COMPOSITIO MATHEMATICA

J. TITS

Sur les groupes triplement transitifs continus ; généralisation d'un théorème de Kerékjàrtó

Compositio Mathematica, tome 9 (1951), p. 85-96

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__85_0>

Sur les groupes triplement transitifs continus; généralisation d'un théorème de Kerékjártó

par

J. Tits

Bruxelles [1])

§ 1. Introduction.

En 1940, Kerékjártó [1], [2] a démontré que les groupes homographiques d'une variable réelle et d'une variable complexe sont, à un homéomorphisme près, les seuls groupes triplement transitifs [2]) continus de transformations topologiques (biunivoques et bicontinues) respectivement de la circonférence et de la sphère réelles en elles-mêmes. Ayant par ailleurs (Tits [1]) étudié les propriétés générales (indépendantes de l'ensemble, fini ou infini, muni ou non d'une structure topologique, sur lequel opère le groupe considéré), des groupes triplement transitifs et de leurs cas particuliers projectifs, je suis conduit à considérer ce théorème de Kerékjártó sous un angle nouveau. J'avais en effet donné, dans cette étude, divers critères caractérisant les groupes projectifs dans l'ensemble des groupes triplement transitifs; appliquant l'un d'eux aux cas considérés par Kerékjártó, je montre, dans la première partie (§ 3) de la présente note, que tout groupe triplement transitif continu de transformations topologiques de la circonférence ou de la sphère réelle en elle-même est projectif. Cela étant, le théorème de Kerékjártó se ramène au suivant:

> les corps réels et complexes sont, à un isomorphisme près, les seuls corps topologiques homéomorphes respectivement à la droite et au plan euclidien réel (sans point à l'infini),

qui est une conséquence très particulière du théorème de Pontrjagin sur les corps topologiques (Pontrjagin [1], [2]).

Dans son article [2], déjà cité, relatif à la sphère réelle, Kerék-

---

[1]) Chargé de recherches du F.N.R.S., Bruxelles.

[2]) Nous dirons (voir § 2) qu'un groupe de transformations (biunivoques et réciproques) d'un ensemble est triplement transitif (ou plus généralement n-uplement transitif) s'il existe une et une seule transformation du groupe transformant trois (ou n) points donnés distincts quelconques de l'ensemble respectivement en trois (ou n) points donnés distincts quelconques de l'ensemble.

jártó a démontré que celle-ci est la seule surface possédant un groupe triplement transitif continu de transformations topologiques en elle-même. Dans la seconde partie (§ 4) je montre, de façon plus générale, que la circonférence et la sphère réelles sont les seules variétés admettant un tel groupe. Développant la méthode utilisée au § 3, je ramène cette propriété à un corollaire du théorème de Pontrjagin, en prouvant que tout groupe triplement transitif continu de transformations topologiques d'une variété en elle-même est projectif; j'utilise au cours de cette démonstration, certains résultats obtenus par H. Freudenthal dans sa „théorie des bouts" (Freudenthal [1], [2]).

Dans la troisième partie (§ 5), je montre que certaines hypothèses faites aux §§ 3 et 4 peuvent être supprimées, ou remplacées par des hypothèses plus faibles, et, en particulier, que les résultats du § 4 restent valables pour certains espaces topologiques qui ne sont pas des variétés (les polyèdres par exemple).

Kerékjártó s'est aussi intéressé aux groupes n-uplement transitifs ($n > 3$); il a montré que la droite euclidienne et la circonférence réelle ne possèdent pas, pour $n > 3$, de groupe n-uplement transitif de transformations topologiques. Cette propriété s'étend à toutes les variétés et plus généralement, à tous les espaces topologiques possédant une infinité de points; en effet pour $n > 3$, les groupes n-uplement transitifs sont des groupes finis (c'est-à-dire, opérant sur un nombre fini de points); cela résulte de la description que j'ai donnée par ailleurs (Tits [2]), de tous les groupes n-uplement transitifs existants ($n > 3$).

J'ai eu, à l'occasion de l'élaboration de ce travail, de fréquentes conversations avec M. le Professeur H. Hopf; les précieuses indications qu'il m'a données ont été un élément essentiel dans sa réalisation.

§ 2. Préliminaires.

A. Les groupes triplement transitifs: propriétés générales.

Cette première partie du § 1 est consacrée à divers rappels de notions et de propriétés qui nous seront utiles dans la suite; nous nous bornerons à donner des énoncés [3]).

Considérons un groupe de transformations [4]) d'un ensemble donné E; nous dirons que ce groupe est triplement transitif s'il

[3]) Pour les démonstrations, voir Tits [1] et [2].

[4]) Dans le cours de cet article, nous réserverons le terme „transformation" pour désigner une application biunivoque d'un ensemble sur lui-même.

contient une et une seule transformation transformant trois points donnés distincts de E respectivement en trois points donnés distincts de E, et cela, quels que soient les triples considérés. Il en est ainsi en particulier de groupe de toutes les homographies non dégénérées:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

où a, b, c, d sont des éléments d'un corps commutatif donné quelconque K; l'ensemble E, dans lequel varie le point x, étant le corps K complété par l'adjonction d'un élément ∞.

Nous dirons qu'un groupe triplement transitif donné est *projectif* s'il peut être obtenu comme groupe de toutes les homographies sur un corps (commutatif) convenable que nous appellerons alors le *corps associé* au groupe projectif donné; ce corps est bien déterminé à un isomorphisme près.

Il est à noter que la notion de groupe projectif est une notion primitive dont l'introduction ne nécessite pas la connaissance préalable des corps commutatifs et susceptible de recevoir une définition axiomatique indépendante de ceux-ci [5]), ainsi qu'il résulte, en particulier, des deux théorèmes suivants:

THEOREME I: *Pour qu'une groupe triplement transitif soit projectif il faut et il suffit que toute transformation du groupe qui possède un couple en involution* (*c'est-à-dire qui échange deux points donnés distincts*) *soit une involution* (*c'est-à-dire une transformation cyclique d'ordre* 2) [6]).

THEOREME II: *Pour qu'un groupe triplement transitif soit projectif, il faut et il suffit que les transformations du groupe qui conservent deux points donnés distincts soient permutables* [7]).

Le théorème I jouera un rôle essentiel dans la suite.

Nous terminerons en énoncant quelques propriétés générales des groupes triplement transitifs.

Soient G un groupe triplement transitif et E l'ensemble sur lequel il opère.

Etant donnés trois points distincts appartenant à E, la transformation du groupe G qui échange deux de ces points et qui

---

[5]) Voir P. LIBOIS [1] et J. TITS [1].

[6]) Cette propriété est mieux connue, en géométrie projective classique, sous la forme suivante: „deux couples déterminent une involution".

[7]) Cette propriété est mieux connue, en géométrie projective classique, sous la forme suivante: „les couples de points correspondants d'une projectivité hyperbolique forment avec les points unis de cette projectivité un rapport anharmonique constant".

conserve le troisième est une involution (puisque son carré possède trois éléments unis). Considérons alors toutes les transformations de G qui peuvent être obtenues de cette façon, c'est-à-dire toutes les involutions (non identiques) de G qui possèdent au moins un point uni; ces involutions possèdent toutes un second point uni, ou bien aucune d'elles n'en possède; suivant le cas, nous dirons que le groupe G est de *première* ou de *seconde espèce*. Pour ce qui concerne les groupes projectifs, la distinction entre groupes de première et de seconde espèce correspond, en termes de corps associé, à la distinction entre corps de caractéristique différente de 2, et corps de caractéristique 2. Si le groupe G est de première espèce, on a intérêt à ne pas considérer la transformation identique comme une involution; on peut alors énoncer la proposition suivante:

Etant donnés arbitrairement deux points distincts u et v, il existe une et une seule involution appartenant à G et ayant ces points pour points unis; de plus, si u, v, u', v' sont quatre points distincts deux à deux et si l'involution d'éléments unis u, v échange les points u' et v', l'involution d'éléments unis u', v' échange les points u et v.

Choisissons arbitrairement dans l'ensemble E trois points distincts que nous désignerons respectivement par 0, 1 et ∞. Le groupe des transformations de G qui conservent les points 0 et ∞ opèrent de façon transitive sur les points restants de l'ensemble E; ceux-ci peuvent donc être considérés comme les éléments d'un groupe abstrait, le produit de deux d'entre eux, soient a et b, étant défini comme le transformé du point b par la transformation de G qui conserve 0 et ∞ et qui transforme 1 en a. Ce groupe abstrait ne dépend pas, à un isomorphisme près, des points 0, 1 et ∞ choisis; nous l'appellerons le *groupe multiplicatif associé* au groupe triplement transitif G. En vertu du théorème II, ce groupe est abélien si et seulement si le groupe G est projectif; dans ce cas, il n'est autre que le groupe multiplicatif des éléments non nuls du corps associé à G.

De façon plus générale, il est possible d'associer à tout groupe triplement transitif, un formalisme qui s'identifie avec le corps associé lorsque le groupe considéré est projectif; l'usage de ce formalisme permet de faire l'étude analytique des groupes triplement transitifs.

B. *Les groupes triplement transitifs continus.*

Considérons un groupe triplement transitif G opérant sur un ensemble E que nous supposerons dorénavant muni d'une structure topologique.

Les triples de points de E peuvent être représentés par les points d'un espace $E \times E \times E$, produit topologique de trois espaces homéomorphes à E; dans cet espace, les images des triples de points distincts forment un sous-espace que nous désignerons par $\mathcal{E}$. Choisissons arbitrairement dans l'ensemble E trois points distincts, soient a, b, c, et faisons correspondre à toute transformation T de G, le point image dans $\mathcal{E}$ du triple Ta, Tb, Tc, transformé par T du triple a, b, c; nous définissons de cette façon une application biunivoque $\mathcal{A}$ de l'ensemble des transformations de G (c'est-à-dire du groupe abstrait G) sur l'espace $\mathcal{E}$. Nous sommes ainsi conduits à munir le groupe (abstrait) G d'une structure topologique, image de la structure topologique de $\mathcal{E}$ par l'application $\mathcal{A}^{-1}$. Nous dirons que le groupe G est un *groupe triplement transitif continu* si

a) cette structure topologique ne dépend pas des points a, b, c choisis,

b) muni de cette topologie, le groupe (abstrait) G est un groupe topologique (c'est-à-dire que les opérations du groupe sont continues)

c) le transformé Tx du point x (de E) par la transformation T (de G) est une fonction continue du couple T, x.

Il importe d'ailleurs de constater que les conditions a) et c) sont des conséquences presque immédiates de la condition b) qui suffit donc à caractériser les groupes triplement transitifs continus. Réciproquement, on peut montrer que si l'espace E est localement compact et vérifie le second axiome de dénombrabilité, les conditions a) et b) sont conséquences de la condition c) [8]).

THEOREME III: *Soient G un groupe triplement transitif continu opérant sur un espace topologique E, $x\ y\ z$ et $x'\ y'\ z'$ deux triples variables de points distincts appartenant à E, et t un point quelconque de E. Le point t' transformé du point t par la transformation de G qui transforme $x\ y\ z$ respectivement en $x'\ y'\ z'$, est fonction continue de x, y, z, x', y', z', t.*

DÉMONSTRATION: Soient a, b, c, trois points fixes de E, distincts 2 à 2. La transformation de G qui transforme les points $a\ b\ c$, respectivement en les points $x\ y\ z$ est par définition une fonction

---

[8]) Pour définir ses groupes triplement transitifs continus, KERÉKJÁRTÓ se sert d'une condition qui est dans l'essentiel notre condition c). Sa condition est équivalente à la nôtre car les espaces qu'il envisage sont des variétés (donc localement compacts).

continue de $x\,y\,z$. De même, la transformation T' de G qui transforme $a\,b\,c$ respectivement en $x'\,y'\,z'$ est fonction continue de $x'\,y'\,z'$. Cela étant, notre proposition est une conséquence immédiate de la relation $t' = T'T^{-1}t$.

Nous dirons avec Kerékjártó que deux groupes triplement transitifs G et G', opérant respectivement sur des espaces topologiques E et E' sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de E sur E' transformant G en G'.

Aux groupes projectifs continus peuvent être associés biunivoquement, d'une façon évidente, les corps topologiques. En particulier, il résulte du théorème de Pontrjagin relatif aux corps topologiques que si l'espace sur lequel opère un groupe projectif continu donné G est localement compact, connexe, et vérifie le 2e axiome de dénombrabilité, le groupe est homéomorphe au groupe homographique d'une variable réelle ou complexe.

§ 3. Première partie.

THEOREME IV: *Tout groupe triplement transitif continu opérant sur la circonférence réelle est projectif.*

DÉMONSTRATION: Soient G le groupe considéré, et E la circonférence sur laquelle il opère.

Remarquons tout d'abord que le groupe G est de première espèce (cf. § 2A); en effet, $a\,b\,c$ étant trois points de E, tous distincts, l'involution de G qui conserve b et qui échange a et c change l'orientation de la circonférence E (puisqu'elle transforme le triple $a\,b\,c$ en le triple $c\,b\,a$), et possède par conséquent un second point uni.

Considérons à présent une transformation T appartenant à G et possédant un couple pq en involution. En vertu du théorème I, notre proposition sera démontrée si nous arrivons à prouver que cette transformation est involutive. Si elle change l'orientation de E, il en est bien ainsi car elle possède alors deux éléments unis. Supposons donc qu'elle conserve l'orientation de E, et désignons par I l'involution d'éléments unis p, q, appartenant à G. Cette involution est unique (cf. § 2A); par conséquent elle est transformée en elle-même par la transformation T, et on a

$$T^{-1} I\, T = I$$

d'où

$$I\, T = T I.$$

Mais la transformation TI permute les points p, q, et change l'orientation de E; c'est donc une involution. Il en résulte que

$$T I = (T I)^{-1} = I\, T^{-1}$$

donc

$$T = T^{-1}$$

et la transformation T est une involution. c.q.f.d.

THEOREME V: *Tout groupe triplement transitif continu opérant sur la sphère réelle est projectif.*

DÉMONSTRATION: Soient G le groupe considéré et E la sphère sur laquelle il opère. L'espace des triples de points distincts appartenant à E est connexe (puisqu'on peut passer par continuité d'un triple quelconque à un autre); il en est de même, par définition (cf. § 2B) du groupe (abstrait) G. Il en résulte que les transformations de G conservent toutes l'orientation de la sphère et possèdent, par conséquent, au moins un point uni. En particulier, si une transformation appartenant à G possède un couple en involution, elle est involutive; et le théorème est démontré (en vertu du théorème I).

REMARQUE. Le raisonnement précédent s'applique sans modification à toute variété à plus d'une dimension, dont la caractéristique eulérienne est différente de 0; par conséquent, tout groupe triplement transitif continu opérant sur une telle variété est projectif.

CONCLUSIONS. En vertu du théorème de Pontrjagin (voir 2B) les résultats précédents peuvent être mis sous la forme plus précise que voici:

Tout groupe triplement transitif continu opérant sur la circonférence ou sur la sphère réelle est homéomorphe au groupe homographique d'une variable réelle ou complexe.

La sphère est la seule variété à plus d'une dimension de caractéristique eulérienne non nulle sur laquelle opère un groupe triplement transitif continu.

§ 4. Deuxième partie.

THEOREME VI: *Tout groupe triplement transitif continu opérant sur une variété est projectif.*

DÉMONSTRATION: La démonstration de ce théorème étant assez longue, nous en mettrons l'exposé sous la forme d'une suite de propositions auxiliaires qui nous conduiront finalement au résultat cherché.

Soient G le groupe considéré, E la variété sur laquelle il opère et d la dimension de cette variéte.

La variété E est connexe. En effet, les transformations de G qui conservent un point a donné opèrent transitivement sur les points restants de E et, d'autre part, conservent la composante connexe de a; cela n'est possible que si cette composante est la variété E toute entière.

La variété E est compacte. Si $d = 1$, la proposition est évidente; en effet, la droite euclidienne réelle (sans point à l'infini) qui est, à un homéomorphisme près, la seule variété unidimensionnelle connexe et non compacte, n'admet pas de groupe triplement transitif continu car toute transformation topologique de la droite transformant deux points donnés a, b, en deux points donnés a', b', transforme l'intérieur du segment ab en l'intérieur du segment $a'b'$.

Supposons donc que la dimension d soit supérieure à 1 et désignons par 0 et ∞ deux points distincts, choisis arbitrairement dans E. Nous avons vu (cf. § 2A) que les points de la variété $E - 0 - \infty$ (nous désignons ainsi la variété E privée des points 0 et ∞) peuvent être considérés comme les éléments d'un groupe abstrait, le groupe multiplicatif associé au groupe G, qui est ici un groupe topologique. Mais H. Freudenthal a montré qu'un groupe topologique satisfaisant à certaines conditions possède au maximum deux bouts [9]). Les conditions d'application de ce théorème étant trivialement vérifiées dans le cas qui nous occupe, la variété E possède exactement deux bouts qui sont les points 0 et ∞; par conséquent, la variété E est compacte (cela résulte d'une propriété fondamentale des bouts d'un espace topologique, propriété dont le contenu intuitif essentiel est le suivant: l'espace topologique obtenu en complétant un espace topologique donné par adjonction de ses bouts est compact [10])).

Soient 0, ∞ et 1 trois points fixes distincts choisis arbitrairement dans la variété E. Nous désignerons par T l'application de la variété $E - 0 - \infty$ dans elle-même qui, à tout point x, fait correspondre le transformé du point 1 par l'involution de G qui échange 0 et ∞ et qui conserve x; cette application est continue. Nous désignerons encore par $E_1 = T(E - 0 - \infty)$, l'image de la variété $E - 0 - \infty$ par l'application T (c'est-à-dire, le lieu des

[9]) Rappelons la définition donnée par H. Hopf [1] des bouts d'une variété E: une suite $x_1 \ldots x_i \ldots$ divergente dans E converge vers un bout de E s'il existe pour tout i un continu C_i joignant x_i et x_{i+1}, tel que la suite des C_i diverge (c'est-à-dire, tel que tout sous ensemble compact de E ait une intersection vide avec presque tous les C_i). Deux suites $x_1 \ldots x_i \ldots$, $y_1 \ldots y_i \ldots$ remplissant ces conditions convergent vers le même bout s'il existe pour tout i un continu C_i joignant x_i et y_i, tel que la suite des C_i diverge.

On trouvera des définitions plus générales dans les articles de H. Freudenthal [1], [2] et H. Hopf [1], [2] relatifs à cette question.

[10]) Voir H. Freudenthal [1], [2] et H. Hopf [1].

points y tels que la transformation de G qui échange 0 et ∞ et qui transforme 1 en y possède un point uni); il peut arriver que cette image soit confondue avec la variété $E - 0 - \infty$ elle-même.

Tout point p appartenant à $E - 0 - \infty$ possède un voisinage V tel que l'application $V \overset{T}{\rightarrow} TV$ soit biunivoque.

Si le groupe G est de deuxième espèce, la proposition est évidente puisque dans ce cas, l'application T (de $E - 0 - \infty$ sur E_1) considérée dans son ensemble est biunivoque.

Si le groupe est de première espèce, l'image réciproque d'un point q de E_1 par l'application T se compose de deux points distincts, les deux points unis de l'involution appartenant à G qui échange 0 et ∞ et qui transforme l en q; en vertu d'une propriété indiquée au § 2A, ces deux points se correspondent dans l'involution I de G qui conserve 0 et ∞. Pour qu'un voisinage V de p satisfasse à la condition énoncée, il est donc nécessaire et suffisant qu'il n'ait aucun point commun avec son transformé IV par cette involution. L'existence d'un tel voisinage résulte immédiatement du fait que l'involution I est un homéomorphisme.

Si le voisinage V défini plus haut est fermé (ce que l'on peut toujours supposer) l'application $V \overset{T}{\rightarrow} TV$ est un homéomorphisme.

$V \overset{T}{\rightarrow} TV$ étant une application continue, il nous suffit de montrer qu'il en est de même de son inverse $TV \overset{T}{\rightarrow} V$.

Soient $a_1 \ldots a_i \ldots$ une suite de points appartenant à l'ensemble TV, convergente dans cet ensemble, a le point limite de cette suite, b_i et b les images réciproques dans V des points a_i et a par l'application T. La suite $b_1 \ldots b_i \ldots$ possède au moins un point d'accumulation (puisque la variété E est compacte); mais tous ses points d'accumulation appartiennent à V (puisque V est fermé) et ont pour image le point a (puisque l'application T est continue); elle en possède donc un et un seul qui n'est autre que le point b. En d'autres termes, la suite $b_1 \ldots b_i \ldots$ converge vers b, ce qui démontre la proposition.

Considéré comme sous-ensemble de la variété $E - 0 - \infty$, l'ensemble E_1 est à la fois ouvert et fermé.

En vertu de la proposition précédente, tout point de l'ensemble E_1 possède dans cet ensemble un voisinage homéomorphe à une boule euclidienne à d dimensions; par conséquent E_1 n'a que des points intérieurs (propriété d'invariance des domaines, théorème de Brouwer) et est un ensemble ouvert.

Supposons que l'ensemble E_1 ne soit pas fermé dans $E - 0 - \infty$ et désignons par $a_1 \ldots a_i \ldots$ une suite de points de E_1 convergeant dans $E - 0 - \infty$ vers un point a extérieur à E_1. L'image réciproque de l'ensemble des points a_i par l'application T possède au moins un point d'accumulation dans E; on peut donc en extraire une suite convergente $b_1 \ldots b_i \ldots$ Soient b le point limite de cette suite, c_i l'image de b_i par T, et T_i la transformation de G qui échange 0 et ∞ et qui transforme 1 en c_i. La suite $c_1 \ldots c_i \ldots$ est, à l'ordre près, une sous-suite de la suite $a_1 \ldots a_i \ldots$; donc elle converge vers a. Par conséquent, si on désigne par T la transformation de G qui échange 0 et ∞ et qui transforme 1 en a, on a

$$\lim_{i \to \infty} T_i = T$$

Cela étant, la relation $T_i b_i = b_i$ devient, lorsqu'on fait tendre i vers l'infini,

$$Tb = b.$$

Par conséquent, le point a appartient à l'espace E, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le groupe G est projectif.

Supposons tout d'abord que la variété $E - 0 - \infty$ soit connexe. L'ensemble E_1 est alors, en vertu de la proposition précédente, identique à cette variété toute entière. Par conséquent, toute transformation de G échangeant les points 0 et ∞ possède au moins un point uni et est donc une involution; le choix des points 0 et ∞ étant arbitraire, notre proposition résulte du théorème I.

Si, par contre, la variété $E - 0 - \infty$ n'est pas connexe, la variété E est homéomorphe à la circonférence réelle et notre proposition résulte du théorème IV.

Le théorème VI est ainsi démontré.

Conclusion. En vertu du théorème de Pontrjagin, le résultat précédent peut être mis sous la forme plus précise que voici:

Les seuls groupes triplement transitifs continus opérant sur des variétés sont, à un homéomorphisme près, les groupes homographiques d'une variable réelle et d'une variable complexe.

§ 5. Troisième partie.

A. Remarque concernant les hypothèses faites sur l'espace E.

Si l'on reprend point par point la démonstration du théorème VI, on voit que les propriétés topologiques de la variété E dont il est fait usage sont les suivantes:

1) E est un espace topologique normal, vérifiant le second axiome de dénombrabilité.

2) L'espace E n'est pas totalement discontinu.

3) L'espace E est localement compact.

4) Une représentation topologique d'un sous-ensemble de E sur un autre, qui lui est homéomorphe, fait correspondre à tout point intérieur au premier ensemble, un point intérieur au second (invariance des domaines).

Il en résulte que le théorème VI, ainsi d'ailleurs que la conclusion que nous en avons tirée, reste valable pour tout espace topologique remplissant les conditions 1) et 4).

Si l'on tient compte du fait qu'un espace topologique sur lequel opère un groupe triplement transitif continu est nécessairement homogène, on peut encore affaiblir certaines hypothèses faites; ainsi, les conditions 3) et 4) peuvent être remplacées par les suivantes:

3′) L'espace E contient un sous-ensemble ouvert à fermeture compacte.

4′) Il existe, dans l'espace E, au moins un point p tel que si deux sous-ensembles A et B de E contiennent tous les deux p, si p est intérieur à A, et s'il existe une représentation topologique de A sur B conservant p, p est intérieur à B.

Notons que les conditions 1) 2) 3) et 4′) sont remplies en particulier lorsque l'espace E est un polyèdre.

B. Remarque concernant les hypothèses faites sur le groupe C.

L'hypothèse de continuité que nous avons toujours faite pour le groupe G peut, dans certains cas, être remplacée par une hypothèse moins restrictive. Ainsi, la démonstration du théorème IV est valable dès que les transformations du groupe G sont des transformations topologiques (c'est-à-dire biunivoques et bicontinues); nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Tout groupe triplement transitif de transformations topologiques de la circonférence réelle en elle-même est projectif; d'où l'on peut aisément déduire que *le groupe homographique d'une variable réelle est, à un homéomorphisme près, le seul groupe triplement transitif de transformations topologiques de la circonférence réelle en elle-même.*

Le théorème avait été énoncé sous cette forme générale par Kerékjártó [1], [2].

En faisant, sur le groupe G, des hypothèses plus fortes que la simple continuité (des hypothèses de continuité uniforme par exemple), on peut obtenir des résultats concernant des espaces plus généraux que ceux qui ont été envisagés jusqu'à présent (par exemple des espaces qui ne sont pas localement compacts).

BIBLIOGRAPHIE.

H. Freudenthal

[1] Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Zeitschrift, vol. 33 (1931).

[2] Neuaufbau der Endentheorie. Ann. of Math., vol. 43(1942).

L. Pontrjagin

[1] Über stetige Körper. Ann. of Math., vol. 33 (1932).

[2] Topological groups; Princeton 1939.

B. de Kerékjártó

[1] Sur les groupes transitifs de la droite. Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math., vol. 10 (1941).

[2] Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. Acta Math., vol. 74 (1941).

H. Hopf

[1] Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. Comment. Math. Helvetici, vol. 16 (1943/44).

P. Libois

[1] Synthèse des axiomatiques de l'algèbre et des géométries projective, affine et affine centrale. Assoc. Fr. Avancem. Sci. C. H. 1945.

J. Tits

[1] Généralisations des groupes projectifs. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Févr., mars, juin, août 1949.

[2] Généralisations des groupes projectifs basées sur la notion de transitivité. Thèse de doctorat, Bruxelles, Mai 1950.

(Oblatum 5-9-50).