}$ angehängt sind.[9]) M^{n-1} sei ein Meridian von $\mathcal{S}^n$, auf dem e liegt. $\mathcal{S}^n$ berande die $(n+1)$-dimensionale Vollkugel $\mathcal{V}^{n+1}$, Σ^n berande V^{n+1}. $\mathcal{V}^{n+1}$ sei hinreichend fein simplizial untergeteilt — im Hinblick auf die Konstruierbarkeit der zu definierenden simplizialen Abbildung $\mathcal{G}$ — und die simpliziale Einteilung werde so gewählt, daß sie symmetrisch bezüglich der n-dimensionalen Hyperebene ist, in der M^{n-1} liegt. Dadurch sind insbesondere die beiden Hemisphären ${}_IH^n$,

---

[9]) Man müsste eigentlich auch noch $\mathcal{S}^n \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}$ auf eine Sphäre beziehen, sodaß $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ als Bild einer Sphäre allein dargestellt wäre. Man kann aber hier wohl davon absehen, weil der Beitrag des Bildes von $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}$ zur Nullsphärode unwesentlich ist.

${}_{II}H^n$, in die $\mathcal{S}^n$ durch M^{n-1} zerlegt wird, isomorph untergeteilt, wobei die isomorphe Zuordnung der Simplexe von ${}_IH^n$ zu denen von ${}_{II}H^n$ durch die, durch die Symmetrie gestiftete, isomorphe Zuordnung der Simplexe der beiden Hälften ${}_IE^{n+1}$, ${}_{II}E^{n+1}$ von $\mathcal{V}^{n+1}$ induziert ist. Nun sei $\mathcal{G}$ eine simpliziale Abbildung von $\mathcal{V}^{n+1} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}$ auf $V^{n+1} \oplus (-V^{n+1}) \oplus \mathfrak{u}^{-1} \oplus \mathfrak{u}$, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(1) \qquad \mathcal{G}(\mathfrak{w}) = \mathfrak{u} \qquad \mathcal{G}(\mathfrak{w}^{-1}) = \mathfrak{u}^{-1}$$

$$(2) \qquad \mathcal{G}(e) = \mathfrak{o}$$

$$(3) \qquad \mathcal{G}(M^{n-1}) = \mathfrak{o}$$

$$(4) \qquad \mathcal{G}(\mathcal{V}^{n+1}): \begin{cases} \mathcal{G}({}_IE^{n+1}) = V^{n+1} \\ \mathcal{G}({}_{II}E^{n+1}) = -V^{n+1}, \end{cases}$$

wobei, als Zusatzforderung zu (4), verlangt wird, daß

$$(5) \qquad \mathcal{G}({}_{II}x) = -\mathcal{G}({}_Ix)$$

für je zwei durch die Unterteilungs-Isomorphie einander zugeordnete Simplexe ${}_Ix$, ${}_{II}x$ von ${}_IE^{n+1}$ bzw. ${}_{II}E^{n+1}$ gelte. (5) bedeutet, explizite gesagt: Bildet $\mathcal{G}$ ein Simplex ${}_Ix$ von ${}_IE^{n+1}$ auf das Simplex X von V^{n+1} ab, so werde ${}_{II}x$ von ${}_{II}E^{n+1}$ auf dasjenige Simplex $-X$ von $-V^{n+1}$ abgebildet, das bei der durch Umorientierung von V^{n+1} gestifteten natürlichen Isomorphie der simplizialen Einteilungen von V^{n+1} und $-V^{n+1}$ dem Simplex X entspricht. Die durch die Abbildung $\mathcal{G}$ induzierte „Rand-Abbildung" $\mathcal{F}$ von $\mathcal{S}^n \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}$ auf $\Sigma^n \oplus (-\Sigma^n) \oplus \mathfrak{u}^{-1} \oplus \mathfrak{u}$ erfüllt naturgemäß die Bedingungen (1*), (2*), (3*), die aus (1), (2), (3) durch Ersetzen von $\mathcal{G}$ durch $\mathcal{F}$ entstehen, und — an Stelle von (4) — die Bedingung

$$(4^*) \qquad \mathcal{F}(\mathcal{S}^n): \begin{cases} \mathcal{F}({}_IH^n) = \Sigma^n \\ \mathcal{F}({}_{II}H^n) = -\Sigma^n, \end{cases}$$

sowie

$$(5^*) \qquad \mathcal{F}({}_{II}x) = -\mathcal{F}({}_Ix),$$

wobei ${}_Ix$, ${}_{II}x$ einander entsprechende Simplexe von ${}_IH^n$ bzw. ${}_{II}H^n$ sind. Da die $\bar{\mathfrak{r}}^n$ und $\bar{\mathfrak{r}}'^n$ ursprünglich definierende Abbildung $\tilde{F}$, infolge ihrer Eindeutigkeit, auf Σ^n und $-\Sigma^n$ die Eigenschaft hat, daß

$$(6) \qquad \tilde{F}(-X) = -\tilde{F}(X)$$

für jedes Simplex X von Σ^n und das entsprechende $-X$ von

— Σ^n ist, erhalten wir die gewünschte Darstellung der Nullsphärode $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ als Bild von $\mathcal{S}^n \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}$ vermittels des Produkts $\mathfrak{F}$ der Abbildungen $\mathcal{F}$ und $\tilde{F}$:

$$\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n = \mathfrak{F}(\mathcal{S}^n \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}) = \tilde{F}\mathcal{F}(\mathcal{S}^n \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}).$$

Daß $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ in der Tat eine Nullsphärode ist, folgt dabei speziell aus (5*) und (6) und der Definition aus 2.1; es ist nämlich $\mathcal{F}({}_{II}x) = -X$, wenn $\mathcal{F}({}_{I}x) = X$ ist (gemäß (5*)) und somit (gemäß (6)): $\tilde{F}(\mathcal{F}({}_{II}x)) = -\tilde{F}(\mathcal{F}({}_{I}x))$, d.h.

$$(7) \qquad \mathfrak{F}({}_{II}x) = -\mathfrak{F}({}_{I}x).$$

Die Abbildung $\mathfrak{F}(\mathcal{S}^n)$ und also auch die Abbildung $\mathfrak{F}(\mathcal{S}^n \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1})$, die $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ darstellt, hat daher auf jedem Simplex in $\bar{K}$ den Grad Null.

Ist $\tilde{G}$ eine simpliziale Abbildung von V^{n+1} in $\bar{K}$, die Erweiterung von $\tilde{F}(\Sigma^n)$ ist, so gilt, in Analogie zu (6), für $\tilde{G}$:

$$(8) \qquad \tilde{G}(-X) = -\tilde{G}(X),$$

wenn X ein Simplex von V^{n+1} und $-X$ das entsprechende Simplex von $-V^{n+1}$ ist, das durch Umorientierung von V^{n+1} aus X hervorgeht. Wir betrachten die Produktabbildung $\mathfrak{G}$ von $\mathcal{G}$ und $\tilde{G}$. $\mathfrak{G}$ ist eine Abbildung von $\mathcal{V}^{n+1} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{w}^{-1}$ in $\bar{K}$, die — auf $\mathcal{V}^{n+1}$ betrachtet — eine ν-Deformation von $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ als Nullsphärode über $|D^{n+1}|$ hinweg bestimmt. Denn auf Grund von (5) und (8) folgt $\mathfrak{G}({}_{II}x) = -\mathfrak{G}({}_{I}x)$, was, im Verein mit (7), für $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$ bedeutet, daß man diese Nullsphärode durch eine endliche Kette von elementaren simplizialen ν-Deformationen (cf. 2.5) über $|D^{n+1}|$ in das $\mathfrak{G}$-Bild von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}^{-1}$ überführen kann. Da schließlich dieser hin- und zurückdurchlaufene 1-dimensionale Weg trivialerweise auf $\bar{K}^n$ in den Bezugspunkt O deformierbar ist, ist damit bewiesen, daß $\bar{\mathfrak{r}}^n - \bar{\mathfrak{r}}'^n$, und folglich auch $\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n$, eine auf $\bar{K}$ ν-nullhomotope Nullsphärode ist.

β) „*nur dann*" (*notwendig*): eine ν-nullhomotope Nullsphärode ${}^0\mathfrak{s}^{n\prime}$ repräsentiert — als Repräsentant eines Elements von $\Gamma^n(\bar{K}^n)$ betrachtet — sogar ein Element von $P_0^n(\bar{K}^n, \bar{K})$, d.h. ist auf $\bar{K}^n$ homotop einer Sphärode von der Form $\sum(\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n)$. Aequivalent damit ist: Sind ${}^0\mathfrak{s}_k^n$, ${}^0\mathfrak{s}_l^n$ zwei Nullsphäroden, die einander in $\bar{K}$ ν-homotop sind, so ist ihre Differenz ${}^0\mathfrak{s}_l^n - {}^0\mathfrak{s}_k^n$ auf $\bar{K}^n$ deformierbar in eine Sphärode von der Form $\sum(\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n)$. Daß ${}^0\mathfrak{s}_k^n$, ${}^0\mathfrak{s}_l^n$ ν-homotop sind, heißt, daß es zwischen ihnen eine endliche Folge von Nullsphäroden gibt derart, daß je zwei aufeinanderfolgende durch Anwendung einer elementaren simplizialen ν-Deformation aus-einander hervorgehen (cf. 2.5.). Es genügt daher zu beweisen: Geht ${}^0\mathfrak{s}_2^n$ aus ${}^0\mathfrak{s}_1^n$ durch eine elementare simpliziale ν-Deformation auf $\overline{K}$ hervor, so ist ${}^0\mathfrak{s}_2^n - {}^0\mathfrak{s}_1^n$ auf $\overline{K}^n$ homotop einer Sphärode von der Form $\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n$.

Daß ${}^0\mathfrak{s}_2^n$ aus ${}^0\mathfrak{s}_1^n$ durch Anwendung einer elementaren simplizialen ν-Deformation hervorgeht, heißt (gemäß 2.6), daß es eine Abbildung F von $(S^n \oplus \overline{V}^{n+1} \oplus \overline{V}'^{n+1})$ in $\overline{K}$ gibt, die eine Erweiterung von $f(S^n) = {}^0\mathfrak{s}_1^n$ ist $(f(S^n) \equiv F(S^n))$ und für die $F(W^{n+1}) = -F(W'^{n+1})$, sowie speziell $F(Z) = -F(Z')$, gilt. (cf. 2.6.). Dabei ist ${}^0\mathfrak{s}_2^n$ dargestellt durch $F(S^n \oplus \overline{S}^n \oplus \overline{S}'^n)$. Die in $\overline{K}$ ν-nullhomotope Nullsphärode ${}^0\mathfrak{s}_2^n - {}^0\mathfrak{s}_1^n$ ist dann (gemäß 2.3 und 2.4) bestimmt durch die Abbildung F von $S^n \oplus \overline{S}^n \oplus S'^n \oplus (-S^n)$ in $\overline{K}$. Weil nun $F(-S^n)$ und $F(S^n)$ bis auf die Orientierung einander gleich sind, kann man ${}^0\mathfrak{s}_2^n - {}^0\mathfrak{s}_1^n$ in $\overline{K}^n$ auf eine Sphärode $\mathfrak{n}$ von folgender Gestalt zusammenziehen ($\mathfrak{n}$ ist sogar eine Nullsphärode wegen der Trivialität der Deformationen auf $\overline{K}^n$): $\mathfrak{n}$ besteht aus zwei am Bezugspunkt $O \in \overline{K}^n$ haftenden Sphäroden, nämlich aus den bis auf entgegengesetzte Orientierung gleichen $F(Z)$ und $F(Z')$, die beide den Punkt $A \in \overline{K}^n$ enthalten, und mit O durch 1-dimensionale Wege (die F-Bilder von u, u' und ihren reziproken) verbunden sind. (cf. 2.6.). Daraus ergibt sich, daß — wenn wir für den Moment die $F(Z)$ enthaltende Sphärode $\mathfrak{t}^n$, diejenige die $F(Z')$ enthält $\mathfrak{t}'^n$ nennen — $\mathfrak{t}'^n$ auf $\overline{K}^n$ freihomotop zu $\mathfrak{t}^n$ ist. Weil nun $\mathfrak{t}^n$, $\mathfrak{t}'^n$ durch den ν-Deformationsprozeß einer Nullsphärode definiert sind, d.h. weil im besonderen $F(Z)$ und $F(Z')$ in $\overline{K}$ auf einen Punkt (nämlich A) zusammengezogen werden können, und somit $\mathfrak{t}^n$ und $\mathfrak{t}'^n$ in den Punkt O deformierbar sind, haben $\mathfrak{t}^n$ bzw. $\mathfrak{t}'^n$ die Bedeutung der oben genannten Sphäroden $\mathfrak{r}^n$ bzw. $\mathfrak{r}'^n$, und $\mathfrak{n}$ ist von der Form $\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n$. Daher ist ${}^0\mathfrak{s}_2^n - {}^0\mathfrak{s}_1^n$ auf $\overline{K}^n$ in eine Sphärode von der Form $\mathfrak{r}^n - \mathfrak{r}'^n$ deformierbar. Damit ist Satz I bewiesen.

Bemerkung: Dieser Beweis gilt auch für den 1-dimensionalen Fall, d.h. für Nullwege, wo es auf die Reihenfolge der Wege ankommt; nur ist es hier notwendig, bei der topologischen Summenbildung im Urbild sich auf eine geeignete Reihenfolge der Summanden festzulegen. Um das zu illustrieren, skizzieren wir hier als Beispiel den letzten Teil des Beweises noch einmal für den Spezialfall der Nullwege. Man geht hier z.B. zweckmäßig von der Darstellung von ${}^0\mathfrak{s}_1^1$ und ${}^0\mathfrak{s}_2^1$ in folgender Form aus: ${}^0\mathfrak{s}_1^1 = F(S^1)$, ${}^0\mathfrak{s}_2^1 = F(\overline{S}^1 \oplus \overline{S}'^1 \oplus S^1)$. ${}^0\mathfrak{s}_2^1 - {}^0\mathfrak{s}_1^1$ ist dann gegeben durch $F(\overline{S}^1 \oplus \overline{S}'^1 \oplus S^1 \oplus (-S^1))$ und kann auf $\overline{K}^1$ deformiert werden in einen Nullweg $\mathfrak{n}$ von folgender Gestalt. Setzen wir $F(Z) = R$,

$F(Z') = R'$, woraus wegen $F(Z') = -F(Z)$ folgt $R' = R^{-1}$, und ist $F(u) = U$, $F(u') = U'$ (u, u' 1-dimensionale Wege auf S^1 von o nach a bzw. a' (cf. 2.6.)), so ist $\mathfrak{n}$ von der Form $URU^{-1} . U'R^{-1} U'^{-1}$. Da R in $\overline{K}$ auf einen Punkt, nämlich den Punkt $A = F(a) = F(a')$, zusammenziehbar ist, ist $URU^{-1} . U'R^{-1}U'^{-1}$ in der Tat ein Weg von der Form $\mathfrak{r}^1 - \mathfrak{r}'^1$, denn $URU^{-1} . U'R^{-1}U'^{-1}$ ist auf $\overline{K}^1$ deformierbar in

$$U(U'^{-1}U')R(U'^{-1}U')U^{-1} . U'R^{-1}U'^{-1} =$$
$$= [(UU'^{-1})(U'RU'^{-1})(U'U^{-1})] . [U'RU'^{-1}]^{-1}.$$

§ 4. Eine Untergruppe der Nullsphärodengruppe.

4.1. Sind $\mathfrak{s}^n$ und $\mathfrak{s}'^n$ zwei n-dimensionale Sphäroden, die einander auf $\overline{K}^n$ freihomotop sind, so ist die Sphärode $\mathfrak{s}^n - \mathfrak{s}'^n$ eine Nullsphärode in $\overline{K}^n$. Dies ergibt sich leicht aus der Betrachtung des Grades der Abbildung der Urbildsphäre Σ^n in $\overline{K}^n$, durch welche die Sphärode $\mathfrak{s}^n - \mathfrak{s}'^n$ bestimmt ist.

4.2. Wir betrachten nun solche Nullsphäroden in $\overline{K}^n$, die durch Zusammensetzung von Nullsphäroden von der Form $\mathfrak{s}^n - \mathfrak{s}'^n$ entstanden sind. Zum Unterschied von den in 2.1. definierten und bisher betrachteten („allgemeinen") Nullsphäroden mögen die soeben definierten Nullsphäroden als „spezielle Nullsphäroden" bezeichnet werden. Während die allgemeinen Nullsphäroden anschaulich dadurch charakterisiert sind, daß jedes n-dimensionale Simplex von $\overline{K}^n$ gleichoft in positiver wie in negativer Orientierung von ihnen bedeckt wird, lassen sich die speziellen Nullsphäroden anschaulich etwa so deuten: Die simpliziale Abbildung φ der Urbildsphäre Σ^n bestimmt eine spezielle Nullsphärode, wenn jede n-dimensionale simpliziale orientierte Sphäre in $\overline{K}$ gleichoft in positiver wie in negativer Orientierung durch $\varphi(\Sigma^n)$ bedeckt wird.

4.3. Der Deformationsbegriff wird für die speziellen Nullsphäroden genauso erklärt wie für die allgemeinen, nämlich als ν-Deformation (cf. 2.5). Dies ist möglich, weil bei dem ν-Deformationsprozeß bei einem elementaren Schritt (cf. 2.5.) stets das Bild einer n-dimensionalen Sphäre als Ganzes in beiden Orientierungen in die Nullsphärode eingefügt (oder aus ihr entfernt) wird. Die allgemeine Forderung, daß eine Nullsphärode während der ν-Deformation, d.h. bei jedem ihrer elementaren Schritte, eine Nullsphärode gleicher Art („speziell", „allgemein") bleiben soll, wird somit erfüllt.

Zwecks Ausführung einer ν-Deformation ist es gut, die Nullsphärode $\mathfrak{s}^n - \mathfrak{s}'^n$ als Bild *einer* (Urbild-) Sphäre $\mathcal{S}^n$ zu betrachten, was durch eine „Parametertransformation" von der früher beschriebenen Art (1.2, 2.3) geschehen kann.

4.4. Auf Grund des ν-Deformationsbegriffs lassen sich Klassen von speziellen Nullsphäroden der Dimension n bilden: Die ν-Homotopieklassen der an einem Punkte O in $\overline{K}^n$ haftenden speziellen Nullsphäroden. Es ist leicht zu sehen, daß diese Klassen eine Gruppe bilden, die *Gruppe* $\Psi_0^n(\overline{K})$ *der speziellen n-dimensionalen Nullsphäroden von* $\overline{K}$.

4.5. Wie in 2.9 für die allgemeinen Nullsphärodengruppen, läßt sich auch hier, analog zu $\Psi_0^n(\overline{K})$, die *Gruppe* $\Psi_0^n(\overline{K}^n)$ *der speziellen n-dimensionalen Nullsphäroden des Gerüstpolyeders* $\overline{K}^n$ bilden. Man muß nur — unter Beibehaltung der übrigen Definitionen — den in 2.9 erwähnten Begriff der trivialen Deformation verwenden.

4.6. Die Strukturen von $\Psi_0^n(\overline{K})$ und $\Psi_0^n(\overline{K}^n)$: Zunächst ergibt sich aus den Definitionen der allgemeinen und speziellen Nullsphärodengruppen, daß

$$(1) \qquad \Psi_0^n(\overline{K}) \subset \Psi^n(\overline{K}); \qquad\qquad \Psi_0^n(\overline{K}^n) \subset \Psi^n(\overline{K}^n)$$

ist. Ferner gelten in Analogie zu den Sätzen von § 3 die Sätze:

Satz II: $\Psi_0^n(\overline{K})$ *ist isomorph der Faktorgruppe*

$$\Pi_0^n(\overline{K}^n)/P_0^n(\overline{K}, \overline{K}^n).$$

Satz II′: $\Psi_0^n(\overline{K}^n)$ *ist isomorph der Gruppe* $\Pi_0^n(\overline{K}^n)$.

Satz II″: $\Psi_0^n(\overline{K})$ *ist homomorphes Bild der Gruppe* $\Psi_0^n(\overline{K}^n)$.

Die Sätze II′ und II″ ergeben sich aus Satz II; Satz II läßt sich analog, zum Teil sogar wörtlich gleich beweisen wie Satz I in § 3.

4.7. Bemerkung: In der Dimension $n = 1$ fallen die Gruppen $\Psi^1(\overline{K})$ und $\Psi_0^1(\overline{K})$, und ebenso $\Psi^1(\overline{K}^1)$ und $\Psi_0^1(\overline{K}^1)$ paarweise zusammen. Das beruht darauf, daß man jede eindimensionale Nullsphärode allein durch triviale Deformationen (d.h. auf $\overline{K}^1$) in eine spezielle (eindimensionale) Nullsphärode überführen kann.

§ 5. Die reduzierten Nullsphärodengruppen.

5.1. Wir betrachten jetzt die Faktorgruppe $\Omega^n(\overline{K}) = \Psi^n(\overline{K})/\Psi_0^n(\overline{K})$ der Nullsphärodengruppe $\Psi^n(\overline{K})$ eines zusammenhängenden Polyeders $\overline{K}$ nach der Untergruppe der speziellen Nullsphärodengruppe $\Psi_0^n(\overline{K})$ von $\overline{K}$. Analog bilden wir für das n-dimensionale Gerüstpolyeder $\overline{K}^n$ des in (beliebiger) fester simplizialer Einteilung gegebenen Polyeders $\overline{K}$ die Gruppe $\Omega^n(\overline{K}^n) = \Psi^n(\overline{K}^n)/\Psi_0^n(\overline{K}^n)$. $\Omega^n(\overline{K})$ bzw. $\Omega^n(\overline{K}^n)$ möge — aus Gründen, die aus 5.4 hervorgehen — die Gruppe der n-dimensionalen reduzierten Nullsphäroden oder kürzer *die reduzierte n-dimensionale Nullsphärodengruppe von* $\overline{K}$ *bzw.* $\overline{K}^n$ heißen.

5.2. Die Struktur von $\Omega^n(\overline{K})$ bzw. $\Omega^n(\overline{K}^n)$ ergibt sich unmittelbar aus den Strukturen der Gruppen $\Psi^n(\overline{K})$, $\Psi_0^n(\overline{K})$, $\Psi^n(\overline{K}^n)$, $\Psi_0^n(\overline{K}^n)$. Aus Satz I (cf. 3.2), Satz II (cf. 4.6) und einem bekannten gruppentheoretischen Isomorphiesatz folgt nämlich:

SATZ III: *Die Gruppe* $\Omega^n(\overline{K})$ *der reduzierten Nullsphäroden des Polyeders* $\overline{K}$ *ist isomorph der Faktorgruppe* $\Gamma^n(\overline{K}^n)/\Pi_0^n(\overline{K}^n)$.

Nun ersieht man andererseits aus Satz I′ (cf. 3.2) und Satz II′ (cf. 4.6), daß auch $\Omega^n(\overline{K}^n)$ isomorph zur Gruppe $\Gamma^n(\overline{K}^n)/\Pi_0^n(\overline{K}^n)$ ist. Daraus und aus Satz III ergibt sich

SATZ IV: *Die Gruppe* $\Omega^n(\overline{K})$ *der reduzierten Nullsphäroden des Polyeders* $\overline{K}$ *ist isomorph zur Gruppe* $\Omega^n(\overline{K}^n)$ *der reduzierten Nullspäroden des Gerüstpolyeders* $\overline{K}^n$.

Aus diesen beiden Sätzen und aus der „Bemerkung" 4.7 folgt speziell für die Dimensionszahl $n = 1$ das

KOROLLAR: *Die* 1-*dimensionale reduzierte Nullsphärodengruppe d.h. die reduzierte Nullwegegruppe* $\Omega^1(\overline{K})$ *eines Polyeders* $\overline{K}$ *und diejenige,* $\Omega^1(\overline{K}^1)$, *des* 1-*dimensionalen Gerüstpolyeders* $\overline{K}^1$ *bestehen beide aus dem Einselement allein.*

Wir wenden uns nun der geometrischen Charakterisierung der reduzierten Nullsphärodengruppen zu:

5.3 Es sei ${}^0\mathfrak{S}^n$ eine (im Sinne von 4.2 „allgemeine") Nullsphärode, definiert durch eine Abbildung φ von Σ^n in $\overline{K}$ (cf. 2.5). Als eine „Kappe" E^n auf der Sphäre Σ^n bezeichnen wir jedes Teilpolyeder von Σ^n, das sich als topologisch-simpliziales Bild eines (geeignet) simplizial untergeteilten n-dimensionalen Simplexes auffassen läßt. Insbesondere ist jedes n-dimensionale Simplex von Σ^n eine Kappe auf Σ^n. Gibt es nun auf Σ^n ein Paar von Kappen E^n, E'^n, die bei der ${}^0\mathfrak{S}^n$ definierenden Abbildung φ so in $\overline{K}$ abgebildet werden, daß das Bild des Randes von E^n und von E'^n ein- und derselbe Eckpunkt A von $\overline{K}$ ist, und daß $\varphi(E'^n) = -\varphi(E^n)$ gilt, so möge der Inbegriff von $\varphi(E^n)$ und $\varphi(E'^n)$ eine sphärische Komponente der Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}^n$ heißen.

Sphärische Komponenten treten, z.B., bei der elementaren simplizialen ν-Deformation einer Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}_1^n$ auf (cf. 2.5). Denn die an die Urbildsphäre Σ^n von ${}^0\mathfrak{S}_1^n$ angehängten simplizialen Sphären σ_α^n, $\sigma_{\alpha'}^n$, können als simpliziale Bilder eines Paares von Kappen E^n, E'^n auf der Urbildsphäre $\mathcal{S}^n$ von ${}^0\mathfrak{S}_2^n$ aufgefaßt werden, wobei ${}^0\mathfrak{S}_2^n$ die Resultat-Nullsphärode der ν-Deformation ist. $\tilde{F}(\sigma_\alpha^n)$ und $\tilde{F}(\sigma_{\alpha'}^n)$ (cf. 2.5) bestimmen dann zusammen eine sphärische Komponente von ${}^0\mathfrak{S}_2^n$.

5.4. Ersetzt man die Abbildung φ von Σ^n durch eine Abbildung φ^* von Σ^n in $\overline{K}$, die für alle Paare von Kappen E^n_μ, E'^n_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, die Urbilder sphärischer Komponenten von ${}^0\mathfrak{z}^n$ sind, *konstant* ist, sonst aber auf Σ^n mit φ übereinstimmt, so bedeutet dies eine Fortlassung („Reduktion") der sphärischen Komponenten der Nullsphärode ${}^0\mathfrak{z}^n$. Eine durch diesen Reduktionsprozeß aus ${}^0\mathfrak{z}^n$ entstandene Nullsphärode heißt eine (in bezug auf ihre sphärischen Komponenten) reduzierte Nullsphärode. Die reduzierte Nullsphärode braucht im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt zu sein. Zu einer Kappe E^n_1 auf Σ^n kann es nämlich mehrere Kappen ${}_1E^n_1, {}_2E^n_1, \ldots, {}_kE^n_1$ geben, so dass E^n_1 mit jeder dieser ${}_iE^n_1$ zu einem Kappenpaar vereinigt werden kann, das durch den Reduktionsprozeß eliminiert wird. Die verschiedenen Paarungen der Kappen bedingen dann verschiedene reduzierte Nullsphäroden. Aber alle diese reduzierten Nullsphäroden stimmen nicht nur als Bildmengen von Σ^n in $\overline{K}$ überein — was gemäß ihrer Konstruktion selbstverständlich ist —, sondern sie unterscheiden sich auch von einander — wie man leicht sieht — nur durch eine Nullsphärode von der Form $\mathfrak{z}^n - \mathfrak{z}'^n$ (cf. 4.2). Mit anderen Worten: Rechnet man modulo der Gruppe $\Pi^n_0(\overline{K}^n)$ (cf. 4.6 Satz II'), so hängt der Repräsentant eines Elements der Nullsphärodengruppe, das durch eine reduzierte Nullsphärode dargestellt werden kann, nicht mehr von der Willkür des Reduktionsprozeßes ab, die bei der Auswahl der Kappenpaare besteht.

5.5. Dieser Sachverhalt überträgt sich auch auf die Zusammensetzung der reduzierten Nullsphäroden: Bei der Zusammensetzung zweier reduzierter Nullsphäroden ${}^0\mathfrak{z}^n_1$, ${}^0\mathfrak{z}^n_2$ wird zunächst (wie in 2.3) die topologische Summe $\Sigma^n_1 \oplus \Sigma^n_2$ der beiden Urbildsphären Σ^n_1, Σ^n_2 betrachtet. Dabei kann es z.B. auf Σ^n_1 eine Kappe E^n_1 geben, die mit einer Kappe E^n_2 von Σ^n_2 gepaart und durch φ^* eliminiert werden kann, sodaß zunächst eine reduzierbare Nullsphärode entsteht. Stellt man diese aber (z.B. in Analogie zu 1.6) als Bild *einer* Sphäre $\mathscr{S}^n$ dar, so erscheinen E^n_1, E^n_2 als $\mathscr{F}$-Bilder eines eliminierbaren Kappenpaares $\mathcal{E}^n_1$, $\mathcal{E}^n_2$ auf $\mathscr{S}^n$ und somit $\mathfrak{F}(\mathscr{S}^n)$ als reduzierte Nullsphärode, die im angegebenen Sinne (d.h. mod $\Pi^n_0(\overline{K}^n)$) durch ${}^0\mathfrak{z}^n_1 + {}^0\mathfrak{z}^n_2$ eindeutig bestimmt ist.

Das Inverse einer reduzierten Nullsphärode ist, wie man unmittelbar sieht, ebenfalls eine reduzierte Nullsphärode. Die Deformation der n-dimensionalen reduzierten Nullsphäroden erfolgt ganz auf dem n-dimensionalen Gerüstpolyeder $\overline{K}^n$ (cf. Satz IV, 5.2), ist also dasselbe wie die in 2.9 beschriebene triviale Deformation, und erhält daher die Eigenschaft der Reduziertheit einer Nullsphärode.

5.6. Aus der Eindeutigkeit der reduzierten Nullsphäroden und ihrer Zusammensetzung modulo der Guppe $\Pi_0^n(\overline{K}^n)$ ergibt sich die Möglichkeit der Deutung der Gruppen $\Omega^n(\overline{K})$ bzw. $\Omega^n(\overline{K}^n)$ als Nullsphärodengruppen, deren Elemente durch reduzierte Nullsphäroden repräsentiert werden können.

§ 6. Beziehungen zu Sätzen von H. Hopf.

6.1. Alle Nullsphärodengruppen, die bisher betrachtet wurden, lassen sich auch für den stetigen Fall, d.h. für stetige Abbildungen einer n-dimensionalen Sphäre S^n in ein Polyeder $\overline{K}$ und stetige ν-Deformationen dieser Abbildungen definieren. Es gelten für die *stetigen Nullsphärodengruppen* dieselben Sätze wie für die kombinatorischen (d.h. simplizialen). Unter Nullsphärodengruppen verstehen wir daher jetzt auch die stetigen Nullsphärodengruppen. *Die Nullsphärodengruppen sind topologische Invarianten des Polyeders*, für das sie definiert sind. (Daraus ergibt sich u.a. auch die Unabhängigkeit der kombinatorischen Nullsphärodengruppen von der Simplizialzerlegung des Polyeders $\overline{K}$.) Der Nachweis dieser Tatsachen wird in § 7 skizziert. Hier wollen wir als Anwendung der bisherigen Ergebnisse — unter Vorwegnahme der Resultate von § 7 — Beziehungen zu Sätzen von H. Hopf herstellen.

6.2. H. Hopf hat bei seinen Untersuchungen [4] der Zusammenhänge zwischen Fundamentalgruppe und Homologiegruppen auf algebraische Weise unendliche Folgen von Abelschen Gruppen $\mathfrak{G}_I^1, \mathfrak{G}_I^2, \ldots$ eingeführt, die jeder abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ und jedem Ring I mit Einselement eindeutig zugeordnet werden können. Ist I der Ring der ganzen Zahlen (in welchem Fall man statt $\mathfrak{G}_I^k$ einfach $\mathfrak{G}^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ schreibt) und faßt man $\mathfrak{G}$ als Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden Polyeders $\overline{K}$ auf, so besagt eines der Hopfschen Ergebnisse, daß die r-te Homologiegruppe $\mathscr{H}^r(\overline{K})$ von $\overline{K}$ isomorph der Gruppe $\mathfrak{G}^r$ $(1 \leqq r \leqq n)$, und somit durch $\mathfrak{G}$ bestimmt ist, falls $\overline{K}$ in den Dimensionen r mit $1 < r \leqq n$ asphärisch ist. Es entsteht die Frage, ob und wie die Gruppen $\mathfrak{G}^k$ mit den gewöhnlichen Homotopiegruppen oder den Nullsphärodengruppen zusammenhängen.

6.3. Zunächst gilt für die Dimensionszahlen $k = 1$ und $k = 2$ nach H. Hopf [4]: Ist $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe von $\overline{K}$, so ist $\mathfrak{G}^1$ isomorph der Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach ihrer Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$, und die Gruppe $\mathfrak{G}^2$ ist ebenfalls durch $\mathfrak{G}$ bestimmt, indem $\mathfrak{G}^2$ isomorph der (in der Einleitung in No. 3 erwähnten) Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ ist. Dadurch ist bereits $\mathfrak{G}^2$ mit der Homotopietheorie in Zusammenhang gebracht, wie dies außerdem noch aus dem Hopfschen Begriff des Homotopierandes erhellt, der geometrisch der Definition der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ zugrundeliegt. Wir wollen hier für $\mathfrak{G}^2$ einen kleinen Schritt weiter in dieser Richtung gehen: Von der zu $\mathfrak{G}^2$ isomorphen (Abelschen) Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ hat Hopf gruppentheoretisch gezeigt, daß sie Untergruppe einer (im allgemeinen nichtkommutativen) Gruppe $\mathfrak{G}^*$ ist. ($\mathfrak{G}^*$ ist, cf. Einleitung No. 3, isomorph zu $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, oder, in der Bezeichnungsweise von 3.1, isomorph der Gruppe $\Gamma^1(\overline{K}^1)/P_0^1(\overline{K}^1, \overline{K})$.) Die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ läßt sich nun geometrisch charakterisieren durch Satz I (cf. 3.2), formuliert für den Spezialfall der Dimension $n = 1$:

Korollar zu Satz I: *Die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ ist isomorph der eindimensionalen Nullsphärodengruppe $\Psi^1(\overline{K})$, d.h. der Nullwegegruppe, von $\overline{K}$.*

Auf Grund dieses Korollars ist die Gruppe $\mathfrak{G}^2$ als Untergruppe der Nullwegegruppe, also ganz im Rahmen der Homotopietheorie, dargestellt.

6.4. Für die höheren Dimensionszahlen k (> 2) zeigt es sich, daß die Gruppen $\mathfrak{G}^k$ den reduzierten Nullsphärodengruppen (cf. 5.1) der Dimension $k - 1$ isomorph sind, und zwar für $k = 3$ stets, für $k > 3$ im allgemeinen nur unter einschränkenden Voraussetzungen über das Polyeder $\overline{K}$. Dies folgt aus einem weiteren Ergebnis von H. Hopf aus dem genannten Problemkreis, nämlich aus dem Satz, daß für ein Polyeder $\overline{K}$, das asphärisch in den Dimensionen r ($1 < r < n$) ist, die Gruppe $\mathfrak{G}^{n+1}$ isomorph der Gruppe $\Delta^n(\overline{K}^n) = \Gamma^n(\overline{K}^n)/\Pi_0^n(\overline{K}^n)$ (cf. 3.1 b)) ist, wo $\overline{K}^n$ das n-dimensionale Gerüstpolyeder, ($n > 1$), von $\overline{K}$ ist [5]. Daraus und aus Satz III (cf. 5.2) ergibt sich der die obige Aussage enthaltende

Satz V: *Die Struktur der Gruppe $\Omega^n(\overline{K})$ der reduzierten n-dimensionalen Nullsphäroden des Polyeders $\overline{K}$ ist bereits durch die Struktur der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\overline{K}$ bestimmt, sofern $\overline{K}$ asphärisch in den Dimensionen r ($1 < r < n$) ist, und zwar durch den Isomorphismus: $\Omega^n(\overline{K}) \simeq \mathfrak{G}^{n+1}$ ($n > 1$).*

Als Spezialfall davon gilt (wegen der in diesem Falle leeren Voraussetzung):

Korollar zu Satz V: *Die Gruppe $\Omega^2(\overline{K})$ der* **zwei***dimensionalen reduzierten Nullsphäroden von $\overline{K}$ ist in ihrer Struktur* **stets** *durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\overline{K}$ bestimmt, nämlich durch $\Omega^2(\overline{K}) \simeq \mathfrak{G}^3$.*

Zusammenfassend läßt sich also für die reduzierten Nullsphärodengruppen in den Dimensionen 1 und 2 behaupten:

Satz VI: *Es gilt stets* $\Omega^1(\overline{K}) = 0$ *(d.h.* $\Omega^1(\overline{K})$ *besteht aus dem Nullelement allein) und* $\Omega^2(\overline{K}) \simeq \mathfrak{G}^3$.

6.5. Aus dem in 6.4 genannten Hopfschen Satz und aus der Tatsache, daß die Gruppe $\mathfrak{G}^{n+1}$ als Funktion der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ topologisch invariant mit $\overline{K}$ verknüpft ist, ergibt sich unmittelbar, daß für den Spezialfall der Asphärizität von $\overline{K}$ (cf. 6.4) die von $\overline{K}^n$ abhängige Gruppe $\Delta^n(\overline{K}^n)$ eine topologische Invariante von $\overline{K}$ ist. Auf Grund von Satz III und Satz IV (cf. 5.2) folgt nun (wegen der topologischen Invarianz der Nullsphärodengruppen (cf. § 7)), daß dies auch unabhängig von der Asphärizität gilt, d.h.:

Satz VII: *Die für das Gerüstpolyeder* $\overline{K}^n$ *definierte Gruppe* $\Delta^n(\overline{K}^n)$ *ist eine topologische Invariante des Polyeders* $\overline{K}$.

Da nach der Bemerkung von 4.7 und den Sätzen I′ (cf. 3.2) und II′ (cf. 4.6) die Gruppe $\Omega^1(\overline{K}^1)$ und somit auch $\Delta^1(\overline{K}^1)$ nur aus dem Einselement besteht, ist diese Aussage auch nur wesentlich für $n > 1$.

Die geometrische Interpretation dieses Sachverhalts ist der

Satz VIII: *Die Gruppe* $\Omega^n(\overline{K}^n)$ *der reduzierten n-dimensionalen Nullsphäroden des Gerüstpolyeders* $\overline{K}^n$ *von* $\overline{K}$ *ist eine topologische Invariante des Polyeders* $\overline{K}$.

6.6. Bezeichnen wir für den Moment die Gruppe $\Delta^n(\overline{K}^n)$ als von $\overline{K}$ abhängige Gruppe mit $\tilde{\Delta}^n(\overline{K})$. Dann folgt aus einem Satz von H. Hopf [5, Satz III], daß die Gruppe $\Delta^n(\overline{K})$ $(=\Gamma^n(\overline{K})/\Pi_0^n(\overline{K}))$ homomorphes Bild von $\tilde{\Delta}^n(\overline{K})$ ist und daß der Kern dieses Homomorphismus isomorph zur Faktorgruppe der $(n+1)$-ten Homologiegruppe $\mathscr{H}^{n+1}$ nach der Gruppe der $(n+1)$-dimensionalen Henkelmannigfaltigkeiten $\mathscr{P}^{n+1}$ von $\overline{K}$ ist. Es ist zu vermuten, daß sich dieser Homomorphismus und damit die Gruppen $\mathscr{H}^{n+1}/\mathscr{P}^{n+1}$ und $\Delta^n(\overline{K})$ geometrisch mit Hilfe der reduzierten Nullsphäroden interpretieren lassen, doch bleibt diese Frage noch offen.

6.7. Wenn das Polyeder $\overline{K}$ *einfach zusammenhängend* ist, also $\Pi_0^n(\overline{K}^n) = 0$ ist, ist nach Satz II′ (cf. 4.6) auch $\Psi_0^n(\overline{K}^n) = 0$ und folglich nach Satz II″ (cf. 4.6) auch $\Psi_0^n(\overline{K}) = 0$. Wegen Satz III (cf. 5.2) ist somit die reduzierte Nullsphärodengruppe $\Omega^n(\overline{K})$ isomorph der (allgemeinen) Nullsphärodengruppe $\Psi^n(\overline{K})$ und nach Satz III und IV (cf. 5.2) ist sogar $\Psi^n(\overline{K}) \simeq \Psi^n(\overline{K}^n)$. D.h., in diesem Fall sind nicht nur die reduzierten n-dimensionalen Nullsphärodengruppen von $\overline{K}$ und $\overline{K}^n$ einander gleich, sondern sogar die Nullsphärodengruppen selbst, und es gilt:

$$\Psi^n(\overline{K}^n) \simeq \Psi^n(\overline{K}) \simeq \Delta^n(\overline{K}^n) \qquad (= \Gamma^n(\overline{K}^n)).$$

Aus der topologischen Invarianz von $\Delta^n(\overline{K}^n)$ für $\overline{K}$ (Satz VII) ergibt sich somit:

Satz IX: *Ist das Polyeder $\overline{K}$ einfach zusammenhängend, so ist die Gruppe $\Psi^n(\overline{K}^n)$ der n-dimensionalen Nullsphäroden des Gerüstpolyeders $\overline{K}^n$ eine topologische Invariante von $\overline{K}$.*

§ 7. Die stetigen Nullsphärodengruppen. Topologische Invarianz der Nullsphärodengruppen. (Skizze.)

7.1. Eine n-dimensionale stetige Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}^n$ ist definiert als der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge ${}^0\mathfrak{S}^n_1$, ${}^0\mathfrak{S}^n_2, \ldots$ von kombinatorischen (d.h. simplizialen) Nullsphäroden in K (bzw. $\overline{K}$). (Als Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von simplizialen (also stetigen) Abbildungen einer n-dimensionalen Sphäre (also einer kompakten Punktmenge) ist die Limes-Abbildung, die die stetige Nullsphärode definiert, eine stetige Abbildung der S^n.) Die Folge der kombinatorischen Nullsphäroden ist dabei auf einer Folge von Unterteilungen von K gegeben.

Zwei stetige Nullsphäroden sind einander in $\overline{K}$ *stetig* ν*-homotop*, wenn sie sich unter Festhaltung eines Punktes in $\overline{K}$ so ineinander stetig deformieren lassen, daß jede „Zwischensphärode" eine stetige Nullsphärode (im Sinne der obigen Definition) ist. Auf Grund dieses ν-Homotopiebegriffs bilden die Klassen der stetigen Nullsphäroden (in Bezug auf einen festen Aufpunkt O in $\overline{K}$) eine spezielle stetige Homotopiegruppe von $\overline{K}$, die wir auch mit $\Psi^n(\overline{K})$ bezeichnen.

7.2. Sei K_0 eine (feste) Simplizialzerlegung des Polyeders $\overline{K}$, und $K_1, K_2, \ldots$ eine Folge von Unterteilungen von K_0. Mit Hilfe dieser Folge sei die stetige Nullsphärodengruppe $\Psi^n(K_0)$ definiert. Die kombinatorische Nullsphärodengruppe von K_0 bezeichnen wir für den Moment mit $\hat{\Psi}^n(K_0)$. Unter der Voraussetzung der (später bewiesenen) Unterteilungsinvarianz von $\hat{\Psi}^n(K_0)$, d.h. bei Annahme, daß

$$\hat{\Psi}^n(K_0) \simeq \hat{\Psi}^n(K_1) \simeq \hat{\Psi}^n(K_2) \simeq \ldots \tag{1}$$

ist, läßt sich leicht zeigen, daß dann

$$\Psi^n(K_0) \simeq \hat{\Psi}^n(K_0) \tag{2}$$

gilt. Sind nämlich $\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots$ Elemente der Gruppen $\hat{\Psi}^n(K_0)$, $\hat{\Psi}^n(K_1)$, $\hat{\Psi}^n(K_2), \ldots$, die in natürlicher Weise durch den Unterteilungsprozeß von K_0 einander zugeordnet sind — eine $\hat{\psi}_i$ repräsentierende Nullsphärode entsteht durch Unterteilung einer $\hat{\psi}_{i-1}$ repräsentierenden Nullsphärode ($i = 1, 2, \ldots$) — so kann man sie wegen (1) direkt identifizieren und diese Identifizierung auf das Element ψ von $\Psi^n(K_0)$ fortsetzen, das der Limes von $\hat{\psi}_0$, $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2, \ldots$ ist. Die Identifizierung vermittelt den Isomorphismus (2).

Andererseits folgt aus der Unterteilungsinvarianz von $\hat{\Psi}^n(K_0)$ die Unabhängigkeit der kombinatorischen Nulsphärodengruppe von der Simplizialzerlegung von K. Man kann somit von *der* kombinatorischen, und ebenso von *der* stetigen Nullsphärodengruppe von $\overline{K}$ sprechen. Dann folgt aus (2)

Satz X: *Die stetige ist der kombinatorischen Nullsphärodengruppe isomorph.*

7.3. Es sei — indem wir zur alten Bezeichnung zurückkehren — $\Psi^n(K)$ die kombinatorische Nullsphärodengruppe einer (festen) Simplizialzerlegung K von $\overline{K}$. Es soll zunächst die Unterteilungsinvarianz von $\Psi^n(K)$ bewiesen werden. K^{n+1} sei der $(n+1)$-dimensionale Gerüstkomplex von K, K_1^{n+1} eine simpliziale Unterteilung von K^{n+1}. Ist $\varkappa$ die identische simpliziale Abbildung von K^{n+1} auf sich, so heißt die simpliziale Abbildung μ von K_1^{n+1} auf K^{n+1} eine Modifikation von $\varkappa$, wenn jeder Eckpunkt P von K_1^{n+1} bei μ in einen Eckpunkt desjenigen Simplexes kleinster Dimension von K^{n+1} übergeht, auf dem er liegt. (cf. [1], p. 316). Wir werden μ (als Modifikation der Identität) einfach Modifikation nennen. (Sie ist eine spezielle stetige Verzerrung der Unterteilung auf den untergeteilten Komplex.) Der Satz von der Unterteilungsinvarianz von $\Psi^n(K)$ läßt sich dann zurückführen auf den

Satz XI: *Die Gruppe der kombinatorischen Nullsphäroden $\Psi^n(K)$ ist modifikationsinvariant.*

Beweis: Es genügt offenbar, μ innerhalb eines untergeteilten Simplexes von K^{n+1} zu betrachten. Ist $\Psi^n(K_1^{n+1})$ die Nullsphärodengruppe von K_1^{n+1}, so ist also zu zeigen, daß durch μ eine isomorphe Abbildung m von $\Psi^n(K_1^{n+1})$ auf $\Psi^n(\mu(K_1^{n+1})) = \Psi^n(K^{n+1})$ bewirkt wird.

Da Nullsphäroden auf K auch solche auf K_1 sind, und auf K ν-homotope Nullsphäroden von K a fortiori ν-homotop auf K_1 sind, kann einem Element von $\Psi^n(K^{n+1})$ stets ein Element von $\Psi^n(K_1^{n+1})$ eindeutig zugeordnet werden. Die Zuordnung wird durch $\mu(K^{n+1}) = K^{n+1}$ (Identität) gegeben.

Es bleibt zu beweisen:

Behauptung I): Einer Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}_1$ von K_1 wird durch μ eindeutig eine Nullsphärode ${}^0\mathfrak{S}$ von K zugeordnet.

Behauptung II): Sind zwei Nullsphäroden von K, ${}^0\mathfrak{z}_I$, ${}^0\mathfrak{z}_{II}$, ν-homotop in K_1, so läßt sich durch μ der Deformationsprozeß auf K_1 in einen solchen auf K überführen; ${}^0\mathfrak{z}_I$ und ${}^0\mathfrak{z}_{II}$ sind dann auch auf K ν-homotop.

Behauptung I) folgt aus der Tatsache, daß wenn ein n-dimensionales Simplex X von K_1 in der Nullsphärode ${}^0\mathfrak{z}_1$ mit dem Grade Null auftritt, auch $\mu(X)$ entweder mit dem Grade Null auftritt (wenn $\mu(X)$ n-dimensional ist), oder von niedrigerer Dimension als n ist, also die Nullsphärodeneigenschaft von ${}^0\mathfrak{z}$ nicht stört.

Behauptung II) ergibt sich folgendermaßen: Daß ${}^0\mathfrak{z}_I$ und ${}^0\mathfrak{z}_{II}$ in K_1^{n+1} einander ν-homotop sind, heißt, daß es endlich viele Nullsphäroden ${}^0\mathfrak{z}_1$, ${}_{(1)}^{0}\mathfrak{z}_2, \ldots, {}_{(1)}^{0}\mathfrak{z}_{k-1}$, ${}^0\mathfrak{z}_k$ auf K_1^{n+1} gibt derart, daß jede aus der vorhergehenden durch Anwendung einer elementaren simplizialen ν-Deformation (cf. 2.5) auf K_1^{n+1} hervorgeht, und daß ${}^0\mathfrak{z}_1 = {}^0\mathfrak{z}_I$ und ${}^0\mathfrak{z}_k = {}^0\mathfrak{z}_{II}$ ist. Bei einer elementaren simplizialen ν-Deformation tritt (im nicht-trivialen Falle (cf. 2.5)) ein $(n+1)$-dimensionales Simplex von K_1^{n+1} auf, das vom deformierten Teil der Nullsphärode berandet wird (cf. 2.5). Dieses wird durch μ auf ein höchstens $(n+1)$-dimensionales Simplex von K^{n+1} abgebildet, wobei gemäss Behauptung I) die Gradbedingung für den berandenden Teil der Nullsphärode erhalten bleibt. μ führt daher eine elementare simpliziale ν-Deformation auf K_1^{n+1} in eine solche auf K^{n+1} über, die eventuell trivial (im Sinne von 2.5) sein kann. Deswegen und wegen Behauptung I) entsprechen bei μ den Nullsphäroden ${}^0\mathfrak{z}_1$, ${}_{(1)}^{0}\mathfrak{z}_2, \ldots, {}_{(1)}^{0}\mathfrak{z}_{k-1}$, ${}^0\mathfrak{z}_k$ Nullsphäroden ${}^0\mathfrak{z}_1$, ${}^0\mathfrak{z}_2, \ldots$, ${}^0\mathfrak{z}_{k-1}$, ${}^0\mathfrak{z}_k$ auf K^n, von denen jede aus der vorhergehenden durch Ausübung einer elementaren simplizialen ν-Deformation auf K^{n+1} entsteht. Es ist daher Behauptung II) und damit Satz XI bewiesen.

7.4. Wir kommen zu

Satz XII: *Die Nullsphärodengruppen eines Polyeders sind topologische Invarianten des Polyeders.*

Wir führen den Beweis dieses Satzes hier nicht durch, sondern bemerken, daß sich dieser Beweis mit Hilfe der analogen Schritte ausführen läßt, die beim Beweis der topologischen Invarianz der Bettischen Gruppen vorgenommen werden, wie er in [1], Kapitel VIII, § 4, dargestellt ist. Dieser Beweis erfährt sogar in seinem Hauptteil, dem Beweis des „Produktsatzes" (cf. [1], loc. cit.) eine Vereinfachung, da hier die Unterteilungsinvarianz die Benutzung des „allgemeinen Modifikationssatzes" entbehrlich macht. Um diesen Beweis hier anwenden zu können, ist zu zeigen, daß bei einer simplizialen Abbildung von K die Gruppe $\Psi^n(K)$ homomorph abgebildet wird. Dies folgt aber daraus, daß 1) wegen der Erhaltung der Gradeigenschaft der Nullsphäroden eine Nullsphärode bei simplizialer Abbildung wieder in eine solche übergeht, und 2) eine elementare simpliziale ν-Deformation (cf. 2.5) durch eine simpliziale Abbildung wieder in eine solche (eventuell triviale) übergeführt wird. Für den Spezialfall, daß die simpliziale Abbildung eine Modifikation ist, wurde dies beim Beweis von Behauptung I) und II) oben (7.3) gezeigt. Für (allgemeine) simpliziale Abbildungen läßt es sich auf die gleiche Art zeigen.

LITERATUR.

P. Alexandroff und H. Hopf.

[1] Topologie I (Berlin 1935).

S. Eilenberg

[2] On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fundamenta Math. **32** (1939), 167—175.

H. Hopf

[3] Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comm. Math. Helv. **14** (1942), 257—309. — Nachtrag hierzu, ibidem **15** (1942), 27—32.

[4] Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comm. Math. Helv. **17** (1944), 39—79.

[5] Beiträge zur Homotopietheorie, Comm. Math. Helv. **17** (1944), 307—326.

W. Hurewicz

[6] Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Akad. Amsterdam: (I) **38** (1935), 112—119; (II) **38** (1935), 521—528; (III) **39** (1936), 117—126; (IV) **39** (1936), 215—224.

(Oblatum 26-2-53).